

ENCYKLOPÆDIE

DER

NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF DR. W. FÖRSTER, PROF. DR. A. KENNGOTT,
PROF. DR A. LADENBURG, DR. ANT. REICHENOW,
PROF. DR. SCHENK, GEH. SCHULRATH DR. SCHLÖMILCH,
PROF. DR. W. VALENTINER, PROF. DR. A. WINKELMANN,
PROF. DR. G. C. WITTSTEIN.

III. ABTHEILUNG.

I. THEIL:

HANDBUCH DER PHYSIK

HERAUSGEGEBEN

VON

PROFESSOR DR. A. WINKELMANN.

BRESLAU,
VERLAG VON EDUARD TREWENDT.
1891.

HANDBUCH

DER

PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG

VON

PROF. DR. F. AUERBACH-JENA, DR. E. BRODHUN-BERLIN, PROF. DR. F. BRAUN-TÜBINGEN, DR. S. CZAPSKI-JENA, PROF. DR. K. EXNER-WIEN, PROF. DR. W. FEUSSNER-MARBURG, DR. L. GRÄTZ-MÜNCHEN, PROF. DR. H. KAYSER-HANNOVER, PROF. DR. F. MELDE-MARBURG, PROF. DR. A. OBERBECK-GREIFSWALD, PROF. DR. J. PERNET-ZÜRICH, PROF. DR. FR. STENGER-DRESDEN, DR. K. WAITZ-TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN

VON

Adc.
DR. A. WINKELMANN

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT JENA.

MIT 297 ABBILDUNGEN.

ERSTER BAND.

BRESLAU,

VERLAG VON EDUARD TREWENDT.

1891

Vorwort.

Das vorliegende Buch bildet den I. Band des Handbuches der Physik, welch' letzteres als ein Theil der Encyklopädie der Naturwissenschaften erscheint. Die ursprünglich für das Werk geplante lexikologische Darstellung, welche man hauptsächlich aus Rücksicht auf die Leichtigkeit, mit der sich die einzelnen Gegenstände auffinden lassen, zu wählen pflegt, entbehrt für die Physik grösstentheils dieses Vortheils, wenn man nicht sehr zahlreiche Wiederholungen in das Werk einführen will. Ausserdem beansprucht eine solche Darstellung, soll sie anders ihren Zweck erreichen, die Aufnahme einer übergrossen Zahl von Artikeln resp. Stichworten; dieser Umstand ist aber nothwendig mit einem Auseinanderreissen unmittelbar mit einander verwandter Erscheinungen verbunden, eine Thatsache, von deren Richtigkeit man sich durch einen Blick in das Sachregister eines jeden physikalischen Lehrbuches leicht überzeugen kann. Es erschien daher gegenüber diesen Nachtheilen zweckmässig, statt der lexikologischen Anordnung eine dem Inhalte angepasste zu wählen; dem entsprechend ist in dem vorliegenden Bande die allgemeine und specielle Mechanik sowie die Akustik behandelt.

Da die Bearbeitung des ganzen Gebietes nicht von einer Hand erfolgt, sich vielmehr eine grössere Anzahl Mitarbeiter für die Vollendung des Ganzen verbunden hat, so ist von vornherein zu erwarten, dass eine gewisse Ungleichheit in der Behandlung der einzelnen Artikel zu Tage tritt. Gegenüber diesem nicht zu vermeidenden Mangel gewährt aber gerade die Vielheit der Mitarbeiter, wenn die Stoffvertheilung eine zweckmässige ist, einen Vortheil von durchgreifender Bedeutung, nämlich die Möglichkeit, dass jedes Capitel von einem Manne bearbeitet wird, der selbständige Untersuchungen in dem betreffenden Gebiete ausgeführt hat. Man hat sich bemüht, diesen Gedanken so weit wie möglich zu verwirklichen.

Der Zweck des Werkes ist, ein Handbuch zu liefern, welchės in erster Linie für den Fachmann bestimmt ist; trotzdem darf man hoffen, dass auch der Laie, sofern ihm eine allgemeine naturwissenschaftliche Bildung zur Seite steht, dasselbe mit Vortheil benutzen wird, um sich eine tiefere Einsicht und Kenntniss in den verschiedenen Gebieten der Physik zu verschaffen.

Die einzelnen in dem vorliegenden Band dargestellten Artikel enthält das Inhaltsverzeichniss; eine genauere Auskunft über das bearbeitete Material giebt das Sachregister.

Jena, im November 1890.

A. Winkelmann.

Inhaltsverzeichniss.

I. Allgemeine und specielle Mechanik.

II. Akustik.

Allgemeine und specielle Mechanik.

Grundbegriffe der Physik.

Grundbegriffe im engeren Sinne.

Die Grundbegriffe, von welchen die Physik auszugehen hat und welche sie als gegeben betrachtet, sind der Zahl nach drei: Die Materie als das ausserhalb uns Existirende, der Raum als die äussere, und die Zeit als die innere Form, unter welcher wir die Materie wahrnehmen. Im Uebrigen gehört die Frage, woher die Materie stamme und in wie weit ihr eine objektive Existenz zukomme, sowie die Frage, ob uns jene beiden Formen der Anschauung von vorn herein gegeben sind, oder ob, und auf welche Weise, wir nach und nach in ihren Besitz gelangen, in das Gebiet der Philosophie oder der Physiologie, nicht aber in dasjenige der Physik.

Die drei Grundbegriffe, von denen hiernach die Physik ausgeht, haben ein Gemeinsames, was sie eigentlich erst befähigt, die Grundlage physikalischer Naturerkenntniss zu bilden: Sie sind einer exakten Messung zugänglich. Auch hier ist zwischen philosophischer und physikalischer Auffassung zu unterscheiden. Die philosophische Begründung und die Prüfung der mehr oder weniger unstrengen Voraussetzungen, welche der Messbarkeit von Materie, Raum und Zeit zu Grunde liegen, gehört zu den schwierigsten Kapiteln der Erkenntnisslehre; für die Physik genügt es, dass für alle vorkommenden Fälle eine solche Messbarkeit existirt, und dass sie einen ausreichenden und mit der Fortentwicklung der Wissenschaft sich steigernden Grad von Zuverlässigkeit besitzt.

Was zunächst die Materie betrifft, so wird dieselbe durch ihre Eigenschaft, andere Materie scheinbar anzuziehen, gemessen, und das Maass dieser Eigenschaft nennt man Masse. Man sagt zuweilen auch schlechthin, die Masse sei die Quantität der Materie; da man sich aber über den letzteren Ausdruck eine klare Vorstellung nicht machen kann, so führt die Definition auch nicht zur Messbarkeit der ersteren. Da es die Physik meist mit den irdischen Erscheinungen zu thun hat, so handelt es sich gewöhnlich um die Eigenschaft der Erde, die an oder über ihrer Oberfläche befindliche Materie in eine Bewegung zu versetzen, welche den Eindruck erweckt, als ob sie dieselbe anzöge. Diese Eigenschaft der Erde findet nun im praktischen Leben einen sehr einfachen und geläufigen Ausdruck in dem Gewichte der Materie. Man könnte also die Masse

einfach dem mittels der Wage bestimmten Gewichte gleichsetzen, wenn nur die Erde an allen Punkten ihrer Oberfläche die in Rede stehende Eigenschaft in gleichem Grade besässe, und wenn sämmtliche physikalischen Erscheinungen sich auf der Erde und zwar speciell an ihrer Oberfläche abspielten. Beides ist nun aber nicht der Fall; in Folge der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt ist ihre Anziehung an verschiedenen Stellen ihrer Oberfläche eine verschiedene; und neben den an dieser stattfindenden Erscheinungen werden doch auch solche in der Physik betrachtet, deren Ort das Innere der Erde, die sie umgebende Atmosphäre oder gar der Weltenraum ist. Man muss also, um die Masse zu erhalten, das Verhältniss des an dem betreffenden Orte bestimmten Gewichtes zu der Grösse der an diesem Orte stattfindenden Anziehung bilden; in Formel:

$$m = \frac{G}{g},$$

wo m die Masse, G das Gewicht und g die Stärke der Anziehung bedeutet.[1])

Die beiden anderen Grundbegriffe, also Raum und Zeit, unterscheiden sich, so weit ihre Messung in Betracht kommt, dadurch von einander, dass der erstere eine dreifache, die letztere nur eine einfache Mannigfaltigkeit besitzt. Der Raum, wenigstens der Raum, welcher die äussere Anschauungsform von uns Menschen darstellt, ist dreidimensional, die Zeit ist eindimensional. Neuerdings beschäftigen sich Spiritisten einerseits und Mathematiker andererseits vielfach mit Räumen von einer anderen Zahl von Dimensionen; die Betrachtungen der ersteren gehören überhaupt nicht hierher, die der letzteren nur insofern, als es zuweilen mit Hilfe einer fingirten n-dimensionalen Raumanschauung gelingt, gewisse mathematische Formeln zu behandeln oder leichter zu behandeln, mit denen die rein formale Analysis nichts oder nur wenig anzufangen wüsste. Auch die Untersuchungen über die Beschaffenheit und die Eigenschaften des dreidimensionalen Raumes (Riemann, Helmholtz, Erdmann u. s. w.) fallen nicht in den Rahmen dieses Buches.

Betrachtet man zunächst eine einzelne Raumdimension, so gelangt man zu dem Begriffe der geraden Linie. Das Maass einer solchen ist ihre Länge; der Begriff »Länge« oder »Strecke« wird aber alsdann auch auf jede andere, krumme Linie ausgedehnt. Aus dem Längenmaasse ergeben sich sodann in leicht ersichtlicher Weise das Flächenmaass und das Raummaass; letzteres insofern von besonderer Wichtigkeit, als es den Rauminhalt oder das Volumen ringsum begrenzter Materie auszudrücken gestattet; man bezeichnet eine solche durchaus räumlich begrenzte Menge von Materie bekanntlich als einen Körper.

Die Zeit endlich wird auf Grund der Annahme gemessen, dass der irdische Tag, d. h. die Zeit, deren die Erde zu einer Umdrehung um ihre eigene Achse bedarf, ein constanter sei; eine Annahme, welche durch die Beobachtung mit derartiger Genauigkeit gerechtfertigt wird, dass beispielsweise zur Zeit des grie-

---

[1]) Anmerkung: In wenigen Punkten herrscht in den Lehrbüchern der Physik so viel Verschiedenheit und zum Theil Verwirrung, wie in der Einführung des Begriffes der Masse. Auch die obige Darstellung hat, wie nicht verschwiegen werden darf, einen schwachen Punkt, nämlich die vorzeitige Benutzung der Grösse g, welche bekanntlich von der Natur einer Beschleunigung ist, also einem erst weiter unten zu definirenden Begriffe angehört. Will man exakt zu Werke gehen, so muss man sich der von Kirchhoff (Mechanik. Lpz. 1876, pag. 21—23.) zuerst klar dargestellten Einführungsweise des Massenbegriffes auf Grund der Bewegungsgleichungen für ein System sich gegenseitig beeinflussender materieller Punkte anschliessen, was jedoch hier zu weit und überdies zur Erschwerung des vorläufigen Verständnisses führen würde (s. Art. Dynamik).

chischen Alterthums die Dauer des Tages sich von der heutigen noch nicht um den zwanzigsten Theil einer Sekunde unterschied.[1])

Messungsmethoden für die Grundbegriffe.
Messung des Raumes.

Messung der Länge. Die zahlreichen, bis vor kurzem bei den verschiedenen Völkern üblich gewesenen Längenmaasse sind gegenwärtig fast vollständig durch das Meter[2]) verdrängt (s. »Absolute Einheiten«), aus welchem durch Division oder Multiplikation mit 10 alle übrigen Einheiten abgeleitet werden; die Bezeichnungen sind folgende:

$m = 1$ Meter	$mm = 0{\cdot}001\ m = 1$ Millimeter
$dm = 0{\cdot}1\ m = 1$ Decimeter	$km = 1000\ m = 1$ Kilometer.
$cm = 0{\cdot}01\ m = 1$ Centimeter	

Das Meter ist ursprünglich (1799) als der zehnmillionste Theil eines Meridianquadranten definirt und in Platin fixirt worden, ist aber nach neueren Messungen etwas kleiner (10000855·7 Meter auf den Quadranten). Man definirt es daher gegenwärtig am besten durch Hinweis auf die in Paris und Berlin aufbewahrten Normalmaassstäbe. Da indessen in zahlreichen Schriften früherer Zeit, welche noch heute häufig zu Rathe zu ziehen sind, Angaben in anderen Maasssystemen als dem metrischen gemacht sind, auch ältere Apparate noch vielfach die bezüglichen Eintheilungen besitzen, so möge hier eine Vergleichungstabelle Platz finden.

	m		*km*
Pariser Fuss	0·3248394	Französische Myriameter	10·000000
Rheinischer Fuss	0·3138535	Deutsche oder geographische Meile (15 = 1°)	7·420438
Bairischer Fuss	0·2918592	Preussische Meile (24000 F.)	7·532485
Hannoverscher Fuss	0·2920947	Oesterreich. Meile (24000 F.)	7·586663
Sächsischer Fuss	0·2831901	Schweizer Stunde (16000 F.)	4·800000
Kasseler Fuss	0·2876991	Englische Meile (5280 F.)	1·609315
Würtemberger Fuss	0·2864903	Russische Werst (3500 F.)	1·066781
Badischer und Schweizer Fuss	0·3000000	Seemeile (60 = 1°)	1·855109
Schwedischer Fuss	0·3014943		
Englischer u. russischer Fuss	0·3047945		
Wiener Fuss	0·3161109		

Pariser Linie	2·2558 *mm*,
Toise (6 F.)	1·9490364 *m*,
Yard (3 e. F.)	0·9143835 *m*.

Zur Messung von Längen dienen verschiedene Apparate, theils solche, welche an die zu messende Länge angelegt werden, theils solche, bei denen man dieselbe aus mehr oder weniger grosser Ferne optisch ausmisst. Alle diese Apparate können hier nur mit grosser Kürze behandelt werden.

Der getheilte Maassstab kann dann Anwendung finden, wenn die Endpunkte der Länge zugänglich und so beschaffen sind, dass ein Maasstab sich

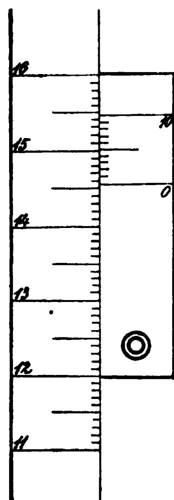
[1]) Der wahre Tag, der sogen. Sterntag, ist nicht mit dem Zeitintervall zwischen zwei Mittagspunkten, d. h. mit dem sogen. Sonnentag zu verwechseln, dessen Dauer im Laufe des Jahres variirt, und dessen mittlere Dauer man als mittleren Sonnentag bezeichnet. S. weiter unten pag. 13.

[2]) Neuerdings schlägt FREYCINET (Compt. rend. 105, pag. 903) als Längeneinheit die Geschwindigkeit vor, welche ein Körper erlangt hat, wenn er eine Sekunde in Paris durch den leeren Raum gefallen ist. Der Vortheil dieser Längeneinheit ist nicht ersichtlich, wohl aber mehr als ein Nachtheil.

anlegen lässt; ist zwar das erstere, nicht aber das letztere der Fall, so muss man sich des Cirkels als Zwischeninstrument bedienen. Das beste Material für Maassstäbe ist Platin oder, wenn sie durchsichtig sein sollen, Bergkrystall; alle anderen Stoffe, wie Holz, Stahl, Glas, Papier u. s. w. erfahren theils unregelmässig schwankende, theils mit der Zeit stetig zunehmende Veränderungen, deren Ursachen die Abnutzung, die Ausdehnung durch Wärme, die Aufnahme von Feuchtigkeit aus der Luft, die Durchbiegung und Krümmung u. s. w. sind; Maassstäbe aus solchen Stoffen sind also nur für Messungen von beschränkter Genauigkeit brauchbar.

Die Herstellung der Theilung erfolgt mittelst der **Theilmaschine**; der wesentlichste Bestandtheil derselben ist eine Schraube feinster Art, Mikrometerschraube genannt. Da bei einer solchen Schraube der Umfang ein Vielfaches von der Höhe eines Schraubenganges ist, und da man mittels einer Scheibe, die am Kopf der Schraube angebracht ist, noch Bruchtheile einer Umdrehung genau bewerkstelligen kann, so kann man die Spitze der Schraube um so kleine und so exakt bestimmte Strecken fortrücken lassen, wie dies auf direktem Wege bei weitem nicht möglich wäre. Mittels der Theilmaschine kann man auf diese Weise sehr genaue Theilungen auf Maassstäben herstellen. Trotzdem ist es rathsam, den Maassstab noch nachträglich zu calibriren, d. h. durch Vergleichung mit einem Normalmaassstab sich eine Tabelle herzustellen, welche für jede unter Benutzung jenes Maassstabes abgelesene Länge die anzubringende Correction angiebt. Man erreicht auf diese Weise einen hohen Grad von Genauigkeit. Dagegen gelangt man hinsichtlich der Grösse der einzelnen Theile bald zu einer durch das Material gebotenen unteren Grenze, wenigstens wenn es sich um Maassstäbe handelt, welche mit blossem Auge oder mit der Lupe abgelesen werden sollen. Für mikroskopische Ablesungen kann man 50 und selbst noch mehr Theilstriche auf der Strecke von 1 Millim. anbringen; für Ablesungen mit Auge und Lupe geht man nicht über halbe Millimeter hinaus. Zur Messung kleinerer Bruchtheile dient alsdann ein sinnreicher, an dem Maassstab angebrachter kleiner Hilfsmaassstab, der

Nonius oder Vernier (nach dem angeblichen Erfinder NUNEZ 1566 resp. dem wahren Erfinder VERNIER 1631). Der Nonius lässt sich an dem Hauptmaassstabe verschieben und enthält, wenn er noch den $n$ten Theil des kleinsten Intervalles des Hauptmaassstabes angeben soll, auf die Länge von $n - 1$ (oder auch $n + 1$) Theilen des Hauptmassstabes n Theile. Will man nun eine Länge bestimmen, so liest man zunächst den Theilstrich des Hauptmassstabes ab, über welchen die Länge gerade noch hinaussteht; dann schiebt man den Nonius so, dass sein Nullpunkt mit dem Endpunkt der zu messenden Länge übereinstimmt, und untersucht, der wievielte Noniusstrich mit einem Striche des Hauptmaassstabes genau zusammenfällt. Ist es der $m$te, so kommen zu den z ganzen Theilen des Hauptmaassstabes noch m/n hinzu, die ganze Länge ist also $z + m/n$. In der Figur giebt die Haupttheilung *mm*, der Nonius zehntel *mm*; die Ablesung ist: 145 *mm* + 0·6 *mm* = 145·6 *mm*.

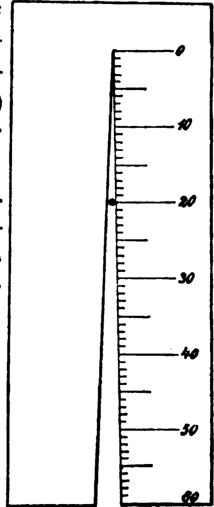

(Ph. 1.) Nonius.

Geschieht die Längenmessung indirekt mit dem **Zirkel**, so kann man sich zu ähnlichem Zwecke des **Reductionszirkels** bedienen, einer Art Doppelzirkel, dessen Schenkel über den Drehpunkt hinaus rückwärts verlängert sind und hier ebenfalls in Spitzen auslaufen. Die Verlängerungen machen einen bestimmten Bruchtheil, z. B. $\frac{1}{10}$ der eigentlichen Schenkellänge aus, so dass auch der Ab-

stand der rückwärtigen Spitzen stets $\frac{1}{10}$ des Abstandes der Hauptspitzen ist; man misst alsdann die gegebene Länge mittels der rückwärtigen Spitzen, legt die Hauptspitzen an den Maasstab an (wobei man wiederum den Nonius zu Hilfe nehmen kann) und dividirt durch 10.

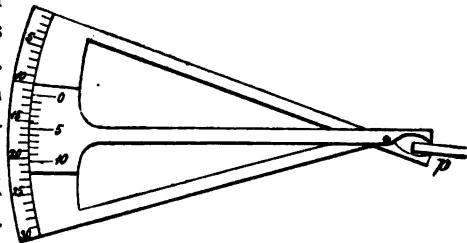
Steht ein Hilfsinstrument nicht zur Verfügung, so muss man die Zehntel des kleinsten Intervalls des Hauptmaassstabes schätzen, was, zumal nach erlangter Uebung, bis auf einen Irrthum eines halben Zehntel möglich ist, jedoch nur unter Berücksichtigung einer eigenthümlichen Erscheinung, welche persönlicher Fehler heisst und darin besteht, dass der Beobachter eine für ihn charakteristische Neigung hat, einen constanten Ablesungsfehler nach oben resp. nach unten zu machen.[1])

Es erübrigt noch, zu bemerken, dass zur Messung grosser Längen, wobei es sich um besondere Genauigkeit nicht handelt, das Bandmaass, die Messkette, der Distancemesser u. a. m. dient.



Dickenmesser. (Ph. 2.)

Eine besondere Klasse von Apparaten bilden die Dickenmesser, die auf den verschiedensten Principien beruhen. So wird bei dem sogen. Saitenmesser, der auch für Drähte sehr geeignet ist, der Schenkel eines sehr schlanken gleichschenkligen Dreiecks gemessen, dessen kurze Grundlinie die zu messende Dicke ist. Demgemäss besteht der kleine Apparat aus einem Platin- oder Messingstreifen, in welchem ein schmaler, mit Längstheilung versehener Keil eingeschnitten ist; in diesen Einschnitt wird die Saite oder der Draht senkrecht zur Streifenebene eingeschoben so weit es geht; ist z. B., wie in der Fig. 2 das Verhältniss der Länge zur Oeffnung des Einschnitts gleich 20, so würde sich die Dicke der durch den schwarzen Punkt angedeuteten Saite zu einem Millimeter ergeben. Andere Dickenmesser haben Dosenform und beruhen auf der Elasticität einer Feder, welche dadurch, dass man den zu messenden Körper zwischen zwei sich sonst berührende Schneiden einklemmt, aus der natürlichen Lage gebracht wird und hierbei einen Zeiger um einen gewissen Winkel dreht; die Spitze des letzteren spielt auf einer Kreistheilung, welche ohne weiteres die Dicke (meist in 0·01 Millim.) angiebt. Noch andere Dickenmesser beruhen auf der Anwendung der Mikrometerschraube, wieder andere, wie z. B. der Fühlhebel, sind dem Reductionszirkel im Princip ähnlich. In der Fig. 3 z. B. ist die Ablesung 11·5 *mm*, also die Dicke der Platte *p* (bei 10facher Vergrösserung) gleich 1·15 *mm*.

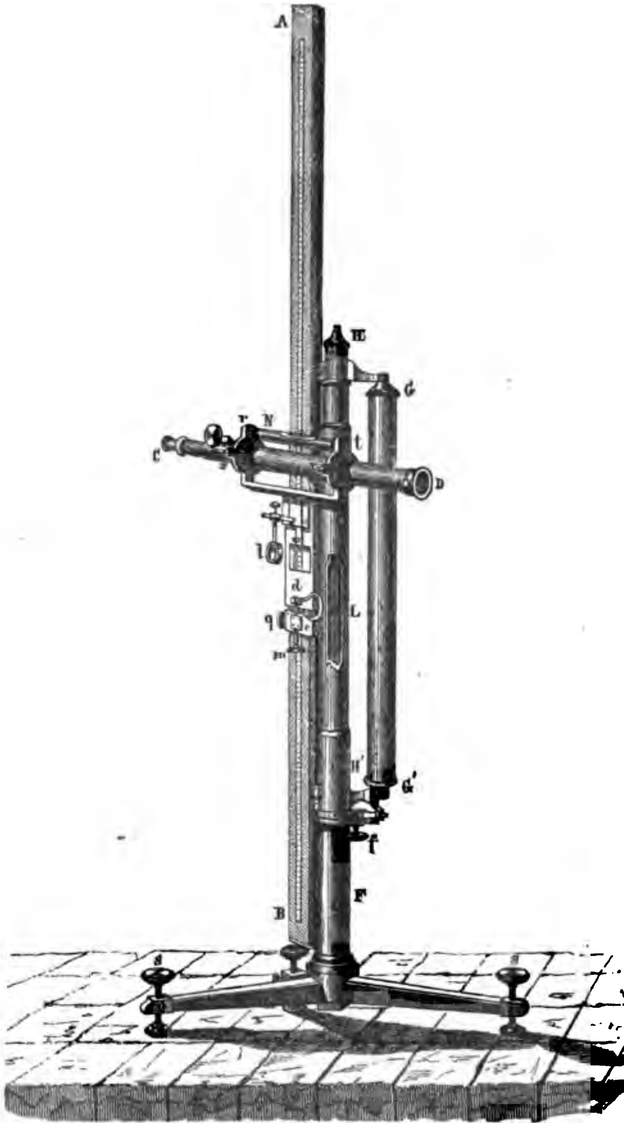


Fühlhebel. (Ph. 3.)

Endlich giebt es Fälle, in welchen von der zu messenden Strecke oder Dicke nur der eine Endpunkt zugänglich ist, wie dies z. B. bei einer biconvexen Linse der Fall ist, wenn die Dicken ihrer beiden Seiten einzeln gemessen werden sollen. Man bedient sich dann des Sphärometers, eines Apparates, der ebenfalls aus einer Mikrometerschraube mit Kreisscheibe an ihrem Kopfe besteht; der Schraubenspitze steht aber nicht wie beim Dickenmesser eine feste Spitze gegenüber, sondern der Apparat wird mit drei festen Spitzen aufgesetzt; in dem Mittelpunkte des durch sie gebildeten gleichseitigen Dreiecks, oder vielmehr in der durch diesen Mittelpunkt gehenden Vertikalen bewegt sich die Schraubenspitze

[1]) Siehe u. a. DORST, Z. f. Instr. K. 6, pag. 383 (1886).

auf und ab. Setzt man nun den Apparat auf die Linse, so können drei Fälle eintreten. 1. Die drei festen Spitzen, nicht aber die Schraubenspitze sitzen auf; das Sphärometer sitzt dann selbst fest auf; 2. die Schraubenspitze, nicht aber die festen Spitzen sitzen auf, so dass der Apparat wackelt; 3. der Grenzfall, wo alle vier Spitzen aufsitzen. Man schraubt also vor der Benutzung die Schraube weit hinauf und dann, nach Aufsetzen des Apparates, so weit herunter, bis gerade Wackeln eintritt; dieselbe Messung führt man dann auf einer ebenen Glasplatte aus; die Differenz ist die gesuchte Dicke, resp. Erhebung der Schraubenspitze über die festen. Die Genauigkeit der Messung ist bei den neueren Sphärometern dadurch nicht unwesentlich erhöht, dass die Schraube mit einem Fühlhebel versehen und an die Stelle des Dreifusses eine volle ringförmige Schneide gesetzt ist. Derartige Sphärometer sind von A. M. Mayer in New-York und von Bamberg in Berlin construirt worden.[1])



(Ph. 4.) Kathetometer.

Ist keiner der beiden Endpunkte der Linie zugänglich oder ist es aus anderen Gründen nicht thunlich oder nicht vortheilhaft, durch direkte Berührung mit einem Messinstrument zu messen, so bedient man sich eines **Kathetometers.** Dasselbe besteht aus einer durch Fussschrauben vertikal zu stellenden Säule, welche eine genaue Millimetertheilung trägt und längs welcher sich ein Schieber hin- und herbewegen lässt, der einen Nonius und ein horizontales Fernrohr trägt; das Fadenkreuz des letzteren wird nacheinander auf die beiden Endpunkte der zu messenden Linie eingestellt. Der hier skizzirte Typus ist derjenige des Longitudinalkathetometers, welchem das etwas complicirtere Transversalkathetometer gegenübersteht. Wie man sieht, ist das Katheto-

[1]) Czapski, Z. f. Instr. K. J. 297 (1887).

meter[1]) für vertikale Linien bestimmt resp. für die vertikale Projection geneigter Linien; die entsprechende Rolle für horizontale Linien spielen die sogen. Horizontalcomparatoren, die jedoch in der Physik eine weit seltenere Anwendung finden.[2])

Messung von Flächen. Das Flächenmaass wird aus dem Längenmaass durch Multiplication des letzteren mit sich selbst erhalten; die Einheit ist also das Quadratmeter; ferner ist:

qmm = 1	Quadratmillimeter	=	0·000001 *qm*
qcm = 1	Quadratcentimeter	=	0·0001 „
qdm = 1	Quadratdecimeter	=	0·01 „
qm = 1	Quadratmeter	=	1 „
a = 1	Quadratdecameter = 1 Ar .	=	100 „
ha = 1	Quadrathektometer = 1 Hektar	=	10000 „
qkm = 1	Quadratkilometer	=	1000000 „

Hieran sind noch folgende Beziehungen zu schliessen:

1 englisch. Quadratzoll	= 645·1 *qmm*		100 österreich. Quadratfuss	= 9·99207 *qm*
1 englisch. Quadratfuss	= 929 *qcm*		100 preussisch. „	= 9·85040 *qm*
1 englischer Acker	= 40·467 *a*		100 englische „	= 9·28995 *qm*
1 preussischer Morgen	= 0·2553 *ha*		100 bayerische „	= 8·51818 *qm*
1 russische Desjatine	= 1·0925 *ha*		100 sächsische „	= 8·01966 *qm*
1 geogr. Quadratmeile	= 55·0588 *qkm*			
1 engl. „	= 2·5899 *qkm*			
1 Quadratwerst	= 1·1380 *qkm*			

Um nun eine Fläche auszumessen, hat man, wenn dieselbe von einfacher Gestalt ist, nur nöthig, eine oder mehrere Längenmessungen auszuführen, z. B. für ein Quadrat oder ein gleichseitiges Dreieck die Seite, für eine Kreisfläche den Radius u. s. w.; die Grösse der Fläche ergiebt sich dann durch eine einfache Formel. Ist die Fläche zwar ebenfalls eben, aber von unregelmässiger Begrenzung, so kann man ein Quadratnetz in dieselbe einzeichnen, die Anzahl der ganzen Quadrate ermitteln und für die, der zu messenden Fläche nur theilweise angehörenden Randquadrate eine Schätzung vornehmen, etwa bis auf zehntel Quadrate; kennt man dann die Seitenlänge eines Quadrates, so findet man die Grösse der Fläche. Je genauer hierbei die Messung werden soll, desto kleiner muss man das Grundquadrat wählen, desto mühsamer wird freilich auch die Ausrechnung. Man hat daher längst Apparate zu construiren sich bemüht, welche, wenn man mit einem an ihnen angebrachten Stift die Contur der Fläche umfährt, den Flächeninhalt derselben ohne weiteres angeben. Die befriedigende Lösung dieses Problems ist jedoch erst dem Schweizer Amsler-Laffon 1856 mit seinem **Polar-Planimeter** gelungen, dem dann zahlreiche andere Planimeter, auch **Integratoren** genannt, gefolgt sind, mit vielfach verbesserter Construction und insofern verallgemeinert, als man mit einigen von ihnen auch sphärische Flächen ausmessen kann.[3])

[1]) Neuere Kathetometer sind u. A. die von Pfaundler, Miller (Z. f. Instr. K. 1883, pag. 409), Dumoulin (J. de Phys. (2) 2, pag. 496, 1883) etc. Eine Theorie d. Kath. s. in d. Aufs. v. Loewenherz u. Czapski, Z. f. Instr. K. 6, pag. 257 (1886).

[2]) Als äusserste Grenze der Längenmessung kann man gegenwärtig (bei Anwendung des Mikroskops) etwa die Grösse $\mu = 0{\cdot}001$ *mm* oder die halbe betrachten.

[3]) Amsler-Laffon, Ueb. d. mech. Bestimmung d. Flächeninhalts. Schaffhausen 1856. — Neuere Constructionen, Z. f. Instr. K. 4, pag. 11 (1886). — Abdank-Abakanowitz, Les Intégraphes, Paris 1886.

Raummessung. Das Raummaass erhält man, indem man das Längenmaass zur dritten Potenz erhebt.

cmm	= 1 Cubikmillimeter	= 0·000000001 *cbm*
ccm	= 1 Cubikcentimeter	= 0·000001 „
cdm = *l*	= 1 Cubikdecimeter = 1 Liter	= 0·001 „
cbm	= 1 Cubikmeter	= 1 „

ferner:

1 englischer Cubikzoll	= 16·386 *ccm*
1 Tschetwert	= 206·9 *l*
1 Hektoliter = *hl*	= 100 *l*

100 österreich. Kubikfuss	= 3·15852 *cbm*
100 preussisch. „	= 3·09158 *cbm*
100 englische „	= 2·83153 *cbm*
100 bayerisch. „	= 2·48611 *cbm*
100 sächsische „	= 2·27109 *cbm*

Zur Messung des Rauminhalts oder Volumens dient eine Reihe von Apparaten und Methoden. Handelt es sich um Flüssigkeiten (oder auch Gase), so finden, wenn es auf besondere Genauigkeit nicht ankommt, geaichte und mit Eintheilung versehene Gefässe Anwendung. Exakter ist die Messung mit dem Pyknometer, einem Glasgefäss mit kurzem, innen abgeschliffenem Hals und ebenfalls abgeschliffenem, in letzteren genau passenden Stöpsel, der, central durchbohrt, in eine Capillarröhre ausläuft. Man füllt das Gefäss bis zum Rand und setzt dann den Stöpsel ein, so dass die durch ihn verdrängte Flüssigkeit keinen anderen Ausweg hat, als den in die Capillare; je nach dem Stande, den sie hier einnimmt, liest man ein anderes Volumen an der Scala ab. Das Resultat ist wegen der Ausdehnung des Glases nur für eine bestimmte Temperatur, z. B. 15°, giltig, und muss für andere Temperaturen auf diese umgerechnet werden.

Das Volumen fester Körper kann man, wenn sie eine regelmässige Gestalt haben, nach bekannten Formeln aus Längenmessungen ableiten, z. B. beim Würfel, Octaëder, Tetraëder u. s. w. aus der Kantenlänge, bei der Kugel aus dem Radius, bei Cylinder und Kegel aus der Höhe und dem Radius des Grundkreises. Unregelmässig geformte Körper kann man in eine Flüssigkeit tauchen, welche ihrerseits in einem geaichten Gefäss sich befindet, wobei jedoch keine Absorption der Flüssigkeit durch den festen Körper eintreten darf. Man kann ferner den Körper, indem man ihn mittels eines Fadens an einem fest stehenden Stativ aufhängt, in eine Flüssigkeit tauchen, die sich in einem auf einer Wagschale stehenden Gefäss befindet. Die Flüssigkeit wird dann um das Gewicht der von dem Körper verdrängten Flüssigkeitsmasse schwerer und man muss, um das vor dem Eintauchen stattgehabte Gleichgewicht wieder herzustellen, auf der anderen Wagschale Gewichte hinzufügen; so viele Gramm (bei Anwendung von Wasser) dies sind, so viele *ccm* beträgt das Volumen des Körpers — genau wieder nur für eine bestimmte Temperatur, nämlich für 4° C. Auch durch Division des Gewichtes eines festen Körpers durch sein specifisches Gewicht (s. Art. Dichte) kann man sein Volumen finden, eine Methode, die anzuwenden man desshalb oft Gelegenheit hat, weil das specifische Gewicht als eine, allen Körpern aus demselben Material charakteristische Grösse viel häufiger bekannt ist, als das für jeden individuellen Körper verschiedene Volumen. Für pulverförmige Körper sind zwei verwandte Apparate construirt worden, nämlich das Stereometer von Say und Leslie, und verschiedene Volumenometer von Kopp und Regnault. Das Kopp'sche Instrument beruht darauf, dass eine abgesperrte Luftmasse von bestimmtem Volumen unter einem gewissen Drucke stehen muss, wenn beim Zusammendrücken das Volumen um eine bestimmte Grösse abnehmen soll; dass aber, sobald ein Körper, z. B. ein Pulver in diesen Raum gebracht wird, so

dass also ein geringeres Luftvolumen übrig bleibt, zur Erzielung derselben Volumenverringerung ein stärkerer Druck nöthig ist. Mittels eines einmaligen Versuches mit Körpern von bekanntem Volumen, z. B. ein, zwei u. s. w. *ccm*, wird der Apparat graduirt.[1])

Ausser der Messung von Längen, Flächen und Räumen bedarf es in der Physik häufig der

Messung von Richtungen und Winkeln. In ersterer Hinsicht ist von besonderer Wichtigkeit die Bestimmung der horizontalen und der vertikalen Richtung. Unter den Instrumenten, welche jener gewidmet sind, sind zwei hervorzuheben. Die Wasserwaage besteht aus zwei annähernd vertikalen Glasröhren, deren untere Enden mittels einer $\frac{1}{2}$—1 *m* langen, annähernd horizontalen Röhre communiciren; die letztere wird mit ihrer Röhre auf ein Stativ gesetzt, und in den ganzen Apparat Wasser gegossen. Die Wasseroberflächen in den beiden Glasröhren liegen dann in einer horizontalen Linie, und zwar auch dann, wenn die Verbindungsröhre nicht ganz horizontal ist. Der Apparat ist offenbar für Bestimmung horizontaler Linien von grösserer Ausdehnung bestimmt. Handelt es sich um die Horizontalität kürzerer Linien oder kleinerer Ebenen, so ist die Libelle zu benutzen. Auf eine ebene Unterlage ist ein mit Weingeist oder Aether bis auf eine Luftblase gefülltes Glasgefäss gesetzt; je nach der Form des Gefässes unterscheidet man Röhrenlibellen und Dosenlibellen, von denen erstere mehr für Linien, letztere mehr für Ebenen geeignet ist. Setzt man ein solches Instrument auf die horizontal zu richtende Linie oder Ebene auf, so rückt die Luftblase nach der höchsten Stelle, und man muss die Lage der Linie oder Ebene so lange ändern, bis die Luftblase die Mitte der Röhre, resp. des Kreises einnimmt. Will man mit der Röhrenlibelle Ebenen horizontal richten, so muss man den Versuch bei zwei verschiedenen, z. B. auf einander senkrechten Stellungen des Instrumentes ausführen. Ausserdem thut man bei allen diesen Messungen gut, dieselben in der einen und in der umgekehrten Stellung der Libelle auszuführen.

Zur Bestimmung der vertikalen Richtung, also der auf der horizontalen senkrechten Richtung, dient das Loth, der bekannte aus einem biegsamen Faden und einem schweren Körper bestehende Apparat, über den hier nichts weiter hinzuzufügen ist. Nur ist auf eine besondere Gattung solcher Instrumente hinzuweisen, nämlich auf die Apparate zur Messung der Meerestiefe, welche auch Sonden oder Bathometer heissen. Es giebt deren eine grosse Menge, auf ganz verschiedenen Principien beruhender, deren gemeinsamer Zweck aber ist, dass die Meerestiefe an der betreffenden Stelle wirklich in vertikaler Richtung gemessen werde; dieselben sind daher auch als Längenmessapparate anzusehen. Bei einigen wird die Tiefe thatsächlich an der Lothleine gemessen, bei anderen mit Hilfe des in der Meerestiefe herrschenden Druckes berechnet (z. B. W. THOMSON), das Bathometer von WILLIAM SIEMENS endlich wird gar nicht hinabgetaucht, sondern hängt fest an einem Schiffsraume und giebt die Tiefe auf Grund der Thatsache an, dass die Anziehungskraft der Erde oder, was dasselbe ist, das Gewicht eines Körpers desto kleiner ist, über je tieferem Wasser man sich befindet.[2])

Bei der Messung von Winkeln dient der rechte Winkel, der in 90° zu

---

[1]) KOPP, Ann. Ch. Pharm. 35, pag. 17. — REGNAULT, POGG. Ann. 66, pag. 435. S. auch »Trockner Volumenmesser« v. BÄSSLER, Z. f. Instr. K. 6, pag. 277 (1886).

[2]) Eine Zusammenstellung von Seetiefemessern giebt GÜNTHER, Z. f. Instr. K. 2 (1882).

je 60 Minuten zu je 60 Secunden getheilt wird,[1]) als Einheit. Auch hier handelt es sich, wie bei derjenigen von Längen, in erster Linie darum, ob dieselben für den messenden Apparat zugänglich sind. Ist dies der Fall, so bedient man sich, je nach den näheren Umständen, des bekannten Transporteurs, oder des ebenfalls verhältnissmässig einfachen Contakt- oder Anlege-Goniometers. In der Physik findet diese direkte Winkelmessung weit seltener Anwendung als diejenige aus der Ferne, bei welcher optische Methoden und Apparate benutzt werden. Hierher gehören namentlich das Reflexionsgoniometer und der Theodolith. Die wesentlichen Bestandtheile des letzteren sind eine horizontale Kreistheilung zur Messung von Winkeln in horizontalen Ebenen und eine vertikale Kreistheilung für Winkel in vertikalen Ebenen. Jeder Kreis ist mit einem drehbaren Fernrohr versehen (oder beide mit einem gemeinschaftlichen), dieses wird erst auf die eine, dann auf die andere Richtung eingestellt und der Winkel aus den beiden bezüglichen, mittels Nonien an der Kreistheilung gemachten Ablesungen berechnet. Es ist noch zu bemerken, dass zur Herstellung dieser, wie aller feinen Kreistheilungen, eine besondere Art Theilmaschine, die Kreistheilmaschine[2]) dient.



(Ph. 5.) Theodolith.

Zur Messung kleiner Winkel kann man Apparate benutzen, welche entweder auf der optischen Interferenz oder auf der Erscheinung der vielfachen Bilder in einem Winkelspiegel beruhen.

Wie der Winkel als ein Bruchtheil eines Kreisumfanges betrachtet werden kann, so kann man ein bestimmtes Flächenstück auf einer Kugeloberfläche in seinem Verhältniss zur ganzen Kugeloberfläche als Raumwinkel bezeichnen. Der Begriff des Raumwinkels tritt in der Physik nicht selten auf, z. B. in der Photometrie; zu seiner Messung, wobei die Einheit ein Quadratgrad ist, ist von L. Weber ein Apparat, der Raumwinkelmesser angegeben worden.[3])

Bei dieser Gelegenheit möge eine häufig brauchbare Tabelle Platz finden. An Quadratgraden enthält die Kugeloberfläche eine Anzahl von 41253, aber nicht genau, weil sich die Oberfläche überhaupt nicht mit Quadratgraden ausfüllen lässt, ohne dass Lücken entstehen, die dann zusammengenommen nicht wieder grade eine Anzahl von Quadratgraden ergeben. Für die Vorstellung einfacher und daher allgemein üblich ist die Eintheilung der Kugeloberfläche durch 180 Parallelkreise oder Breitenkreise und 360 Meridiane oder Längenhalbkreise. Alle zwischen denselben beiden Parallelkreisen gelegenen Vierecke sind dann gleich gross; dagegen nehmen sie vom Aequator zu den Polen an Grösse ab. Es beträgt nämlich die Grösse eines Vierecks auf der Erdoberfläche zwischen zwei Breiten- und zwei Längengraden, in verschiedenen Breiten (in Qu. Meilen).

---

[1]) Die Decimaltheilung des Kreisumfanges ist mehrfach vorgeschlagen, aber noch nicht acceptirt worden.

[2]) Die erste Kreistheilmaschine rührt vom Uhrmacher Hindlay in York her (1740), die erste wirklich in Gebrauch gekommene von Ramsden (1774). — Ueber die jetzigen Kreisth.-M. s. u. a. Loewenherz, Z. f. Instr. K. 2, pag. 365 (1882); Wegener, ebenda 3, pag. 117 (1883).

[3]) L. Weber, Z. f. Instr. K. 4, pag. 343 (1884).

Breite	Grösse	Breite	Grösse
0° bis 1°	224·259	60° bis 61°	111·525
10° „ 11°	220·607	70° „ 71°	75·730
20° „ 21°	210·399	80° „ 81°	37·485
30° „ 31°	193·881	85° „ 86°	17·824
40° „ 41°	171·469	89° „ 90°	1·983.
50° „ 51°	143·757		

Messung der Zeit.

Die in der Physik gebräuchliche Zeiteinheit ist die Sekunde. Aus dem wahren Sterntag geht dieselbe als dessen 86164·091. Theil hervor; in für die Praxis zweckmässigerer Weise jedoch aus dem mittleren Sonnentag (s. oben) dadurch, dass man letzteren in 24 Stunden zu je 60 Minuten zu je 60 Sekunden eintheilt. Es ist also

1 Tag = 24 Stunden = 1440 Minuten = 86400 Sekunden.

Zur Messung der Zeit, d. h. des Zeitraumes zwischen zwei Zeitpunkten, dienen im wesentlichen zwei Vorrichtungen: das Pendel und die elastische Feder, resp. die auf die Wirkung dieser beiden Vorrichtungen gegründeten Pendeluhren und Federuhren (andere Gattungen von Uhren, wie Sonnenuhren, Wasseruhren, Sanduhren kommen für die Physik als zu ungenau nicht in Betracht). Das Nähere über die Pendeluhren s. Art. »Pendel,« das Nähere über die Federuhren gehört in die Technik. Uhren von besonders genauem Gange, die daher besonders auch zur Messung sehr kleiner Zeittheile geeignet sind, heissen Chronoskope, Chronometer oder Chronographen.[1])

Zur vollständigen Bestimmung der Zeit reicht die Messung von Zeitdauern nicht aus; es ist ausserdem häufig der absolute Zeitpunkt festzustellen. Von den Uhren wird derselbe zwar ebenfalls angegeben, diese Angabe bedarf aber häufiger Controlle. Man pflegt zu diesem Zwecke den genauen Mittag zu ermitteln und zwar durch astronomische Beobachtungen. Da dieselben aber nur von Wenigen ausführbar und auch für diese zeitraubend sind, ist eine neuerdings in vielen Hafenorten getroffene Einrichtung von grosser Wichtigkeit, welche darin besteht, dass man zur genauen Mittagszeit von einem weithin sichtbaren Punkte einen schweren Körper, den Zeitball, herabfallen lässt, wonach die Chronometer gestellt werden können. Ausserdem ist für alle Fälle, wo es sich um die Vergleichung von Erscheinungen an verschiedenen Orten handelt, zu beachten, dass der Mittag, also auch die absolute Zeit überhaupt, nur für Orte auf demselben Meridian die gleiche, für Orte auf verschiedenen Meridianen aber eine verschiedene ist. Die folgende, oft verwendbare Tabelle enthält für einige Orte die Angabe der Breite (*b*), der Länge von Greenwich (*l*), der Zeitdifferenz in Minuten mit Greenwich, also die Abweichung der Ortszeit von dem, was man die Weltzeit nennt (*W*) und für die deutschen, österreichischen und schweizer Orte die Zeitdifferenz resp. mit Berlin, Prag, Bern, also die Abweichung der Ortszeit von der sog. Landeszeit (*L*). Es ist aber zu bemerken, dass die Bemühungen, der Weltzeit und der Landeszeit allgemeineren Gebrauch zu sichern, noch nicht zum Abschluss gelangt sind.

[1]) Die ersten Apparate dieser Art wurden 1838 von der preuss. Artillerie-Prüfungs-Commission, 1840 von Wheatstone und 1844 von Pouillet angegeben, neuerdings verbesserte von Siemens, Martin de Brettes, Navez u. A., namentlich aber von Hipp in Neuchatel. Die Pouillet'sche Methode, die sich auch ohne besondere Apparate leicht anwenden lässt, beruht darauf, dass der Ausschlag einer durch einen constanten Strom von kurzer Dauer abgelenkten Galvanometernadel desto grösser ist, je länger der Strom andauert.

Ort	b	l	W	L	Ort	b	l	W	L
Aachen	50·8	6·1	+ 24	— 29	Karlsruhe	49·0	8·4	+ 34	— 19
Amsterdam	52·4	4·8	+ 19		Kiel	54·3	10·1	+ 41	— 12
Basel	47·6	7·5	+ 30	0	Königsberg	54·7	20·5	+ 82	+ 29
Berlin	52·5	13·3	+ 53	0	Kopenhagen	55·7	12·6	+ 50	
Bern	47·0	7·4	+ 30	0	Krakau	50·1	19·9	+ 80	+ 23
Bonn	50·8	7·1	+ 28	— 25	Kristiania	59·9	10·8	+ 43	
Braunschweig	52·3	10·5	+ 42	— 11	Leipzig	51·4	12·3	+ 49	— 4
Bremen	53·1	8·8	+ 35	— 18	London	51·5	—0·1	0	
Breslau	51·1	17·0	+ 68	+ 15	Marburg	50·8	8·7	+ 35	— 18
Brüssel	50·9	4·3	+ 17		Moskau	55·9	37·6	+150	
Budapest	49·5	19·0	+ 76		München	48·1	11·5	+ 46	— 7
Chemnitz	50·8	12·8	+ 51	— 2	Münster	52·0	7·6	+ 30	— 23
Cöln	51·0	6·9	+ 28	— 25	Paris	48·8	2·3	+ 9	
Czernowitz	48·3	25·9	+104	+ 47	Peking	39·9	116·4	+466	
Darmstadt	51·5	8·6	+ 34	— 19	Prag	50·1	14·3	+ 57	0
Dresden	51·1	13·7	+ 55	+ 2	Rom	41·9	12·5	+ 50	
Erlangen	49·6	11·0	+ 44	— 9	Rostock	54·1	12·1	+ 48	— 5
Frankfurt a. M.	50·1	8·6	+ 34	— 19	St. Petersburg	59·9	30·5	+122	
Freiburg i. Br.	48·0	7·8	+ 31	— 22	Stockholm	59·3	18·2	+ 73	
Genf	46·2	6·1	+ 24	— 6	Strassburg	48·6	7·7	+ 31	— 22
Giessen	50·6	8·7	+ 35	— 18	Stuttgart	48·8	9·1	+ 36	— 17
Göttingen	51·5	9·9	+ 40	— 13	Tokio	35·6	139·7	+559	
Graz	47·1	15·4	+ 62	+ 5	Triest	45·7	13·8	+ 55	— 2
Greifswald	54·1	13·3	+ 53	0	Tübingen	48·5	9·0	+ 36	— 17
Halle	51·5	11·9	+ 48	— 5	Washington	38·8	—77·1	—308	
Hamburg	53·6	10·0	+ 40	— 13	Wien	48·2	16·3	+ 65	+ 8
Hannover	52·4	9·7	+ 39	— 14	Würzburg	49·8	9·9	+ 40	— 13
Heidelberg	49·4	8·7	+ 35	— 18	Zürich	47·4	8·5	+ 34	+ 4
Innsbruck	47·3	11·3	+ 45	— 12					

Messung der Masse.

Wir haben schon oben gesehen, dass man die Masse praktisch durch ihr Gewicht misst. Als Einheit dient dabei das Gramm, d. h. das Gewicht einer Wassermasse, welche bei 4° C. den Raum von 1 *ccm* einnimmt. Die übrigen Gewichte des metrischen Systems sind dann:

mg = 1 Milligramm = 0·001 *g*
cg = 1 Centigramm = 0·01 „
dg = 1 Decigramm = 0·1 „
g = 1 Gramm = 1 „
kg = 1 Kilogramm = 1000 „
t = 1 Tonne = 1000 *kg* = 1000000 „

denen sich häufig noch folgende anschliessen:

1 Pfund = 500 *g*
1 Centner = 100 *Pf.* = 50000 „
1 Doppelcentner = 200 „ = 100000 „
(auch zuweilen metrischer Centner genannt.)

Die wichtigsten, früher üblich gewesenen oder noch jetzt üblichen Pfundgewichte haben in *kg* ausgedrückt folgende Werthe:

Frankreich	0·4895058	Schweden	0·4253395
England	0·4535976	Baiern	0·56
Oesterreich	0·5600122	Sachsen, Schweiz	0·5
Russland (40 = 1 Pud) . .	0·40952	Würtemberg	0·4677289
Preussen, Hessen, Hannover	0·467711		

Endlich ist eine Unze, auf welche 480 Gran gehen, = 28·8 *g*; nach Anderen ist 1 Gran = 64·8 *mg*.

Die Messung des Gewichtes selbst erfolgt mittels der Wage, über deren Princip, Einrichtung und Gebrauch im Art. »Gewicht und Wage« nachzusehen ist.

Abgeleitete Grundbegriffe.

Bewegung. Die allgemeinste Beziehung, welche zwischen den drei Grundbegriffen Materie, Raum und Zeit aufgestellt werden kann, ist in dem Satze ausgesprochen: Die Materie ändert ihren Ort im Raum mit der Zeit. Man nennt diesen Vorgang Bewegung. Die Bewegung ist zugleich auch, wenigstens für das Gebiet der Physik (von chemischen und Lebenserscheinungen also abgesehen), die einzige für uns vorstellbare Beziehung zwischen Materie, Raum und Zeit. Hiergegen könnte man zweierlei Einwendungen machen. Einmal den, dass eine andere mögliche Beziehung die Ruhe ist; aber die Ruhe ist nichts als einer von den unendlich vielen verschiedenartigen, möglichen Fällen von Bewegung. Zweitens kann man an eine Reihe physikalischer Erscheinungen denken, welche wir mit unseren Sinnen nicht als Bewegung erkennen; daraus folgt aber durchaus nicht, dass sie es nicht sind, und unser Vorstellungsvermögen zwingt uns sogar, wie gesagt, zu der Annahme, dass sie es sind, es sei denn, dass man diese Erscheinungen auf metaphysische, der Physik fremde Begriffe stützen wollte.

Da die Bewegung sich sowohl im Raume als in der Zeit abspielt, weist sie Merkmale von jedem dieser beiden Grundbegriffe auf. In räumlicher Hinsicht kann sie gradlinig oder krummlinig, und in ganz analoger Weise kann sie in zeitlicher Beziehung gleichförmig oder ungleichförmig sein. Nach dem Vorgang von Galilei und Newton hat man sich in der Vorstellung geeinigt, dass die Körper von selbst stets nur gradlinig und gleichförmig sich bewegen, dass dagegen, wenn sie sich krummlinig oder ungleichförmig bewegen (oder beides zugleich), dies die Wirkung einer Ursache sei. Jene Eigenschaft der Körper nennt man Beharrungsvermögen oder Trägheit, diese Ursache nennt man Kraft. Diese Unterscheidung ist hiernach nicht als ein Ergebniss, sondern als eine Uebereinkunft zu betrachten; freilich aber als eine Uebereinkunft, welche zu einer besonders einfachen Darstellung der physikalischen Erscheinungen, insbesondere der Bewegungserscheinungen führt. Man kann sagen, dass ohne die Einführung dieses Princips durch Galilei eine so rasche Entwickelung und eine so einfache Beschreibung der mechanischen Erscheinungen unmöglich gewesen wäre. Am klarsten ist das Princip für einen Körper, der sich ursprünglich in Ruhe befindet; da derselbe nämlich nach dem obigen Princip sich von selbst nur gleichförmig bewegen kann, so muss er in Ruhe bleiben und das ist eine zu unzähligen Malen auftretende Erscheinung (Stoss beim Abfahren von Eisenbahnzügen, Anstrengung der Pferde beim Anziehen des Wagens u. s. w.), die man auch experimentell verfolgen kann. Legt man z. B. auf die Oeffnung einer Flasche ein Kartenblatt und auf dieses ein Geldstück, so fällt letzteres vertical in die Flasche herab, wenn man ersteres rasch fortschnellt. Nicht so einfach verhält es sich mit der Anwendung des Trägheitsprincipes auf

Körper, die ursprünglich in Bewegung sind. Wird ein solcher Körper sich selbst überlassen, so verlangt jenes Princip, dass er sich gradlinig und gleichförmig ohne Ende fortbewege. Erscheinungen dieser Art finden wir so gut wie gar nicht, und im Bereiche irdischer Vorgänge überhaupt nicht; vielmehr gelangt jeder sich selbst überlassene Körper allmählich zur Ruhe. Man muss also annehmen, dass ein solcher Körper nur scheinbar sich selbst überlassen, in Wahrheit aber der Wirkung einer Kraft unterworfen sei. Man sagt, es finde Reibung statt, und betrachtet eben diese Reibung als jene Kraft. Da nun Reibung geradezu überall auf der Erde stattfindet, so giebt es hier keine gleichförmige Bewegung. Im Weltraum, der von Reibung frei ist, kommt dagegen, wenigstens näherungsweise, gleichförmige Bewegung vor. Gradlinige Bewegung ist aber auch hier nicht zu finden und es ist daher auch die Bewegung der Himmelskörper als die Wirkung einer Kraft anzusehen. Bei irdischen Erscheinungen macht sich die Beharrung in der Bewegung am deutlichsten in solchen Fällen geltend, in denen ein Körper plötzlich infolge eines Hindernisses, aufhört an der Bewegung eines andern theilzunehmen, während dieser letztere sich ungestört weiterbewegt (Aussteigen aus einem in rascher Fahrt befindlichen Wagen, Stoss beim Anhalten eines Zuges u. s. w.). Zur experimentellen Erläuterung hiervon geeignet ist ein von LISSER und BENNEKE in Berlin gefertigter Apparat von SCHULZE, bestehend aus einem Wagen, auf dem ein anderer beweglich steht; hält man ersteren an, so läuft letzterer noch weiter.

Geschwindigkeit. Eine gradlinige und gleichförmige Bewegung ist zweifach charakterisirt: durch ihre Richtung und durch die Beziehung, welche zwischen der zurückgelegten Strecke und der hierzu erforderlichen Zeit besteht. Das Verhältniss dieser beiden Grössen nennt man die Geschwindigkeit der Bewegung oder auch des Körpers. Man kann also das Beharrungsprincip auch so aussprechen: Ein sich selbst überlassener Körper bewegt sich in constanter Richtung und mit constanter Geschwindigkeit.

Messung der Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit wird gewöhnlich in Metern pro Sekunde ausgedrückt. Ihre Messung wird in den meisten Fällen nicht durch besondere Apparate, sondern dadurch ausgeführt, dass man die zurückgelegte Strecke und die erforderte Zeit einzeln misst und die Ergebnisse durch einander dividirt. In vielen Fällen ist aber die zurückgelegte Strecke nicht ohne weiteres messbar, oder das Zeitintervall, auf welches man sich bei der Messung beschränken muss, ist so klein, dass Pendel und Uhr den Dienst versagen. Für solche und zahlreiche andere Fälle sind besondere Geschwindigkeitsmesser construirt worden, die jedoch hier nur kurz erwähnt werden können, da ihre Theorie und Beschreibung theils in specielle Kapitel der Physik, theils in die Technik gehört. Hierher sind zu rechnen: Das Log zur Messung der Schiffsgeschwindigkeit, sowie Einrichtungen zur Messung der Fahrgeschwindigkeit von Eisenbahnzügen; das Anemometer, welches die Windgeschwindigkeit misst (durch den Anemometrographen wird sie sogar graphisch registrirt); elektrische Einrichtungen zur Ermittelung der Geschwindigkeit von Geschossen; Fallmaschinen (s. »Freier Fall«); optische Methoden für äusserst kleine Zeitintervalle (s. z. B. »Lichtgeschwindigkeit«); Strommesser oder Rheometer für Wasserläufe u. s. w. Eine besondere Klasse dieser Apparate ist zur Messung von Umdrehungsgeschwindigkeiten bestimmt; es sind das entweder einfache Tourenzähler, welche an die rotirende Achse gelegt, z. B. jede zehnte Umdrehung durch den Druck eines Stiftes auf den Finger des Beobachters markiren, also Apparate, welche nebenbei eine Zeitmessung erfordern und überdies nur die

mittlere Geschwindigkeit während einer gewissen Zeit liefern.[1]) Oder es sind Tachometer resp. sogar Tachographen, welche die Geschwindigkeit ohne weiteres abzulesen gestatten resp. registriren.[2])

Die folgende Tabelle enthält einige der wichtigsten in der Natur vorkommenden Geschwindigkeiten in *m:s* (resp. *km:s*).

	m		*km*
Schnecke	0·0015	Steine des Pik von Teneriffa	1
Mensch im Schritt	1·25	Mond	1
Schneeschuhläufer	2·95	Sonnenäquator	2
HALLEY's Comet im Aphel	3·00	Explosion der Schiesswolle	5·8
Schnellster Fluss	4·00	Sonne	7·6
Luftballon bei Windstille	6·4	Sirius	15·4
Schnellläufer	7·1	Erde	29·5
Fliege	7·6	Sternschnuppe im Mittel	40
Schnellster Dampfer	8·5	HALLEY's Comet im Perihel	393
Bicycle	9·7	Sturm in der Sonne	402
Frische Brise	10·0	Kabelstrom	4000
Torpedoboot	11·5	Telegraphenstrom	11690
Eisläufer	11·6	Inductionsstrom	18400
Rennpferd	12·6	Elektrischer Strom im Mittel	36000
Bergstrom	14·3	Blitzen im Sonnenfleck	200000
Schnellzug	16·7	Licht	300000
Ozeanwogen	21·8	Entladung d. leyd. Flasche i. Kupferdraht von 1·7 *mm*	463500
Brieftaube	27·0		
Orkan	45·0		
Schwalbe	67·0		
Stärkster Cyclon	116		
Krakatoa-Welle	290		
Schall in Luft	337		
Luft in's Vacuum	395		
Aequatorpunkt	463		
Kanonenkugel	500		
Fluthwelle (max.)	800		

Der Begriff der Bewegung und somit auch derjenige der Geschwindigkeit bedarf noch einer erläuternden Vervollständigung. Bewegung ist Ortsänderung im Raum; der Raum aber ist, wie wir sahen, nichts ausser uns Bestehendes, sondern die Form, unter welcher wir die Materie wahrnehmen; wir können also auch einen Ort im Raume nur in Beziehung zur Materie resp. zu einem anderen Orte im Raume fixiren und folglich auch nur sagen: ein Körper bewegt sich im Vergleich zu einem anderen. Man nennt daher diese Bewegung relative Bewegung, im Gegensatz zur absoluten, wobei jedoch zu bemerken ist, dass es eben letztere streng genommen nicht giebt. So ist z. B. die Bewegung des Schaffners, der während der Fahrt von Wagen zu Wagen geht, eine relative Bewegung in Bezug auf den Eisenbahnzug, letzteren als stillstehend gedacht; der

[1]) Hierbei ist für die Genauigkeit, welche sich erreichen lässt, einerseits die Uebung ein wesentlicher Factor, andererseits hat die Ermüdung (bei kleinen Zeiten insbesondere) einen oft nicht unbeträchtlichen Fehler zur Folge.

[2]) Die Literatur über Geschwindigkeitsmesser sehe man in technischen Werken. Für die Methoden zur Messung sehr rascher Bewegungen giebt PLATEAU eine interessante Zusammenstellung in Bull. Ac. Belg. (3) 6, pag. 484 (1883).

Zug selbst bewegt sich aber relativ gegen die Erde, die Erde ihrerseits gegen die Sonne und endlich die Sonne gegen die übrigen Fixsterne. Handelt es sich, wie zumeist in der Physik, um irdische Bewegung, so bedient man sich trotzdem nicht selten beider Ausdrücke und zwar des Ausdruckes absolute Bewegung für die Bewegung eines Körpers relativ zur Erdoberfläche, des Ausdruckes relative Bewegung für die Bewegung eines Körpers relativ zu einem anderen Körper, der selbst seine Lage gegen die Erdoberfläche verändert. Dieselbe Bedeutung haben alsdann auch die Ausdrücke absolute und relative Geschwindigkeit

Beschleunigung. Der Fall, dass eine Bewegung mit constanter Geschwindigkeit ausgeführt wird, ist offenbar ein sehr spezieller; im Allgemeinen wird die Geschwindigkeit sich stetig ändern; man kann dann nur von der Geschwindigkeit in einem bestimmten Momente sprechen und hat darunter den durch ein folgendes, sehr kleines Zeittheilchen dividirten, in demselben zurückgelegten Weg zu verstehen. Bei einer solchen Bewegung kann die Geschwindigkeit entweder zunehmen oder abnehmen. Im ersten Falle heisst die Bewegung eine beschleunigte, im letzteren eine verzögerte; entsprechend könnte man die Zunahme oder Abnahme der Geschwindigkeit als Beschleunigung oder Verzögerung bezeichnen; man bedient sich aber ausschliesslich des Ausdruckes Beschleunigung, indem man demselben den Charakter einer algebraischen Grösse giebt, welche je nach den Umständen positiv oder negativ ist. Eine spezielle, aber sehr häufig vorkommende Bewegungsart ist die gleichförmig beschleunigte, bei welcher also die Beschleunigung einen constanten Werth hat.

Impuls und Kraft. Wir haben oben festgesetzt, dass wir die gleichförmige Bewegung der Körper, also auch speziell ihre Ruhe, als eine Folge lediglich ihres eigenen Beharrungsvermögens ansehen, dagegen jede andere Bewegung als Wirkung einer Kraft betrachten wollen. Wir gelangen jetzt dazu, eine Unterscheidung zu machen zwischen Impuls und Kraft im engeren Sinne. Wenn ein Körper, der ursprünglich in Ruhe war, in einem bestimmten Augenblicke eine gleichförmige Bewegung annimmt, oder, allgemeiner, wenn ein in gleichförmiger Bewegung von einer bestimmten Geschwindigkeit begriffener Körper in eine ebenfalls gleichförmige Bewegung, aber von anderer Geschwindigkeit, in einem bestimmten Augenblicke übergeht, so ist für die ganze Erscheinung vor und nach jenem Augenblicke das Beharrungsvermögen zum Verständnis ausreichend, und nur für jenen Augenblick selbst bedarf es der Einführung einer Kraft. Eine solche momentan wirkende Kraft wird zweckmässig ein Impuls genannt, und das Maass ihrer Grösse ist die dem Körper ertheilte resp. neu hinzuertheilte Geschwindigkeit. Wenn dagegen ein Körper, der ursprünglich in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung begriffen war, eine beschleunigte (oder verzögerte) Bewegung annimmt, oder wenn ein bereits in beschleunigter Bewegung begriffener Körper diese Bewegung mit derselben oder einer anderen Beschleunigung fortsetzt, so ist es offenbar erforderlich, die Wirkung einer dauernden Kraft anzunehmen. Gewöhnlich bezeichnet man ausschliesslich eine solche Kraft als Kraft, und ihr Maass ist die dem Körper ertheilte oder neu hinzuertheilte Beschleunigung.

Sowohl für den Impuls als auch für die Kraft kommt indessen noch ein anderer Umstand wesentlich mit in Betracht, nämlich der Umstand, dass zwei verschiedene Körper unter gleichen Umständen nicht dieselbe Geschwindigkeit annehmen, also nicht denselben Impuls erfahren, und dass sie unter gleichen Umständen nicht dieselbe Beschleunigung erhalten, also nicht dieselbe Kraftwirkung erfahren. Vielmehr ist die Wirkung eine in demselben Verhältniss kleinere, in welchem die Masse des Körpers eine grössere ist. Der Impuls,

welcher einem Körper von der Masse m die Geschwindigkeit v ertheilt, ist also nicht nur durch v, sondern auch durch m zu messen, d. h. es ist zu setzen

$$J = m \cdot v.$$

Man bezeichnet das Product mv häufig als Bewegungsgrösse. Ganz analog ist die Kraft, welche einem Körper von der Masse m die Beschleunigung g ertheilt, nicht bloss durch g, sondern auch durch m zu messen, d. h. es ist zu setzen

$$R = m \cdot g.$$

Man bezeichnet diese Grösse auch zuweilen des Näheren als bewegende Kraft im Gegensatz zu der lediglich durch die Beschleunigung gemessenen beschleunigenden Kraft; eine selbstständige Bedeutung kommt jedoch dem letzteren Begriffe überhaupt nicht zu.

Die Begriffe Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft haben den Charakter von Richtungsgrössen, d. h. es kommt ihnen ausser einem bestimmten, in den gewählten Einheiten ausgedrückten Zahlenwerthe auch eine bestimmte Richtung zu. Dieser Umstand hat für die mathematische Physik den Uebelstand im Gefolge, dass eine direkte Vergleichung und rechnerische Behandlung dieser Grössen nicht möglich ist. Es existiren zwei Methoden zur Ueberwältigung dieser Schwierigkeit; die eine, allgemeinere, aber complicirtere, beruht auf der Anwendung einer besonderen Disciplin, welche, erst in neuester Zeit ausgearbeitet, Quaternionencalcül[1] heisst, bisher aber nicht in dem vielleicht erwarteten Maasse Anwendung gefunden hat. Die andere Methode beruht darauf, dass man sich eine bestimmte Wegstrecke nicht direkt zurückgelegt denkt, sondern dadurch, dass der betreffende Körper sich zunächst in einer gewissen Richtung um eine gewisse Strecke, dann in einer hierzu senkrechten Richtung um eine andere Strecke und endlich in einer auf der Ebene der beiden ersten senkrechten dritten Richtung wiederum um eine gewisse Strecke fortbewegt, wobei es offenbar möglich ist, diese drei Strecken so abzumessen, dass die resultirende Ortsänderung gleich derjenigen ist, welche durch Zurücklegen der gegebenen Strecke allein erzielt worden wäre. Es ist dies die, oder vielmehr eine der Methoden der Zerlegung von Bewegungen, und zwar diejenige in drei rechtwinklige Componenten. Indem man also der Untersuchung ein bestimmtes, rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legt, kann man nicht nur die Wegstrecken, sondern auch die Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte in Componenten zerlegen nach den Richtungen der drei Axen dieses Systems, und nun mit allen auf die eine (oder zweite oder dritte) dieser Richtungen bezüglichen, in dem Problem vorkommenden Grössen wie mit einfachen Zahlengrössen rechnen; zum Schluss hat man dann nur noch wiederum die Componenten zur Resultante zu vereinigen (d. Nähere s. Art »Dynamik«).

Noch ist zur Vermeidung von Missverständnissen eine kurze Bemerkung zu machen. In zahlreichen Fällen hat es den Anschein, als ob eine dauernde Kraft eine gleichförmige Bewegung bewirke, z. B. bei der Bewegung eines Eisenbahnzuges. Es müsste doch, um diese gleichförmige Bewegung zu erzeugen, ein Impuls genügen, und es giebt in der That Fälle dieser Art; meistens aber tritt die Reibung als gegenwirkende (verzögernde) Kraft auf; es bedarf also zu ihrer Aufhebung einer dauernden beschleunigenden Kraft.

Arbeit. Es ist von Wichtigkeit, nochmals mit Bestimmtheit hervorzuheben dass der Begriff der Kraft in der Physik lediglich eingeführt wird als ein einfaches und anschauliches Mittel, um sich eine bestimmte, einer bestimmten Masse ertheilte Beschleunigung zu vergegenwärtigen. Die Ermittelung von Kräften ist

[1]) W. R. HAMILTON, Elemente der Quaternionen, deutsch v. P. GLAN, 2 Bde. Lpz. 1881—82.

also nicht selbstständiger Zweck physikalischer Untersuchung, sondern nur Mittel zum Zwecke einfacher Darstellung der Erscheinungen, d. h. wie wir sahen, der Bewegungen.[1] Wohl aber spielt eine selbstständige Rolle in der Physik ein Begriff, zu dessen Ableitung und Veranschaulichung man sich wiederum, statt direkt von den Bewegungsbegriffen auszugehen, des Kraftbegriffes als eines überaus zweckmässigen Hilfsmittels bedient. Dieser Begriff ist die Arbeit, und seine Definition eben mit Hilfe des Kraftbegriffes ist diejenige als die Leistung einer Kraft. Nun besteht diese Leistung häufig in der Fortbewegung eines Körpers um eine gewisse Strecke l, sodass man für die Arbeit L die Gleichung erhält

$$L = Rl.$$

Dazu ist jedoch zweierlei zu bemerken. Ist die Kraft eine veränderliche, so muss man die Strecke l in Theile zerlegen, welche Zeiten entsprechen, während deren man R als constant betrachten kann, muss für jede solche Strecke das Produkt Rl bilden und schliesslich alle Produkte addiren; bei stetiger Aenderung der Kraft erhält man also für die Arbeit ein Integral. Sodann strebt zwar jede Kraft eine Bewegung in ihrer eigenen Richtung zu erzeugen, die Bewegung findet aber gerade in dieser Richtung nicht selten Hindernisse, sodass nur eine Componente von ihr nach einer anderen Richtung zur Verwirklichung gelangt; man darf dann auch für R nur die entsprechende Componente der Kraft setzen.

Als Maass der Arbeit ergiebt sich aus der Definition das Produkt des Längenmaasses in das Maass der Kraft. Von letzterem ist jedoch noch nicht die Rede gewesen. Da die Kraft als die Ursache der einer Masse ertheilten Beschleunigung bezeichnet worden ist, so ist dieselbe durch das Produkt mg zu messen. Man pflegt dabei, da es sich in der Physik meist um Vorgänge an der Erdoberfläche handelt, speziell die Beschleunigung zu wählen, welche ein hier fallender Körper erfährt; und indem man diese mit m multiplicirt, erhält man nach der ersten Gleichung dieses Artikels das Gewicht G. Man kann hiernach Kräfte durch Gewichte ausdrücken und gelangt dann zu dem Ergebniss, dass die Arbeit durch das Produkt: Strecke $\times$ Gewicht zu messen ist. Als Einheit der Arbeit dient demgemäss das mit *mkg* bezeichnete Meterkilogramm.[2]

Die Bewegungsarbeit ist jedoch nur eine von den zahlreichen Arten der Arbeit. Es giebt Wärmearbeit, electrische Arbeit u. s. w., und es ist die Aufgabe der betreffenden Disciplinen, zu zeigen, dass und wie diese Arbeiten ebenfalls du·ch Meterkilogramme lich ausdrücken lassen.

Aber selbst wenn man bei den sog. mechanischen Erscheinungen stehen bleibt, hat man es doch nicht immer mit Bewegungsarbeit zu thun; dann z. B. nicht, wenn man ein Gewicht eine Zeit lang hoch hält, oder wenn eine Lokomotive einen Zug, der sonst einen Abhang hinabgleiten würde, im Stehen erhält. Man kann solche Arbeit Spannungs- oder Widerstandsarbeit nennen und die Strecke l jetzt als diejenige definiren, deren Zurücklegung (soweit sie in die Richtung der Gegenkraft fällt) durch die Arbeit verhindert wird.[3]

---

[1]) Es möge jedoch angeführt werden, dass es Physiker giebt, welche diesen Standpunkt nicht theilen, welche vielmehr die Kraft als ein von dem Begriffe der Bewegung getrenntes Abstract-Reales betrachten; so neuerdings Hirn, welcher als drei derartige »Kräfte« die Gravitation, die Wärme und die Elektricität hinstellt.

[2]) In England werden Arbeiten noch vielfach nach Fusspfunden gemessen, deren jedes $= 0{\cdot}13825$ *mkg* ist.

[3]) Durch diese Erweiterung des Arbeitsbegriffes löst man die Widersprüche, welche zwischen ihm und der populären Vorstellung von demselben zu bestehen scheinen, im Wesentlichen auf. Siehe Rausenberger, Lehrbuch d. Analyt. Mech. Leipz. 1888.

Die Arbeit giebt die während einer beliebigen Zeit ausgeübte Leistung; von besonderem Interesse ist die Arbeitsleistung in der Zeiteinheit, welche hiernach in Meterkilogrammen pro Sekunde, *mkg*:*s* auszudrücken ist, häufig jedoch in sogen. Pferdekräften gemessen wird, deren eine 75 *mkg*:*s* umfasst. Die Arbeit pro Sekunde heisst gewöhnlich Effekt.

Zur Messung der Arbeit dienen verschiedene Apparate, z. B. der Prony'sche Zaum, das Bremsdynamometer etc., wobei es sich meist um die durch Rotationsbewegung geleistete Arbeit handelt. Das Nähere gehört jedoch in die Technik.

Energie. Es würde der Bedeutung des Arbeitsbegriffes wenig entsprechen wollten wir bei seiner Definition mit Hilfe des Kraftbegriffes stehen bleiben. Es ist in der That nicht schwer, sich von diesem unabhängig zu machen; man hat nur nöthig auf die Begriffe zurückzugehen, aus denen die Kraft abgeleitet wurde. Dabei soll hier der Kürze halber der Impuls nicht getrennt behandelt, sondern als Kraft von sehr kurzer Dauer mit unter den Begriff dieser gefasst werden. Man sieht dann ein, dass man die Arbeit als das Produkt der drei Grössen Masse, Beschleunigung, Strecke zu definiren hat. Es ist jedoch auch hier wiederum darauf aufmerksam zu machen, dass in der Natur nicht bloss Arbeit geleistet wird, wenn eine Beschleunigung erzielt wird, sondern auch durch Hervorbringung einer gleichförmigen oder selbst einer verzögerten Bewegung. Die Ursache ist wieder die Existenz einer Gegenkraft, z. B. der Reibung. So leistet z. B. die Lokomotive oder die Hand des Menschen fortwährend Arbeit, auch wenn jene den Zug nur gleichförmig fortbewegt und diese die Kurbel nur gleichförmig dreht; in anderen Fällen ist es die Schwerkraft, welche gegenwirkt. Bei den durch den Menschen oder durch Maschinen erzeugten Bewegungen ist dieses Verhalten sogar so allgemein, dass man geradezu sagen kann: Arbeit ist die Ueberwindung von Widerständen.

Der bedeutungsvollen Thatsache, dass einer jeden Bewegung eines Körpers ausser einer bestimmten Geschwindigkeit und Beschleunigung auch eine bestimmte Arbeit entspricht, hat die moderne Physik durch die Einführung eines Begriffes Ausdruck verliehen, welcher sich als äusserst fruchtbringend erwiesen hat. Es ist dies der Begriff der Energie.[1]) Energie ist die Fähigkeit eines Körpers oder allgemeiner, eines Systems von Körpern, Arbeit zu leisten. Diese Fähigkeit nun kann darin beruhen, dass das System sich bewegt, wobei es thatsächlich Arbeit leistet. Man sagt dann, das System besitze kinetische oder aktuelle Energie; mit dem ersten Ausdruck weist man darauf hin, dass die Energie des Systems sich in Bewegung äussert, mit dem zweiten bezeichnet man die blosse Arbeitsfähigkeit des Systems als in aktueller Arbeitsleistung verwirklicht. Das System kann aber auch, ohne in Bewegung zu sein, Energie besitzen, nämlich durch seine Lage zur Erdoberfläche oder zu anderen Systemen oder durch die gegenseitige Lage der es selbst bildenden Körper; diese Art von Energie nennt man configurative oder potentielle Energie; mit der ersteren Bezeichnung drückt man aus, dass der Körper oder das System in seiner Lage oder Gestaltung die Fähigkeit, Arbeit zu leisten, trage; mit dem letzteren weist man darauf hin, dass das System zwar Arbeit leisten kann, dass es aber zu diesem Zwecke erst noch der Umwandlung der Energie in aktuelle bedürfe.

In Bezug auf ihre allgemeine Messbarkeit verhalten sich die beiden Arten

---

[1]) Von zusammenfassenden Büchern über die Energie seien hier hervorgehoben: Planck, Die Erhaltung der Energie, Leipz. 1887, und Zwerger, Die lebendige Kraft und ihr Maass, Münch. 1885.

von Energie verschieden. Für die potentielle Energie lässt sich ein allgemeiner Ausdruck nicht, oder wenigstens nicht ohne complicirten mathematischen Apparat geben; es muss vielmehr die Berechnung der potentiellen Energie in jedem besondern Falle ausgeführt werden. Wohl ist dies aber für die kinetische Energie möglich, und zwar am einfachsten durch Betrachtung einer Arbeitsleistung, welche keinen Widerstand findet; das ist z. B. bei der Wirkung der Erde auf einen frei fallenden schweren Körper der Fall. In der Gleichung

$$L = mgl,$$

die wir auf die Zeit einer Sekunde anwenden wollen, können wir einerseits die Beschleunigung g durch die Differenz der Endgeschwindigkeit v' und der Anfangsgeschwindigkeit v ersetzen; andererseits die Strecke l durch die Geschwindigkeit (denn die in einer Sekunde zurückgelegte Strecke ist ja die Geschwindigkeit); nun ist die Geschwindigkeit am Anfang v, am Ende v', also im Mittel $\frac{1}{2}(v + v')$; es wird also

$$L = \tfrac{1}{2}m(v' - v)(v + v') = \tfrac{1}{2}mv'^2 - \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Während wir also einerseits wissen, dass die Arbeitsleistung der Erde auf den frei fallenden Körper in der Vermehrung seiner kinetischen Energie ihren Ausdruck findet, sehen wir hier L ausgedrückt durch den Werth des halben Produktes aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat am Ende des Zeitintervalls vermindert um den Wert derselben Grösse am Anfange des Zeitintervalls. Diese Grösse muss also die kinetische Energie sein. Die kinetische Energie wird also — und zwar allgemein — gemessen durch das halbe Produkt aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit.[1])

Die Bedeutung des Energiebegriffes lässt sich nur dadurch vollkommen würdigen, dass derselbe dem Begriffe der Materie unmittelbar an die Seite gestellt wird. Jeder Körper besitzt eine bestimmte Menge Stoffes und eine bestimmte Menge von Energie. Der Stoff kann qualitativ sehr verschiedenartig sein, und diese Verschiedenheiten des Stoffes finden in der Chemie ihre Untersuchung. Von der Energie haben wir bisher nur zwei Arten kennen gelernt, die der Lage und die der Bewegung; aber innerhalb jeder dieser beiden Classen sind wiederum verschiedene Arten von Energie denkbar. Und wie als oberstes Prinzip der Chemie das Prinzip von der Erhaltung des Stoffes (d. h. der Quantität desselben) bei allen qualitativen Verwandlungen desselben gilt, so steht an der Spitze der modernen Physik das Prinzip von der Erhaltung der Energie. Das will ebenfalls sagen: Die Quantität der Energie wird durch keine physikalische Erscheinung verändert, es handelt sich vielmehr stets nur um eine qualitative Verwandlung. Ein Stein z. B., der in der Höhe losgelassen wird, besitzt zunächst potentielle Energie; fällt er herab, so verwandelt sich dieselbe mehr und mehr in kinetische Energie, und in dem Augenblicke, wo er die Erde trifft und scheinbar auch diese letzte Art von Energie, die noch in seinem Besitze war, einbüsst, entwickelt sich in ihm und in der getroffenen Erdmasse eine neue Form von Energie, die vielleicht auch Bewegungsenergie, aber jedenfalls nicht sichtbare Bewegungsenergie ist: die Wärme. Und zwar Wärme in einem Betrage, welcher äquivalent ist der verloren gegangenen Bewegungsenergie. In analoger Weise liefern die neueren elektrischen Maschinen imposante Beispiele der Verwandlung von Bewegungsenergie in elektrische und dieser wieder in Lichtenergie.

[1]) Diese Grösse ist vielfach »lebendige Kraft« genannt worden, insofern jedoch mit Unrecht, als es sich hier gar nicht um Kraft irgend welcher Art handelt.

Man kann hiernach die Aufgabe der Physik — in völliger Analogie mit derjenigen der Chemie — dahin präcisieren, dass sie die qualitativen Verwandlungen der Energie, sei es aus potentieller in aktuelle, sei es aus solcher von einer in solche von einer andern specifischen Art, zu beschreiben hat. Will man weiter gehn, so kann man hinzufügen, dass sie schliesslich alle diese Formen der Energie auf eine einzige zurückzuführen hat (wiederum in Analogie mit der Chemie.[1]) F. AUERBACH.

Absolutes Maass und absolute Einheiten.

I. Bedeutung und Definition des absoluten Maasses. Die Erforschung der mannigfaltigen Vorgänge und Erscheinungen, welche in das Gebiet der Physik gehören, beginnt der Natur der Sache nach mit einer Beschreibung und Umschreibung der in Betracht kommenden Thatsachen. Der nächste Schritt besteht in der Ableitung von Regeln, welche gestatten, den Verlauf der Erscheinung unter gegebenen Verhältnissen im Allgemeinen vorauszubestimmen. Schliesslich wird man versuchen, den Vorgang durch eine Reihe von Zahlengrössen darzustellen, welche durch eine oder mehrere Gleichungen so zusammenhängen, dass der eine Theil jener Grössen berechnet werden kann, wenn die übrigen gegeben sind. Ein solches Gleichungssystem kann man als das Gesetz der Erscheinung bezeichnen.

Die meisten physikalischen Gesetze wurden zuerst in der Form von Proportionen aufgestellt. Diese Form darf aber noch nicht als die endgiltige angesehen werden. So findet man z. B. bei der Untersuchung der Fallbewegungen zuerst und verhältnissmässig leicht, dass sich die Fallräume wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten. Die wirkliche Berechnung des Fallraumes aus der Gleichung:

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2$$

erfordert aber noch die Kenntniss einer, gewöhnlich mit g bezeichneten Constanten. Der Werth derselben muss durch Beobachtungen festgestellt werden. Nur wenn auch g bestimmt ist, von welcher Grösse ja auch die Fallgeschwindigkeit abhängt, sehen wir das Problem als völlig gelöst an.

Wir benützen dieses Beispiel zu einer weitergehenden Betrachtung. Man übersieht leicht, dass die in die obige Gleichung einzusetzende Zahl von der Wahl der Einheiten für die Länge und für die Zeit abhängt. Benutzt man das Meter und die Secunde, so ist $g = 9{\cdot}806$ für mittlere Breiten. Ist das Centimeter die Längeneinheit, so ist $g = 980{\cdot}6$, und ist das Meter Längeneinheit, die Minute aber Zeiteinheit, so ist $g = 35301{\cdot}6$. Diese Zahlen ergeben sich aus der Erwägung, dass stets (nach der Gleichung) $g/_2$ der bei dem freien Fall in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg ist. In ähnlicher Weise hängen die Zahlenwerthe der meisten physikalischen Grössen von mehreren Einheiten ab. Für die Ausführung von Rechnungen mit denselben, besonders wenn mehrere verschiedenartige Grössen in derselben Gleichung auftreten, ist es durchaus erforderlich, diese Abhängigkeit von den zu Grunde liegenden Einheiten zu kennen und dem entsprechend die richtigen Zahlenwerthe zu benutzen.

---

[1]) Ein Grenzgebiet zwischen den beiden Wissenschaften ist die »Physik der Materie« oder »Molecularphysik«; s. das grosse Werk von O. LEHMANN, »Molecularphysik«. Lpz. 1888, Bd. I.

Wenn man sich früher meist mit der Ableitung physikalischer Gesetze in Form von Proportionen begnügte, so wurden auch für die meisten physikalischen Constanten (z. B. Leitungsfähigkeiten für Wärme und Electricität, Reibungscoëfficienten von Flüssigkeiten etc.) zuerst nur relative Werthe ermittelt; d. h. es wurde die betreffende Constante für einen beliebigen Körper als Einheit genommen, so z. B. die Leitungsfähigkeit des Silbers oder Quecksilbers gleich eins gesetzt. Je weiter indess die physikalische Forschung fortschreitet, um so mehr macht sich das Bedürfniss geltend, die physikalischen Grössen nicht mehr in relativem, sondern in einem, wie wir es im Gegensatz dazu nennen wollen, absolutem Maass auszudrücken.

Wir geben von dieser Bezeichnung die folgende Definition:

Eine physikalische Grösse ist in absolutem Maass bestimmt, wenn die dieselbe ausdrückende Zahl nicht auf eine willkürliche, sondern auf eine bestimmte Einheit derselben Grössenart bezogen ist, auf eine Einheit, welche, entsprechend ihrer Definition, von gewissen Fundamentaleinheiten abhängt, die allen physikalischen Grössen gemeinsam sind.

Dass die verschiedenen, physikalischen Grössen, welche zusammen in derselben Gleichung auftreten, nothwendig in dem eben definirten Sinne auf dasselbe absolute Maass bezogen werden müssen, haben wir schon hervorgehoben.[1] Aber auch sonst hat die Benutzung absoluter Werthe vor relativen grosse Vorzüge. Grössen, welche an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten beobachtet wurden, können ohne weiteres mit einander verglichen werden, wenn sie nicht auf willkürliche, sondern auf absolute Einheiten bezogen wurden. Aus diesem Grunde hat zuerst F. Gauss[2]) eine wirkliche Messung nach absolutem Maass vorgenommen, indem er die Stärke des Erdmagnetismus auf eine Einheit bezog, welche durch die Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse bestimmt war. Den nächsten und erfolgreichsten weiteren Schritt in der Messung nach absolutem Maass that W. Weber[3]), welcher die electrischen Grössen auf absolute Einheiten zurückführte. In neuerer Zeit ist die Lehre vom absoluten Maass mehrfach in Zusammenhang dargestellt worden. Wir nennen speciell:

Everett. Units and physical Constants. London 1879.

H. Herwig, Physikalische Begriffe und absolute Maasse. Leipzig 1880.

A. Serpieri. Die mechanischen, elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten. Aus dem Italienischen von R. von Reichenbach. A. Hartleben's Verlag 1885.

Cl. Maxwell. A treatise of Electricity and Magnetism. Oxford 1873. (Uebersetzt von B. Weinstein 1883.) Bd. II, Cap. 10.

F. Kohlrausch. Leitfaden der practischen Physik. Leipzig 1887, pag. 311—332.

II. Die Grundeinheiten. Bei der Erörterung der Auswahl derselben möchten wir betonen, dass es sich dabei um eine Frage der Zweckmässigkeit handelt, dass also die Entscheidung für die eine oder andere Gruppe von Ein-

[1]) Von diesem Gesichtspunkt aus giebt schon M. Fourier in seiner berühmten: Théorie analytique de la chaleur Section IX. eine eingehende Untersuchung der in der Wärmetheorie vorkommenden Grössen. Insbesondere mag bemerkt werden, dass derselbe den Ausdruck »Dimension« der Grössen ganz in dem jetzt gebräuchlichen Sinne benutzt. Deutsche Ausgabe von B. Weinstein. Berlin 1884, pag. 95—98.

[2]) Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocula Göttingen. 1832. Gauss Werke 5, pag. 80.

[3]) Elektrodynamische Maassbestimmungen. Abhd. II. und III. (1852.) Abhd. IV. (1857.)

heiten von diesem Gesichtspunkt aus zu treffen ist, wobei wir bemerken wollen, dass auch GAUSS[1]) die Wahl der Einheiten als eine offene Frage angesehen hat. Da die Physik alle in ihr Gebiet gehörenden Erscheinungen durch Bewegungen zu erklären bestrebt ist, die reine Bewegungslehre aber als Grundbegriffe nur Raum und Zeit braucht, so werden wir jedenfalls die Längeneinheit und die Zeiteinheit zu den Grundeinheiten rechnen.[2])

In der Mechanik kommen zu den Begriffen des Raumes und der Zeit diejenigen der Masse und der Kraft. Dieselben lassen sich nicht unabhängig von einander definiren. Sie hängen nach dem Grundprincip der Mechanik dadurch zusammen, dass man die Kraft dem Produkt aus Masse und Beschleunigung proportional setzt.

Hieraus kann man entweder die Definition der Krafteinheit entnehmen, als diejenige Kraft, welche der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung ertheilt, oder man definirt die Masseneinheit als diejenige Masse, welche durch die Krafteinheit die Einheit der Beschleunigung erlangt.

Die erste Definition setzt voraus, dass man die Masseneinheit, die letzte, dass man die Krafteinheit zuvor in anderer Weise festgestellt hat. Zu dieser weiteren Bestimmung pflegt man die Gewichtseinheit zu verwerthen. Setzt man fest, dass ein bestimmtes Gewichtsstück, etwa die übliche Gewichtseinheit, gleichzeitig als Masseneinheit dienen soll, so erhalten wir dadurch eine aus der ersten Definition abzuleitende Krafteinheit. Dies ist das von GAUSS und WEBER benutzte System von Fundamentaleinheiten: Länge, Zeit und Masse-Gewicht. Wird dagegen als Krafteinheit eine bestimmte Kraft, etwa die Anziehung der Erde auf die Gewichtseinheit an einem bestimmten Ort der Erde (etwa unter 45° Breite) gewählt, so erhält man ein anderes Maasssystem, dasjenige, welches bisher in der Praxis und Technik angewandt wurde und auch noch im Gebrauch ist.

Das GAUSS'sche Maasssystem wird häufig ausschliesslich als absolut bezeichnet, während für das letztere die Ausdrücke: conventionell, practisch, irdisch in Anwendung gekommen.

Nach unserer Definition des absoluten Maasses kann man zweifellos auch das zweite System als ein absolutes bezeichnen. Um daher diese Systeme zu unterscheiden, habe ich die Ausdrücke: Masse — Gewicht — System (abgekürzt: M. G. S.) und Kraft — Gewicht — System (K. G. S.) in Vorschlag gebracht.[3])

Dass die Wahl der Einheiten bei dem ersten System bei weitem zweckmässiger ist, wird wohl von Niemand bestritten werden. Wir besitzen bei demselben eine wohl definirte Masseneinheit, welche überall (als Gewichtseinheit) mit grosser Genauigkeit reproducirt werden kann. Die Krafteinheit folgt, wie oben bemerkt, hieraus in unzweideutiger Weise. Bei dem anderen System ist die Krafteinheit nur für einen bestimmten Ort direkt gegeben. Die Anziehung der Erde auf die Gewichtseinheit ist an allen übrigen Orten in Folge der verschiedenen Werthe von g etwas von 1 verschieden. Hiernach ist die abgeleitete Masseneinheit von Ort zu Ort veränderlich. Würde man aber diese Anziehung selbst an jedem Ort als Krafteinheit benutzen, so hätte man eine von Ort zu Ort sich

---

[1]) GAUSS Werke V., pag. 85.

[2]) C. BOHN hat gezeigt, dass man ein absolutes Maasssystem auf diese beiden Einheiten allein beziehen kann. WIEDEM. Annal. 18, pag. 346.

[3]) A. OBERBECK. Ueber die Bezeichnung der absoluten Maasssysteme. WIED. Ann. 31, pag. 335—336. — L. PFAUNDLER. Ueber die Bezeichnung der Maasssysteme. WIED. Ann. 32, pag. 188—191.

ändernde Fundamentaleinheit. Wir werden daher die weiteren Ausführungen hauptsächlich für das GAUSS'sche absolute System geben und nur gelegentlich das K. G. S. noch berühren, wo es sich um Grössen handelt, die in der augenblicklich herrschenden Praxis noch nach diesem System gemessen werden.

III. Die Dimension einer physikalischen Grösse. Jede physikalische Grösse wird durch eine Zahl ausgedrückt, welche durch eine Messung festgestellt werden muss, d. h. durch eine Vergleichung der Grösse mit einer Einheit derselben Grössenart. Letztere Einheit soll aber nicht mehr willkürlich sein, sondern in einer noch näher festzustellenden Weise von den Grundeinheiten abhängen. Verändern wir diese Grundeinheiten ihrem Grössenwerthe nach (benutzt man z. B. das Meter als Längeneinheit anstatt des Centimeters), so ändert sich die Einheit der Grössenart und damit auch der Zahlenwerth der in Frage kommenden Grösse. In diesem Sinne kann man diese Zahl als eine Function der Grundeinheiten ansehen. Es soll zunächst unsere Aufgabe sein, die Form dieser Function zu ermitteln. Wir beginnen mit den einfachsten Fällen.

Eine gegebene Strecke L möge die Anzahl a Längeneinheiten enthalten. Wählen wir eine neue Längeneinheit, welche das n-fache der ersten ist, so erhalten wir als neue Maasszahl: $\frac{a}{n}$.

Enthält eine Fläche F oder ein Volumen V b Flächeneinheiten oder c Volumeneinheiten, so wird die Einführung der neuen Längeneinheit die Benutzung einer neuen Flächeneinheit und einer neuen Volumeneinheit bewirken, wenn wir zuvor festgesetzt haben, dass die Flächeneinheit das Quadrat der Längeneinheit, die Volumeneinheit der Cubus der Längeneinheit sein soll.

Die neuen Zahlen für F und V sind dann b/n^2 und c/n^3.

Im Anschluss an die gewöhnliche Bezeichnungsweise: eine Linie ist ein geometrisches Gebilde von der ersten, eine Fläche von der zweiten Dimension etc. wollen wir hier die Bezeichnungen einführen: Eine Linie ist in Bezug auf die Längeneinheit, von der Dimension 1, eine Fläche von der Dimension 2 etc. Diese Sätze mögen durch die folgende Formulirung ausgedrückt werden:

$$[L] = [l],$$
$$[F] = [l^2],$$
$$[V] = [l^3], \text{ oder allgemein:}$$
$$[A] = [l^\alpha].$$

Der letzte Ausdruck soll bedeuten: Die Grösse A ist in Bezug auf die Längeneinheit von der Dimension α. Dieser Satz soll zunächst nur ein abgekürzter Ausdruck für die folgende Rechenregel sein.

Ist das Maass der Grösse A die Zahl a_1, für die Einheit l_1, so erhält man für dieselbe Grösse die Zahl a_2 entsprechend der neuen Einheit l_2, wenn man:

$$a_2 = a_1\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^\alpha$$

setzt.

Wir werden nun weiter finden, dass die Maasszahlen aller physikalischen Grössen von Potenzen der drei Grundeinheiten, die vorläufig mit x, y, z, bezeichnet werden mögen, abhängen. Das Produkt dieser Potenzen soll die Dimension der Grösse heissen. Wir wollen dies entweder in der folgenden Form ausdrücken:

$$[A] = [x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma]$$

und dies als eine Dimensionsgleichung bezeichnen, oder durch die Gleichung:

$$A = a_1\,[x_1{}^\alpha y_1{}^\beta z_1{}^\gamma],$$

welche bedeuten soll, dass A gleich der durch Messung gefundenen Zahl a_1 ist, wenn die Einheiten $x_1 y_1 z_1$ benutzt werden. Denkt man sich jetzt für eine der Einheiten, z. B. für x_1 die neue Einheit x_2 eingeführt, so kann die Umrechnung der Zahl nach der früheren Regel erfolgen. Da aber der Uebergang zu neuen Werthen der beiden anderen Einheiten y und z unabhängig von x und nach derselben Regel erfolgt, so ist die Dimensionsgleichung

$$[A] = [x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma]$$

der kurze Ausdruck für die folgende, allgemeine Regel:

Ist a_1 der Zahlenwerth der Grösse A bei Benutzung der Einheiten x_1, y_1, z_1, so erhält man für die neuen Einheiten x_2, y_2, z_2 den Zahlenwerth a_2 aus der Gleichung:

$$a_2 = a_1 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^\beta \cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^\gamma.$$

Von besonderer Wichtigkeit ist, wie schon früher bemerkt, die Kenntniss der Dimension für das Rechnen mit physikalischen Grössen. Addition und Subtraction derselben haben nur dann einen Sinn, wenn die Grössen dieselbe Dimension haben. In diesem Fall sind nur die Maasszahlen zu addiren.

Die Multiplication zweier Grössen vollzieht sich, indem man die Zahlenwerthe multiplicirt. Das Produkt hat aber eine andere Dimension wie die Factoren.

Ist:

$$A = a[x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma],$$
$$B = b[x^\delta \cdot y^\varepsilon \cdot z^\eta],$$
$$C = A \cdot B,$$

und setzt man:

$$C = c[x^\mu \cdot y^\nu \cdot z^\rho],$$

ferner: $c = a \cdot b$, so lässt sich mit Rücksicht auf die eigentliche Bedeutung der Dimensionen zeigen, dass:

$$\mu = \alpha + \delta, \quad \nu = \beta + \varepsilon, \quad \rho = \gamma + \eta,$$

oder nach früherer Bezeichnung zu:

$$[C] = [A] \cdot [B].$$

Die Dimension des Produktes ist gleich dem Produkt der Dimensionen der Factoren.

Hieraus lässt sich leicht der allgemeine Satz ableiten:

Alle einfachen Rechenoperationen, welche man mit den Grössen vornimmt, sind auch mit den Dimensionen vorzunehmen, um die Dimension des Resultats zu erhalten. Man kann auch umgekehrt sagen: Rechenoperationen mit physikalischen Grössen, welche auf verschiedene Einheiten bezogen sind, haben nur dann einen Sinn, wenn man nach Ausführung der Rechnung mit den Zahlenwerthen die neue Einheit der resultirenden Zahl feststellt.

Auf Grund dieser Betrachtungen hat es keine Schwierigkeit, die Dimensionen der einzelnen Grössen zu bestimmen.

Zu diesem Zweck ist auf die Definition der Grössen zurückzugehen. Enthält dieselbe die Grundeinheiten direkt, so kann man die Dimension unmittelbar hinschreiben. So wird z. B. das Trägheitsmoment eines festen Körpers definirt als die Summe aller Produkte aus den einzelnen Massen, multiplicirt mit den Quadraten der Entfernungen von der Drehungsaxe, folglich ist die Dimension: $[ml^2]$.

Enthält die Definition abgeleitete Grössen, so hat man die Dimension nach der oben angeführten Regel auszurechnen.

So kann z. B. der Reibungscoëfficient η einer Flüssigkeit auf die folgende Weise definirt werden.

Man findet zunächt, dass die Reibung als eine Druckkraft p aufgefasst werden kann, welche dem Differentialquotienten der Geschwindigkeit senkrecht gegen die Geschwindigkeitsrichtung proportional ist. Indem man dann die Abhängigkeit von der Natur der Flüssigkeit durch den Reibungscoëfficienten ausdrückt, erhält man die Definitionsgleichung desselben:

$$p = \eta \frac{dv}{dx}.$$

Daraus ist die Dimensionsgleichung zu bilden:

$$[p] = [\eta v l^{-1}],$$

oder nach der früheren Regel:

$$[\eta] = [p l \cdot v^{-1}].$$

Setzt man hierin die bekannten Dimensionen (s. die folgende Tabelle I) ein:

$$[\eta] = ([m l^{-1} t^{-2}] \cdot [l] \cdot [t l^{-1}]),$$

so ist:

$$[\eta] = [m l^{-1} t^{-1}].$$

Wenn wir nun zur Zusammenstellung der Dimensionen physikalischer Grössen übergehen, so mag zunächst bemerkt werden, dass es eine ganze Anzahl Grössen giebt, welche ihrer Definition nach unbenannte Zahlen, also unabhängig von allen Grundeinheiten sind. Solche Grössen sind z. B. das specifische Gewicht, die specifische Wärme, der Brechungsexponent. Die übrigen Grössen wollen wir eintheilen in: Grössen aus der Mechanik im weiteren Sinne, d. h. also der Mechanik der festen Körper, der Flüssigkeiten und Gase, Grössen der Wärmelehre, und magnetische und electrische Grössen.

Die Masse, die Länge und die Zeit sollen überall durch die Buchstaben m, l und t bezeichnet werden.

Bei Angabe von Zahlenwerthen werden wir gewöhnlich als Masseneinheit das Gramm, als Längeneinheit das Centimeter, als Zeiteinheit die Secunde benutzen.

IV. Dimensionen von Grössen aus der Mechanik. Nachdem wir die Berechnung der Dimensionen ausführlich besprochen haben, können wir dieselben in der folgenden Tabelle I zusammenstellen. In derselben enthält die erste Colonne die Bezeichnung der Grösse, die zweite den für dieselben gewählten Buchstaben. Es folgt dann ihre Definition und endlich ihre Dimension.

Tabelle I. Dimensionen von Grössen aus der Mechanik.

	Bezeichnung		Definition	Dimension
1.	Geschwindigkeit	v	l/t	lt^{-1}
2.	Beschleunigung	b	v/t	lt^{-2}
3.	Dichtigkeit	δ	m/l^3	ml^{-3}
4.	Kraft	R	mb	mlt^{-2}
5.	Arbeit	L	Rl	ml^2t^{-2}
6.	Lebendige Kraft	U	mv^2	ml^2t^{-2}
7.	Drehungsmoment	D	Rl	ml^2t^{-2}
8.	Trägheitsmoment	K	ml^2	ml^2
9.	Elasticitätsmodel	E	R/l^2	$ml^{-1}t^{-2}$
10.	Druck	p	R/l^2	$ml^{-1}t^{-2}$
11.	Reibungscoëff. bei Flüssigk.	η	pl/v	$ml^{-1}t^{-1}$
12.	Oberflächenspannung	α	pl	mt^{-2}
13.	Specifische Cohäsion	σ	α/δ	l^3t^{-2}

Wir knüpfen an diese Tabelle einige Bemerkungen.

1. Bildet man den Quotienten $\left[\frac{K}{D}\right]$ so ist die Dimension desselben: t^2, übereinstimmend mit der Formel für die Schwingungsdauer eines physischen Pendels:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}.$$

2. Bildet man $\left[\frac{E}{\delta}\right]$ und $\left[\frac{p}{\delta}\right]$, so erhält man die Dimension: $[l^2 t^{-2}] = [v^2]$. Beide Ausdrücke geben bekanntlich (bis auf Zahlenfactoren) die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Schwingungsbewegungen resp. des Schalls in festen, elastischen Körpern und in Gasen.

3. Ist an einem Ort die Beschleunigung der Schwere $= g$, so beträgt dort die Anziehung der Erde auf die Gewichtseinheit: g Krafteinheiten[1]) also in mittlerer Breite: $980{\cdot}6\ [gr\ cm\ sec^{-2}]$. Wenn daher an diesem Ort auf einen Punkt eine Kraft wirkt, welche $= k\ [gr\ cm\ sec^{-2}]$ ist, so kann ein Gewicht von $\frac{k}{980{\cdot}6}\ gr$ den Punkt im Gleichgewicht erhalten, wenn dasselbe an einem Faden wirkt, welcher der Kraftrichtung entgegengesetzt ist und dann über eine Rolle geht.

4. Für den normalen Luftdruck (relativ gemessen durch einen Barometerstand von 76 *cm* bei 0° C.) erhält man den absoluten Werth:

$$76.\ 13{\cdot}596.\ 980{\cdot}6 = 1013300\ [gr\ cm^{-1}\ sec^{-2}].$$

Als ein Beispiel für die Umrechnung auf andere Einheiten mag der Luftdruck auch in dem System $[klgr\ m^{-1}\ sec^{-2}]$ bestimmt werden. Mit Rücksicht auf die früheren Regeln hat man die alte Zahl mit $\left(\frac{1}{1000}\right)^1 \left(\frac{1}{100}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)$ zu multipliciren.

Der Luftdruck ist also auch:

$$101330\ [kgr \cdot m^{-1}\ sec^{-2}].$$

5. Bei der Berechnung von Kräften nach absoluten Einheiten ist dei den Gesetzen, denen dieselben gehorchen, wohl darauf zu achten, ob sie unmittelbar in der Dimension einer Kraft gegeben sind oder ob man noch einen Factor hinzufügen muss. Für die Centrifugalkraft z. B. gilt das Gesetz, dass dieselbe dem Produkt aus Masse, Quadrat der Geschwindigkeit und reciprokem Kreisradius proportional ist. Folglich hat dieselbe die richtige Dimension einer Kraft

$$\left[m l^2 t^{-2} \cdot \frac{1}{l}\right] = [m l \cdot t^{-2}].$$

Man kann dieselbe also unmittelbar aus den gegebenen Werthen in absolutem Maass ausrechnen. Setzt man z. B. den Erdradius für den Aequator: $= 638 \cdot 10^6\ cm$, die Umlaufszeit der Erde $= 86164\ sec$, so ist die Centrifugalkraft am Aequator:

$$= \left(\frac{2\pi}{86164}\right)^2 638 \cdot 10^6 = 3{\cdot}39\ [gr\ cm\ sec^{-2}].$$

Dieselbe ist in absolutem Maass gemessen und auf dieselbe Krafteinheit bezogen, wie $g = 980{\cdot}6$.

Wollte man dagegen die Anziehungskraft zweier Massentheilchen, welche nach dem Newton'schen allgemeinen Gravitationsgesetz proportional dem Produkt der Massen, dividirt durch das Quadrat der Entfernung ist, ohne weiteres diesem Product gleichsetzen, so erhielte man einen Ausdruck von der Dimension $[m^2\ l^{-2}]$, welcher durchaus nicht mit der Dimension der Kraft übereinstimmt.

[1]) Eine Krafteinheit: $gr\ cm\ sec^{-2}$ wird auch mit dem wenig geschmackvollen Namen Dyne bezeichnet.

6. Wir müssen daher einen Factor γ in das Gravitationsgesetz einführen, so dass:

$$R = \gamma \frac{m m'}{r},$$

die anziehende Kraft in absoluten Krafteinheiten darstellt. Man bezeichnet γ als die Gravitationsconstante. Es soll zunächst die Dimension, sodann der Zahlenwerth derselben ermittelt werden.

Aus der Dimensionsgleichung:

$$[m l t^{-2}] = [\gamma \cdot m^2 t^{-2}]$$

erhält man

$$[\gamma] = [m^{-1} l^3 t^{-2}].$$

Zur Berechnung derselben geht man von der Anziehung der Erde, dieselbe als homogene Kugel gedacht, auf die Masseneinheit aus. Da dieselbe einerseits $= 980{\cdot}6$ Krafteinheiten, andererseits $= \gamma \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \delta\right) \frac{1}{R^2}$ ist, so erhält man γ, indem man in den letzten Ausdruck den Mittelwerth des Erdradius und die durchschnittliche Dichte der Erde setzt. Setzt man: $R = 6{\cdot}3646 \cdot 10^8$ *cm*

$$\delta = 5{\cdot}6,$$

so ist:

$$\gamma = 6{\cdot}568 \cdot 10^{-8} [gr^{-1}\, cm^3\, sec^{-2}].$$

Die Kenntnis dieser Constanten giebt erst eine klare Vorstellung von der allgemeinen Massenanziehung. Um dieselbe möglichst anschaulich zn machen, habe ich die folgende Aufgabe behandelt.

Zwei gleich grosse Kugeln seien einander bis zur Berührung ihrer Oberflächen genähert. Wie gross muss der Radius und wie gross das Gewicht der Kugeln sein, wenn ihre Anziehung gleich dem Zug eines Grammes ist, welches an einem über eine Rolle gehenden Faden hängt?

Setzt man den Radius der Kugel $= x$, ihr specifisches Gewicht $= \sigma$, so hat man x aus der Gleichung:

$$\frac{\gamma \left(\frac{4\pi}{3} x^3 \cdot \sigma\right)^2}{(2x)^2} = 980{\cdot}6$$

zu berechnen.

Man findet:

a) wenn $\sigma = 1$ (Wasser),
$x = 241{\cdot}5$ *cm*, das Gewicht: $5{\cdot}902 \cdot 10^7$ *gr* $= 59020$ *kgr*.

b) wenn $\sigma = 21$ (Platin):
$x = 52{\cdot}71$ *cm*, das Gewicht $1{\cdot}288 \cdot 10^7$ *gr* $= 12880$ *kgr*.

In den Lehrbüchern der Mechanik wird bis jetzt selten Rücksicht auf die Dimensionen der Grössen genommen. So findet man z. B. für das dritte Kepler'sche Gesetz vielfach die Gleichung:

$$\frac{M}{4\pi^2} = \frac{a^3}{T^2},$$

wo M die Sonnenmasse, a die grosse Axe einer Planetenbahn, T die Umlaufszeit desselben ist. Eine Berechnung der Sonnenmasse aus dieser Gleichung würde das Hinzutreten einer Constanten erfordern, sodass die Gleichung bei Benutzung der bisherigen Einheiten heissen müsste:

$$\frac{\gamma M}{4\pi^2} = \frac{a^3}{T^2},$$

Ebenso ist die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft für die Bewegung eines Planeten

$$\tfrac{1}{2}M'v^2 - \gamma \cdot \frac{MM'}{r} = E,$$

worin M wieder die Sonnenmasse, M' diejenige des Planeten ist.

Es mag bemerkt werden, dass bei der Erde das zweite (negative) Glied ungefähr doppelt so gross ist als das erste.

7. Wir schliessen diesen Abschnitt mit einer kurzen Besprechung des Kraft-Gewicht-Systems. Dass dasselbe in der Physik und Technik, speciell in der Mechanik, Wärme- und Maschinenlehre, vorwiegend benutzt wurde, lag zum Theil daran, dass man sich oft mit wenig exacten Definitionen physikalischer Grössen begnügte, zum Theil aber auch an der grösseren Anschaulichkeit, welche einige Begriffe bei Benutzung dieses Systems hatten. Wird z. B. eine Arbeit nach Kilogrammetern gemessen, wobei die Arbeitseinheit diejenige Arbeit ist, welche aufgewandt werden muss, um 1 Kilogramm um einen Meter zu heben, so ist diese Ausdrucksweise sehr anschaulich, weil ein Jeder ungefähr die Kraftanstrengung kennt, die nöthig ist, um ein Gewicht zu heben. Exact ist die Definition allerdings nur dann, wenn man hinzufügt, dass die Krafteinheit diejenige Kraft ist, mit welcher die Erde das Kilogramm anzieht. Denn daran ist unter allen Umständen festzuhalten, dass eine Arbeit stets ein Product aus einer Kraft in einen Weg ist.

Auch der Druck einer Flüssigkeit oder eines Gases, ebenso wie die Spannkraft eines Dampfes ist als eine, einer Fläche proportionale Kraft anzusehen. Wird als Maass desselben ein Gewicht angegeben, z. B. für den Atmosphärendruck 1033 *gr* pro *qcm*, so muss darunter wieder eine Kraft verstanden werden, deren Einheit die Anziehung der Erde auf ein Gewichtsstück von einem Gramm ist. Dann aber wird man, wie ich glaube, eine anschaulichere Vorstellung von der Grösse des Drucks erhalten, als wenn man denselben M. G. S. angiebt.

Der Elasticitätsmodul eines Metalls ergiebt sich bekanntlich aus der Dehnung eines Drahtes nach der Gleichung:

$$\lambda = \frac{l \cdot P}{q \cdot E},$$

worin l die Länge des Drahtes, q der Querschnitt, P das spannende Gewicht ist. Im K. G. S. erhält man daher unmittelbar aus dem Versuch: $E = \left(\frac{l}{a}\right)\frac{P}{q}$, d. h. der Dimension nach: $[Kl^{-2}]$. Gewöhnlich findet man die Elasticitätscoëfficienten in der Form $E =$ Zahl $[klgr \cdot mm^{-2}]$ angegeben, z. B. für Eisen:

$$E = 18000\ [klg \cdot mm^{-2}]\ (\text{K. G. S.})$$

oder:

$$E = 18000 \cdot 10^5\ [gr \cdot cm^{-2}]\ (\text{K. G. S.}).$$

Dagegen:

$$E = 1765 \cdot 10^9 \cdot [gr\ cm^{-1}\ sec^{-2}]\ (\text{M. G. S.}).$$

Der Druck auf eine freie Flüssigkeitsoberfläche hängt von der Krümmung derselben nach der Gleichung:

$$p = p_0 + \alpha\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \text{ ab.}$$

Ist der Druck im K. G. S. von der Dimension: Kl^{-2}, so ist: $[\alpha] = Kl^{-1}]$.

Als specifische Cohäsion würde man hier definiren: die Oberflächenspannung, dividirt durch das Gewicht der Volumeneinheit oder:

$$[\sigma] = [\alpha / K / l^3] = [l^2].$$

Hier ist also die specifische Cohäsion von der Dimension l^2. Dies stimmt überein mit der Gleichung für die Steighöhe in Capillarröhren, nach welcher:

$$\sigma \cdot cos\varphi = \tfrac{1}{2} r h \text{ ist.}$$

Auch hier schliesst sich der Dimionsausdruck unmittelbar dem Ergebniss des Versuches an. Der Uebergang von den Maasszahlen im K. G. S. zu denjenigen des M. G. S. bedingt, wenn die Dimension im K. G. S. die Kraft R enthält, eine Multiplication mit G, im entgegengesetzten Fall eine Division mit G. Es tritt aber im ersten Fall an Stelle von R in die Dimension mlt^{-2}, im zweiten Fall an Stelle von m: $Rl^{-1}t^2$. A. OBERBECK.

Allgemeine Mechanik.
(Mechanik starrer Körper.)

Einleitung.

Den Begriff der Mechanik fasst man, selbst wenn man von der technischen Mechanik absieht, also nur die sogenannte **reine Mechanik** in Betracht zieht, in einem weiteren und einem engeren Sinne. Im weiteren Sinne umfasst die Mechanik sämmtliche Erscheinungen, allgemeinen oder speciellen Charakters, welche sich auf die Ruhe oder die Bewegung materieller Körper beziehen. Nun treten aber, wenn man diese Erscheinungen an einem beliebig herausgegriffenen Körper verfolgt, sofort zwei völlig verschiedene Classen von Vorgängen hervor, nämlich solche, bei welchen der Körper zwar im Raume sich verschiebt und dreht, als solcher aber an Volumen und Gestalt ungeändert bleibt, sodass man dasselbe Resultat statt durch Bewegung des Körpers auch durch eine fingirte Bewegung des Raumes erzielen kann, und andererseits solche, bei welchen die einzelnen Theile des Körpers gegen einander sich verschieben, letzterer also Volumen und Gestalt verändert. Es zeigt sich nun, dass für den Verlauf der Vorgänge der letzteren Art der physikalische Charakter der den Körper bildenden Materie, d. h. sein Aggregatzustand von derart maassgebender Bedeutung ist, dass man in dieser Hinsicht die festen, die flüssigen, die gasförmigen Köıper in gesonderten Disciplinen behandeln muss. So kommt es, dass derjenige Theil der Mechanik, welchen man die **specielle Mechanik** nennen kann, in drei Disciplinen zerfällt: Die **Elasticitätslehre** (spec. Mech. der festen Körper), die **Hydromechanik** (spec. Mech. der flüssigen Körper) und die **Aëromechanik** (spec. Mech. der Gase). Dieser speciellen Mechanik ist weiter unten eine Reihe von Artikeln gewidmet.

Es giebt nun aber zahlreiche Vorgänge, bei welchen die Volumen- und Gestaltsänderungen der betreffenden Körper entweder ganz fehlen oder doch von mehr oder weniger unerheblichem Einflusse auf jenen zu untersuchenden Vorgang sind. Man nennt in diesem Falle den Körper einen **starren Körper**,[1]) und die Wissenschaft von der Ruhe und der Bewegung der starren Körper ist,

---

[1]) Ein in diesem Sinne starrer Körper gehört also keinem besonderen Aggregatzustande an; ferner ist in diesem Sinne ein Körper entweder starr oder er ist es nicht; Grade giebt es nicht. Dagegen wird die Bezeichnung Starrheit zuweilen, besonders von Seiten englischer Physiker, auch in einem andern, quantitativen Sinne angewandt, nämlich um den Widerstand gegen Formänderungen auszudrücken. S. z. B. TAIT, Eigenschaften der Materie. Wien 1888, pag. 150.

im Gegensatz zur speciellen Mechanik, die allgemeine Mechanik. Allgemein darf sie desshalb genannt werden, weil die von ihr behandelten Vorgänge nicht diesem oder jenem Aggregatzustande eigenthümlich, sondern aller Materie gemeinsam sind. Unter diesen Umständen wird es einigermaassen begreiflich, dass eine gewisse Uneinigkeit der Ansichten darüber herrscht, ob die allgemeine Mechanik überhaupt eine physikalische oder ob sie nicht vielmehr eine mathematische Disciplin sei, insofern es sich bei ihr lediglich um räumliche Vorgänge handelt. Ist aber die letztere Motivirung schon desshalb nicht entscheidend, weil der der Geometrie mit der Physik gemeinsame Zeitbegriff hier eine nicht minder wichtige Rolle spielt, so wird der physikalische Charakter der allgemeinen Mechanik durch die Erwägung vollends evident, dass zwar der specielle Aggregatzustand der Materie hier gleichgültig ist, dass aber ihr allgemeiner Maassbegriff, der Begriff der Masse, also ein durchaus physikalischer Begriff, hier von grundlegender Bedeutung ist. Gewisse Resultate der Disciplin lassen sich zwar auch ohne Berücksichtigung der Masse ableiten, und es ist demgemäss eine besondere Disciplin »Kinematik« gebildet worden; der Stoff derselben ist aber theils in die Geometrie zu verweisen, theils lässt er sich leicht mit der wirklichen Mechanik vereinigen.

Wenn man bedenkt, dass ein starrer Körper zwei verschiedenartige Veränderungen erfahren kann, eine Verschiebung und eine Drehung, so sieht man ein, dass es eine besonders einfache Classe von Vorgängen geben muss, welche nur in Verschiebungen bestehen. Alle Theile des Körpers führen dann dieselbe Bewegung aus, die räumliche Ausdehnung des Körpers spielt überhaupt keine Rolle. Man nennt demgemäss einen solchen Körper einen materiellen Punkt. Damit ist nur gesagt, dass für die zu untersuchende Erscheinung der Körper als Punkt betrachtet werden kann; die wirkliche Grösse des Körpers bleibt davon gänzlich unberührt, und es kann z. B. bei einem bestimmten Problem die Erde als materieller Punkt betrachtet werden. Hiernach bildet die Mechanik des materiellen Punktes eine Unterabtheilung der Mechanik starrer Körper.

Eine weitere Gliederung entsteht dadurch, dass man die Ruhe (oder wie man diesen Zustand auch nennt, das Gleichgewicht, s. w. u.) und die Bewegung gesondert betrachtet. So ergiebt sich die allgemeine Statik und Dynamik, die Statik und Dynamik fester Körper, die Hydrostatik und Hydrodynamik, die Aërostatik und Aërodynamik.[1]

Wie in allen Gebieten der Physik, so kann man auch in der Mechanik zwei verschiedene Wege einschlagen. Man kann entweder für jede einzelne Erscheinung sich der Beobachtung resp. des Experimentes bedienen. Die so ermittelten speciellen Erscheinungen sind weiter unten in einer Reihe von Artikeln behandelt. Andererseits kann man sich die Aufgabe stellen, sämmtliche Erscheinungstypen aus möglichst wenigen, theils der Erfahrung entnommenen, theils logischen Principien durch rein logische resp. mathematische Operationen abzuleiten. Diese Aufgabe soll im folgenden behandelt werden.

Hierbei würde es sich zunächst um die Feststellung der apriorischen, nicht weiter analysirbaren und definirbaren Grundbegriffe handeln; es ist jedoch dieser Feststellung ein eigener Artikel (s. o. »Grundbegriffe«) gewidmet; wir können uns daher sogleich den Principien der Mechanik zuwenden.

---

[1]) Einige Physiker, so THOMSON und TAIT (»Natural Philosophy«, deutsche Ausgabe, »Hdb. d. theor. Physik«, Braunschw. 1871) nennen das Ganze, also das, was oben Mechanik genannt ist, »Dynamik«, und theilen diese dann ein in »Statik« und »Kinetik«.

Principien der Mechanik.

Es möge hier, vorbehaltlich ihrer späteren Anwendung, eine kurze Zusammenstellung derselben gegeben werden. Auf eine kritische Discussion derselben muss aber verzichtet und hierüber folgendes bemerkt werden. Unter den Begriff Principien hat man im Laufe der Zeit eine Anzahl ziemlich verschiedenartiger Sätze zusammengeworfen, welche theils aus der Erfahrung unmittelbar entnommen, theils logische Folgerungen aus anderen Principien, theils aber nichts anderes als Definitionen gewisser Begriffe sind. Je nach dem Stande der Erkenntniss, und je nach der Auffassung der Grundlagen und Aufgaben der Mechanik ist zu verschiedenen Zeiten und von verschiedenen Gelehrten häufig ein und dasselbe Princip in die erste, zweite oder dritte der obigen Klassen eingereiht worden, und noch gegenwärtig ist die Discussion über Fragen dieser Art nicht geschlossen, und nur so viel kann als Ergebniss derselben endgültig angegeben werden, dass es neben den drei apriorischen Grundbegriffen Raum, Zeit und Materie apriorische Lehrsätze nicht giebt, dass vielmehr das, was früher hierfür gehalten wurde, stets in einer der drei obigen Classen von Principien sich unterbringen lässt. Man unterscheidet auch wohl zwischen Grund- oder Fundamentalprincipien, Axiomen, abgeleiteten Principien, Regeln u. s. w., diese Unterscheidungen sind aber entweder an sich hinfällig oder lassen sich nicht streng durchführen. Auch ist zu bemerken, dass von den Principien das eine umfassender ist, als das andere und oft mehrere der letzteren in sich enthält. Schliesslich ist auf die hochinteressante und für das nähere Verständniss der Principien unentbehrliche, historische Entwickelung derselben hinzuweisen; den Urheber eines bestimmten Principes anzugeben, ist nicht immer möglich, weil, wie jene Geschichte zeigt, die meisten jener Principien sich aus ganz unscheinbaren Anfängen erst ganz allmählich herausgebildet haben.[1])

1. Das Beharrungs-, Trägheits- oder GALILEI'sche Princip. Dasselbe lautet in der ihm von NEWTON gegebenen schärferen Fassung: Jeder Körper verharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern. Ruht also ein Körper, so bleibt er in Ruhe; bewegt er sich geradlinig und gleichförmig, so fährt er fort, dies zu thun; bewegt er sich unter Wirkung einer Kraft geradlinig, aber mit veränderlicher Geschwindigkeit, so bewegt er sich, wenn jene aufhört, geradlinig mit der Endgeschwindigkeit weiter; bewegt er sich unter der Wirkung einer Kraft krummlinig, so bewegt er sich nach Aufhören derselben in der Tangente der Bahn weiter. Dieses Princip enthält, nach der neueren Auffassung, die Definition des Kraftbegriffes (s. Grundbegriffe, pag. 18), insofern festgesetzt wird, dass nicht die Geschwindigkeit, sondern erst deren Aenderung, also die Beschleunigung als Wirkung einer Kraft betrachtet werden soll. Die Beziehung zwischen jener Wirkung und dieser Ursache, also das mathematische Maass der Kraft wird dann durch das

[1]) Ueber die Principien der Mechanik sehe man besonders: THOMSON und TAIT, a. a. O. — MACH, Die Mechanik u. s. w., Leipz. 1883. — DÜHRING, Krit. Gesch. d. Princ. d. Mechanik, Berl. 1873. — H. KLEIN, D. Princ. d. Mechanik u. s. w. Leipz. 1872. — H. STREINTZ, D. physik. Grundlagen d. Mechanik, Leipz. 1883. — Ferner von den Originalwerken, in denen die Principien ausgesprochen werden, namentlich: UBALDI, Mechanicorum liber, Pesaro 1577. — STEVINUS, Hypomnemata, math. Leid. 1608. — GALILEI, Opera. — HUYGENS, Oeuvres. — NEWTON, Phil. nat. princ. math., Lond. 1686. — JAC. BERNOUILLI, Opera, Genf 1744. — JOH. BERNOUILLI, Opera, Laus. 1742. — MAUPERTUIS, Oeuvres, Par. 1752. — EULER, Mechanica, Petr. 1736 u. a. O. — D'ALEMBERT, TRAITÉ DE DYN., Par. 1743. — LAGRANGE, Méc. anal., Par. 1788. —

2. Kraftprincip geliefert. Dasselbe wurde von GALILEI in der Form aufgestellt: Die Beschleunigung ist der einwirkenden Kraft proportional und findet in ihrer Richtung statt. Diese Form darf auch heute noch in Fällen beibehalten werden, wo es sich um wirklich gegebene Kräfte handelt, wie es die Muskelkraft, der Zug von Gewichten u. s. w. sind; in allen anderen Fällen hat man den Ausspruch umzukehren und zu sagen: Der Vorgang einer Bewegung von beobachteter Beschleunigung lässt sich durch eine, dieser Beschleunigung proportionale Kraft beschreiben.

Hiermit, so wie durch die Bemerkungen in dem Art. Grundbegriffe ist der Gegensatz zwischen der früheren metaphysischen und der durch KIRCHHOFF[1]) klar ausgesprochenen, formalen Auffassung des Kraftbegriffes zur Genüge festgestellt, und es leuchtet danach ein, welche Vortheile, aber auch Beschränkungen die letztere Auffassung mit sich bringt. Dagegen erscheint es nicht nothwendig, die der letzteren Auffassung entsprechende, ziemlich umständliche Redeweise allgemein durchzuführen; es soll daher der Kürze halber von Kräften in der bisher gewohnten Weise gesprochen werden, ohne dass damit jedoch eine metaphysische Vorstellung verbunden werden soll.

3. Das Massenprincip: Die Kraft, welche erfordert wird, um einem Körper eine gewisse Beschleunigung zu ertheilen, ist seiner Masse proportional. Wie (1) und (2) die Definition der Kraft, so enthält dieses Princip die Definition der Masse (das weitere hierüber s. Grundbegriffe, pag. 18 f.). Hiernach kann man folgendes Schema aufstellen:

Die	Kraft	1	ertheilt	der	Masse	1	die Beschleunigung	1
„	„	m	„	„	„	m	„ „	1
„	„	km	„	„	„	m	„ „	k
„	„	k	„	„	„	m	„ „	k/m.

Man nennt das Product der Masse in die Geschwindigkeit die Bewegungsgrösse; die Kraft, zuweilen auch bewegende Kraft genannt, wird dann nach dem Obigen durch das Product der Masse in die Beschleunigung, also durch die Aenderung der Bewegungsgrösse gemessen.

4. Das Unabhängigkeitsprincip: Wirken gleichzeitig mehrere Kräfte, so ist die wirkliche Beschleunigung die Resultante der jeder einzelnen Kraft entsprechenden, unabhängig für sich auftretenden Beschleunigungen.. Nach der modernen Auffassung enthält dieses Princip eigentlich nichts anderes, als die Definition des Begriffes, »gleichzeitig wirkende Kräfte«. Aus diesem Princip folgt übrigens, wenn die verschiedenen Kräfte in derselben Richtung wirken, die Proportionalität zwischen Kraft und Beschleunigung (2) in leicht ersichtlicher Weise. Eine anschauliche Vorstellungs- und Anschauungsweise hat dieses Princip gefunden in dem

5. Satz von der Zusammensetzung der Kräfte oder Satz vom Parallelogramm der Kräfte, welcher von STEVIN herrührt. Hiernach kann man mehrere gleichzeitig wirkende und an demselben Punkt angreifende Kräfte in eine einzige zusammenfassen, indem man jede Kraft der Grösse und Richtung nach durch eine von jenem Punkte ausgehende gerade Linie darstellt, zwei beliebige derselben zum Parallelogramm vervollständigt und dessen von dem Punkte

[1]) KIRCHHOFF, Vorl. üb. math. Physik, Mechanik. Leipz. 1876. Es ist übrigens darauf aufmerksam zu machen, dass schon D'ALEMBERT mit voller Klarheit die Forderung stellte, blos die Erscheinungen, nicht aber die dunkeln und metaphysischen Kräfte zu erforschen; a. a. O. discours préliminaire.

ausgehende Diagonale zieht, mit dieser Diagonale und der dritten Kraft ebenso verfährt u. s. w. Nach demselben Principe kann man auch eine einzige gegebene Kraft in Componenten zerlegen; nur ist diese Aufgabe nicht wie jene eine völlig bestimmte, sondern sie lässt im Gegentheil unendlich viele Lösungen zu. Zunächst ist die Zahl der Componenten, in welche man zerlegen will, willkürlich; bei gegebener Zahl ferner sind alle Componenten bis auf die letzte willkürlich, und diese letzte lässt sich dann stets so wählen, dass sich die gewünschte Resultante ergiebt. Völlig bestimmt ist die Zerlegung nur, wenn Zahl und Richtung der Componenten gegeben sind, wenn z. B. die Kraft in drei auf einander senkrechte Componenten zerlegt werden soll. In dem zuletzt besprochenen Sinne ist das Princip als das Princip der Zerlegung der Kräfte zu bezeichnen.

6. Wechselwirkungsprincip oder Gegenwirkungsprincip oder Princip der Gleichheit von Action und Reaction: Die Wirkungen, welche zwei Körper auf einander ausüben, sind gleich und entgegengesetzt gerichtet. Auf beliebig viele Punkte oder Körper ausgedehnt lautet das Princip: Alle Kräfte eines Systems treten paarweise auf, derart, dass zwei zu einem Paare gehörige Kräfte gleiche Grösse und Richtung, aber entgegengesetzten Sinn haben. Es möge bemerkt werden, dass die Gegenwirkung häufig nicht als wirkliche Bewegung, sondern nur als Druck u. s. w. zum Ausdruck kommt. Man kann auch von diesem Principe aus zum Massenbegriffe gelangen, indem man sagt: Gleiche Massen sind solche, bei denen die Wechselwirkung zu gleichen und entgegengesetzten Beschleunigungen führt; und allgemeiner: Ein Körper hat die Masse m, wenn er einem Körper von der Masse 1 das m-fache der Beschleunigung ertheilt, welche er von diesem erfährt.

Die Principien (1), (2) und (6) sind von Newton als die Axiome der Bewegung aufgestellt worden.[1]

7. Das Hebelprincip: Verschiedene Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie den Hebelarmen, an welchen sie wirken, umgekehrt proportional sind.[2]

8. Das Princip der virtuellen Verrückungen oder Geschwindigkeiten.[3] Eine virtuelle Verrückung ist eine bloss gedachte, aber mit den Bedingungen des Systems vereinbare Verrückung; führt man gleich noch den Begriff des virtuellen Moments ein, d. h. das Product aus der Kraft in die auf die Richtung der Kraft bezogene virtuelle Verrückung eines Punktes des Systemes, so kann man das Princip so aussprechen: Wenn ein System im Gleichgewichte ist, so ist für jede Wahl der virtuellen Verrückungen seiner Punkte die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte gleich null. Man kann dafür auch sagen: Die Summe der virtuellen Arbeiten ist null. Dabei ist aber wohlverstanden die Arbeit (s. »Grundbegriffe«, pag. 19) gemeint, welche der gedachten kleinen Verrückung entspricht. Denkt man sich nun den Gleichgewichtszustand durch Ueberführung des Systems durch eine ganze Reihe auf einander folgender Zustände erreicht und dann weiter in andere solche Zustände übergeführt, und betrachtet man dann den Verlauf der gesammten Arbeitsgrösse, so kann man auch sagen: Die gesammte Arbeit erreicht im Gleichgewichtszustande ein Maximum oder ein Minimum.

[1]) Ueber deren heutige Bedeutung s. einerseits Thomson u. Tait, a. a. O., andrerseits Mach, a. a. O., pag. 222 ff.

[2]) Dieses Princip hat streng genommen wenig Berechtigung, an dieser Stelle aufgeführt zu werden, das Weitere sehe man daher unter »Statik« und »Einfache Maschinen«.

[3]) Ubaldi, Galilei, Joh. Bernouilli, Maupertuis und Lagrange haben zur Entwickelung dieses Princips am meisten beigetragen.

Das hier besprochene Princip ist als die Charakteristik des Gleichgewichtszustandes zu bezeichnen. Handelt es sich insbesondere um die Schwerkraft, so entspricht dem Maximum der Arbeit (dem tiefsten Stande des Systems) stabiles, dem Minimum der Arbeit (dem höchsten Stande) labiles Gleichgewicht (s. u. pag. 59).

Eine allgemeinere Betrachtung lehrt, dass das Princip der virtuellen Verrückungen nur ein specieller, nämlich der auf die Massenbewegung bezügliche Fall eines allgemeinen Principes ist, welches aussagt, dass gewisse Vorgänge immer nur in bestimmtem Sinne vor sich gehen, und folglich, wenn in diesem Sinne alles mögliche geschehen ist, zum Gleichgewicht führen. Ausser der Massenbewegung sind die Wärmebewegung und der Ausgleich elektrischer Spannungen Beispiele hierfür.

9. Princip der lebendigen Kraft[1]) (über den Begriff der letzteren s. Grundbegriffe, pag. 22): Der Zuwachs, den die lebendige Kraft eines Systems in irgend einem Zeitintervalle erfährt, ist gleich der Arbeit der wirkenden Kräfte für die Verschiebungen, welche die Punkte des Systems in diesem Zeitintervalle erfahren.

Ein Specialfall des Princips ist das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft: Wenn alle Punkte eines Systems in Lagen zurückgekehrt sind, die sie schon früher einmal hatten, so hat auch die lebendige Kraft des ganzen Systems wieder denselben Werth, den sie damals besass. Insofern die in der Natur vorkommenden Systeme bei den Processen, welche sie durchlaufen, dieses Princip erfüllen, nennt man sie conservative Systeme. In dem ganz speciellen Falle, dass keine Kräfte wirken oder die wirkenden Kräfte immer im Gleichgewicht stehen, ist die lebendige Kraft constant.

10. Princip von der Bewegung des Schwerpunktes.[2]) Der Schwerpunkt eines Systemes von Massen bewegt sich so, als ob in ihm alle Massen vereinigt wären und auf ihn alle Kräfte wirkten. Dieser Satz ist im wesentlichen nicht mehr als eine Definition des Schwerpunktes. Man kann das Princip auch so aussprechen: Die Bewegung des Schwerpunktes eines Systemes ist von den inneren Kräften desselben unabhängig; diese inneren Kräfte gleichen sich nämlich in Bezug auf den Schwerpunkt gerade aus — eine Erwägung, welche den Zusammenhang des in Rede stehenden Princips mit dem Princip der Wechselwirkung (6) erkennen lässt. Eine weitere Form des Princips lautet: Die gesammte Bewegungsgrösse (s. o.) eines Systems ist nur von den äusseren Kräften abhängig; in dieser Form heisst es das Princip von der Quantität der Bewegung.

In dem besonderen Falle, dass die äusseren Kräfte null sind, bewegt sich der Schwerpunkt auf einer geraden Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit, d. h. er gehorcht ganz wie ein isolirter Massenpunkt dem Beharrungsgsgesetze. Dieser Specialfall heisst das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

11. Princip der Flächen:[3]) Zieht man von einem festen Punkte aus nach den Massen eines Systems Radienvectoren und projicirt die von diesen beschriebenen Flächenräume auf eine gegebene Ebene, so ist die Summe dieser mit den zugehörigen Massen multiplicirten Flächenräume von den inneren Kräften unabhängig. Auf einen Specialfall bezieht sich wiederum das Princip von der

[1]) JOH. BERNOUILLI und D'ALEMBERT sind als die wesentlichen Urheber dieses Princips zu bezeichnen.

[2]) Urheber: HUYGENS und NEWTON.

[3]) Urheber: EULER, D. BERNOUILLI und D'ARCY (Mém. de l'Acad. des sciences 1752).

Erhaltung der Flächen: Wenn das Gesammtmoment der Kräfte um die Gerade, deren Projection jener feste Punkt ist, gleich null ist, so ist die Summe aller Produkte aus Massen und zugehörigen Flächen der Zeit proportional. In gewissen einfachen Fällen kann man kurz sagen: In gleichen Zeiten werden gleiche Flächen beschrieben. Auch dieses Princip lässt sich auf das Wechselwirkungsprincip (6) und das Beharrungsprincip (1) zurückführen. Was das Schwerpunktsprincip für fortschreitende Bewegung (Parallelcoordinaten), ist das Flächenprincip für drehende Bewegung (Polarcoordinaten).

12. Princip der kleinsten Wirkung, besser des kleinsten Kraftaufwandes.[1]) In Worte lässt sich dieses Princip am besten folgendermaassen fassen: Unter allen verschiedenen Bewegungsweisen, mittelst deren die Punkte eines conservativen Systems aus einer Configuration in eine andere gelangen können, giebt es eine Bewegungsweise, für welche der Kraftaufwand ein Minimum ist, und diesen Weg schlägt das System von selbst ein.

13. Das Princip des kleinsten Zwanges. Dieses von Gauss[2]) aufgestellte, also verhältnissmässig neue Princip lautet: In einem in seinen Bewegungen nicht völlig freien, sondern gewissen Bedingungen unterworfenen System erfolgt die Bewegung derart, dass der Zwang, d. h. die Abweichung von der freien Bewegung ein Minimum ist. Das Princip steht zu dem folgenden in naher Beziehung.

14. Das d'Alembert'sche Princip.[3]) Dieses Princip ist im Wesentlichen nur eine andere Fassung des Gegenwirkungsprincips (6) und lautet: Die sämmtlichen an den Punkten eines Systems wirkenden äusseren Kräfte sind zusammen mit den im System auftretenden, in den Produkten aus Massen und Beschleunigungen ihren Ausdruck findenden Gegenwirkungen im Gleichgewicht. Das Princip ist insofern sehr nützlich, als es gestattet, von jedem Gleichgewichtsprobleme durch Hinzufügung jener Produkte zu dem entsprechenden Bewegungsprobleme überzugehen. Auch mit dem Princip der virtuellen Verrückungen 8. steht das Princip in nahem Zusammenhange; es lässt sich als dessen Erweiterung vom Falle des Gleichgewichts auf den der Bewegung bezeichnen.

15. Das Hamilton'sche Princip. Dasselbe ist im Wesentlichen nur ein mathematisch anderer Ausdruck des d'Alembert'schen (14), lässt sich aber in Worten kaum wiedergeben. Vor der d'Alembert'schen Form hat es den Vorzug grösserer Kürze im Ausdruck, da es nicht auf die einzelnen Kraftcomponenten zurückgeht, sondern, im Anschluss an das Princip der lebendigen Kraft (9), der Begriffe lebendige Kraft und Arbeit sich bedient.

Von den beiden Principien (14) und (15) wird später bei Aufstellung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen, welche ebenfalls nur ein anderer Ausdruck desselben Gedankens sind, noch die Rede sein.

16. Das Princip von der Erhaltung der Energie.[4]) In seiner allge-

[1]) Gefunden resp. aufgestellt von Maupertuis.

[2]) Gauss, Crelle J. Bd. 4, Werke V, pag. 26.

[3]) Heisst wohl auch Princip der verlorenen Kräfte; »verlorene Kräfte« sind dann solche, welche in Folge des Zusammenhanges der Theile des starren Körpers sich gegenseitig aufheben — Es scheint schon vor d'Alembert, wenn auch nicht mit voller Kenntniss seiner Bedeutung, von Fontaine (1739) gefunden worden zu sein.

[4]) Von Helmholtz zuerst ausgesprochen: »Die Erhaltung der Kraft«, Berl. 1847; Wiss. Abhandlungen, Bd. I, pag. 12. — Rob. Mayer hat das Princip, aber nicht frei von metaphysischen Vorstellungen, schon vorher erkannt; Bem. üb. die Kräfte d. unbelebten Natur, Ann. d. Ch. 42, 1842. — Ueber den Antheil von Colding und Joule s. »Mechanische Wärmetheorie«.

meinsten Fassung lautet dieses Princip: Bei keinem Vorgange in der Natur geht Energie (s. »Grundbegriffe«, pag. 21) verloren, sondern es findet nur Umwandlung von Energie einer Art in Energie einer andern Art statt. In dieser Fassung geht das Princip über den Rahmen der Mechanik weit hinaus und wird zum Canon der gesammten Physik. Die beiden Arten von Energie, welche speciell in der Mechanik starrer Körper fortwährend in einander übergehen, sind die kinetische Energie (früher lebendige Kraft genannt) und die potentielle Energie oder configurative Energie (früher todte Kraft oder auch Spannkraft genannt).

Allgemeine Bemerkungen zur Mechanik.

Die Begriffe von Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft sind bereits in dem Art. »Grundbegriffe« aus den Grundbegriffen abgeleitet und ihr Maass festgestellt worden. Diese Begriffe sind nun sämmtlich benannte Grössen, und zwar Richtungsgrössen. Zum Zweck der mathematischen Behandlung ist es in den meisten Fällen erforderlich, diese Richtungsgrössen durch reine Zahlengrössen zu ersetzen; hierzu dient das Unabhängigkeitsprincip (4) oder das Princip der Zusammensetzung resp. Zerlegung der Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte.

Gewöhnlich legt man der Betrachtung ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde. Ist dann R die Kraft und sind $\alpha\beta\gamma$ die Winkel, welche sie mit den Achsen bildet, so erfolgt die gewünschte Zerlegung in die Componenten XYZ, welche keine Richtungsgrössen mehr sind, weil jeder von ihnen eine ganz bestimmte Richtung ein für alle Mal zukommt, durch die Formeln

$$X = R\cos\alpha, \qquad Y = R\cos\beta, \qquad Z = \cos\gamma. \tag{1}$$

Umgekehrt ist, wenn XYZ bekannt sind, die Grösse R und ihre Richtung durch die Formeln bestimmt:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \tag{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \tag{3}$$

Ganz analog gelten, wenn G die Geschwindigkeit ist und uvw ihre rechtwinkligen Componenten sind, die Formeln:

$$u = G\cos\alpha, \qquad v = G\cos\beta, \qquad w = G\cos\gamma, \tag{4}$$

$$G = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \tag{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w_2}}, \quad \cos\beta = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}. \tag{6}$$

Zu beachten ist in beiden Fällen, dass sowohl die Geschwindigkeit und die Kraft als auch die Axen einen bestimmten Sinn haben, und dass folglich, je nachdem die oben vorkommenden Winkel spitze oder stumpfe sind, die entsprechenden Cosinus positiv oder negativ zu nehmen sind.

Für andere Coordinatensysteme nehmen die Formeln verwickeltere Gestalt an; es ist dieserhalb auf die bezüglichen Probleme, bei welchen sie Anwendung finden, zu verweisen.

Häufig ist es erforderlich oder zweckmässig, von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem andern überzugehen. Es gelten dann, wenn xyz und $x'y'z'$ die Coordinaten desselben Punktes in den beiden Systemen sind, die Formeln:

$$\begin{aligned} x' &= a + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y' &= b + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z' &= c + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \tag{7}$$

und zwar sind abc die Coordinaten des Anfangspunktes des xyz-Systems im $x'y'z'$-System, und die andern 9 Constanten sind:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = \cos(xx'), & \alpha_2 = \cos(yx'), & \alpha_3 = \cos(zx'), \\ \beta_1 = \cos(xy'), & \beta_2 = \cos(yy'), & \beta_3 = \cos(zy'), \\ \gamma_1 = \cos(xz'), & \gamma_2 = \cos(yz'), & \gamma_3 = \cos(zz'). \end{array} \tag{8}$$

Aehnliche Formeln gelten auch für die Ausdrücke der Geschwindigkeitscomponenten eines Punktes in zwei rechtwinkligen Coordinatensystemen. Da nämlich

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \quad \text{und} \quad u' = \frac{dx'}{dt}, \quad v' = \frac{dy'}{dt}, \quad w' = \frac{dz'}{dt}$$

ist, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} u' &= \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w, \\ v' &= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w, \\ w' &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Geschwindigkeit G selbst ist natürlich vom Coordinatensystem unabhängig, d. h. es ist

$$G = G' = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}.$$

Man braucht, um dies auch mathematisch einzusehen, nur zu erwägen, dass nach den Gleichungen (9) in Vergleichung mit den Gleichungen (7), $u'v'w'$ und uvw sich ansehen lassen als die Coordinaten eines und desselben Punktes in zwei Systemen, die denselben Anfangspunkt haben; die Geschwindigkeit selbst wird dann durch die gerade Linie von diesem Anfangspunkte nach jenem Punkte dargestellt, also in beiden Systemen durch dieselbe Grösse.

Die Geschwindigkeit G kann man noch in einer anderen Weise ausdrücken, wenn man auf ihre Definition zurückgeht und die einander entsprechenden Zeit- und Bahnelemente mit dt und ds bezeichnet; es ist alsdann

$$\begin{gathered} G = \frac{ds}{dt} \quad \text{und ferner} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \\ \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \end{gathered} \tag{10}$$

Endlich gelangt man zu den Beschleunigungscomponenten, oder, wenn die Masse des betrachteten Punktes gleich der Einheit angenommen wird, zu den Kraftcomponenten durch die Formeln

$$\begin{gathered} \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \\ \begin{aligned} X' &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \\ Y' &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \\ Z' &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z, \end{aligned} \end{gathered} \tag{11}$$

und es ist wieder, wie hieraus hervorgeht, die Kraft selbst

$$R = R' = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}. \tag{12}$$

Jedes physikalische Problem zerfällt, mathematisch betrachtet, in drei Aufgaben: in die mathematische Formulirung, in die mathematische Behandlung und in die Deutung und Verwerthung der mathematischen Ergebnisse.[1]) Die Formulirung nun kann in verschiedener Weise geschehen. Handelt es sich z. B. um ein mechanisches Problem, also um die Bewegung

[1]) Dieser Gang der Untersuchung stellt sich hiernach als ein Umweg dar; der Umweg ist aber unvermeidlich, weil die zu behandelnden Vorgänge viel zu complicirt sind, als dass man ihnen durch bewusste Verstandesoperationen mit alleinigem Gebrauch der Wortsprache folgen könnte.

eines Körpers, den wir uns der Einfachheit halber als materiellen Punkt vorstellen wollen, so ist die nächstliegende Formulirung die, dass man den Ort des Punktes, also seine Coordinaten xyz als Functionen von t darstellt. Eine weitere Behandlung, also der zweite Theil der Aufgabe fällt dann ganz fort, die Lösung ist fertig und kann sofort verwerthet werden. Indessen ist diese Formulirung in den meisten Fällen nicht durchführbar, oder sie ist sehr verwickelt. Es ist oft einfacher, die Geschwindigkeit des Punktes, also uvw als Functionen von t anzugeben, es muss dann aber noch, damit das Problem ein bestimmtes sei, der Ort des Punktes zu irgend einer Zeit, z. B. am Anfang der Bewegung gegeben sein; die Formulirung lautet alsdann

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Die mathematische Behandlung besteht in diesem Falle in der Integration der ersten drei Gleichungen, in denen uvw gegebene Functionen von $xyzt$ sind, und in der Bestimmung der dabei auftretenden 3 Constanten durch die letzten 3 Gleichungen.

Auch diese Formulirung ist jedoch nur in Ausnahmefällen die geeignetste. In den meisten übrigen spricht schon die gewöhnliche Redeweise von Kräften, um die Erscheinung recht einfach auszudrücken; die einfachste Formulirung wird daher ebenfalls durch die Kräfte oder, was dasselbe ist, durch die Beschleunigungen erfolgen; das Schema ist dann das folgende:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \frac{dx}{dt} = u_0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0, \quad \frac{dz}{dt} = w_0 \quad \text{für } t = 0.$$

XYZ sind dabei gegebene Functionen von $x\,y\,z\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dz}{dt}\,t$, dagegen sind $x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0$ gegebene Constanten. Letztere dienen dazu, die bei der Integration der ersten drei Gleichungen auftretenden willkürlichen Constanten zu bestimmen.

Ueber die Beschleunigungen hinaus zu höheren Differentialquotienten fortzuschreiten hat sich für die Formulirung der in der Natur vorkommenden Bewegungserscheinungen nicht als vortheilhaft erwiesen.[1] F. Auerbach.

Statik.

Statik des materiellen Punktes. Damit ein materieller Punkt (s. o. pag. 33) im Gleichgewicht sei, muss die Resultante aller an ihm wirkenden Kräfte Null sein. Hieraus folgt aber im Hinblick auf (12), dass die Resultante aller X-Componenten für sich null sein, und dass dasselbe von den beiden anderen Componenten gelten muss. Es findet also der Satz statt:

Damit ein materieller Punkt sich im Zustande des Gleichgewichts befinde, ist nothwendig und hinreichend, dass die algebraischen Summen der nach drei beliebigen auf einander senkrechten Richtungen genommenen Componenten aller auf den Punkt wirkenden Kräfte verschwinden.

---

[1]) Kirchhoff, Vorl. üb. math. Phys. Mechanik. Leipz. 1876.

Es ist hiernach des weiteren leicht einzusehen, dass im Falle des Gleichgewichts die Resultante aller Kräfte mit Ausnahme der letzten dieser letzten gleich und entgegengesetzt sein wird.

Handelt es sich um einen Punkt, dessen Bewegung gewissen Bedingungen oder, wie man sagt, einem Zwange unterworfen ist, so ist die obige Gleichgewichtsbedingung zwar immer noch hinreichend, aber nicht mehr nothwendig; wenigstens, so lange keine nähere Erläuterung hinzugefügt wird. Es sind hier besonders zwei Fälle von Wichtigkeit:

a) Der Punkt ist gezwungen sich auf einer gegebenen Fläche zu bewegen, deren Gleichung $\varphi(x, y, z,) = 0$ ist. Wählt man alsdann das Coordinatensystem so, dass zwei seiner Axen in die in dem Punkte an die Fläche gelegte Tangentialebene fallen, so genügt es, dass diese beiden Componenten, also auch ihre Resultante, verschwinde; denn die dritte, auf der Fläche normale Componente könnte den Punkt nur aus der Fläche herausziehen, oder in sie hineindrücken (wenn man sich die eine Seite der Fläche als die äussere, die andere als die innere vorstellt); beides ist aber nach der Voraussetzung ausgeschlossen. Man kann also sagen: Damit ein auf einer Fläche beweglicher Punkt im Gleichgewicht sei, muss die Resultante der auf ihn wirkenden Kräfte normal zur Fläche sein. Man kann aber auch für diesen Fall die obige, für einen freien Punkt giltige Gleichgewichtsbedingung festhalten, wenn man sich den Zwang, auf der Fläche zu bleiben, als eine Kraft vorstellt, welche alsdann jener Normalkraft gerade gleich und entgegengesetzt anzunehmen ist, sodass die Resultante aller Kräfte wie oben Null ist. Es ist noch zu bemerken, dass es im Allgemeinen nur einen oder einzelne Punkte auf der Fläche geben wird, in welchen der materielle Punkt im Gleichgewicht sich befindet; dieser Punkt, also die Gleichgewichtslage ist nach den Regeln der analytischen Geometrie durch die beiden, zu der Flächengleichung hinzukommenden Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big/ X = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big/ Y = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big/ Z.$$

Ist die Fläche nicht, wie hier angenommen wurde, vollkommen glatt, sondern rauh, so tritt Reibung ein, die man, wie den Zwang als eine normale, als eine tangentiale Kraft einführen kann. Es braucht dann auch die Resultante der Tangentialkräfte nicht gänzlich zu verschwinden, sie muss nur kleiner sein als die Reibung. (Näheres s. »Reibung«.)

b) Der Punkt ist sogar gezwungen, sich auf einer gegebenen Curve zu bewegen. Dann genügt es, wenn die längs der Curve genommene Componente der Kräfte verschwindet, oder mit andern Worten: die Resultante der Kräfte muss in der Ebene liegen, durch welche die Curve in dem Gleichgewichtspunkte senkrecht hindurch geht. Da hiernach der Winkel x zwischen der Resultante und der Tangente der Curve ein rechter sein muss, für diesen Winkel aber, wenn ds das Curvenelement ist, die Formel

$$\cos\psi = \frac{X}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\frac{dz}{ds}$$

gilt, so ist die Gleichgewichtslage des Punktes, ausser durch die beiden gegebenen Curvengleichungen, durch die Gleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

bestimmt. Auch hier kann man wiederum den Zwang, auf der Curve zu bleiben, als eine Gegenkraft einführen und dann den Satz beibehalten, dass die Resultante aller Kräfte null sein muss.

Ist die Curve rauh, und wird die Reibung mit η bezeichnet, so tritt an die Stelle der letzten Gleichung die neue

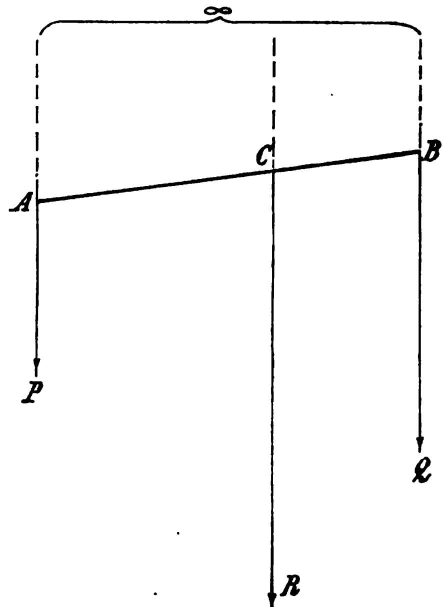
$$Xdx + Ydy + Zdz - \eta ds = 0.$$

Es existirt alsdann, statt eines Gleichgewichtspunktes, eine ganze Gleichgewichtsstrecke, deren Grösse von der Reibung abhängt.

Statik verbundener Punkte. Sobald es sich um mehr als einen Punkt handelt, ist es erforderlich, den Begriff des Angriffspunktes der Kraft einzuführen. Als Angriffspunkt einer Kraft kann man ganz allgemein denjenigen Punkt bezeichnen, dessen Bewegung durch die Kraft auch dann noch bestimmt wird, wenn derselbe von seinen Verbindungen mit andern Punkten befreit wird.[1] Verbundene Punkte sind im allgemeinsten Sinne solche, deren Bewegungen auf einander von Einfluss sind; im specielleren Sinne solche, deren Entfernung von einander nur zwischen gewissen Grenzen variiren kann (elastisch verbundene Punkte); in noch speciellerem Sinne solche, deren gegenseitige Entfernung höchstens einen gegebenen Werth haben darf (Punkte, die durch einen biegsamen, aber unausdehnbaren Faden verbunden sind); im speciellsten Sinne endlich solche, deren Entfernung stets dieselbe ist (starr verbundene Punkte). Hier ist zunächst von starr verbundenen Punkten die Rede.

Greifen an zwei starr verbundenen Punkten A und B (Fig. 6) die parallelen Kräfte P und Q an, so lassen sie sich zu einer einzigen R zusammensetzen, welche dieselbe Richtung hat, so gross wie beide einzelnen zusammengenommen ist, und an einem Punkte C angreift, welcher AB im umgekehrten Verhältni se der Kräfte P und Q theilt, so dass also

$$P : CB = Q : AC.$$



(Ph. 6.)

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf das Princip der virtuellen Verrückungen (Princip 8, s. hierüber unten) oder auf das von Manchen als Princip betrachtete Hebelgesetz (Princip 7). Es ist aber leicht einzusehen, dass das Princip vom Parallelogramm der Kräfte vollkommen ausreicht, da es den vorliegenden Fall als Specialfall enthält. Es ist hierzu nur nöthig zu bemerken, dass man den Angriffspunkt einer Kraft nach Belieben in deren Richtung verschieben darf, wenn man in dieser Richtung eine starre Verbindung sich denkt. Verlängert man nun PA und QB über A resp. B hinaus bis zu ihrem im Unendlichen gelegenen Schnittpunkt, in welchen auch die Verlängerung von RC mündet, so hat man ein Parallelogramm mit dem unendlich kleinen Winkel $A \infty B$. Die Diagonale ∞CR desselben ist dann offenbar 1. parallel mit den Seiten ∞AP und ∞BQ; 2. gleich ihrer Summe, und 3. theilt sie den spitzen Winkel, also auch jede durchgelegte Linie AB im umgekehrten

[1]) Es können Kräfte auch an Flächen und Körpern angreifen, und man spricht daher im Allgemeinsten vom »Angriffsworte« der Kraft; für denselben lässt sich aber meist ein »Angriffspunkt« substituiren.

Verhältniss der Seiten P und Q. Ist der Punkt C starr, d. h. unbeweglich, so ist Gleichgewicht vorhanden. Damit ist der Satz vom Hebel abgeleitet; man schreibt ihn meist in der Form:

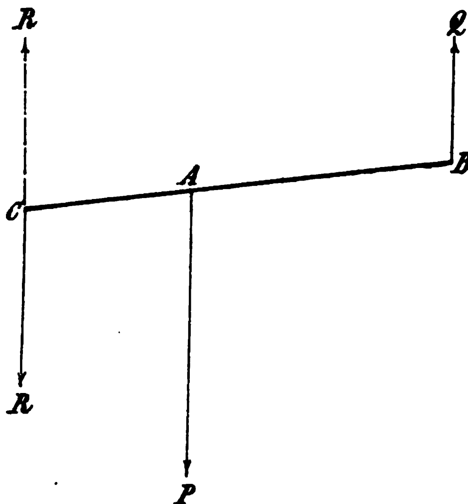
$$P \cdot AC = Q \cdot BC,$$

nennt diese Producte die statischen Momente, und sagt: Der Hebel ist im Gleichgewichte, wenn die statischen Momente der Kräfte gleich sind. Ist speciell $P = Q$, so ist auch $AC = BC$, der Hebel ist gleicharmig (s. »Einf. Maschinen«).

Ist hiernach die Resultante zweier Parallelkräfte bestimmt, so ist es klar, dass die Kraft, welche man anbringen muss, um durch ihr Zusammenwirken mit den beiden gegebenen Gleichgewicht hervorzubringen, diejenige ist, welche jener Resultante an Grösse gleich, an Richtung entgegengesetzt ist und in demselben Punkte angreift.

Wenn die beiden Kräfte P und Q zwar immer noch parallel sind, aber (Fig. 7) entgegengesetzte Richtung haben, so giebt es ebenfalls eine Resultante R; aber sie ist gleich $P - Q$, hat die Richtung der grösseren (P) und greift in einem Punkte der Verlängerung von BA über A hinaus, C an, der so liegt, dass

$$P \cdot AC = Q \cdot BC. \quad (1)$$



(Ph. 7.)

Die entgegengesetzte Kraft R' hält wiederum den Kräften P und Q das Gleichgewicht; allemeiner: jede der 3 Kräfte P, Q, R' hält den beiden andern Gleichgewicht, und es gilt die Proportion:

$$P : Q : R' = BC : AC : AB, \quad (1a)$$

in Worten: Drei parallele Kräfte erzeugen Gleichgewicht, wenn die grösste den beiden andern entgegengesetzt gerichtet ist, und wenn sie den Abständen der Angriffspunkte der beiden andern von einander respective proportional sind.

Die Resultante R der Kräfte P und Q wird immer kleiner und wirkt immer mehr von A nach links, je kleiner die Grössendifferenz von P und Q wird. Für $P = Q$ wird $R = 0$ und $BC = \infty$. Es giebt alsdann keine Resultante. In der That lehrt die Erfahrung, dass keine Verschiebung der Linie AB, sondern nur eine reine Drehung derselben erfolgt, welche sich durch eine einzige Kraft weder erreichen noch aufheben lässt. Man nennt zwei derartige gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte ein Kräftepaar.

Kräftepaare. Der senkrechte Abstand der beiden Kräfte heisst Hebelarm, das Produkt desselben mit der Grösse der Kraft heisst das Moment des Kräftepaares. Es lassen sich leicht folgende drei Sätze beweisen:

Ohne dass die Wirkung des Kräftepaars auf das System geändert wird, und unter der Voraussetzung, dass die neuen Angriffspunkte mit den alten starr verbunden sind, darf

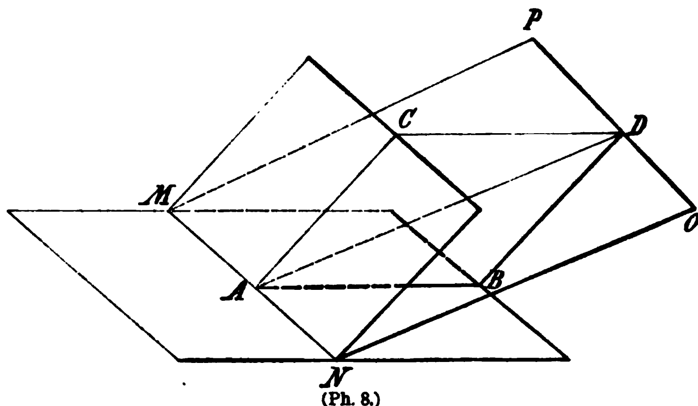
1. dasselbe parallel mit sich verschoben werden;
2. dasselbe in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt gedreht werden;
3. sein Hebelarm und die Kraftgrösse in umgekehrten Verhältnissen verändert werden, so dass das Moment dasselbe bleibt.

Hiernach sind für ein Kräftepaar überhaupt nur zwei Dinge

charakteristisch; die Richtung der Ebene, in der es liegt, und sein Moment.

Kräftepaare, welche in derselben oder in parallelen Ebenen liegen, lassen sich zu einem einzigen, in einer ebenfalls parallel gerichteten Ebene gelegenen Kräftepaar vereinigen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen ist, wobei als positiv die Momente derjenigen Kräftepaare zu rechnen sind, welche eine Drehung in dem einen, als negativ die Momente derjenigen, welche eine Drehung im entgegengesetzten Sinne hervorzubringen streben.

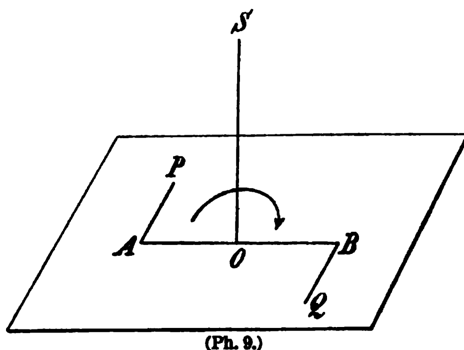
Wie also bei der Zusammensetzung von Parallelkräften die Kraftgrössen, so sind hier die Momente algebraisch zu summiren; während aber dort ausserdem noch der Angriffspunkt zu bestimmen ist, kommt hier keine weitere Bestimmung hinzu.



(Ph. 8.)

Liegen zwei Kräftepaare (Fig. 8) in verschiedenen Ebenen, die sich in der Geraden *MN* schneiden, so erhält man das resultirende Kräftepaar, wenn man senkrecht auf *MN* die den einzelnen Momenten gleichen Linien *AB* und *AC* und zu dem durch sie gebildeten Parallelogramme die Diagonale *AD* construiert; *AD* ist dann das Moment und die Ebene *MNOP* die Ebene des resultirenden Kräftepaares. Man kann diesen Satz als den Satz vom Parallelogramm der Kräftepaare bezeichnen. Ebenso findet man die Resultante vieler Kräftepaare durch fortgesetze Parallelogramm-Construction.

Diese Darstellung der Momente durch Linien in den Ebenen der Kräftepaare hat den principiellen Uebelstand, dass hierdurch das Moment eines einzigen gegebenen Kräftepaars unbestimmt bleibt; es wird seiner Richtung nach erst mit Hilfe der Schnittlinie der Ebene mit der eines andern Kräftepaars bestimmt. Man macht sich hiervon frei, wenn man das Moment eines Kräftepaars darstellt durch eine an Länge ihm gleiche Linie *OP*, welche (Fig. 9) senkrecht auf seiner Ebene steht, und zwar nach einer durch Uebereinkunft bestimmten Seite, z. B. so, dass, wenn man in *OS* auf der Ebene steht, man die durch das Kräftepaar angestrebte Drehung von links nach rechts vor sich gehen sehen würde. Man nennt diese Linie die Axe des Kräftepaars. Sie kann gemäss den obigen Sätzen genau so behandelt werden wie eine Kraft, nur dass sie ausserdem auch noch parallel mit sich verschoben werden darf. Gewöhnlich denkt man sich, um die Anschauung zu fixiren, die Axe in der Mitte des Hebelarms errichtet.



(Ph. 9.)

Ein Kräftepaar, dessen Axe die Winkel $\alpha\beta\gamma$ mit den Coordinatenachsen bildet, kann man hiernach in drei Kräftepaar-Componenten zerlegen, deren Axen resp. die x-, die y-, die z-Axe, und deren Momente, wenn m das gegebene ist, gleich $m \cos\alpha$, $m \cos\beta$, $m \cos\gamma$ sind.

Zerlegung einer Kraft in eine Kraft und ein Kräftepaar. Wir haben gesehen, dass man wohl ein Kräftepaar, nicht aber eine Kraft parallel mit sich verschieben kann, ohne die Wirkung zu ändern. Wohl aber kann man eine Kraft parallel mit sich verschieben, wenn man zu der verschobenen Kraft noch ein Kräftepaar hinzunimmt, dessen Moment gleich dem Producte der Kraft in deren senkrechte Verschiebung ist.

Man nennt auch bei einer Kraft, welche auf einen nicht in ihrer Richtung liegenden Punkt wirkt, den senkrechten Abstand beider den Hebelarm der Kraft und das Product desselben in die Kraftgrösse das Moment der Kraft. Man kann dann den obigen Satz kürzer so aussprechen: Eine Kraft darf parallel mit sich auf einen andern Angriffspunkt übertragen werden, wenn ein Kräftepaar in der Verschiebungsebene hinzugefügt wird, dessen Moment gleich dem Moment der Kraft in Bezug auf den neuen Punkt ist. Zum Beweise dieses Satzes braucht man sich nur in dem neuen Angriffspunkte zwei der gegebenen gleich grosse entgegengesetzte Kräfte R und $-R$ angebracht zu denken; erstere ist die verschobene Kraft, letztere setzt sich mit der ursprünglich gegebenen zu dem Kräftepaar zusammen.

Umgekehrt kann man jede gegebene Kraft mit jedem in derselben Ebene gegebenen Kräftepaar zu einer einzigen Kraft vereinigen, indem man letzteres so lange dreht und verschiebt, bis eine seiner beiden Kräfte in demselben Punkte, aber in entgegengesetztem Sinne angreift wie die Kraft; macht man die Kraftgrösse des Paars, unter entsprechender Aenderung seiner Armgrösse, derjenigen der Kraft gleich, so heben sich die gegebene Kraft und die ihr entgegengesetzte Kraft des Paars auf, und es bleibt nur eine einzige Kraft übrig, und zwar eine der gegebenen an Grösse und Richtung gleiche, die sich von ihr nur durch den Angriffspunkt unterscheidet.

Eine Kraft und ein in einer dazu geneigten Ebene liegendes Kräftepaar lassen sich auf ein kleineres Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht auf der Kraft steht, und eine der gegebenen gleiche und parallele Kraft zurückführen. Denn man kann das Paar in eines senkrecht, und in ein zweites, dessen Ebene die Kraft enthält, zerlegen, und dann letzteres nach dem obigen mit der Kraft zu einer Kraft vereinigen.

Statik starrer Körper. Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Systems unendlich vieler, starr unter einander verbundener materieller Punkte, d. h. eines starren Körpers, lassen sich nach dem Obigen unmittelbar aufstellen und mathematisch formuliren. Die auf die verschiedenen Punkte des Körpers wirkenden Kräfte lassen sich nämlich zu einer Kraft und einem Kräftepaar zusammensetzen, welche einzeln verschwinden müssen. Bei Zugrundelegung eines rechtwinkligen Coordinatensystems muss also erstens

$$\sum R \cos\alpha = 0, \quad \sum R \cos\beta = 0, \quad \sum R \cos\gamma = 0, \tag{2}$$

und zweitens

$$\sum Rp \cos\lambda = 0, \quad \sum Rp \cos\mu = 0, \quad \sum Rp \cos\nu = 0 \tag{2a}$$

sein, wo $\alpha\beta\gamma$ die Winkel der Kraft, $\lambda\mu\nu$ die Winkel der Axe des Kräftepaares mit den Coordinatenaxen sind und p der Arm des Kräftepaares ist. Durch die folgende Betrachtung lassen sich nun die Winkel $\lambda\mu\nu$ eliminiren. In der Fig. 9

sei *CD* die auf der Papierebene senkrechte Axe des Paares, und die Linie *OA* bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel $\alpha_1\beta_1\gamma_1$; dann hat man

$$\cos\alpha\,\cos\lambda+\cos\beta\,\cos\mu+\cos\gamma\,\cos\nu=0,$$
$$\cos\alpha_1\cos\lambda+\cos\beta_1\cos\mu+\cos\gamma_1\cos\nu=0,$$
$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1.$$

Hieraus findet man, wenn

$$w=\sqrt{(\cos\beta_1\cos\gamma-\cos\gamma_1\cos\beta)^2+(\cos\gamma_1\cos\alpha-\cos\alpha_1\cos\gamma)^2+(\cos\alpha_1\cos\beta-\cos\beta_1\cos\alpha)^2}$$

gesetzt wird,

$$\cos\lambda=\frac{\cos\beta_1\cos\gamma-\cos\gamma_1\cos\beta}{w},$$
$$\cos\mu=\frac{\cos\gamma_1\cos\alpha-\cos\alpha_1\cos\gamma}{w},$$
$$\cos\nu=\frac{\cos\alpha_1\cos\beta-\cos\beta_1\cos\alpha}{w}.$$

Sind nun xyz die Coordinaten von A in Bezug auf O als Anfangspunkt, so ist

$$\cos\alpha_1=\frac{x}{r},\qquad \cos\beta_1=\frac{y}{r},\qquad \cos\gamma_1=\frac{z}{r};$$

es wird also

$$\cos\lambda=\frac{y\cos\gamma-z\cos\beta}{p},\qquad \cos\mu=\frac{z\cos\alpha-x\cos\gamma}{p},\qquad \cos\nu=\frac{x\cos\beta-y\cos\alpha}{p},$$

wo $p=\sqrt{(y\cos\gamma-z\cos\beta)^2+(z\cos\alpha-x\cos\gamma)^2+(x\cos\beta-y\cos\alpha)^2}$ gerade der Hebelarm des Kräftepaares ist. Die Gleichungen (2) und (2a) nehmen hiernach die Form an

$$\sum R\cos\alpha=0,\qquad \sum R\cos\beta=0,\qquad \sum R\cos\gamma=0,$$
$$\sum R(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,\quad \sum R(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0,\quad \sum R(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0, \tag{3}$$

oder, unter Einführung der Kraftcomponenten XYZ, die noch einfachere Form

$$\sum X=0,\qquad \sum Y=0,\qquad \sum Z=0, \tag{4}$$
$$\sum(yZ-zY)=0,\quad \sum(zX-xZ)=0,\quad \sum(xY-yX)=0. \tag{5}$$

Das Problem des Gleichgewichtes eines starren Körpers lässt sich noch in einer anderen, ebenfalls zu den Schlussgleichungen (4) und (5) führenden Weise behandeln, nämlich auf Grund des Principes der virtuellen Verrückungen (Princ. 8). Ist δs eine virtuelle, d. h. mit den Bedingungen vereinbare Verschiebung eines Punktes, bildet dieselbe mit der Kraft P den Winkel φ, und sind ihre Componenten δx, δy, δz, so kann man des genannte Princip in einer der beiden Formen

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=0 \tag{6}$$

oder

$$\sum R\cos\varphi\,\delta s=0 \tag{7}$$

aussprechen. Wenn man den Erfahrungssatz zu Hilfe nimmt, dass eine auf den virtuellen Verschiebungen senkrechte Kraft durch den, dem Körper auferlegten Zwang (s. o. pag. 42) aufgehoben wird, so kann man ohne Schwierigkeit das Princip beweisen, d. h. zeigen, dass eine der obigen Gleichungen die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht ist. Für einen einzelnen Punkt erfolgt der Beweis einfach dadurch, dass im Gleichgewicht entweder $R=0$ oder $\varphi=90^\circ$ ist, die Gleichung $R\cos\varphi\,\delta s=0$ also erfüllt wird. Bei zwei Punkten sind vier Fälle möglich, nämlich 1) $R=0$ und $R'=0$, 2) $\varphi=90^\circ$ und $\varphi'=90^\circ$ 3) $R=0$ und $\varphi'=90^\circ$, 4) $R'=0$ und $\varphi=90^\circ$. In jedem dieser Fälle ist aber die Gleichung $R\cos\varphi\,\delta s+R'\cos\varphi'\,\delta s'=0$ die nothwendige Folge; dass die Be-

dingung auch hinreichend ist, ergiebt sich, wenn man, was erlaubt ist, $\delta s' = 0$ setzt. Ebenso lässt sich der Beweis erweitern für zwei starr verbundene Punkte und schliesslich für ein ganzes Punktsystem.

Ehe von diesem Princip die bezeichnete Anwendung gemacht wird, ist es wichtig, dasselbe noch in einer andern Weise zu formuliren.

Es handle sich um ein System von n Punkten; in der Gleichung (6) kommen alsdann $3n$ Verschiebungen vor. Sind nun zwischen den Punkten m Bedingungsgleichungen gegeben, so lassen sich m jener Verschiebungen durch die $3n - m$ übrigen ausdrücken. Die so erhaltene Gleichung bezieht sich dann offenbar auf ein vollkommen freies System, die Verschiebungen sind sämmtlich beliebig, und folglich muss der Coëfficient jeder Verschiebung für sich verschwinden, was $3n - m$ Gleichungen ergiebt. Diese zusammen mit den m Bedingungsgleichungen bestimmen die $3n$ Coordinaten, die Aufgabe ist also gelöst. Aber diese Methode ist complicirt und wenig elegant, und sie wird entbehrlich durch die Benutzung der sogen. LAGRANGE'schen Multiplikatoren. Aus den gegebenen Bedingungsgleichungen

$$U = 0, \quad V = 0 \text{ u. s. w.},$$

wo U, V u. s. w. Funktionen der Coordinaten x, y, z, x_1, y_1, z_1 u. s. w. sind, folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial V}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots = 0,$$
$$(m \text{ Gleichungen})$$

wozu noch die Gleichung (6) hinzutritt: . . .

$$X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + X_2 \delta x_2 + \ldots\ldots = 0.$$

Diese Gleichungen addiren wir, nachdem wir die ersten m derselben beziehungsweise mit den vorläufig noch unbestimmten Grössen λ, μ, u. s. w. multiplicirt haben. Das Resultat ist:

$$\left(X_1 + \lambda \frac{\partial U}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial V}{\partial x_1} + ..\right)\delta x_1 + \left(Y_1 + \lambda \frac{\partial U}{\partial y_1} + \mu \frac{\partial V}{\partial y_1} + \ldots\right)\delta y_1 + \ldots\ldots = 0. \quad (8)$$

Nun bestimmen wir die n Grössen λ, μ u. s. w. derart, dass die ersten m Klammergrössen in der soeben erhaltenen Gleichung verschwinden, dass also:

$$X_1 + \lambda \frac{\partial U}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots = 0, \quad Y_1 + \lambda \frac{\partial U}{\partial y_1} + \mu \frac{\partial V}{\partial y_1} + \ldots = 0 \text{ u. s. w.} \quad (9)$$

wird; die Gleichung reducirt sich hierdurch auf $3n - m$ Glieder; da sie sich aber nunmehr auf ein völlig freies System bezieht, also sämmtliche noch übrige δ beliebig sind, so muss jedes noch vorhandene Glied, also jede Klammergrösse für sich verschwinden; die letzte der so erhaltenen Gleichungen lautet:

$$Z_n + \lambda \frac{\partial U}{\partial z_n} + \mu \frac{\partial V}{\partial z_n} + \ldots\ldots = 0. \quad (9\text{a})$$

Es hat sich somit ein ganz symmetrisches System von $3n$ Gleichungen, bestehend aus sämmtlichen gleich Null gesetzten Klammergrössen der Gleichung (8) ergeben. Mit den m gegebenen Bedingungsgleichungen hat man also $3n + m$ Gleichungen, durch welche sich die $3n$ Coordinaten und die m Multiplikatoren gerade bestimmen lassen. Das Problem ist also gelöst.

Der Werth dieser Methode lässt sich erst durch die physikalische Deutung der zuletzt gewonnenen $3n$ Gleichungen (9) und (9a) erkennen. Während nämlich bei einem freien System

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad X_1 = 0 \ldots.$$

ist, sind hier auch $3n$ gewisse Grössen $= 0$, nämlich die linken Seiten obiger Gleichungen. Fasst man diese als die auf das unfreie System wirkenden Kräfte auf, so verhält sich mithin alles wie bei einem freien System. Ein unfreies System kann also dadurch, dass die Bedingungen desselben mit Hilfe der LAGRANGE'schen Multiplikatoren als Kräfte formulirt und diese Kräfte zu den gegebenen hinzugefügt werden, in ein freies verwandelt werden. Damit erhält zugleich die schon oben (pag. 42) eingeführte Anschauung, den Zwang als eine Kraft zu betrachten, eine tiefere Begründung.

Beispiele. Für das Gleichgewicht eines Punktes auf einer Fläche sind die beiden Gleichungen

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

gegeben, woraus sich zur Bestimmung von x, y, z λ die vier Gleichungen

$$X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad f(x, y, z) = 0, \tag{10}$$

ergeben; den Druck des Punktes auf die Fläche erhält man dann schliesslich durch Einsetzen der gefundenen Werthe in den Ausdruck

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Für das Gleichgewicht eines Punktes auf einer Curve sind die drei Gleichungen

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0$$

gegeben, woraus man zur Bestimmung von x, y, z, λ, μ die Gleichungen

$$\begin{aligned} X + \lambda\frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0, \\ Y + \lambda\frac{\partial f_1}{\partial y} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \\ Z + \lambda\frac{\partial f_1}{\partial z} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

erhält; aus diesen findet man mittelst der Determinante

$$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ Y & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ Z & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

zunächst λ und μ und schliesslich x, y, z.

Anwendung des Principes der virtuellen Verschiebungen auf das Gleichgewicht eines starren Systemes. Der analytische Ausdruck für die Starrheit des Systemes ist die Constanz des Abstandes irgend zweier Punkte von einander. Sind also X_1, Y_1, Z_1, X_2 .... die gegebenen Kraftcomponenten, x_1, y_1, z_1, x_2 .... die Coordinaten der Punkte, c_{12}, c_{13}, c_{23} ... Constanten und ist n die Zahl der Punkte, so sind ausser der Grundgleichung

$$X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Z_1\delta z_1 + X_2\delta x_2 + \ldots = 0$$

noch die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = c_{12}^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(x_{n-1} - x_n)^2 + (y_{n-1} - y_n)^2 + (z_{n-1} - z_n)^2 = c_{n-1,n}^2$$

gegeben. Schreibt man nun die aus letzteren sich ergebenden Verschiebungsgleichungen, z. B.

$$(x_1 - x_2)\,\delta(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\,\delta(y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)\,\delta(z_1 - z_2) = 0,$$

in der Form

$$(x_1 - x_2)\,\delta x_1 + (y_1 - y_2)\,\delta y_1 + (z_1 - z_2)\,\delta z_1 + (x_2 - x_1)\,\delta x_2 + (y_2 - y_1)\,\delta y_2 + (z_2 - z_1)\,\delta z_2 = 0$$

und wendet man das oben angegebene Verfahren mit den Multiplikatoren an, wobei der Symmetrie halber ein und derselbe Multiplikator bald λ_{12}, bald λ_{21} u. s. w. geschrieben werden soll, so erhält man die Gleichungen

$$X_1 + \lambda_{12}(x_1 - x_2) + \lambda_{13}(x_1 - x_3) + \ldots\ldots + \lambda_{1n}(x_1 - x_n) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_n + \lambda_{n1}(x_n - x_1) + \lambda_{n2}(x_n - x_2) + \ldots\ldots + \lambda_{n,\,n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0$$

und entsprechend für die beiden anderen Coordinaten. Jedes dieser drei Gleichungssysteme für sich addirt ergiebt, da sich alles übrige weghebt,

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0, \quad Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0, \quad Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0.$$

Eine weitere Gleichung erhält man, wenn man die Gleichungen des x-Systemes mit $y_1 \ldots . y_n$, die des y-Systemes mit $x_1 \ldots . x_n$ multiplicirt und dann letztere von ersteren abzieht. Es fallen dann wiederum alle Glieder von dem Typus

$$\lambda_{rs}\,[y_r(x_r - x_s) + y_s(x_s - x_r) - x_r(y_r - y_s) - x_s(y_s - y_r)]$$

fort, weil die Klammergrösse verschwindet und es ergiebt sich

$$y_1 X_1 - x_1 Y_1 + \ldots + y_n X_n - x_n Y_n = 0,$$

sowie, wenn man analog das y- und das z-System, und das z- und x-System behandelt, zwei entsprechende Gleichungen. Man ist also jetzt im Besitze von sechs für das Gleichgewicht nothwendigen Gleichungen. Dass dieselben aber auch hinreichend sind, ergiebt sich aus der Erwägung, dass von den $3n$ Verschiebungscomponenten der Punkte des Systemes nur 6 willkürlich sind; ein erster beliebig herausgegriffener Punkt kann sich nämlich beliebig bewegen, liefert also drei Componenten, ein zweiter muss sich auf der um den ersten geschlagenen Kugelfläche bewegen, liefert also nur zwei weitere Componenten, ein dritter muss sich auf dem Schnittkreise der um die beiden ersten geschlagenen Kugeln bewegen, liefert also nur eine, die sechste Componente, und alle übrigen Punkte liefern keine weiteren willkürlichen Verschiebungen. Das Princip der virtuellen Verrückungen ergiebt also als nothwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers die Gleichungen

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$

$$\sum(yZ - zY) = 0, \quad \sum(zX - xZ) = 0, \quad \sum(xY - yX) = 0,$$

d. h. dieselben, welche oben [pag. 47, Gleichung (4) und (5)] auf anderem Wege abgeleitet wurden.

FOURIER'sches Princip. Das Princip der virtuellen Verrückungen ist von FOURIER für den Fall modificirt worden, dass die Bedingungen des unfreien Systemes nicht in Gleichungen, sondern in Ungleichungen, unter denen aber die Gleichung natürlich eingeschlossen ist, gegeben sind; die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht ist dann

$$\sum R\cos\varphi\,\delta s \leqq 0. \qquad (11)$$

Fälle, in welchen dieses Princip von Bedeutung wird, sind z. B. der Fall eines Punktes oder Körpers, welcher sich auf einer Fläche oder aus dieser heraus, aber nicht in sie hinein bewegen kann, ferner der Fall zweier durch einen bieg-

samen unausdehnbaren Faden verbundenen Punkte, deren Entfernung demgemäss gleich oder kleiner als eine gegebene Grösse sein muss.

Gleichgewicht von drei Kräften. Unter welchen Umständen drei gegebene Kräfte Gleichgewicht erzeugen, kann man mit Hilfe eines an sich einleuchtenden Principes leicht einsehen. Dieses Princip sagt aus, dass, wenn ein System im Gleichgewicht ist, das Gleichgewicht auch dann noch fortbesteht, wenn einzelne Theile des Systemes festgestellt werden. Nimmt man nun zwei beliebige Punkte des Körpers, deren jeder in der Wirkungslinie einer der Kräfte liegt, so darf die dritte Kraft in Bezug auf die Verbindungslinie jener Punkte kein Moment haben (s. o. pag. 46), ihre Richtung muss also durch diese Verbindungslinie hindurchgehen. Erwägt man nun, dass dies ebenso für jedes andere Punktepaar der Wirkungslinien der ersten beiden Kräfte gelten muss, so sieht man ein, dass die drei Kräfte in einer Ebene liegen müssen, woraus weiter folgt, dass ihre Richtungen durch einen Punkt gehen müssen, worin der Fall, dass sie parallel sind, mit inbegriffen ist.

Gleichgewicht unter der Wirkung von Parallelkräften. Wählt man als gemeinsame Richtung der Kräfte die z = Achse, lässt man von den Gleichungen (4) und (5) die selbstverständlichen fort und vereinfacht die übrigen, so findet man

$$\sum Z = 0, \qquad \sum yZ = 0, \qquad \sum xZ = 0, \tag{12}$$

in Worten: die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines von Parallelkräften angegriffenen Körpers ist die, dass die algebraische Summe der Kräfte verschwindet, und dass die Summen der Momente der Kräfte in Bezug auf zwei beliebige senkrechte Ebenen (denn es ist offenbar nicht erforderlich, dass dies gerade, wie in den beiden letzten der obigen Gleichungen, die xz- und die yz-Ebene seien) ebenfalls verschwinden. Es möge hieran gleich die Bemerkung geschlossen werden, dass, wenn die obigen Gleichungen nicht erfüllt sind, also kein Gleichgewicht besteht, die Parallelkräfte eine Resultante haben, deren Grösse R und deren Angriffspunkt $\xi\eta$ sich aus den Gleichungen

$$\sum Z = R, \qquad \sum yZ = R\eta, \qquad \sum xZ = R\xi \tag{13}$$

ergeben. Diesen Punkt nennt man den Mittelpunkt der Parallelkräfte; seine Lage hängt von den relativen Grössen und den Angriffspunkten, nicht aber von der Richtung der Einzelkräfte ab. Eine besondere Stellung endlich nimmt der Fall ein, dass zwar die erste, nicht aber die beiden letzten der Gleichungen (12) erfüllt sind; es resultirt dann ein Kräftepaar, dessen Ebene der Richtung der Kräfte parallel ist. (Ein Beispiel für diesen Fall bietet die Compassnadel dar.)

Theorie des Schwerpunktes. Dem Mittelpunkt der Parallelkräfte steht ein anderer, ebenfalls ausgezeichneter Punkt eines Körpers, nämlich der Massenmittelpunkt nahe; es ist dies derjenige Punkt, welcher die Eigenschaft hat, dass zu beiden Seiten jeder beliebigen durch ihn gelegten Ebene die Summe der Produkte der Massen in ihre senkrechten Abstände die gleiche ist. Für einen homogenen Körper, d. h. ein in allen seinen Theilen aus gleichartigen Punkten in gleicher Weise gebildetes System kann man zuweilen mit Vortheil auch die Definition einführen, dass der Massenmittelpunkt derjenige ist, dessen Abstand von jeder beliebigen Ebene gleich dem Mittel der Abstände aller Punkte von derselben Ebene ist.

Es ist hiernach klar, dass der Massenmittelpunkt etwas im Principe anderes ist, als der Mittelpunkt der Parallelkräfte. Nur in besonderen Fällen, z. B. wenn das System der Parallelkräfte durch die in den verschiedenen Punkten eines im

Vergleich zur Erde kleinen Körpers angreifende Schwerkraft dargestellt wird, fallen beide Punkte in einen zusammen, und man kann denselben dann kurz den Schwerpunkt des Körpers nennen.[1]) Der Schwerpunkt ist dann zugleich der Massenmittelpunkt und der Angriffspunkt der Schwerkraft, das Gewicht des betreffenden Körpers ist die Grösse der Resultante aller einzelnen Parallelkräfte, d. h. die Grösse der Schwerkraft, die Masse des Körpers endlich ist die Summe der einzelnen Punktmassen. Es gelten dann, wenn $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten des Schwerpunktes sind, die Gleichungen

$$M=\sum m, \quad \xi=\frac{\sum mx}{M}, \quad \eta=\frac{\sum my}{M}, \quad \zeta=\frac{\sum mz}{M}, \tag{14}$$

und zwar sind hierin m und M die Massen der einzelnen Punkte resp. des Körpers, wenn man den Schwerpunkt als Massenmittelpunkt auffasst, dagegen die Gewichte, wenn man den Schwerpunkt als Kräftemittelpunkt auffasst; in der letzteren Bedeutung sind diese Gleichungen die Verallgemeinerung der Gleichungen (13) auf ein beliebiges Coordinatensystem unter gleichzeitiger Beschränkung auf die Schwerkraft.

Die Gleichungen (14) gelten auch, wenn es sich um die Ermittelung des Schwerpunktes eines Systems verschiedener Körper aus den Massen und Schwerpunkten der einzelnen Körper handelt.

Durch Elimination von M erhält man die drei letzten der Gleichungen (14) auch in der Form

$$\xi=\frac{\sum mx}{\sum m}, \quad \eta=\frac{\sum my}{\sum m}, \quad \zeta=\frac{\sum mz}{\sum m}. \tag{14a}$$

Schwerpunkt von materiellen Linien. Eine Linie, in deren stetig sich aneinander schliessenden Punkten Materie concentrirt gedacht wird, heisst eine materielle Linie. Wird das specifische Gewicht der Materie, das übrigens von Strecke zu Strecke variiren kann, mit ρ und eine unendlich kleine Strecke der Curve mit ds bezeichnet, so ist ρds das Gewicht dieses Curvenelementes. Die Curve wird im Allgemeinen eine Raumcurve sein; sie sei durch die Gleichungen $z=f_1(x)$ und $y=f_2(x)$ ihrer Vertical- und Horizontalprojection, sowie durch die Coordinaten x_0 und x_1 ihrer beiden Endpunkte gegeben. Die Schwerpunktscoordinaten $\xi\eta\zeta$ erhält man, indem man aus den beiden gegebenen Gleichungen die Grössen dy/dx und dz/dx und hieraus

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$$

berechnet; es ist dann

$$\xi=\frac{\int_{x_0}^{x_1}\rho x\,ds}{\int_{x_0}^{x_1}\rho\,ds}, \quad \eta=\frac{\int_{x_0}^{x_1}\rho y\,ds}{\int_{x_0}^{x_1}\rho\,ds}, \quad \zeta=\frac{\int_{x_0}^{x_1}\rho z\,ds}{\int_{x_0}^{x_1}\rho\,ds}.$$

Wenn ρ constant, also die Curve homogen ist, so wird einfacher

$$\left.\begin{aligned} s&=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx,\\ \xi&=\frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_1}x\,ds, \quad \eta=\frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_1}y\,ds, \quad \zeta=\frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_1}z\,ds.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

[1]) Näheres hierüber s. THOMSON u. TAIT, Handb. d. th. Phys. I., 1, pag. 189.

Beispiel: Schraubenlinie. Wenn a der Spindelradius, α der Steigungswinkel, z die Höhe des vorliegenden Stückes und abgekürzt $c = a \tang \alpha$ ist, so sind die gegebenen Gleichungen

$$x = a \cos \frac{z}{c}, \quad y = a \sin \frac{z}{c}; \quad \text{ferner } s = \frac{z}{\sin \alpha}.$$

Es ergiebt sich: (16)

$$\xi = \frac{cy}{z}, \quad \eta = \frac{c(a-x)}{z}, \quad \zeta = \frac{1}{2} z.$$

Der Schwerpunkt liegt also in der halben Höhe der Schraubenlinie, und seine beiden horizontalen Coordinaten lassen sich leicht als vierte Proportionalen construiren.

Specieller Fall: Ebene Linien. Die Gleichung sei $y = f(x)$, die Endpunkte x_0 und x_1; es ist dann, wenn zur Abkürzung $dy/dx = y'$ und $\int_{x_0}^{x_1} \rho \sqrt{1+y'^2}\, dx = w$ gesetzt wird,

$$\xi = \frac{1}{w} \int_{x_0}^{x_1} \rho x \sqrt{1+y'^2}\, dx, \qquad \eta = \frac{1}{w} \int_{x_0}^{x_1} \rho y \sqrt{1+y'^2}\, dx. \tag{17}$$

Wenn ρ constant ist, so geht w in die Bogenlänge $s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$ über, und es wird einfacher

$$\xi = \frac{1}{s} \int_{x_0}^{x_1} x \sqrt{1+y'^2}\, dx, \qquad \eta = \frac{1}{s} \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2}\, dx. \tag{17a}$$

Beispiele. 1. Kreisbogen. a sei der Radius, 2σ die Sehne, φ der Centriwinkel, die Halbirungslinie des Centriwinkels die y-Achse und der Mittelpunkt des Kreises der Anfangspunkt der Coordinaten. Dann ist natürlich $\xi = 0$ und

$$\eta = \frac{1}{s} \int_{-\sigma}^{+\sigma} y \sqrt{1+y'^2}\, dx = \frac{2\sigma a}{s} \quad \text{oder auch} \quad = 2a \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\varphi}. \tag{18}$$

Der Schwerpnnkt liegt also auf der Halbirungslinie des Centriwinkels so, dass sich seine Entfernung vom Kreismittelpunkt zum Radius verhält, wie die Sehne zum Bogen. Speciell für den Halbkreis ergiebt sich $\eta = 2a/\pi = 0{\cdot}6366\,a$. Der geometrische Ort der Schwerpunkte der verschiedenen, in demselben Punkte beginnenden Kreisbögen ist unten in Fig. 7 durch die unterbrochene Curve dargestellt.

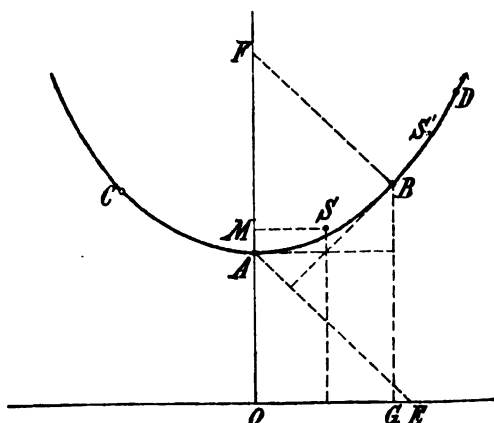
2. Kettenlinie (s. unten). Es ist

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right), \quad s = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right).$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes S des von $x = 0$ bis x reichenden Bogens AB finden sich

$$\xi = x - \frac{k(y-k)}{s}, \quad \eta = \frac{1}{2}\left(y + \frac{kx}{s}\right); \tag{19}$$

geometrisch erhält man die Abscisse durch die Erwägung, dass sie übereinstimmt mit derjenigen des Schnittpunktes der in A und B gelegten Tangenten; die Ordinate, indem man $AE = BG$, BF parallel zu AE zieht



(Ph. 10.)

und OF in M halbiert. Der Schwerpunkt des beiderseitigen Kettenbogens BAC hat natürlich $\xi = 0$ und η wie oben, liegt also im Punkte M. Endlich findet sich der Schwerpunkt S' des nicht vom Scheitel anfangenden Kettenbogens BD aus den Schwerpunkten $\xi_1 \eta_1$ und $\xi_2 \eta_2$ der Bögen AB und AD durch die Formeln

$$\xi = \frac{s_2 \xi_2 - s_1 \xi_1}{s_2 - s_1}, \quad \eta = \frac{s_2 \eta_2 - s_1 \eta_1}{s_2 - s_1}. \qquad (19\text{a})$$

3. Cycloidenbogen. Wenn a der Radius des rollenden Kreises und w der Rollwinkel ist, mit welchem der vom Winkel 0 anfangende Bogen abschliesst, so ist

$$x = a(w - \sin w), \quad y = a(1 - \cos w), \quad s = 8a \sin^2 \frac{w}{4},$$

$$\xi = \frac{a}{2} \frac{\frac{4}{3} \sin^3 \frac{w}{2} - (w - \sin w) \cos \frac{w}{2}}{\sin^2 \frac{w}{4}}, \quad \eta = a \frac{\left(\frac{1}{3} \cos^2 \frac{w}{2} - 1\right) \cos \frac{w}{2} + \frac{2}{3}}{\sin^2 \frac{w}{4}}. \qquad (20)$$

Für die ganze Cycloide ($w = 2\pi$) ergiebt sich

$$\xi = a\pi, \quad \eta = \frac{4}{3} a. \qquad (20\text{a})$$

Zuweilen empfiehlt es sich, statt rechtwinkeliger Polarcoordinaten einzuführen und erst von diesen ausgehend ξ und η zu berechnen, wobei angenommen wird, dass der Anfang des Polarsystems $r\vartheta$ auch der des rechtwinkeligen und die Achse des ersteren die x-Achse des letzteren sei. Für homogene Linien wird dann, wenn ϑ_0 und ϑ_1 den Endpunkten entsprechen und $dr/d\vartheta = r'$ gesetzt wird,

$$s = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\vartheta,^{1)} \quad \xi = \frac{1}{s} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r \sqrt{r^2 + r'^2} \cos\vartheta\, d\vartheta, \quad \eta = \frac{1}{s} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r \sqrt{r^2 + r'^2} \sin\vartheta\, d\vartheta. \qquad (21)$$

Beispiele. 4. Cardioide von 0 bis π.

$$r = a(1 + \cos\vartheta), \quad s = 4a, \quad \xi = \frac{4}{5} a, \quad \eta = \frac{4}{5} a. \qquad (22)$$

5. Logarithmische Spirale von 0 bis ϑ.

$$r = ae^{\vartheta}, \quad \xi = \frac{a}{5} \frac{e^{2\vartheta}(2\cos\vartheta + \sin\vartheta) - 2}{e^{\vartheta} - 1}, \quad \eta = \frac{a}{5} \frac{e^{2\vartheta}(2\sin\vartheta - \cos\vartheta) + 1}{e^{\vartheta} - 1}, \qquad (22\text{a})$$

und speciell für den ersten Quadranten

$$\xi = \frac{a}{5} \frac{e^{\pi} - 2}{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}, \quad \eta = \frac{a}{5} \frac{2e^{\pi} + 1}{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}. \qquad (22\text{b})$$

Schwerpunkt materieller Flächen. Ein kleines Flächenelement ist hier

$$ds = dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Es wird also, wenn das Gewicht der Fläche

$$\iint \rho\, dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = G$$

gesetzt wird,

$$\xi = \frac{1}{G} \iint \rho x\, dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \quad \eta = \frac{1}{G} \iint \rho y\, dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$
$$\zeta = \frac{1}{G} \iint \rho z\, dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \qquad (23)$$

[1]) In gewissen Fällen muss, wenn zwischen ϑ_0 und ϑ_1 der Werth Null liegt, vorsichtig integrirt werden, am besten durch Zerlegung des Integrals in zwei Theile.

Für **Rotationsflächen**, deren Axe die x-Axe ist, während der Radius vector mit r bezeichnet werden möge, ergiebt sich, da der dem Bogenelement ds der Meridiancurve entsprechende ringförmige Streifen die Fläche $2\pi r ds$ hat, für das zwischen x_0 und x_1 liegende Stück der Rotationsfläche $G = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi r \rho ds$, wo ρ nur von x resp. s abhängen wird; der Schwerpunkt liegt natürlich in der Axe, und es ist

$$\xi = \frac{2\pi}{G} \int_{x_0}^{x_1} \rho x y ds. \tag{23a}$$

Pappus'sche oder Güldin'sche Regeln. Von den so bezeichneten Sätzen bezieht sich der eine auf Curven und die daraus entstehenden Rotationsflächen, der andere auf Ebenen und die daraus entstehenden Rotationskörper. Nach dem ersten ist der Inhalt einer Rotationsfläche gleich dem Produkte der Länge der Meridiancurve mit der Peripherie desjenigen Kreises, welchen der Schwerpunkt der homogenen Curve bei der Rotation beschreibt. Wenn nämlich l die Curvenlänge und r_0 der Radiusvector des Curvenschwerpunktes ist, so ist nach obigem $l r_0 = \int_{x_0}^{x_1} r ds$, und folglich die Rotationsfläche $O = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} r ds = l \cdot 2\pi r_0$. Nach dem zweiten Satze ist das Volumen x_0 einer aus zwei in derselben Ebene liegenden Curven entstehenden Rotationsfigur, die im übrigen durch die beiden zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen $x = x_0$ und $x = x_1$ begrenzt wird, gleich der ebenen Fläche zwischen jenen beiden Curven, multiplicirt mit der Peripherie des Kreises, welchen der Schwerpunkt dieser homogenen Fläche beschreibt. Es ist nämlich, wenn F diese Fläche ist, nach obigem

$$F r_0 = \iint r dx dr = \int (r_1^2 - r_2^2) dx,$$

wo r_1 und r_2 sich auf die beiden Curven beziehen; folglich ist das Volumen V

$$V = \int_{x_0}^{x_1} (\pi r_1^2 - \pi r_2^2) dx = 2\pi r_0 \cdot F.$$

Im Allgemeinen ist der betreffende Körper ringförmig; er verwandelt sich aber in einen gewöhnlichen, vollen Rotationskörper, wenn für die der Axe näher liegende der beiden Curven die Axe selbst genommen wird.

Beispiele. 1. **Kugelzone.** Man findet, wenn Homogenität angenommen wird,

$$\xi = \frac{x_0 + x_1}{2}. \tag{24}$$

Der Schwerpunkt der Kugelzonenoberfläche liegt also im Mittelpunkt ihrer Axse.

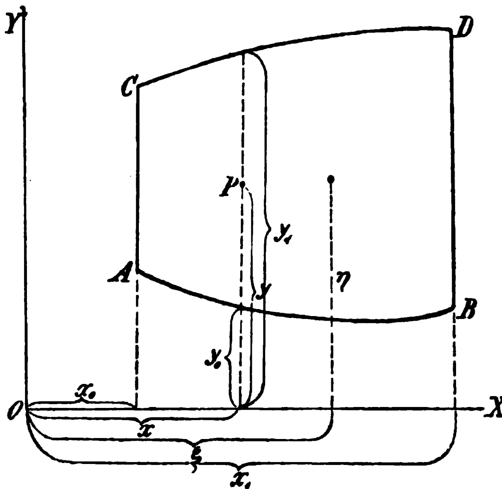
2. **Kettenconoid**, homogene, durch Rotation der Kettenlinie $x = \frac{1}{2} k(e^{r/k} + e^{-r/k})$, um die x-Axe entstehende Fläche. Wenn s der Bogen und x, r die Coordinaten seines Endpunktes sind, so findet man

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{2srx - k(s^2 - r^2)}{sr - k(x - k)}, \tag{25}$$

als Abstand des auf der Axe liegenden Schwerpunktes vom Anfangspunkt der Coordinaten.

Ebene Flächen. Es ist, wie man nach Fig. 11 leicht einsieht, für die Fläche $ABDC$ in rechtwinkeligen Coordinaten xy

$$G=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_1}^{y_1}\rho\,dx\,dy,\quad \xi=\frac{1}{G}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\rho x\,dx\,dy,\quad \eta=\frac{1}{G}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\rho y\,dx\,dy, \tag{26}$$



(Ph. 11.)

wo $y_0=f_0(x)$ und $y_1=f_1(x)$ die Gleichungen der Curven AB und CD sind. Für constantes ρ, also Homogenität wird einfacher, entweder durch Spezialisirung oder auch durch direkte Ableitung, wenn der Flächeninhalt F ist,

$$F=\int_{x_0}^{x_1}(y_1-y_0)\,dx,$$

$$\xi=\frac{1}{F}\int_{x_0}^{x_1}(y_1-y_0)x\,dx, \tag{26a}$$

$$\eta=\frac{1}{2F}\int_{x_0}^{x_1}(y_1^2-y_0^2)\,dx.$$

Wenn die Fläche durch die beiden in Polarcoordinaten gegebenen Curven $r_0=f_0\ (\vartheta)$ und $r_1=f_1\ (\vartheta)$ und durch die beiden verbindenden Leitstrahlen $\vartheta=\vartheta_0$ und $\vartheta=\vartheta_1$ begrenzt ist, so findet man bei Homogenität

$$F=\frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}(r_1^2-r_0^2)\,d\vartheta,$$

$$\xi=\frac{1}{3F}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}(r_1^3-r_0^3)\cos\vartheta\,d\vartheta,\qquad \eta=\frac{1}{3F}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}(r_1^3-r_0^3)\sin\vartheta\,d\vartheta. \tag{26b}$$

Beispiele. 3. Kreissector vom Radius a und vom Centriwinkel φ. Man findet für den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkt (auf der Mittellinie)

$$\xi=\frac{4}{3}a\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\varphi}, \tag{27}$$

speciell für den Halbkreis

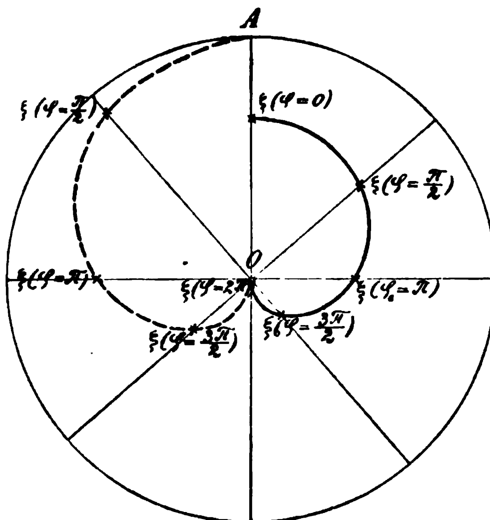
$$\xi=\frac{4}{3\pi}a=0\cdot4244\,a,$$

für den Quadranten

$$\xi=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}a=0\cdot6002\,a, \tag{27a}$$

und für einen sehr schmalen Sector

$$\xi=\frac{2}{3}a=0\cdot6667\,a.$$



(Ph. 12.)

In der Fig. 12 ist der geometrische Ort der Schwerpunkte von Kreissectoren aller möglichen Winkel durch die voll ausgezogene Curve derart veranschaulicht, dass jeder Punkt der Curve den Ort des Schwer-

punktes desjenigen Sectors angiebt, welcher in dem betreffenden Radius vector seine Mittellinie hat und von dem vertical nach oben gehenden Sector OA begrenzt wird; die Gleichung der Curve ist demgemäss nicht die obige, sondern die nach Ersetzung von φ durch 2φ aus ihr entstehende

$$\xi = \frac{4}{3} a \frac{\sin\varphi}{2\varphi}.$$

Die entsprechende, der Deutlichkeit halber linksherum gezeichnete, unterbrochene Curve, gilt in analoger Weise für die Schwerpunkte wachsender Kreisbögen [s. oben Gleichung (18), pag. 53].

4. Dreieck. Um dessen Schwerpunkt zu finden, betrachte man eine Seite als Basis, die gegenüberliegende Ecke als Scheitel und lege durch letzteren die x-Axe senkrecht, die y-Axe parallel zur Basis. Ist alsdann h die Höhe, und sind $y = mx$, $y' = m'x$ die Gleichungen der beiden anderen Dreiecksseiten, so ergiebt sich

$$\xi = \frac{2}{3} h, \quad \eta = \frac{(m + m')\,h}{3}, \tag{28}$$

woraus folgt, dass der Schwerpunkt des Dreieckes in demjenigen Punkte der Halbirungslinie der Basis liegt, welcher vom Scheitel doppelt so weit entfernt ist, wie von der Basis; bekanntlich schneiden sich in diesem Punkte alle drei Halbirungslinien.

5. Archimedische Spirale: $r = a\vartheta$, Sector von 0 bis $\pi/2$:

$$\xi = \frac{2(\pi^2 - 24\pi + 48)}{\pi^3} a, \quad \eta = \frac{12(\pi^2 - 8)}{\pi^3} a. \tag{29}$$

6. Logarithmische Spirale: $r = ae^{\vartheta}$; Sector von 0 bis ϑ:

$$\xi = \frac{2}{15} a \frac{e^{3\vartheta}(3\cos\vartheta + \sin\vartheta) - 3}{e^{2\vartheta} - 1}, \quad \eta = \frac{2}{15} a \frac{e^{3\vartheta}(3\sin\vartheta - \cos\vartheta) + 1}{e^{2\vartheta} - 1}. \tag{30}$$

7. Die zwischen einem Ast der Kettenlinie und der Abscissenlinie liegende Fläche $OABG$ (Fig. 10):

$$\xi = x - \frac{k(y-k)}{s}, \quad \eta = \frac{1}{4}\left(y + \frac{kx}{s}\right); \tag{31}$$

der Schwerpunkt dieser Fläche hat also dieselbe Abscisse und die halbe Ordinate wie derjenige der Kettenlinie selbst.

Schwerpunkt von Körpern. Die allgemeinen Formeln lauten hier ganz analog den früheren, wenn G das Gewicht und V das Volumen des Körpers ist:

$$G = \int\!\!\int\!\!\int \rho\, dx\, dy\, dz,$$

$$\xi = \frac{1}{G}\int\!\!\int\!\!\int \rho x\, dx\, dy\, dz, \quad \eta = \frac{1}{G}\int\!\!\int\!\!\int \rho y\, dx\, dy\, dz, \quad \zeta = \frac{1}{G}\int\!\!\int\!\!\int \rho z\, dx\, dy\, dz. \tag{32}$$

und, wenn der Körper homogen ist,

$$V = \int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz, \quad \xi = \frac{1}{V}\int\!\!\int\!\!\int x\, dx\, dy\, dz, \quad \eta = \frac{1}{V}\int\!\!\int\!\!\int y\, dx\, dy\, dz,$$
$$\zeta = \frac{1}{V}\int\!\!\int\!\!\int z\, dx\, dy\, dz, \tag{32a}$$

wo man die Integration nach z auch ausführen kann, so dass man, wenn x_0, x_1, y_0 und y_1, z_0 und z_1 die Grenzen sind, erhält:

$$V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\, dx\, dy. \tag{32b}$$

$$\xi = \frac{1}{V}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} x(z_1 - z_0)\, dx\, dy, \quad \eta = \frac{1}{V}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} y(z_1 - z_0)\, dx\, dy,$$

$$\zeta = \frac{1}{V}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}(z_1^2 - z_0^2)\,dx\,dy.$$

Speciell bei Rotationskörpern (x-Axe) wird natürlich $\eta = 0$ und $\zeta = 0$, und

$$G = \pi\int_{x_0}^{x_1}\rho y^2\,dx, \qquad \xi = \frac{\pi}{G}\int_{x_0}^{x_1}\rho x y^2\,dx. \tag{32c}$$

In Polarcoordinaten $r\varphi\psi$ nehmen die allgemeinen Gleichungen folgende Gestalt an:

$$G = \iiint \rho r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi.$$

$$\xi = \frac{1}{G}\iiint \rho r^3 \sin\varphi\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi, \qquad \eta = \frac{1}{G}\iiint \rho r^3 \sin^2\varphi\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi,$$

$$\zeta = \frac{1}{G}\iiint \rho r^3 \sin^2\varphi\sin\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi, \tag{32d}$$

und speciell für homogene Körper

$$V = \frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}(r_1^3 - r_0^3)\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi,$$

$$\xi = \frac{1}{4V}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}(r_1^4 - r_0^4)\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi, \quad \eta = \frac{1}{4V}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}(r_1^4 - r_0^4)\sin^2\varphi\cos\psi\,d\varphi\,d\psi, \tag{32e}$$

$$\zeta = \frac{1}{4V}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{\psi_0}^{\psi_1}(r_1^4 - r_0^4)\sin^2\varphi\sin\psi\,d\varphi\,d\psi.$$

Beispiele. 1. Parallelschicht eines dreiaxigen Ellipsoides. Dieselbe sei homogen, senkrecht auf der x-Axe und reiche von x_0 bis x_1. Man findet für die Entfernung des natürlich auf der Axe gelegenen Schwerpunktes vom Mittelpunkt des Elipsoides, wenn a die entsprechende Halbaxe ist:

$$\xi = \frac{3}{4}\,\frac{x_1^4 - x_0^4 + 2a^2(x_0^2 - x_1^2)}{x_1^3 - x_0^3 + 3a^2(x_0 - x_1)}; \tag{33}$$

Die beiden anderen Halbaxen kommen also gar nicht vor. Für das ganze Halbellipsoid ($x_0 = 0$, $x_1 = a$) ergiebt sich hiernach

$$\xi = \frac{3}{8}a. \tag{33a}$$

2. Kugelsector vom Radiuswinkel a und vom Centriwinkel φ. Der Schwerpunkt liegt auf der Mittellinie und vom Kugelmittelpunkt um

$$\xi = \frac{3}{4}a\cos^2\frac{\varphi}{4}. \tag{34}$$

und speciell { bei einem sehr schmalen Sector um $\xi = \frac{3}{4}a$,[1]
bei der Halbkugel um $\xi = \frac{3}{8}a$, entfernt.

3. Halber Kugelkeil vom Kugelradius a und vom Flächenwinkel γ.

[1]) Man vergleiche dies mit dem Schwerpunkt einer Linie und eines sehr schmalen Dreiecks oder Sectors [Gleichung (27a)]; dem Ende resp. der Peripherie liegt der Schwerpunkt bei der Linie 1 Mal, bei der schmalen Fläche 2 Mal, bei dem schmalen Körper 3 Mal so nahe wie dem Anfang resp. Centrum, ganz wie dies der Dimensionenzahl dieser Gebilde entspricht.

Wird die Schnittlinie der beiden Meridianebenen zur x-Axe, die Aequatorebene zur yz-Ebene genommen, so ergiebt sich

$$\xi = \frac{3}{8} a, \quad \eta = \frac{3}{8} \pi \frac{\sin^2 \gamma/_2}{\gamma} a, \quad \zeta = \frac{3}{16} \pi \frac{\sin \gamma}{\gamma} a, \tag{35}$$

speciell für den Kugeloctanten

$$\xi = \eta = \zeta = \frac{3}{8} a. \tag{35a}$$

4. Pyramide und Kegel. Der Schwerpunkt liegt in demjenigen Punkte der von der Spitze nach dem Schwerpunkt der Grundfläche gezogenen Linie, welcher von ersterer dreimal so weit entfernt ist, wie von letzterer; speciell beim Tetraeder ist der Schwerpunkt bekanntlich der Schnittpunkt der drei Mittellinien.

Experimentelle Ermittelung des Schwerpunktes. Wenn man eine Linie, eine Fläche oder einen Körper an einem Faden aufhängt, so muss der Schwerpunkt mit dem Aufhängepunkt in einer vertikalen Linie liegen, die Verlängerung des Fadens muss also durch den Schwerpunkt gehen. Es folgt dies daraus, dass nur in diesem Falle das Moment der Schwerkraft verschwindet. Man nennt die gedachte Vertikale und ebenso jede bei Aufhängung des Körpers an einem anderen Punkte entsprechende Linie eine Schwerlinie. Es ist nur erforderlich, sich zwei derartige Schwerlinien zu verschaffen; in ihrem Schnittpunkte liegt der Schwerpunkt des Gebildes.

Neutrales, stabiles und labiles Gleichgewicht. Von der Lage des Schwerpunktes hängt es nicht nur ab, ob der betreffende Körper sich im Gleichgewicht befinde oder nicht, sondern auch, von welcher der drei Arten, welche man in Bezug auf das Gleichgewicht unterscheiden kann, dasselbe ist. Man bezeichnet einen Gleichgewichtszustand als:

1. Neutral oder indifferent, wenn die Lage, in welche das betreffende System durch eine kleine Bewegung gebracht werden kann, ebenfalls eine Gleichgewichtslage ist. Beispiel: Homogene Kugel auf einer horizontalen Ebene.

2. Stabil, wenn das System, in irgend einer Richtung ein wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt und dann sich selbst überlassen, entweder unmittelbar oder nach einigen Schwingungen die ursprüngliche Lage wieder annimmt. Beispiele: Eine homogene Kugel im tiefsten Punkte der Höhlung einer hohlen Fläche; eine an einem Faden vertikal herabhängende Kugel; eine um den Berührungspunkt herum im Vergleich zu den übrigen Theilen schwerere Kugel auf einer horizontalen Ebene.

3. Labil oder instabil, wenn das System in irgend einer Richtung so verschoben werden kann, dass es, sich selbst überlassen, sich immer weiter von der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt. Beispiele: Eine homogene Kugel auf dem höchsten Punkt einer gewölbten Fläche; eine auf einer Spitze stehende Kugel; eine um ihren höchsten Punkt herum im Vergleich zu ihren übrigen Theilen schwerere Kugel auf einer horizontalen Ebene.

Für diese drei Arten von Gleichgewichtszuständen kann man nun einerseits geometrische, andererseits analytische Kriterien aufstellen. Es mögen zunächst die ersteren betrachtet werden. Dabei soll der Deutlichkeit halber derjenige Punkt, welcher bei der in Gedanken auszuführenden Bewegung des Körpers fest bleibt, Drehpunkt genannt werden. Nun ist klar, dass die den Drehpunkt und den Schwerpunkt verbindende Linie ihre vertikale Richtung bei der Lagenänderung nicht beibehalten kann; soll trotzdem, wie es das neutrale Gleichgewicht verlangt, auch in der neuen Lage Gleichgewicht sein, so darf jene Linie überhaupt nicht

existiren, der Schwerpunkt muss mit dem Drehpunkt zusammenfallen. Im neutralen Gleichgewicht liegt also der Schwerpunkt im Drehpunkt.

Beim stabilen Gleichgewicht soll die durch die Lagenänderung ein wenig geneigte Drehpunkt-Schwerpunkt-Linie durch die Schwerkraft wieder in die ursprünglich vertikale Lage gebracht werden, was nur möglich ist, wenn die Kraft an ihrem unteren Endpunkt angreift; dieser muss also der Schwerpunkt, der obere der Drehpunkt sein; umgekehrt soll beim labilen Gleichgewicht die durch die kleine Lagenänderung erzeugte Neigung der betrachteten Linie noch gesteigert werden, was nur geschehen wird, wenn die Schwerkraft am oberen Endpunkt angreift; hier muss also der obere Punkt der Schwerpunkt, der untere der Drehpunkt sein.

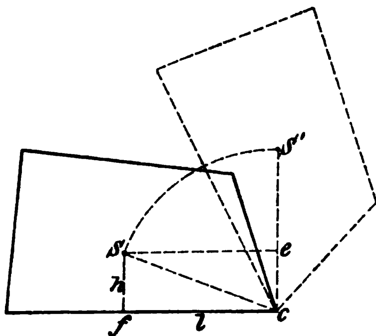
Es ergiebt sich also der Satz: Beim neutralen Gleichgewicht liegt der Schwerpunkt im Drehpunkt, beim stabilen senkrecht unter ihm, beim labilen senkrecht über ihm.

In manchen Fällen sind in derselben Lage des Körpers zwei oder auch alle Arten des Gleichgewichtes gleichzeitig vorhanden. Beispiele: Eine auf ihrem Rande stehende Münze ist für Drehungen in ihrer Ebene in neutralem, für Drehungen senkrecht in ihrer Ebene im labilen Gleichgewicht. Eine auf einem Sattel ruhende Kugel ist nach den beiden Bergseiten zu in stabilem, nach den beiden Thalseiten zu in labilem, endlich in zwei gewissen diagonalen Richtungen in neutralem Gleichgewicht.

Standfähigkeit. Von der Lage des Schwerpunktes hängt nicht bloss die Natur des Gleichgewichtes, sondern auch die grössere oder geringere Fähigkeit des betreffenden Körpers ab, äusseren Einflüssen, welche eine Drehung desselben zu bewirken streben, Widerstand zu leisten. Die Stabilität eines Körpers ist z. B. desto grösser, je tiefer der Schwerpunkt unter dem Drehpunkt liegt; in demselben Verhältnisse ist natürlich seine Empfindlichkeit gegen Aenderungen in der Vertheilung seiner Massen kleiner (s. Art. Waage). Das stabile Gleichgewicht kommt praktisch ausser in vereinzelten Fällen (wie dem obigen der Kugel auf der Hohlfläche) nur bei Körpern vor, welche in einem Punkte hängen, nicht aber bei solchen, welche auf einem Punkte stehen; im letzteren Falle ist vielmehr dieser Stützpunkt gewöhnlich auch Drehpunkt. Das Gleichgewicht ist labil und der Körper fällt bei der leisesten Lagenänderung um. Eine Ausnahme findet nur dann statt, wenn der Körper eine so grosse Trägheit hat, dass man jene Lagenänderungen durch geschickte Bewegungen stets momentan wieder ausgleichen kann (Balanciren); oder in dem anderen Falle, wo die Masse des Körpers rings um den Stützpunkt so weit abwärts reicht, dass der Schwerpunkt ausserhalb der Masse des Körpers unter den Stützpunkt in die Masse des Stützkörpers hineinfällt. Beispiele: Ein im Mittelpunkte seiner inneren Bodenfläche auf einer Nadelspitze stehender Topf; ein Korkpfropfen, der für sich auf einer Nadelspitze im labilen, dagegen, wenn man vier Gabeln schräg nach unten in seine Peripherie spickt, im stabilen Gleichgewichte ist.

Um nicht nur im stabilen Gleichgewicht zu sein, sondern diese Lage auch mit einer gewissen Festigkeit behaupten zu können, d. h. um »standfest« zu sein, muss ein Körper durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, unterstützt sein. Die Bedingung ist dann die, dass das vom Schwerpunkte gefällte Loth zwischen die drei gedachten Punkte falle. Wollte man nämlich einen solchen Körper um eine der drei Kanten des durch die Stützpunkte gebildeten Dreieckes drehen, so würde nicht nur der Körper, sich selbst überlassen, wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehren, es sei denn, dass man die Drehung über

die Lage, in welcher der Schwerpunkt sich senkrecht über der Drehkante befindet, hinaus fortsetzt; sondern der Körper würde dieser Drehung selbst schon Widerstand leisten, weil bei dieser Drehung (Fig. 13) der Schwerpunkt von s bis s' gehoben, also Arbeit geleistet werden muss. Diese Arbeitsgrösse, also die Hubhöhe es' wird demgemäss auch das Maass der Standfähigkeit abgeben; bezeichnet man die Höhe des Schwerpunktes über der Grundfläche, also fs, mit h und die Entfernung des Fusspunktes f von der Drehkante c, also fc, mit l, so hat man offenbar



(Ph. 13.)

$$s' = cs' - ce = cs - fs = \sqrt{(l^2 + h^2)} - h,$$

und da die Standfähigkeit S ausserdem ebenso wie die zu leistende Arbeit dem im Schwerpunkt vereinigt zu denkenden Gewichte G des Körpers proportional ist,

$$S = G(\sqrt{l^2 + h^2} - h); \tag{36}$$

die Standfähigkeit ist also desto grösser, je schwerer der Körper, je breiter seine Basis ist und je tiefer sein Schwerpunkt liegt.[1]) Wie man ausserdem sieht, bezieht sich die Standfähigkeit immer nur auf eine bestimmte Kante, und es kann daher die Standfestigkeit eines Körpers nach verschiedenen Richtungen eine sehr verschiedene sein. Von besonderer Wichtigkeit ist die Standfestigkeit von Körpern, welche im Grossen und Ganzen homogen und im Vergleich zu ihrer Höhe schmal sind, z. B. von Mauern; man kann dann aus der obigen Formel die einfachere

$$S = G\left(h + \frac{1}{2}\frac{l^2}{h} - h\right), \quad \text{also} \quad S = \frac{Gl^2}{2h} \tag{36a}$$

herleiten, welche zeigt, dass durch gleichmässige Verdoppelung der Breite die Standfähigkeit verachtfacht, durch Verdoppelung der Breite nur an der Basis vervierfacht wird, dass sie dagegen bei Verdoppelung der Höhe ungeändert bleibt. Das letztere Ergebniss mag befremden, man muss aber erwägen, einmal, dass es sich hier nur um die Mauer als Ganzes (nicht um das Herabfallen eines Theiles vom andern), und sodann, dass es sich auch für die Mauer als Ganzes um zwei verschiedene Dinge handelt: einmal um die Arbeit, welche aufgewendet werden muss, um die Mauer umzukanten, und diese, also nach unserer Definition die Standfestigkeit, ist von der Höhe unabhängig, weil in demselben Maasse, in welchem die Hubhöhe des Schwerpunktes mit wachsender Höhe der Mauer abnimmt, das zu hebende Mauergewicht zunimmt; und andererseits um den Drehungswinkel, welcher genügt, um die Mauer in's labile Gleichgewicht zu bringen, und dieser ist desto kleiner, je höher die Mauer ist. Es werden also bei der höheren Mauer unbedeutendere Verschiebungen, wenn auch mit demselben Kraftaufwand, den Einsturz bewerkstelligen.

Beziehung zum Princip der virtuellen Verrückungen. Wir wollen nun die drei Arten des Gleichgewichtes oder mindestens das stabile im Gegensatz zu den beiden anderen noch analytisch und durch eine weit allgemeinere Beziehung als bisher charakterisiren, indem wir von dem Princip der virtuellen Verrückungen [Gleichung (6), pag. 47] ausgehen, welches, auf die in der Z-Richtung wirkende Schwerkraft angewendet, $\Sigma Z \delta z = 0$ lautete. Hierfür kann man, indem man das

[1]) Zuweilen wird noch eine andere Formel für die Standfähigkeit abgeleitet und diese dann die statische, die obige die dynamische Stabilität genannt.

Gewicht G des Körpers und die Coordinate ζ des Schwerpunktes einführt, $G\delta\zeta = 0$, also $\delta\zeta = 0$ schreiben. Diese Gleichung sagt aus, dass beim Durchgange durch das Gleichgewicht der Schwerpunkt sich in gleicher Höhe, d. h. horizontal bewegt. Dies ist nun möglich 1., wenn überhaupt $\zeta =$ constant ist: Fall des indifferenten Gleichgewichtes; 2. wenn ζ ein Minimum ist, also der Schwerpunkt seine tiefste Lage einnimmt: labiles Gleichgewicht, und 3., wenn ζ ein Maximum ist, also der Schwerpunkt seine höchste Stellung einnimmt. Verallgemeinert man jetzt die Betrachtung, so kann man die Gleichung $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$ durch Einführung des Potentials V der wirklichen Kräfte in die Form $\delta V = 0$ bringen, und gelangt dann zu dem wichtigen Resultat, dass beim stabilen Gleichgewicht eines Körpers unter der Wirkung irgend welcher Potentialkräfte das Potential ein Maximum ist.

Gleichgewicht eines biegsamen, unausdehnbaren Fadens. Es handelt sich darum, die Spannungen in dem Faden, d. h. die negativen Drucke, welche seine Theile auszuhalten haben, hauptsächlich aber seine Gleichgewichtsfigur zu finden. Physikalisch ist die letztere Anfgabe nach dem obigen durch die Angabe gelöst, dass der Faden diejenige Gestalt annehmen muss, bei welcher sein Schwerpunkt möglichst tief liegt, und es handelt sich hiernach nur noch um die mathematische Lösung.

Es seien $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ die Coordinaten der Endpunkte, die Componenten der auf diese wirkenden Kräfte $X_1 Y_1 Z_1$ und $X_2 Y_2 Z_2$, endlich $X ds$, $Y ds$, $Z ds$ die Componenten der auf ein beliebiges Bogenelement des Fadens wirkenden Kraft. Die Grösse, welche alsdann nach dem Princip der virtuellen Verrückungen [Gleichung (6), pag. 47] gleich null zu setzen ist, enthält dann die folgenden Glieder:

$$X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Z_1\delta z_1 + X_2\delta x_2 + Y_2\delta y_2 + Z_2\delta z_2 + \int_{x_1}^{x_2} ds\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Nun ist aber das System einer Bedingung unterworfen, nämlich der, dass das Bogenelement ds von unveränderter Länge bleiben muss. Man muss also zu den obigen noch das mit dem LAGRANGE'schen Faktor λ multiplicirte und über den ganzen Faden integrirte Glied δds, d. h. den Ausdruck

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda \left(\frac{dx}{ds}\, d\delta x + \frac{dy}{ds}\, d\delta y + \frac{dz}{ds}\, d\delta z\right)$$

hinzufügen. Dabei empfiehlt es sich, die einzelnen Theile desselben partiell zu integriren, also z. B.

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda \frac{dx}{ds}\, d\delta x = \left[\lambda \frac{dx}{ds}\,\delta x\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)\delta x$$

zu setzen und schliesslich alle Glieder nach den δ gleicher Grössen zu ordnen. Es ergiebt sich dann die Gleichung

$$\begin{aligned}&\left[X_1 - \left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)_{x_1}\right]\delta x_1 + \left[Y_1 - \left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)_{y_1}\right]\delta y_1 + \left[Z_1 - \left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)_{z_1}\right]\delta z_1 \\ &+ \left[X_2 + \left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)_{x_2}\right]\delta x_2 + \left[Y_2 + \left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)_{y_2}\right]\delta y_2 + \left[Z_2 + \left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)_{z_2}\right]\delta z_2 \\ &+ \int_{x_1}^{x_2}\left[\left[X ds - d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)\right]\delta x + \left[Y ds - d\left(\lambda\frac{dy}{dz}\right)\right]\delta y + \left[Z ds - d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)\right]\delta z\right] = 0.\end{aligned}$$

Nunmehr darf das System als ein völlig freies betrachtet werden, die δ sind

sämmtlich willkürlich, man kann z. B. alle bis auf eins gleich Null setzen, und es muss daher dessen Faktor, und in analoger Weise alle andern Faktoren für sich verschwinden. Man erhält somit die neun Gleichungen:

$$\begin{aligned} &X_1 - \left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)_{x_1} = 0, \quad Y_1 - \left(\lambda \frac{dy}{ds}\right)_{y_1} = 0, \quad Z_1 - \left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)_{z_1} = 0, \\ &X_2 + \left(\lambda \frac{dx}{ds}\right)_{x_2} = 0, \quad Y_2 + \left(\lambda \frac{dy}{dz}\right)_{y_2} = 0, \quad Z_2 + \left(\lambda \frac{dz}{ds}\right)_{z_2} = 0, \end{aligned} \tag{37}$$

$$X ds - d\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad Y ds - d\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right) = 0, \quad Z ds - d\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right) = 0, \tag{38}$$

von denen die sechs ersten die Grenzbedingungen, die drei letzten die Hauptgleichungen des Problemes darstellen. Es ergiebt sich nun auch unmittelbar die physikalische Bedeutung des Multiplicators λ. Es ist nämlich $X ds$ die X-Componente der auf ds wirkenden äusseren Kraft, es muss also $d(\lambda dx/ds)$ die jener Kraft das Gleichgewicht haltende X-Componente der Spannung von ds sein. Diese X-Spannung ist nun das Resultat des Umstandes, dass die $+X$-Spannung an dem einen Ende von ds etwas grösser ist, als die $-X$-Spannung am anderen Ende und zwar um das Differential der letzteren. Die X-Componente der Spannung in einem Punkte des Fadens ist also $-\lambda dx/ds$ und folglich die gesammte Spannung in diesem Punkte gerade $-\lambda$. Man erkennt wieder auf's Deutlichste die physikalische Bedeutung der LAGRANGE'schen Methode: Der Faden kann sich nicht ausdehnen, dieser Zwang ruft Spannung hervor und diese Spannung findet ihr Maass in dem LAGRANGE'schen Multiplikator.

Schreibt man jetzt S für λ und führt die zweiten Glieder der Gleichung (38) aus, so erhält man

$$\begin{aligned} X ds + dS \frac{dx}{ds} + S d \frac{dx}{ds} &= 0, \\ Y ds + dS \frac{dy}{ds} + S d \frac{dy}{ds} &= 0, \\ Z ds + dS \frac{dz}{ds} + S d \frac{dz}{ds} &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Diese drei Gleichungen sind unmittelbar geeignet, um die beiden gestellten Aufgaben zu lösen. Multiplicirt man die erste derselben mit dy/ds, die zweite mit dx/ds und zieht die zweite von der ersten ab, so heben sich die mittleren Glieder fort; bringt man dann die letzten Glieder nach rechts und dividirt die ganze Gleichung durch den Faktor von S, so erhält man einen der Spannung S gleichgesetzten Bruch. Zwei ebensolche Brüche erhält man aber auch, wenn man die analoge Operation mit der zweiten und dritten, sowie mit der dritten und ersten der Gleichungen (39) ausgeführt, man kann also alle drei Brüche einander gleich setzen und findet:

$$\frac{X \frac{dy}{ds} - Y \frac{dx}{ds}}{\frac{dx}{ds} d \frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} d \frac{dx}{ds}} = \frac{Y \frac{dz}{ds} - Z \frac{dy}{ds}}{\frac{dy}{ds} d \frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds} d \frac{dy}{ds}} = \frac{Z \frac{dx}{ds} - X \frac{dz}{ds}}{\frac{dz}{ds} d \frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d \frac{dz}{ds}}. \tag{40}$$

Dies sind die beiden Gleichungen der Curve, welche der Faden bildet.

Es handelt sich nun noch um die Ermittelung der Spannung. Multiplicirt man nun die Gleichungen (39) resp. mit $d\frac{dx}{ds}, d\frac{dy}{ds}, d\frac{dz}{ds}$ und addiert sie, erwägt man, dass das zweite Glied verschwindet, weil der Faktor von dS

$$\frac{dx}{ds} d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d \frac{dz}{ds} = d\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = d(1) = 0$$

wird und ferner, dass der Faktor von S im letzten Gliede sich durch den ersten Krümmungsradius r[1]) nach der Formel

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{ds}\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

ausdrücken lässt, so erhält man

$$X d\frac{dx}{ds} + Y d\frac{dy}{ds} + Z d\frac{dz}{ds} = -S\frac{ds}{r^2}. \qquad (40\text{a})$$

Multiplicirt man andererseits die Gleichungen (39) resp. mit dx/ds, dy/ds, dz/ds und addirt sie, so wird der Faktor von dS gleich eins, der von S gleich null, und es wird

$$X dx + Y dy + Z dz + dS = 0, \qquad (40\text{b})$$

Quadrirt man endlich die Gleichungen (39) und addirt sie, benutzt die beiden Beziehungen (40a) und (40b) und nennt die Kraft R, so findet man

$$R^2 ds^2 - dS^2 - S^2\frac{ds^2}{r^2} = 0. \qquad (41)$$

Damit ist eine Relation zwischen Spannung, Krümmungsradius und wirkender Kraft gefunden. Die Gleichungen (40) und (41) enthalten die Lösungen des allgemeinen Problems.

Kettenlinie.[2]) Die obigen Resultate lassen sich leicht für den Fall der Schwerkraft specialisieren. Die xy-Ebene sei die Vertikalebene, die y-Axe der Schwere entgegengerichtet; dann hat man als Hauptgleichungen, wenn ρ die Dichte des Fadenmateriales ist (Gewicht der Längeneinheit):

$$d\left(S\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad d\left(S\frac{dy}{ds}\right) = \rho\, ds.$$

Man kann diese Gleichungen übrigens auch direkt ableiten. Successive erhält man nun folgende Ausdrücke

$$S\frac{dx}{ds} = c, \qquad S\frac{dy}{ds} = \rho s + k, \qquad \text{folglich} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\rho}{c}s + c';$$

hieraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{c}\frac{ds}{dx} = \frac{\rho}{c}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \text{folglich integrirt}$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{c}{\rho}\left(e^{\frac{\rho}{c}x + c_1} + e^{-\frac{\rho}{c}x - c_1}\right) + \alpha.$$

Die Integrationsconstanten bestimmen sich durch die für die beiden Endpunkte des Fadens gegebenen Beziehungen zwischen x und y; es zeigt sich dabei, dass die Gleichung am einfachsten wird, wenn man die y-Axe durch den tiefsten Punkt, den sogenanten Scheitel der Curve hindurchlegt und die x-Axe in einem gewissen Abstand m unterhalb des Scheitels zieht. Es wird dann

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right). \qquad (42)$$

Diese Gleichungscurve eines hängenden unausdehnbaren Fadens heisst die gemeine Kettenlinie. Es handelt sich noch darum anzugeben, wie man den in ihr vorkommenden Parameter m zu bestimmen habe. Geometrisch bedeutet derselbe die Höhe des Scheitels über dem Coordinatenanfange, physikalisch, wie leicht abzuleiten, das Verhältnis der Scheitelspannung zum Gewichte der Längeneinheit. Von den Formeln, welche m bestimmen, sind die wichtigsten, wenn der Einfachheit halber die Kette symmetrisch, also beide Endpunkte in gleicher Höhe

[1]) D. h. durch den Krümmungsradius in der Schmiegungsebene.

[2]) Die Lösung dieses Problems findet sich, als Antwort auf die Fragestellung JAC. BERNOUILLI's in den Acta Erud. 1691, u. zwar gleichzeitig von JOH. BERNOUILLI, LEIBNITZ und HUYGENS.

angenommen werden (andernfalls sind die Formeln ein wenig zu modifiziren, resp. anders zu deuten):

1. Aus Kettenlänge s und Hängetiefe t:

$$m = \frac{1}{2t}\left(\frac{1}{4}s^2 - t^2\right).$$

2. Aus s und dem Hängewinkel φ:

$$m = \frac{1}{2} s \, ctg \varphi .$$

3. Aus s und der Spannweite a:

$$\frac{e^{2m/a} - e^{-2m/a}}{4\frac{m}{a}} = \frac{s}{a},$$

eine trancendente Gleichung, aus welcher mit Hilfe von Tafeln m ermittelt werden kann.

(Ph. 14.)

4. Aus dem Hängewinkel φ und der Hängetiefe t:

$$m = \frac{t \cos\varphi}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}.$$

Schliesslich ergiebt sich die Scheitelspannung

$$S_0 = \rho m,$$

und die Spannung in irgend einem Punkte, wenn ψ der Neigungswinkel daselbst ist:

$$S = S_0 \sec\psi .$$

Das Problem der Kettenlinie hat ein Analogon im Raume, das Problem des Gleichgewichts biegsamer, unausdehnbarer Flächen; es muss indessen genügen, auf die Bearbeitung hinzuweisen, welche diesem Problem kürzlich zu Theil geworden ist[1]) und zu bemerken, dass man dabei auf Abel'sche Functionen kommt.

Gleichgewichtsaxen. Wenn eine gerade Linie die Eigenschaft hat, dass, wenn man ein gegebenes, unter der Wirkung gegebener Kräfte im Gleichgewicht befindliches System um sie dreht und in der neuen Lage an denselben Punkten des Systems dieselben Kräfte in derselben absoluten Raumrichtung wirken lässt, das System immer noch im Gleicgewicht ist, so nennt man jene Linie eine Gleichgewichtsaxe. Als Bedingungen für die Existenz einer solchen findet man, wenn $\varphi\chi\psi$ die Richtungswinkel einer gewissen, durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden sind, und wenn zur Abkürzung

$$\sum yY + \sum zZ = f, \quad \sum zZ + \sum xX = g, \quad \sum xX + \sum yY = h,$$
$$\sum yZ = \sum zY = F, \quad \sum zX = \sum xZ = G, \quad \sum xY = \sum yX = H,$$

gesetzt wird, die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} -f\cos\varphi + H\cos\chi + G\cos\psi &= 0, \\ +H\cos\varphi - g\cos\chi + F\cos\psi &= 0, \\ +G\cos\varphi + F\cos\chi - h\cos\psi &= 0, \end{aligned} \qquad (43)$$

woraus sich

$$\begin{vmatrix} -f & H & G \\ H & -g & F \\ G & F & -h \end{vmatrix} = 0 \qquad (43a)$$

ergiebt. Jede Linie, welche der Gleichgewichtsaxe im Raume parallel ist, ist ebenfalls als Gleichgewichtsaxe zu betrachten. Wenn die Gleichung

[1]) Kötter, Crelle's J. 103, pag. 44 (1888).

$$\frac{\cos\varphi}{F} + \frac{\cos\chi}{G} + \frac{\cos\psi}{H} = 0, \qquad (43\text{b})$$

erfüllt wird, so giebt es sogar zwei in einer Ebene gelegene Gleichgewichtsaxen, und jede Linie, welche in dieser oder einer ihr parallelen Ebene liegt, ist ebenfalls eine Gleichgewichtsaxe. Wenn endlich ein System drei weder in derselben noch in parallelen Ebenen liegende Gleichgewichtsaxen hat, so kann jede Linie im Raume als Gleichgewichtsaxe betrachtet werden. Von besonderer Wichtigkeit ist noch der Satz, dass man jede Linie durch geeignete Anbringung eines Kräftepaars zu einer Gleichgewichtsaxe machen kann. Die Theorie des stabilen, indifferenten und labilen Gleichgewichtes lässt sich auf Grund der Theorie der Gleichgewichtsaxen in ganz allgemeiner Weise behandeln.

Im Obigen ist nur ein Theil der Betrachtungen und Probleme der Statik, mit vorzugsweiser Berücksichtigung der Resultate, skizzirt worden. Auf die weitere Ausführung dieser, sowie auf die Behandlung der übrigen statischen Probleme muss und darf hier verzichtet werden, ersteres des Raumes halber, letzteres, weil das Interesse an diesen Problemen und Ausführungen in überwiegendem Maasse entweder ein mathematisches oder ein technisches ist.[1])

F. Auerbach.

Dynamik.

Dynamik ist die allgemeine Lehre von der Bewegung, also, ebenso wie die Statik, ein Theil der Mechanik, aber insofern ein weit allgemeinerer und umfassenderer Theil, weil die Statik, wenn man will, nur einen speciellen Fall der Dynamik darstellt, nämlich denjenigen, in welchem die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten verschwinden. In der That wird sich zeigen, dass die fundamentalen, in der Dynamik giltigen Beziehungen in der Gestalt von Gleichungen auftreten, aus denen man durch Nullsetzen der Beschleunigungen die Gleichungen des Gleichgewichtes erhält.[2])

Grundgleichungen der Dynamik. Für ein völlig freies System bedarf es zur Aufstellung derselben keiner weiteren Betrachtungen als der Erinnerung an das Kraftprincip und das Massenprincip (Princip 2 und 3, pag. 35). Es ist hiernach für einen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Punkt, wenn m seine Masse ist, und XYZ die Componenten der Resultante sämmtlicher auf ihn wirkenden Kräfte sind:

---

[1]) Die Lehren der Statik sind in einer Reihe von Werken entwickelt worden, von denen hier folgende hervorgehoben werden mögen: Ubaldi, Mechanicorum liber. Pes. 1577. — Stewin, in versch. Schriften, 1585—1608. — Galilei, opera (1600—1642). — Bernouilli, Jac., Opera. Genf 1744. — Bernouilli, Joh., Opera. Laus. 1742. — Lagrange, Méc. analyt. Paris 1788. — Poinsot, Elém. de Statique. Par. 1804. — Möbius, Statik. Leipz. 1837. — Von Lehrbüchern, die aber zugleich auch die Dynamik behandeln, sind zu nennen: Duhamel, Lehrbuch d. Mechanik; Sturm, cours de méc.; Thomson u. Tait, Handb. d. theor. Phys.; Kirchhoff, Mechanik; Fuhrmann, Aufgaben a. d. analyt. Mech.; Schell, Th. d. Bew. u. d. Kräfte; Buff, Lehrb. d. phys. Mech.; Mach, die Mechanik; Rausenberger, analyt. Mechanik; Somoff, theor. Mechanik (deutsch v. Ziwet) und viele Andere.

[2]) In der englischen Litteratur wird, da dort Dynamik meist mit unserer »Mechanik« identisch gebraucht wird, unsere »Dynamik« häufig »Kinetik« genannt.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z. \tag{1}$$

Für ein freies System von Punkten gelten so viel Mal drei solche Gleichungen, als dasselbe Punkte hat. Man kann dieselbe aber in eine einzige zusammenfassen, indem man unter δx, δy, δz beliebige Verschiebungen der Punkte versteht, die Gleichungen beziehungsweise mit ihnen multiplicirt und dann addirt; man erhält dann die Gleichung

$$\sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0. \tag{2}$$

Aus ihr erhält man jederzeit wiederum rückwärts das ursprüngliche Gleichungssystem, indem man den Faktor jedes δ für sich gleich Null setzt, was man darf, da die δ ganz beliebig sind, also z. B. alle bis auf eins gleich Null gesetzt werden dürfen.

Nicht so einfach verhält es sich, wenn das System ein unfreies, also gewissen Bedingungen unterworfen ist. Der Gang der Betrachtung ist dann ganz analog demjenigen, welcher in der Statik eingeschlagen worden ist (s. oben pag. 42). Sind nämlich die Bedingungen, denen die Punkte unterworfen sind, in Form der Gleichungen $\varphi=0$, $\psi=0$ u. s. w. gegeben, und sind λ, μ u. s. w. LAGRANGE'sche Multiplicatoren, so berücksichtigt man den den Punkten in Bezug auf ihre Bewegungen auferlegten Zwang, indem man zu der Kraft X die Kräfte $\lambda\partial\varphi/\partial x$, $\mu\partial\psi/\partial x$ u. s. w. und entsprechende Kräfte zu den anderen Kraftcomponenten hinzufügt, so dass man folgendes Gleichungssystem erhält:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+\ldots,\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}+\ldots,\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}+\ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

und ebenso für die anderen Punkte des Systemes. Diese Gleichungen sind die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen.[1])

D'ALEMBERT'sches Princip. In der Statik ist das Gleichgewicht eines unfreien Systemes, ausser durch Gleichungen, welche den Gleichungen (3) entsprechen und mit Hilfe der bewussten Specialisirung aus ihnen hervorgehen, in noch einfacherer Weise durch eine einzige Gleichung, nämlich durch den analytischen Ausdruck des Principes der virtuellen Verrückungen charakterisirt worden. In ganz derselben Weise lässt sich auch die Bewegung eines unfreien Systems durch eine einzige Gleichung charakterisiren, und die Ableitung dieser Gleichung kann in genau analoger Weise wie dort erfolgen; der Abwechslung halber soll jedoch hier ein der Form nach etwas abweichender Weg eingeschlagen werden, welcher überdies weit unmittelbarer zum Ziele führt. Es

1) Wenn bei dem Zwange, welchem die Bewegung unterworfen ist, die Reibung eine Rolle spielt, so nehmen die LAGRANGE'schen Multiplicatoren und demgemäss auch die Bewegungsgleichungen eine verwickeltere Gestalt an; sie lauten, wenn nur eine Bedingung besteht, und wenn k der Reibungscoëfficient ist:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+k\frac{dx}{dt}\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\right),\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+k\frac{dy}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\right),\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+k\frac{dz}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\right), \end{aligned}$$

sollen jetzt δx u. s. w. nicht mehr beliebige, sondern virtuelle Verrückungen sein, d. h. sie sollen mit den Bedingungsgleichungen in Einklang stehen. Es gelten dann die Gleichungen:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x = 0, \quad \sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x = 0, \quad \text{u. s. w.} \tag{4}$$

wo die Σ über alle Coordinaten und Punkte auszudehnen sind. Es möge bemerkt werden, dass in den Bedingungsgleichungen auch die Zeit vorkommen kann; es wird das z. B. der Fall sein, wenn ein Punkt sich ausschliesslich in einer Schale bewegen soll, diese selbst aber im Raume nicht fest ist. In solchen Fällen ist dann in den Gleichungen (4) die Zeit als constant zu betrachten. Multiplicirt man nun die Gleichung (3) beziehungsweise mit δx, δy u. s. w. und addirt sie, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (4)

$$\sum \left[\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z\right] = 0, \tag{5}$$

Diese Gleichung ist mit dem Gleichungssystem (3) ganz gleichbedeutend, wenn hinzugefügt wird, dass sie für alle virtuellen Verrückungen gelten solle, und man kann auch umgekehrt aus dieser Gleichung jenes System ableiten, d. h. zeigen, dass es Grössen λ, μ u. s. w. giebt, welche die Gleichungen (3) erfüllen, wenn die Gleichung (5) für alle den Gleichungen (4) genügenden δ befriedigt wird.

Wie man sieht, stimmt die Gleichung (5), obgleich sie für ein unfreies System gilt, formell vollständig überein mit der für ein freies System giltigen Gleichung (2). Diese Gleichung oder auch die Thatsache dieser formellen Uebereinstimmung kann man der modernen Auffassung gemäss als das D'ALEMBERT'sche Princip bezeichnen. Es wird aber gut sein, die Ableitung und die Ausspruchsweise dieses Principes auch in derjenigen Form anzugeben, welche die historisch ursprüngliche ist.

Man denke sich die Punkte P, P', P'' .... durch die Kräfte R, R', R'' ..., sowie durch die Bedingungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ .... in ihren Bewegungen bestimmt. Wären die Punkte frei, so müsste man, um dieselbe Bewegung zu erzielen, statt der Kräfte R Kräfte von anderer Grösse und Richtung, Q, Q' ..... auf sie wirken lassen; da hierdurch die Bewegungen gar nicht geändert werden, so bleiben auch die Bedingungsgleichungen giltig, und man kann sagen, dass man die Kräfte R ohne weiteres durch die Kräfte Q ersetzen darf. Denkt man sich nun statt der Kräfte Q die ihnen gleichen und entgegengesetzten Kräfte $-Q$ eingeführt, so kommt man zu dem Ergebniss, dass die Kräfte P und die Kräfte $-Q$ sich das Gleichgewicht halten. In Worten: Die bewegenden Kräfte eines Systemes sind in Folge der Bedingungen des Systems stets im Gleichgewicht mit den Kräften, welche gleich und entgegengesetzt denjenigen sind, welche die wirklichen Bewegungen des Systems hervorbringen würden, wenn dasselbe frei wäre. Nun sind letztere Kräfte formell auszudrücken durch md^2x/dt^2 ...., erstere durch X .... Unter den Kräften $md^2x/dt^2 - X$ .... ist also das System im Gleichgewicht. Man kann daher das System der virtuellen Verrückungen anwenden und erhält auf diese Weise die Gleichung (5).

Diese Betrachtung zeigt zugleich den Zusammenhang zwischen dem D'ALEMBERT'schen Princip und dem Princip der virtuellen Verrückungen, indem sie ersteres auf letzteres zurückführt. Man kann daher sagen: Das D'ALEMBERT'sche Princip ist die Verallgemeinerung des Principes der virtuellen Verrückungen auf Bewegungsvorgänge. In der That erhält man letzteres, wenn man in Gleichung (5) die Beschleunigung gleich Null setzt.

HAMILTON'sches Princip. Das D'ALEMBERT'sche Princip lässt sich noch auf eine andere Form bringen, welche formell weit einfacher ist und den Vorzug hat, dass in ihr nur Grössen vorkommen, welche vom Coordinatensystem nicht mehr abhängen. Es ist

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt},$$

also

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right) - \frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt}.$$

Nun ist aber

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt} = \frac{dx}{dt}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2;$$

es wird also

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

und somit der ganze positive Theil der Gleichung (5)

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)$$
$$- \delta\sum\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Die in dem letzten Gliede dieser Gleichung vorkommende Summe ist die kinetische Energie des Systemes (s. »Grundbegriffe«, pag. 21), nämlich, wenn G die Geschwindigkeit ist, $K = \frac{1}{2}\sum mG^2$. Andererseits ist der negative Theil der Gleichung (5), d. h.

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

die von den Kräften bei den Verrückungen δx .... geleistete Arbeit (s. »Grundbegriffe«, pag. 19); sie möge L genannt werden. Die Gleichung (5) erhält dann die Gestalt

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) = \delta K + L,$$

oder, da die Klammergrösse linkerseits das Produkt der Geschwindigkeit G mit der Verrückung Δ und dem Cosinus des Winkels ϑ zwischen beiden Richtungen ist:

$$\frac{d}{dt}\sum mG\Delta\cos\vartheta = \delta K + L, \tag{6}$$

eine Gleichung, welche sich nicht mehr auf ein Coordinatensystem bezieht.

Multiplicirt man nun die Gleichung (6) mit dt, integrirt sie zwischen irgend zwei Grenzen t_0 und t_1 und wählt die virtuellen Verrückungen so, dass sie für die Grenzen verschwinden, so erhält man

$$\int_{t_0}^{t_1} dt(\delta K + L) = 0. \tag{7}$$

Der Satz, dass diese Gleichung gelten muss für alle an den Grenzen verschwindende virtuelle Verrückungen der Punkte, heisst das HAMILTON'sche Princip. Es ist formell der einfachste analytische Ausdruck der der Bewegung eines Systemes zu Grunde liegenden Beziehung. Wie es hier aus dem D'ALEMBERT'schen Principe hergeleitet wurde, so ist auch das Umgekehrte möglich, und zwar durch eine Betrachtung, ähnlich derjenigen, durch welche das D'ALEMBERT'sche Princip seinerseits in die LAGRANGE'schen Gleichungen aufgelöst werden konnte. Das LAGRANGE'sche System von Differentialgleichungen (3), das D'ALEMBERT'sche Princip (5) und das HAMILTON'sche Princip (7) sind also der

Sache nach ganz gleichbedeutend, und nur der Form nach verschiedene Ausdrucksweisen der Fundamentalbeziehung für die Bewegung eines Systemes.

Transformation der Bewegungsgleichungen. Zur Transformation der Bewegungsgleichungen von einem rechtwinkligen Coordinatensystem xyz in irgend ein anderes, beliebiges Coordinatensystem $p_1, p_2 \ldots$ eignet sich naturgemäss am meisten das HAMILTON'sche Princip. L wird alsdann eine lineare, homogene Funktion der δp, deren Coëfficienten von den p, dp/dt und t abhängen. Ebenso wird K eine homogene Funktion zweiten Grades von den dp/dt, deren Coëfficienten von den p abhängen, also δK eine homogene lineare Funktion theils der δp, theils der $\delta dp/dt$ oder, was dasselbe ist, der $d\delta p/dt$. Sind also P_1 und P_2 Funktionen von $p\, dp/dt$ und t, so nimmt die rechte Seite der Gleichung (6) die Gestalt

$$\sum\left(P_1 \delta p + P_2 \frac{d\delta p}{dt}\right)$$

an. Nun bestehen, wie früher zwischen den xyz, so jetzt zwischen den p Bedingungsgleichungen, die δp, welche demgemäss nicht beliebig sind, lassen sich somit auf eine um die Zahl der Bedingungsgleichungen geringere Anzahl von einander unabhängiger Verrückungen, die der einfacheren Schreibweise halber kurz mit δ bezeichnet werden mögen, zurückführen, und folglich die $d\delta p/dt$ auf lineare, homogene Funktionen der δ und $d\delta/dt$, deren Coefficienten wieder p, dp/dt und t enthalten, so dass obiger Ausdruck, neu geordnet,

$$\sum\left(P_3 \delta + P_4 \frac{d\delta}{dt}\right)$$

wird. Das HAMILTON'sche Princip nimmt also die Gestalt

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum\left(P_3 \delta + P_4 \frac{d\delta}{dt}\right) = 0,$$

oder, mittelst partieller Integration des zweiten Gliedes

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum\left(P_3 - \frac{dP_4}{dt}\right)\delta = 0,$$

an. Da nun die δ, ausser dass sie für die Grenzen verschwinden sollen, ganz beliebig sind, so muss unter der Summe der Faktor jedes δ für sich verschwinden, und diese Gleichungen, d. h. die Gleichungen

$$\frac{dP_4}{dt} = P_3 \tag{8}$$

sind die Differentialgleichungen der Bewegung in dem neuen Coordinatensystem.

Haben die Kräfte ein Potential P, so ist

$$X = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad L = \delta P.$$

Das HAMILTON'sche Princip erhält also die Gestalt

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt (K + P) = 0. \tag{9}$$

Diese Gleichung ist die Verallgemeinerung einer früher für das Gleichgewicht aufgestellten (s. Statik, pag. 62).

Die erläuterte Transformationsmethode führt beispielsweise für Polarcoordinaten $r\varphi\psi$ zu folgenden Bewegungsgleichungen, in welchen erste Differentialquotienten nach der Zeit der Uebersichtlichkeit halber durch Striche bezeichnet sind:

$$m\left(\frac{dr'}{dt} - r\varphi'^2 - r\sin^2\varphi\psi'^2\right) = \frac{\partial P}{\partial r},$$
$$m\left(\frac{d(r^2\varphi')}{dt} - \frac{1}{2}r^2\sin^2\varphi\psi'^2\right) = \frac{\partial P}{\partial \varphi},$$
$$m\frac{d(r^2\sin^2\varphi\psi'}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \psi}.$$

Satz von der Erhaltung der Energie. Aus dem D'ALEMBERT'schen Princip ergiebt sich, wenn die δ durch d ersetzt werden, durch Integration sofort eine wichtige Beziehung zwischen der kinetischen Energie, deren Anfangs- und Endwerthe K_0 und K_1 heissen mögen, und der Arbeit L, nämlich

$$K_1 - K_0 = \int_{t_0}^{t_1}\sum(Xdx + Ydy + Zdx) = L,$$

in Worten: die Zunahme der kinetischen Energie ist gleich der verbrauchten Arbeit; und umgekehrt: die Abnahme der kinetischen Energie ist gleich der geleisteten Arbeit. Es ist dies der Satz von der kinetischen Energie. Ist wiederum P das von der Zeit unabhängige Potential, so ist $L = P_1 - P_0$, also auch $K_1 - K_0 = P_1 - P_0$, K und P unterscheiden sich also nur durch eine Constante, in Formel

$$K - P = const.$$

Führt man statt des Potentials die potentielle Energie (s. Art. »Grundbegriffe«) ein, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheidet und schreibt man demgemäss die Gleichung in der Form

$$K + (-P) = const.,$$

so erhält man das Princip von der Erhaltung der Energie: Die kinetische und die potentielle Energie ergänzen sich zu einer constanten Summe.

Verschiedene Arten von Bewegungen. Man unterscheidet zunächst fortschreitende und schwingende Bewegungen. Bei ersteren gelangt der sich bewegende Punkt oder Körper mit der Zeit in immer neue Gebiete des Raumes, bei letzteren bleibt er stets in einem und demselben Raumgebiete und ändert nur in diesem periodisch seinen Ort. Betrachtet man an einer Bewegung der letzteren Art nur einen verhältnismässig kleinen Theil, so kann dieser an sich eine Bewegung der ersteren Art sein. Die Bewegung der Erde um die Sonne ist z. B., wenn man nur einige Tage, Wochen oder Monate in Betracht zieht, eine fortschreitende Bewegung, als Ganzes betrachtet dagegen und selbst dann schon, wenn man nur einige Jahre ins Auge fasst, eine schwingende Bewegung. Die Bewegung eines Geschosses andererseits ist nicht nur in ihren Theilen, sondern auch als Ganzes eine fortschreitende Bewegung, und nur in dem speciellen Falle, dass das Geschoss vertikal nach oben geworfen wird, so dass es in derselben Linie wieder herabfällt, kann man von einer Schwingungsbewegungsbewegung, freilich von im Ganzen nur einer einzigen halben Schwingung sprechen; ein Beispiel, welches lehrt, dass eine strenge Trennung der beiden Arten Bewegung von einander nicht durchführbar ist, und dass man jede fortschreitende Bewegung als den Anfang einer, vor ihrem völligen Zustandekommen abgebrochenen Schwingungsbewegung auffassen kann.

Eine zweite Unterscheidung, nämlich diejenige zwischen geradlinigen und krummlinigen Bewegungen, und eine dritte, nämlich diejenige zwischen gleichförmigen, beschleunigten und verzögerten Bewegungen ist schon früher gemacht worden (s. Art. Grundbegriffe, pag. 17). Sowohl eine fortschreitende als auch eine schwingende Bewegung kann geradlinig sein; ein Beispiel für den ersteren Fall bildet ein fallender Stein, ein solches für den letzteren Fall der Mittelpunkt der

Membran einer geschlagenen Pauke. Bei krummlinigen Schwingungen ist aber eine weitere Unterscheidung von besonderer Wichtigkeit: diejenige zwischen hin- und hergehenden Schwingungen, welche man meist ausschliesslich als Schwingungen bezeichnet, und drehenden Bewegungen; ein Beispiel der ersteren bietet das gewöhnliche Pendel dar, Beispiele für die letzteren ein Wassertheilchen auf der Wellenoberfläche eines Teiches oder die Bewegung der Erde um die Sonne.

Der einfachste Fall einer Bewegung ist offenbar derjenige, in welchem sowohl die Richtung als auch die Geschwindigkeit der Bewegung constant ist, also die geradlinige gleichförmige Bewegung. Nach dem in den Grundbegriffen Gesagten kann man diese Bewegung, statt durch die Constanz von Richtung und Geschwindigkeit, auch durch die Constanz der drei Geschwindigkeitscomponenten u, v, w charakterisiren. Umgekehrt erhält man, wenn als Bewegungsgleichungen die Gleichungen

$$u = \frac{dx}{dt} = a, \quad v = \frac{dy}{dt} = b, \quad w = \frac{dz}{dt} = c,$$

und ausserdem als Grenzbedingungen die Anfangswerthe der Coordinaten, $x_0 y_0 z_0$ gegeben sind, als Lösungen

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct,$$

und folglich als Bahn die gerade Linie, deren Gleichungen

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

sind. Die Bewegung kann übrigens auch durch die Angabe charakterisirt werden, dass die Beschleunigungscomponenten gleich Null sind, oder was dasselbe ist, dass keine Kräfte wirken, oder die wirkenden Kräfte sich aufheben; es müssen dann ausser den Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

noch die Anfangswerthe der Geschwindigkeiten abc und die des Ortes $x_0 y_0 z_0$ gegeben sein; diese Formulirung ist aber hier offenbar ein Umweg, weil die Anfangswerthe abc hier zugleich die dauernden Werthe sind.

Eine geradlinige, aber ungleichförmige Bewegung ist dadurch charakterisirt, dass nur eine der drei Beschleunigungscomponenten von Null verschieden ist, und dass auch von den drei Geschwindigkeitscomponenten nur diese eine einen Werth hat. Die Gleichungen sind alsdann

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = g.$$

Lässt man die zweite Anforderung weg, stellt man also die Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = g \tag{10}$$

auf, so erhält man eine krummlinige, aber nur in der z-Richtung beschleunigte Bewegung. Ueber die Art dieser Bewegung s. Art. »Fall und Wurf«. Wirken in allen drei Richtungen Kräfte, so ist die Bewegung im allgemeinen krummlinig und beschleunigt. Noch complicirter wird natürlich das Verhalten, wenn die Kräfte, also auch die Beschleunigungen nicht, wie bisher angenommen wurde, constant, sondern veränderlich sind.

Der einfachste Fall einer Bedingungen unterworfenen Bewegung ist die eines Punktes, auf den keine Kräfte wirken, der sich aber auf einer gegebenen Fläche bewegen muss, z. B. auf einer Ebene, einer Kugelfläche u. s. w. Wichtiger sind die den genannten sonst analogen Fälle, in denen aber in einer der drei

Coordinatenrichtungen eine constante Kraft g wirkt. Im Falle der Bewegung auf einer Ebene $ax + by + cz + d = 0$ werden alsdann die LAGRANGE'schen Gleichungen (3)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda a, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda b, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g + \lambda c, \tag{11}$$

in dem Falle der Bewegungen auf einer Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ werden sie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g + \lambda z. \tag{12}$$

Das erstere Problem ist das der schiefen Ebene (s. Art. »Fall und Wurf«), das letztere das des mathematischen Pendels in seiner allgemeinsten Gestalt (s. Art. »Pendel«).

Die einfachste Schwingungsbewegung wird durch die Gleichung

$$x = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + c\right) \text{ oder auch } x = A \sin(2\pi nt + c)$$

dargestellt. A ist die Amplitude oder Schwingungsweite, T die Schwingungsdauer, n die Schwingungszahl, c die Phase. Setzt man zwei derartige Schwingungen von gleichen Schwingungszahlen, aber auf einander senkrechten Richtungen, sowie verschiedenen Amplituden und Phasen:

$$x = A \sin(2\pi nt + a), \; y = B \sin(2\pi nt + b)$$

zusammen, so findet man als Bahn des Punktes die Ellipse

$$x^2 B^2 + y^2 A^2 - 2xyAB \cos(a - b) = A^2 B^2 \sin^2(a - b).$$

Haben speciell beide Schwingungen dieselbe Phase, so erhält man als Bahn die gerade Linie $x:y = A:B$. Ist andererseits die Phasendifferenz gleich $\frac{\pi}{2}$, so ist die Excentricität der Ellipse am kleinsten, und ist in diesem Falle auch noch Gleichheit der Amplituden vorhanden ($B = A$), so erhält man als Bahn den Kreis $x^2 + y^2 = A^2$. Untersucht man in allen diesen Fällen die Geschwindigkeit der Bewegung, so findet man, dass diese Bewegung eine ungleichförmige ist, ausgenommen den Fall der kreisförmigen Bahn. Die gleichförmige Drehbewegung auf einem Kreise läst sich also betrachten als zusammengesetzt aus zwei auf einander senkrechten Sinusschwingungen von gleicher Amplitude und der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$.

In analoger Weise lassen sich Schwingungen in drei auf einander senkrechten Raumrichtungen kombinieren.

Complicirtere Schwingungen erhält man, wenn man einfachere Schwingungen von verschiedener Schwingungszahl combinirt, sei es nun, dass die Schwingungen in aufeinander senkrechten oder in gleichen Richtungen erfolgen. In letzterem Falle handelt es sich häufig um die Combination zahlreicher Schwingungen, und von besonderer Wichtigkeit ist dann der Fall, dass die Schwingungszahlen der Einzelschwingungen sich wie die natürlichen Zahlen verhalten.

Derartige Schwingungserscheinungen kommen bei zahlreichen hydrodynamischen und anderen Vorgängen vor; insbesondere aber liegen sie den akustischen und optischen Erscheinungen zu Grunde (s. das.).

Bewegung des Schwerpunktes. Handelt es sich nicht um die Bewegung eines einzelnen Punktes, sondern um die eines Systemes starr mit einander verbundener Punkte oder eines starren Körpers, so liegt es nahe, sich daran zu erinnern, dass es für das Gleichgewicht solcher Systeme in ihnen einen Punkt giebt, welcher eine ausgezeichnete Rolle spielt. In der That lässt sich durch die Betrachtung

dieses Punktes, des Schwerpunktes, auch für eine Art der Bewegung, nämlich die fortschreitende, eine übersichtliche Anschauung gewinnen. Findet diese Bewegung etwa in der x-Richtung statt, so sind in der D'ALEMBERT'schen Gleichung (5) alle δy und δz gleich Null, und alle δx einander gleich; man erhält also, wenn man dieselbe Betrachtung auch für die Bewegungen der y- und z-Richtung anstellt, die Gleichungen

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X, \quad \sum m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum Y, \quad \sum m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum Z.$$

In diese Gleichungen kann man die Masse M und die Coordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunktes mit Hilfe der Gleichungen [s. Statik, pag. 52, Gleichung (14)]

$$M = \Sigma m, \quad \xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad \zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

einführen und erhält dadurch

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum X, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \sum Y, \quad M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \sum Z. \tag{13}$$

Diese Gleichungen enthalten den Satz von der Bewegung des Schwerpunktes: Der Schwerpunkt eines Systemes von Massen bewegt sich so, als ob in ihm alle Massen vereinigt wären und auf ihn alle Kräfte wirkten. Dabei kann das System beliebigen, mit den Bewegungen in drei auf einander senkrechten Richtungen vereinbaren Bedingungen unterworfen sein. Sind die Componenten der äusseren Kräfte gleich Null, so verhält sich der Schwerpunkt des Systemes wie ein Punkt, auf welchen keine Kräfte wirken, d. h. er beschreibt eine gerade Linie, mit constanter Geschwindigkeit. Das letztere Resultat lässt sich auch auf den Fall eines nicht starren Systemes erweitern, wenn die im Innern desselben von Masse zu Masse wirkenden Kräfte ein nur von der relativen Lage dieser Massen abhängiges Potential haben, z. B. auf unser Sonnensystem unter Vernachlässigung der Einwirkung der Fixsterne. Diesen Spezialfall des Schwerpunktes nennt man den Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes (häufig kürzer aber weniger gut »Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes«).

Flächensatz. Dieser Satz spielt dieselbe Rolle für drehende Bewegungen, wie der Schwerpunktsatz für fortschreitende. Betrachtet man zunächst eine Drehung um die z-Axe, und führt man den Drehungswinkel ϑ durch die Gleichungen

$$x = \rho \cos\vartheta, \quad y = \rho \sin\vartheta$$

ein, so erhält man

$$\delta x = -\rho \sin\vartheta\, \delta\vartheta = -y\delta\vartheta, \quad \delta y = \rho \cos\vartheta\, \delta\vartheta = x\delta\vartheta, \quad \delta z = 0;$$

es lassen sich also in der D'ALEMBERT'schen Gleichung (5) sämmtliche δ auf das eine, für alle Punkte gleiche $\delta\vartheta$ zurückführen; der Factor desselben muss also verschwinden, und die Gleichung geht über in

$$\sum m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX)$$

oder, wenn man die linke Seite durch ρ und ϑ ausdrückt:

$$\frac{d}{dt} \sum m \rho^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \sum (xY - yX). \tag{14}$$

Die Grösse rechterseits heisst das Drehungsmoment in Bezug auf die z-Axe, und analoge Bezeichnungen gelten für die beiden anderen Axen.

Die Gleichung (14) nebst den beiden für die anderen Axen analogen Beziehungen stellt den analytischen Ausdruck des allgemeinen Flächensatzes dar. Die Bedeutung dieses Namens sieht man ein, wenn man erwägt, dass $\frac{1}{2}\rho^2 d\vartheta$ die

Fläche ist, welche der Radius vector ρ in der Zeit dt beschreibt. Von besonderer Wichtigkeit ist hier der Fall, in welchem die rechte Seite verschwindet, also z. B. der Fall, wo keine Kräfte wirken oder der Fall von Kräften, deren Potential nur von der relativen Lage der Teile des Systemes, das in diesem Falle ein nicht starres sein darf, abhängt. Man kann dann die Gleichung (14) integriren und erhält, wenn c eine Constante ist, die Gleichung

$$\sum m\rho^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c. \tag{15}$$

In Worten: Die Summe der Produkte aus den Massen in die projicirten Bewegungsflächen ist mit der Zeit proportional. Das wichtigste auf die Bewegung der Planeten bezügliche Beispiel für diesen Satz von der Erhaltung der Flächen ist durch das berühmte zweite KEPLER'sche Gesetz ausgesprochen (s. Artikel »Gravitation«).

Zur Vervollständigung des Satzes von der Erhaltung der Flächen dienen noch folgende Sätze, auf die weiter unten zum Theil noch zurückgekommen werden wird:

1. Der Flächensatz gilt nicht bloss für ein festes, sondern auch für ein durch den Schwerpunkt des Systemes gelegtes, bewegliches Coordinatensystem.

2. Eine Drehung des Coordinatensystemes hat nur zur Folge, dass die Constanten c sich ändern.

3. Bei einer beliebigen Bewegung des Coordinatensystems giebt es doch eine gewisse Ebene, welche unverändert bleibt; es ist dies die für den Fall des Sonnensystemes sogenannte LAPLACE'sche unveränderliche Ebene.

4. Wenn im Inneren des Systemes Veränderungen vorgehen, derart, dass nach denselben doch noch der Flächensatz besteht, so ist auch die LAPLACE'sche Ebene unverändert geblieben; wenn dagegen von aussen eine plötzliche Einwirkung auf das System erfolgt, so ändert sich die LAPLACE'sche Ebene. Beobachtet man eine Aenderung dieser Ebene, so kann man also hieraus einen Rückschluss auf eine stattgehabte Katastrophe ziehen.

5. Die LAPLACE'sche Ebene hat die Eigenschaft, dass die Summe der Projectionen der Bewegungsflächen auf sie grösser ist, als für irgend eine andere Ebene. Nennt man die der Constanten c in Gleichung (15) für die beiden anderen Axen entsprechenden Constanten c' und c'', so ist die Gleichung der Ebene

$$c''x + c'y + cz = 0.$$

Centripetalkraft, Tangentialkraft und Centrifugalkraft. Jede drehende Bewegung kann man in zweierlei verschiedener Weise durch Zerlegung der Beschleunigungen, also der Kraftcomponenten in Theilcomponenten, sich veranschaulichen. Ist nämlich v die Geschwindigkeit und α der Winkel, welchen die Tangente an die Bahncurve mit der x-Axe bildet, ist ferner ρ der Krümmungsradius und λ dessen Winkel mit der x-Axe, so ist $dx/dt = v\cos\alpha$, also

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(v\cos\alpha)}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + v\frac{d\cos\alpha}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\cos\lambda,$$

und hieraus

$$X = m\frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{mv^2}{\rho}\cos\lambda,$$

Nach dieser Gleichung lässt sich X als aus zwei Kräften bestehend betrachten, und jede dieser Kräfte ist die nach der xRichtung genommene Componente einer gewissen Kraft. Es wird also auch die gesammte Kraft R in zwei Kräfte $m\,dv/dt$ und mv^2/ρ sich zerlegen lassen. Die erstere derselben ist nach der Tangente der Bahn gerichtet und heisst Tangentialkraft; die andere

ist nach dem Krümmungsmittelpunkt der Bahn gerichtet und heisst Centripetalkraft. Die Tangentialkraft ist, wie man begreift, nichts anderes, als der Ausdruck des Beharrungsprincips (s. Princip 1) mit Rücksicht auf die ursprüngliche Bewegung des Punktes; diese gleichförmige Bewegung und die der Centripetalkraft entsprechende Beschleunigung sind es eben, welche durch ihr Zusammenwirken die gekrümmte Bahn erzeugen; fällt die erstere weg, ist also der Körper ursprünglich in Ruhe gewesen, so geht die Curve der Bahn in die gerade Linie nach dem Krümmungsmittelpunkte über; hört die Centripetalkraft plötzlich auf, so geht die Curve ebenfalls in eine gerade Linie, nämlich in die Tangente über.

Man kann nun den Vorgang noch anders auffassen, indem man statt der Centripetalkraft den Zwang sich vorstellt, vermöge dessen der Punkt auf der vorgeschriebenen Curve sich bewegen muss, während er sonst einen gradlinigen Weg einschlagen würde. Dieser Zwang findet in der Centrifugalkraft seinen Ausdruck. Nach dem Wechselwirkungsprincip (s. Princip 6) ist hiernach diese Centrifugalkraft nicht nur der Centripetalkraft entgegengesetzt gerichtet, sondern ihr auch an Grösse gleich. Auch von einer direkten Betrachtung der Centrifugalkraft ausgehend, sieht man leicht ein, dass sie, in Uebereinstimmung mit obiger Formel, der lebendigen Kraft, also der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit des Punktes direkt und dem Krümmungsradius umgekehrt proportional ist. Bei gleichförmigen Kreisbewegungen kann man dies, indem man statt der Geschwindigkeit die Umlaufszeit einführt, auch so ausdrücken: Die Centrifugalkraft ist der Masse des bewegten Körpers und dem Halbmesser der Kreisbahn direkt, dem Quadrat der Umlaufszeit umgekehrt proportional. Die durch die tägliche Umdrehung der Erde erzeugte Centrifugalkraft ist hiernach an jedem Orte dem Halbmesser des Parallelkreises desselben proportional; im Aequator beträgt sie 1/289 der Schwerkraft und ist dieser gerade entgegengerichtet, an den übrigen Orten ist sie nach Verhältniss kleiner und bildet mit der Schwerkraft einen stumpfen Winkel.

Experimentelles über die Centrifugalkraft. Die Centrifugalkraft, auch Schwungkraft genannt, lässt sich durch zahlreiche Beobachtungen und Experimente erkennen. Ist ein im Kreise bewegter Körper durch einen Faden mit dem festen Mittelpunkt verbunden, so ist der Faden, so lange die Bewegung dauert, gespannt, und zwar selbst dann, wenn der Körper sich senkrecht über dem Mittelpunkte befindet. Ist der betreffende Körper ein mit der Oeffnung nach innen gekehrtes, mit Wasser gefülltes Glas, so fliesst das Wasser nicht aus, auch dann nicht, wenn das Glas über dem Mittelpunkte, also die Oeffnung nach unten gekehrt ist. Wenn ein Eisenbahnzug eine Curve durchfährt, so üben die Radkränze einen Druck auf die äussere Schiene aus, und der Oberbau der Wagen würde eine den Umsturz derselben herbeiführende Neigung nach aussen erhalten, wenn durch Neigung der Schienenebene nach innen dies nicht ausgeglichen würde. Analoges findet beim Reiten in geschlossener Bahn statt.

Zahlreiche Experimente lassen sich mit der Centrifugalmaschine[1]) oder Schwungmaschine demonstriren. Dieselbe besteht, um eine möglichst rasche Rotation zu erzielen, aus zwei in einer Ebene liegenden, durch eine Schnur verbundenen Räder, von welchen das kleinere mit Hilfe des fünf- bis zehnmal grösseren, an welchem eine Kurbel angebracht ist, in Umdrehungen versetzt wird.

[1]) Neuere Formen derselben, die in mancher Hinsicht vollkommener sind, als die älteren, rühren von Köpping (Rep. d. Ph. 18, 1882), Lisser u. Beneke (Z. z. Förd. d. ph. U. 2, pag. 54. 1885), Watt (Chem. News 52, pag. 232. 1885) u. A. her. — Ferner sehe man W. Pscheidl, Apparat zur Darstellung der Gesetze der Fliehkraft, Wien 1886.

Die Axe des kleineren ist zum Aufstecken verschiedener Versuchsvorrichtungen eingerichtet. Einige der bezüglichen Versuche sind folgende:

1. Man setzt auf die Axe einen kleinen Holzrahmen, in welchem ein wagerechter Metallstab angebracht ist; zwei durchbohrte Metallkugeln sind, durch ein Schnürchen verbunden, auf dem Stabe verschiebbar. Bei der Drehung der Maschine werden die beiden Kugeln, wenn sie sich auf verschiedenen Seiten der Axe befinden, aus einander fahren, sich gegenseitig hin und herziehen und schliesslich ein Gleichgewichtszustand sich herausbilden, bei welchem die Entfernungen der Kugeln von der Axe sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten.

2. Innerhalb eines viereckigen Rahmens ist, mit dem Drehpunkte auf der unteren Leiste, in einiger Entfernung von der Axe der Maschine, ein Winkelhebel angebracht, dessen horizontaler Arm in einem auf die Axe gesteckten Plättchen, dessen vertikal nach oben gehender Arm in einer Metallkugel endet. Bei der Rotation wird letzterer nach aussen, und folglich der horizontale Arm mit dem Plättchen nach oben getrieben. Man kann nun leicht feststellen, dass man, damit die Kugel seitlich nur eben an den Rahmen anschlage, bei der doppelten Umdrehungsgeschwindigkeit das Plättchen viermal so stark belasten muss, wie bei der einfachen.

3. Eine beiderseits verschlossene Röhre, welche eine Kugel enthält, wird mit dem einen Ende an die Axe befestigt, während das andere schräg nach oben steht; bei der Rotation wird die Kugel nach aussen und oben getrieben. Man kann auf diese Weise Schwerkraft und Schwungkraft messend vergleichen.

4. Ist die Röhre, bei sonst gleicher Anordnung, mit Quecksilber, Wasser und Luft gefüllt, so ordnen sich diese drei Stoffe bei der Rotation umgekehrt an, wie im Ruhezustand: das Quecksilber aussen und oben, das Wasser in der Mitte, die Luft unten und innen.

5. Eine durchbohrte Kugel ist auf einem horizontalen Stabe verschiebbar, jedoch nur in der Weise, dass sie bei ihrer Verschiebung nach aussen eine Spiralfeder zusammendrückt. Bei der Rotation wird sich ein Gleichgewichtszustand zwischen der Schwungkraft der Kugel und der elastischen Kraft der Feder herstellen, welcher zur vergleichenden Betrachtung beider benutzt werden kann.

6. Setzt man einen elastischen Metallreifen auf die Axe, so wird derselbe bei der Rotation zu einer in vertikaler Richtung abgeplatteten Ellipse auseinander gezogen und veranschaulicht dadurch die Entstehung der Abplattung der Erde.

Die Centrifugalkraft wird in zahlreichen Apparaten praktisch verwerthet: bei den Centrifugalregulatoren zur Regulirung des Ganges von Maschinen, bei der Centrifugaltrockenmaschine oder Centrifuge zum Trocknen, Reinigen, Gewinnen von Säften u. s. w.

Trägheitsmoment. Für die Untersuchung drehender Bewegungen ist die Einführung des sogenannten Trägheitsmomentes von besonderer Wichtigkeit. Für einen einzelnen Punkt versteht man unter dem Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehungsaxe das Produkt der Masse des Punktes mit dem Quadrat seines Abstandes von jener Axe, also die Grösse mr^2. Das Trägheitsmoment eines starren Systemes materieller Punkte ist die Summe der Trägheitsmomente seiner einzelnen Punkte, also gleich $\sum mr^2$. Handelt es sich endlich um einen starren Körper, so verwandelt sich die Summe in ein Integral, und man erhält

$$K = \int r^2 \, dm,$$

oder, wenn dv ein Raumelement und ρ die Dichtigkeit ist:

$$K = \int r^2 \rho \, dv.$$

Fällt die Axe der Reihe nach mit den drei Coordinatenaxen zusammen, so wird

$$K_x = \int (y^2 + z^2)\,dm, \quad K_y = \int (z^2 + x^2)\,dm, \quad K_z = \int (x^2 + y^2)\,dm.$$

Wie der Schwerpunkt derjenige Punkt ist, in welchem man sich für die Fälle des Gleichgewichtes und der fortschreitenden Bewegung die gesammte Masse des Körpers vereinigt denken kann, so giebt es offenbar einen entsprechenden Punkt auch für drehende Bewegungen, einen Punkt also, welcher, wenn in ihm die ganze Masse des Körpers vereinigt wäre, dasselbe Trägheitsmoment wie dieser in Bezug auf dieselbe Axe haben würde. Im Gegensatz zum Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) kann man diesen Punkt den **Trägheitsmittelpunkt**[1]) nennen; seine Entfernung von der Axe heisst **Trägheitshalbmesser** oder **Gyrationsradius**. Je geringer die Krümmung der Bahn wird, desto näher rückt der Trägheitsmittelpunkt an den Massenmittelpunkt, desto grösser wird aber auch das Trägheitsmoment; für geradlinige Bewegung fallen jene beiden Punkte zusammen und das Trägheitsmoment wird unendlich gross. Der Trägheitshalbmesser bestimmt sich aus der Formel

$$K = Mh^2 = \int r^2\,dm, \qquad \text{also } h = \sqrt{\frac{1}{M}\int r^2\,dm},$$

wo M die Masse des ganzen Körpers ist.

Man kann auch umgekehrt einen willkürlichen Abstand von der Drehungsaxe annehmen, in welchem man sich den Körper concentrirt denken will, z. B. die Längeneinheit; alsdann darf man sich daselbst aber nicht die Masse des Körpers, sondern man muss sich eine andere Masse dort concentrirt denken, nämlich die Masse Mh^2, d. h. die Masse K. Das Trägheitsmoment ist hiernach die auf die Einheit des Abstandes von der Drehungsaxe reducirte Masse des Körpers.

Das Trägheitsmoment steht in einer einfachen und wichtigen Beziehung zu der Beschleunigung des die Drehung ausführenden Körpers, oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu der auf ihn wirkenden Kraft. Ist k die Winkelbeschleunigung, also kr die lineare Beschleunigung, so ist jene Kraft $P = \int kr\,dm$, also das Moment der Kraft in Bezug auf diese Drehung, wenn sie an dem Hebelarm l wirkt,

$$Pl = k\int r^2\,dm = kK.$$

Wie also bei der fortschreitenden Bewegung das Produkt aus Masse und Beschleunigung die bewegende Kraft ist, so ist hiernach bei der drehenden Bewegung das **Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung gleich dem Drehungsmoment der Kraft**. Die zuletzt angegebene Definition des Trägheitsmomentes hat demnach den Sinn, dass das Trägheitsmoment diejenige Masse ist, welche im Abstande 1 dieselbe Winkelbeschleunigung erfährt, wie der Körper bei den verschiedenen Abständen r seiner einzelnen Theile.

Es ist leicht, von dem Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf **eine** Axe auf dasjenige in Bezug auf eine andere, der ersten parallele Axe überzugehen. Ein besonders wichtiger Fall dieser Art ist der, wo die zweite Axe durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Sind r_0 die Entfernungen der Punkte des Körpers von dieser neuen Axe, und ist a der Abstand der beiden Axen, so findet man in diesem Falle

$$\sum mr^2 = \sum mr_0^2 + Ma^2,$$

---

[1]) Es ist zu bedauern, dass THOMSON und TAIT in ihrer »Theor. Phys.« die Ausdrücke »Schwerpunkt« und »Trägheitsmittelpunkt« promiscue brauchen, für den Punkt, der hier dem letzteren Ausdrucke zugeordnet wird, aber überhaupt keine Bezeichnung einführen.

in Worten: Das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf irgend eine Axe ist gleich seinem Trägheitsmoment in Bezug auf eine parallele, durch seinen Massenmittelpunkt gehende Axe, vermehrt um das Trägheitsmoment, welches die ganze Masse in Bezug auf die erste Axe haben würde, wenn sie im Massenmittelpunkt des Körpers concentrirt wäre.

Für eine gegen die Coordinatenaxe geneigte Drehungsaxe, deren Richtungscosinus λ, μ, ν sind, findet man

$$K = K_x\lambda^2 + K_y\mu^2 + K_z\nu^2 - 2\mu\nu\sum myz - 2\nu\lambda\sum mzx - 2\lambda\mu\sum mxy.$$

Durch Betrachtung aller Trägheitsmomente eines Körpers um die verschiedenen Axen gelangt man zur Definition der Begriffe Trägheitsellipsoid, Hauptträgheitsaxen und Hauptträgheitsmomente (s. weiter unten.)

Berechnung von Trägheitsmomenten.

a) Linien. Für ebene Curven von constantem Querschnitt q und constanter Dichtigkeit ρ, findet man, wenn $y = f(x)$ und hieraus $dy/dx = y'$ gegeben ist:

$$K_x = q\rho\int_{x_0}^{x_1} y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad K_y = q\rho\int_{x_0}^{x_1} x^2\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

oder für Polarcoordinaten ($r = \varphi[\vartheta]$):

$$K_x = q\rho\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r^2\sqrt{r^2+r'^2}\sin^2\vartheta\,d\vartheta, \qquad K_y = q\rho\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r^2\sqrt{r^2+r'^2}\cos^2\vartheta\,d\vartheta.$$

Für eine mit der Drehungsaxe in einer Ebene gelegene und gegen diese um den Winkel α geneigte Gerade von der Länge l und der Masse m erhält man z. B., wenn ihr Anfangspunkt um c von der Axe absteht:

$$K = \frac{m}{3}(3c^2 + 3cl\sin\alpha + l^2\sin^2\alpha);$$

geht die Axe durch den Anfangspunkt der Geraden, so wird $K = \frac{1}{3}ml^2\sin^2\alpha$; geht sie durch den Schwerpunkt der Geraden, $K = \frac{1}{12}ml^2\sin^2\alpha$; der Trägheitshalbmesser ist im ersten Falle $h = \frac{1}{3}l\sqrt{3}\sin\alpha$, im zweiten $h = \frac{1}{6}l\sqrt{3}\sin\alpha$.

Als Beispiel für die Ausdrücke in Polarcoordinaten diene der Kreisbogen vom Radius a und vom Centriwinkel γ. Das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf einen Durchmesser OX, welcher durch den Anfang des Bogens hindurchgeht, ist

$$K_x = \frac{1}{2}q\rho a^3(\gamma - \sin\gamma\cos\gamma),$$

dasjenige für einen hierzu senkrechten Durchmesser OY:

$$K_y = \frac{1}{2}q\rho a^3(\gamma + \sin\gamma\cos\gamma);$$

endlich findet sich für die ganze Kreisperipherie für irgend einen Durchmesser als Axe

$$K = \pi q\rho a^3 = \frac{1}{2}ma^2, \qquad h = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Handelt es sich um Raumcurven, welche durch ihre Horizontal- und Vertikalprojectionen $y = f(x)$ und $z = \varphi(x)$ gegeben sind, bei $x = a$ anfangen und bis $x = b$ reichen, so ergiebt sich

$$K_x = q\rho\int_a^b (y^2+z^2)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

$$K_y = q\rho\int_a^b (z^2+x^2)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

$$K_z = q\rho\int_a^b (x^2+y^2)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx.$$

Für eine mit der Drehungsaxe nicht in derselben Ebene liegende Gerade z. B. ergiebt sich, wenn l die Länge der Linie, α und β die Winkel derselben mit der x-Axe und y-Axe, von denen erstere die Drehungsaxe sei, und endlich b der Abstand des Anfangspunktes der Geraden von der Drehungsaxe ist:

$$K_x = \frac{m}{3}\,(l^2 \sin^2\alpha + 3\,bl\cos\beta + 3b^2).$$

b) Flächen. Für ebene Flächen von der Dicke δ und der Dichte ρ, begrenzt durch die Ordinaten x_0 und x_1 und die Curven $y_1 = f_1(x)$ und $y_0 = f_0(x)$ findet sich

$$K_x = \frac{1}{3}\,\delta\rho\int_{x_0}^{x_1}(y_1^3 - y_0^3)\,dx, \qquad K_y = \delta\rho\int_{x_0}^{x_1}(y_1 - y_0)x^2\,dx.$$

Beispielsweise sind die Trägheitsmomente eines elliptischen Ringes in Bezug auf seine Axen, wenn a und b die inneren, a_1 und b_1 die äusseren Halbaxen sind:

$$K_a = \frac{1}{4}\,\pi\delta\rho(a_1 b_1^3 - ab^3), \qquad K_b = \frac{1}{4}\,\pi\delta\rho(a_1^3 b_1 - a^3 b),$$

und speciell für den Kreisring in Bezug auf irgend einen Durchmesser

$$K = \frac{1}{4}\,\pi\delta\rho\,(r_1^4 - r^4), \qquad h = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + r_1^2};$$

durch Fortlassung der negativen Glieder in diesen Formeln erhält man die Trägheitsmomente voller Ellipsen beziehungsweise Kreisflächen.

Das Trägheitsmoment der oben definirten ebenen Fläche in Bezug auf die zu ihr senkrechte z-Axe ergiebt sich

$$K_z = \delta\rho\int_{x_0}^{x_1}\left[x^2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}\,(y_1^3 - y_0^3)\right]dx;$$

durch Vergleichung ergiebt sich die merkwürdige Beziehung

$$K_z = K_x + K_y.$$

Für den Kreisring z. B. ist

$$K_z = \frac{1}{2}\,\pi\delta\rho\,(r_1^4 - r^4), \qquad h = \sqrt{\frac{1}{2}\,(r^2 + r_1^2)}.$$

Das Trägheitsmoment von Umdrehungsflächen $z = f(x)$ für die zum Drehungswinkel ψ gehörige Rotationsfläche wird

$$K_z = \delta\rho\,\psi\int_{x_0}^{x_1} x^3\sqrt{1 + z'^2}\,dx.$$

Für beliebige krumme Flächen $z = f(x, y)$ ist, wenn zur Abkürzung $\sqrt{1 + (\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2} = W$ gesetzt wird,

$$K_x = \delta\rho\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}(y^2 + z^2)\,W dx\,dy, \qquad K_y = \delta\rho\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}(z^2 + x^2)\,W dx\,dy,$$

$$K_z = \delta\rho\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}(x^2 + y^2)\,W dx\,dy.$$

c) Körper. Für Rotationskörper in Bezug auf die geometrische Axe als Drehungsaxe erhält man

$$K_x = \frac{1}{2}\,\pi\rho\int_{x_0}^{x_1}(y_1^4 - y_0^4)\,dx,$$

wo das negative Glied wegfällt, wenn der Rotationskörper nicht, wie der Allgemeinheit halber angenommen wurde, hohl, sondern massiv ist.

Für Rotationskörper senkrecht zur geometrischen Axe ergiebt sich

$$K_z = \pi\rho\left[\int_{x_0}^{x_1} x^2 (y_1^2 - y_0^2)\, dx + \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x_1} (y_1^4 - y_0^4)\, dx\right].$$

Beispiele: 1. Kugel vom Radius r bezogen auf einen Durchmesser:

$$K = \frac{2}{5} m r^2.$$

2. Dünner Stab von der Länge l in Bezug auf eine zu ihm senkrechte, durch den Mittelpunkt gehende Axe:

$$K = \frac{m l^2}{12}.$$

3. Cylinder oder Kreisscheibe vom Radius r in Bezug auf die geometrische Axe:

$$K = \frac{m r^2}{2}.$$

4. Cylinder von der Länge l und dem Radius r in Bezug auf eine zur geometrischen Axe senkrechte, durch den Mittelpunkt gehende Axe:

$$K = m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right).$$

5. Rechtwinkeliges Parallelepipedon, in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende, zu einer Kante parallele Axe, wenn a und b die beiden andern Kanten sind

$$K = m\frac{a^2 + b^2}{12}.$$

6. Kugel in Bezug auf eine vom Mittelpunkt um a entfernte Axe:

$$K = \frac{m}{5}(2r^2 + 5a^2).$$

Experimentelle Ermittelung des Trägheitsmomentes.

Auf dieselbe ist man in allen denjenigen Fällen angewiesen, in welchen die Gestalt des drehenden Körpers zu complizirt ist, als dass es sich berechnen liesse. Man geht dabei von dem aus der Definition des Trägheitsmomentes und den obigen allgemeinen Betrachtungen über dasselbe sich ergebenden Satze aus, dass die Schwingungsdauer eines Körpers um seine Gleichgewichtslage, aus welcher er eine einmalige Ablenkung erfahren hat, der Quadratwurzel aus seinem Trägheitsmoment proportional ist. Lässt man also einen Körper, dessen Trägheitsmoment man kennt, unter ganz denselben Umständen schwingen, wie den Körper, dessen Trägheitsmoment man ermitteln will, und misst man die Schwingungsdauer beider, so hat man die Aufgabe gelöst. Die erwähnte Gleichheit der Umstände lässt sich aber weit sicherer erreichen und die Voraussetzung, dass das Trägheitsmoment des Hilfskörpers bekannt sei, leichter erfüllen, wenn man diesen letzteren bei der Hilfsbeobachtung nicht an die Stelle des Hauptkörpers setzt, sondern zu diesem hinzufügt. Ist alsdann k das Trägheitsmoment des Hilfskörpers in Bezug auf die Drehungsaxe des Hauptkörpers, sind ferner t und t' die Schwingungsdauern des Hauptkörpers ohne und mit Hilfskörper, so verhält sich das gesuchte $K : K + k$ wie $t^2 : t'^2$; es ist also

$$K = k\frac{t^2}{t'^2 - t^2}.$$

Benützt man als Hilfskörper zwei gleiche Cylinder, so findet man, wenn der Abstand der Axen der beiden, an den Enden des Hauptkörpers angebrachten Cylinder gleich $2d$, ihr Radius gleich r und die Summe ihrer Gewichte gleich m ist, nach den obigen Formeln

$$k = m\left(d^2 + \frac{1}{2}r^2\right).$$

Von den beiden nächstliegenden Methoden, die Hilfscylinder an den Hauptkörper zu befestigen: Aufhängung an Fäden und Aufsteckung auf Stifte vermittelst entsprechender Bohrungen, ist die letztere entschieden vorzuziehen, weil die Cylinder in dem ersteren Falle, abgesehen davon, dass sie an der Drehung des Hauptkörpers theilnehmen, sich noch um ihre eigenen Axen drehen, und weil nach neueren Untersuchungen hierdurch das Resultat in nicht unwesentlichem Grade fehlerhaft beeinflusst wird.[1])

Beobachtung von Schwingungen. Es ist hier der geeignete Ort, um über die Art und Weise, wie man die in der Physik am häufigsten vorkommende Art von Bewegungen, die Schwingungsbewegung, experimentell misst, das Erforderliche zu sagen. Es handelt sich dabei um drei verschiedene Messungen, nämlich um die der Schwingungsweite, der Schwingungsphase und der Schwingungsdauer. Bei allgemeinster Behandlung des Problemes kommt allerdings noch eine vierte Messung in Betracht, die Messung des Verlaufes einer einzelnen Schwingung, der sogenannten Schwingungsform, welche, wenn es sich z. B. um Schallschwingungen handelt, den Klang des erzeugten Tones bedingt. Es sollen jedoch hier derartige Schwingungen, welche man bekanntlich stets in einfachere zerlegen kann, ausgeschlossen und nur solche ins Auge gefasst werden, bei welchen das Drehungsmoment, welches den Körper in die Gleichgewichtslage zurücktreibt, dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional ist; dahin gehören namentlich die Schwingungen eines Pendels und die Schwingungen einer Magnetnadel u. s. w. Einige der folgenden Betrachtungen gelten aber auch für anders geartete Schwingungen, z. B. Torsionsschwingungen.

Die Weite oder Amplitude der Schwingung beobachtet man häufig mit Hilfe einer möglichst nahe an den schwingenden Körper herangebrachten Skala. Handelt es sich um drehende Schwingungen, so muss dies eine Kreistheilung sein, deren Mittelpunkt in die Drehungsaxe fällt und deren Ebene auf dieser senkrecht steht. Bei der Ablesung der beiderseitigen Ausschlagswinkel, deren Summe oder Differenz, je nachdem sie auf verschiedenen oder auf derselben Seite des Nullpunktes der Theilung liegen, die gesuchte Amplitude ergiebt, hat man sorgfältig auf die Vermeidung von Parallelaxenfehlern zu achten. Eine grosse Genauigkeit lässt sich auf diese Weise natürlich nicht erreichen. Unter Phase der Schwingung versteht man die Ablenkung zu irgend einer Zeit, etwa zur Zeit $t = 0$. Ueber ihre Ablesung ist es nicht nöthig, irgend etwas zu bemerken; aber es ist klar, dass auch hier nach dem angegebenen Verfahren nur ein rohes Resultat erzielt werden kann, zumal hier eine Winkelmessung und die Fixirung eines Zeitpunktes zusammentreffen. In erhöhtem Maasse gilt dies von der Messung der Schwingungsdauer, d. h. der Zeit zwischen zwei Umkehrungen des schwingenden Körpers.[2])

Für Schwingungen von geringer Amplitude ist daher die Methode der Spiegelablesung, welche eine weit grössere Genauigkeit gestattet, vorzuziehen. Diese von POGGENDORF[3]) angegebene, von GAUSS[4]) zuerst benutzte Methode be-

---

[1]) BELING, Zur Theorie der Bifilar-Aufhängung, Bresl. 1881. — KREICHGAUER, WIED. Ann. 25, 273, 1885. — RICHARZ, Verh. d. ph. Ges. 1885, pag. 76. — Ueber die Methode der Bifilar-Aufhängung s. Art. »Pendel«.

[2]) Bei Schallschwingungen nennt man bald diese, bald die doppelte Zeit Schwingungsdauer, und unterscheidet dann zwischen einfachen und doppelten oder ganzen Schwingungen.

[3]) POGGENDORF, POGG. Ann. 7, pag. 121, 1826.

[4]) GAUSS, Gött. Anz. 1833, No. 205—207.

steht darin, dass man an der Drehungsaxe oder an dem Körper, dann aber möglichst nahe der Drehungsaxe und mit dieser parallel, einen kleinen Spiegel befestigt, der, wenn der Körper sich in der Gleichgewichtslage befindet, in ein ihm in einiger Entfernung gegenüber gestelltes Fernrohr das Spiegelbild einer mit dem Fernrohr verbundenen geradlinigen auf der Drehungsaxe senkrechten Skala wirft, und zwar so, dass man den Mittelpunkt der Skala; also, wenn diese 1 *m* lang und in 100 *cm* getheilt ist, den Theilstrich 50, gerade im Fadenkreuz des Fernrohres erblickt; ist die Skala symmetrisch an dem Fernrohr angebracht, so wird hierzu offenbar erforderlich sein, dass die von dem Theilstrich 50 der Skala nach dem Spiegel gezogene Linie mit der Normale denselben Winkel nach oben bilde, wie die auf den Spiegel gerichtete Fernrohraxe nach unten (oder umgekehrt) und dass die Ebene dieser beiden Linien vertikal sei. Je nach den Umständen und Zwecken wendet man auf Holz oder Glas geklebte Papierskalen oder Glasskalen an. Dreht sich nun der Körper, also auch der Spiegel, um den Winkel φ, so wird nicht mehr der Mittelpunkt, oder wie man sagt, der Nullpunkt, sondern derjenige Punkt der Skala im Fadenkreuz abgebildet werden, dessen vom Spiegel reflectirter Strahl mit der Winkelnormale den horizontalen Winkel φ, also mit dem einfallenden Strahl den Winkel 2φ bildet. Ist daher s der Skalenausschlag, d. h. die Differenz zwischen Nullpunkt und dem jetzt im Fadenkreuz erscheinenden Theilstrich, und r der Abstand der Skala vom Spiegel, so hat man

$$tg\, 2\varphi = \frac{s}{r}, \quad \text{also} \quad \varphi = \frac{1}{2}\, arc\, tg\, \frac{s}{r}.$$

Statt dieser exakten Formel kann man häufig angenäherte benutzen; so kann man, wenn die Ablenkung 6 Grad nicht übersteigt,

$$\varphi = \frac{28^0,\ 648}{r}\, s\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{s^2}{r^2}\right).$$

setzen; bei noch kleineren Ablenkungen kann man das zweite Klammerglied auch noch vernachlässigen und in einfacher Proportionalität zwischen φ und s

$$\varphi = \frac{28^\circ,\ 648}{r}\, s = \frac{1718',\ 9}{r}\, s = \frac{103132''}{r}\, s$$

setzen; man macht dann nur einen Fehler, welcher bei einer Ablenkung von

1°	2°	3°	4°	5°
0·04%	0·16%	0·36%	0·64%	1·0%

beträgt.

Wie man die Schwingungsamplitude bestimmt, ist hiernach ohne Weiteres klar. Dagegen sind einige Bemerkungen über die Bestimmung des Nullpunktes zu machen, und zwar deshalb, weil es nicht möglich ist, zu warten, bis Ruhe eingetreten ist, also der Nullpunkt sich einfach ablesen lässt. Man muss alsdann den Nullpunkt aus aufeinander folgenden Umkehrpunkten ableiten, dabei aber berücksichtigen, dass fast immer die Amplitude der Schwingungen in Abnahme begriffen ist. Ist diese Abnahme nur klein, so genügt es zu diesem Zwecke drei aufeinander folgende Umkehrpunkte zu beobachten, aus dem ersten und letzten, welche derselben Seite angehören und nur wenig von einander abweichen, das arithmetische Mittel und alsdann aus diesem Mittel und der zweiten Beobachtung wiederum das Mittel zu nehmen. Bei grösserer Dämpfung der Schwingungen muss man entweder das Dämpfungsverhältniss, d. h. das Verhältniss eines Schwingungsbogens zum folgenden k, kennen und findet dann aus zwei Umkehrpunkten u_1 und u_2 den Nullpunkt n,

$$n = u_2 + \frac{u_1 - u_2}{1 + k},$$

oder man muss eine grössere Anzahl Umkehrpunkte in geeigneter Weise verbinden (s. Art. »Waage«).[1]) Sind die Schwingungen zu heftig, als dass sie im Spiegel exakt beobachtet werden könnten, so kann man sie, je nach der Kraft, welche die Drehungen hervorbringt, auf mechanischem, magnetischem oder elektrischem Wege beruhigen.

Zur Bestimmung der Phase und der Schwingungsdauer bedient man sich einer Sekundenuhr oder eines Sekundenpendels, sowie eines einfachen Verfahrens, um den Zeitpunkt einer bestimmten Stellung des Spiegels noch bis auf Zehntelsekunden fixiren zu können; man beobachtet nämlich den Skalenpunkt p_1, welcher unmittelbar vor dem Punkte p, dessen Zeitpunkt t zu fixiren ist, und den Skalenpunkt p_2, welcher unmittelbar nach ihm bei einem vollen Sekundenschlage durch das Fadenkreuz geht; ist dann t_0 der Zeitpunkt des ersten dieser beiden Sekundenschläge, so ist

$$t = t_0 + \frac{p - p_1}{p_2 - p_1}.$$

Dieses Verfahren, auf den Nullpunkt n oder einen ihm nahe gelegenen Punkt angewandt, dient auch zur Ermittelung der Schwingungsdauer. Definirt wird dieselbe freilich durch die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrmomenten; es wäre aber unzweckmässig, gerade diese beiden Zeitpunkte zu fixiren, weil bei der in ihnen gerade besonders langsamen Bewegung diese Messung sehr ungenau ausfallen würde. Man fixirt daher besser zwei aufeinanderfolgende Durchgänge des Nullpunktes; von der bei der häufigen Veränderlichkeit des Nullpunktes lästigen Nothwendigkeit, dass es gerade genau der Nullpunkt sei, macht man sich frei, indem man ein für allemal einen ihm nahe gelegenen Punkt, z. B. den Theilstrich 50 wählt; man muss dann aber, wegen der Ungleichheit beider Seiten, einen Durchgang auslassen, d. h. zwei auf einander folgende, in demselben Sinne erfolgende Durchgänge fixiren; die Zeit zwischen beiden ist dann die doppelte Dauer einer Schwingung.

Für viele Zwecke genügt es jedoch nicht, die Schwingungsdauer bis auf Zehntelsekunden zu bestimmen; um dann noch Hundertelsekunden zu bekommen, kann man verschiedene Methoden, die jedoch im Grunde auf dasselbe hinauslaufen, anwenden. Hat man z. B. in der obigen Weise zwei Durchgangszeiten und aus ihnen die ungefähre Schwingungsdauer gefunden, so lässt man einige Minuten vergehen und bestimmt wieder einen Durchgangsmoment in demselben Sinne; die Zeit zwischen dem ersten und dem letzten Durchgange, durch die ungefähre Schwingungsdauer dividirt, müsste, da sicherlich gerade eine ganze Zahl von doppelten Schwingungen vergangen ist, eine ganze gerade Zahl ergeben, wird aber, weil eben nur mit der ungefähren Schwingungsdauer dividirt wurde, einen von einer solchen geraden Zahl etwas abweichenden Quotienten ergeben; nimmt man also die diesem Quotienten nächstgelegene ganze gerade Zahl und dividirt mit ihr in die zwischen dem ersten und letzten Durchgange liegende Zeit, so erhält man die genaue Schwingungsdauer. Zur Erhöhung der Genauigkeit wiederholt man entweder dasselbe Verfahren nach einigen Minuten nochmals und combinirt den Durchgang der zweiten mit dem der dritten Serie oder man macht, wenn man sich wegen Zeitmangels mit zwei Serien begnügen muss, in jeder derselben mehrere, z. B. drei Durchgangsbeobachtungen, combinirt den 1. Durchgang mit dem 6., den 2. mit dem 5., den 3. mit dem 4. und nimmt aus den so erhaltenen Schwingungsdauern das Mittel. Noch genauer ist es vielleicht,

[1]) THIESEN, Trav. et Mem. d. Bur. int. d. poids et mes., Bd. V, 2. Th. 1886.

in jeder der beiden Serien eine gerade Zahl, z. B. 6 Durchgänge zu beobachten, durch Combination des 1. und 6., 2. und 5., 3. und 4. Durchganges der ersten Serie den Zeitpunkt der mittelsten Umkehr dieser Serie abzuleiten, für die zweite Serie ebenso zu verfahren, die beiden so erhaltenen Umkehrzeiten von einander abzuziehen und die Differenz mit der Zahl der vergangenen Schwingungen, die man wieder wie oben findet, zu dividiren; man muss dann aber, wenn wirklich eine grössere Genauigkeit erzielt werden soll, eine dritte Serie hinzufügen und mit der zweiten, wie vorhin diese mit der ersten, combiniren. Erfolgen die Schwingungen zu schnell, als dass man jeden Durchgang fixiren könnte, so nimmt man jeden *n*ten und dividirt durch *n*.

Beträgt eine Schwingungsdauer nahezu eine Sekunde oder ein ganzes Vielfaches derselben, so kann man die Methode der Coinzidenzen anwenden (s. Art. »Pendel«).

Bekanntlich ist die Schwingungsdauer von der Amplitude zwar in erster Annäherung, aber nicht völlig unabhängig.[1]) Nun handelt es sich, wenigstens bei der experimentellen Prüfung theoretischer Formeln, fast immer um die Schwingungsdauer bei äusserst kleiner Amplitude; man muss also die gefundene Dauer auf unendlich kleine Schwingungen reduciren. Dies geschieht, wenn φ den ganzen Amplitudenwinkel bezeichnet, durch die Formel (s. Art. »Pendel«).

$$t_0 = t\left(1 - \frac{1}{4}\, sin^2 \frac{\varphi}{4} - \frac{5}{64}\, sin^4 \frac{\varphi}{4}\right);$$

Bei kleinen Winkeln kann man jedoch das letzte Klammerglied vernachlässigen und einfach

$$t_0 = t\left(1 - \frac{1}{256}\,\frac{s^2}{r^2}\right)$$

setzen. Wenn φ kleiner als 4° ist, kann man, falls es nicht auf eine grössere Genauigkeit als 0·01 § ankommt, die Reduction ganz unterlassen. Für Winkel bis zu 50° enthält die folgende Tabelle die in den obigen Formeln von 1 abgezogene Grösse *k*.

φ	*k*	φ	*k*	φ	*k*	φ	*k*	φ	*k*
1	0·00000	11	0·00058	21	0·00210	31	0·00457	41	0·00800
2	02	12	69	22	230	32	487	42	839
3	04	13	80	23	251	33	518	43	879
4	08	14	93	24	274	34	550	44	920
5	12	15	0·00107	25	297	35	583	45	963
6	17	16	122	26	322	36	616	46	0·01007
7	23	17	138	27	347	37	651	47	1052
8	30	18	154	28	373	38	686	48	1097
9	39	19	172	29	400	39	723	49	1143
10	48	20	190	30	428	40	761	50	1189

Allgemeinste unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers.[2]) Die bis jetzt aufgestellten Begriffe, Beziehungen und Gesetze bezogen sich theils auf die fortschreitende, theils auf die drehende Bewegung, und hinsichtlich der letzteren handelte es sich sogar stets um die Drehung um eine einzige gegebene Drehungsaxe. Offenbar kann aber ein starrer Körper sich um mehrere Axen zugleich drehen, wie z. B. die Erde um ihre eigene Axe und um die Sonne, und er

[1]) Für Torsionsschwingungen ist die Unabhängigkeit eine vollständige.

[2]) Im Anschluss an die besonders klare und elegante Darstellung, welche KIRCHHOFF von diesem Problem geliefert hat (Vorl. üb. math. Phys., Mechanik, pag. 41—77).

kann zu derselben Zeit noch eine fortschreitende Bewegung besitzen. Es ist daher die Frage aufzuwerfen: Welches ist die allgemeinste Bewegung, welche ein starrer Körper ausführen kann? Zweckmässiger Weise wird man sich dabei zunächst auf eine unendlich kleine Bewegung beschränken.

xyz sei ein mit dem Körper fest verbundenes Coordinatensystem; dasselbe dient zur Angabe der Lage eines Punktes des Körpers in Bezug auf diesen, und die Coordinaten des Punktes xyz eines Körpers sind daher mit der Zeit nicht veränderlich. Dagegen sei $\xi\eta\zeta$ ein im Raume festes Coordinatensystem, $\xi\eta\zeta$ sind dann die Coordinaten, welche der Punkt xyz des Körpers zur Zeit t hat, also mit t veränderlich. Es wird gut sein, die in der Physik sehr häufig anzuwendenden Formeln, welche die Beziehungen zwischen den beiden Coordinatensystemen enthalten, hier zusammenzustellen. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \tag{1}$$

wo $\alpha\beta\gamma$ die Werthe von $\xi\eta\zeta$ für den Punkt $x=0$, $y=0$, $z=0$, die neun übrigen Coëfficienten aber die Cosinus der Winkel zwischen den Axen der xyz und der $\xi\eta\zeta$, alle 12 Coëfficienten also mit der Zeit veränderlich sind. Ebenso ist umgekehrt

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1(\xi-\alpha) + \beta_1(\eta-\beta) + \gamma_1(\zeta-\gamma), \\ y &= \alpha_2(\xi-\alpha) + \beta_2(\eta-\beta) + \gamma_2(\zeta-\gamma), \\ z &= \alpha_3(\xi-\alpha) + \beta_3(\eta-\beta) + \gamma_3(\zeta-\gamma). \end{aligned} \tag{2}$$

Die geometrische Bedeutung der mit Indices versehenen Coëfficienten führt für diese zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, & \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 &= 0, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

und ferner

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1, & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \alpha^1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

Löst man ferner die Gleichungen (1) nach xyz auf, so erhält man Gleichungen, welche mit den Gleichungen (2) identisch sein müssen; hieraus folgen drei Gleichungen, in welchen die Grösse

$$\Delta = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \beta_1(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2) + \gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)$$

enthalten, und aus deren Quadrirung und Addirung sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) ergiebt, dass $\Delta^2 = 1$ ist. Liegen die Coordinatensysteme so, dass sie durch geeignete Drehung des beweglichen zur congruenten Deckung, auch dem Sinne der Axen nach, gebracht werden können, so ist, wie leicht einzusehen, $\Delta = +1$, und die drei in Rede stehenden Gleichungen, sowie 6 entsprechend gebildete, durch gleichzeitige cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 und der Buchstaben x, y, z in den Gleichungen (1) entstehende werden dann:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, & \alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, & \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \\ \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2, & \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, & \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, \\ \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, & \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, & \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Von den 9 Grössen mit Indices sind offenbar nur 3 willkürlich, die 6 übrigen lassen sich z. B. durch die Gleichungen (3) oder durch die Gleichungen (4) aus den 3 ersten berechnen. Es muss also möglich sein, diese 9 Grössen auch durch irgend 3 andere, von einander unabhängige Grössen φ, ψ, ϑ auszudrücken, und dies soll mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \cos\varphi \sin\vartheta, & \gamma_1 &= \cos\psi \sin\vartheta, \\ \beta_3 &= \sin\varphi \sin\vartheta, & \gamma_2 &= \sin\psi \sin\vartheta, \\ & & \gamma_3 &= \cos\vartheta \end{aligned} \tag{6}$$

geschehen. Die Grössen φ, ψ, ϑ sind Winkel von einfacher Bedeutung: ϑ ist der Winkel zwischen der z-Axe und der ζ-Axe, φ ist der Winkel, um welchen die $\xi\zeta$-Ebene gedreht werden muss, um der z-Axe parallel zu werden, ψ ist der Winkel, um welchen die xz-Ebene gedreht werden muss, um der ζ-Axe parallel zu werden; die in diesen Definitionen noch liegende Unbestimmtheit in Bezug auf Vorzeichen und Quadrantenlage der Winkel lässt sich in jedem Falle durch einmalige Festsetzung und Rücksicht auf die nothwendige Stetigkeit leicht beseitigen. Drückt man schliesslich noch die 4 übrigen Grössen α_1, α_2, β_1, β_2 mit Hilfe der Gleichungen (5) durch die 5 obigen und somit durch $\varphi\psi\vartheta$ aus, so erhält man folgendes Schema:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta - \sin\varphi \sin\psi, \\ \beta_1 &= -\sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta + \cos\varphi \sin\psi, \\ \gamma_1 &= \cos\psi \sin\vartheta, \\ \alpha_2 &= -\cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta + \sin\varphi \cos\psi, \\ \beta_2 &= -\sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta - \cos\varphi \cos\psi, \\ \gamma_2 &= \sin\psi \sin\vartheta, \\ \alpha_3 &= \cos\varphi \sin\vartheta, \\ \beta_3 &= \sin\varphi \sin\vartheta, \\ \gamma_3 &= \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{7}$$

Aus den obigen Formeln lassen sich leicht diejenigen für eine unendlich kleine Bewegung des Körpers ableiten. Bezeichnet man die Aenderungen, welche die Grössen dabei erfahren, durch vorgesetzte δ, so folgt zunächst aus den Gleichungen (1):

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \delta\alpha + x\delta\alpha_1 + y\delta\alpha_2 + z\delta\alpha_3, \\ \delta\eta &= \delta\beta + x\delta\beta_1 + y\delta\beta_2 + z\delta\beta_3, \\ \delta\zeta &= \delta\gamma + x\delta\gamma_1 + y\delta\gamma_2 + z\delta\gamma_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Während die 3 Grössen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ beliebig sind, müssen die 9 übrigen δ rechterseits mit Hilfe der Gleichungen (7) durch $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\vartheta$ ausgedrückt werden; der Symmetrie der Formeln halber sollen statt dessen die 3 durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \pi' &= \beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 + \beta_3\delta\gamma_3, \\ \chi' &= \gamma_1\delta\alpha_1 + \gamma_2\delta\alpha_2 + \gamma_3\delta\alpha_3, \\ \rho' &= \alpha_1\delta\beta_1 + \alpha_2\delta\beta_2 + \alpha_3\delta\beta_3 \end{aligned}$$

definirten, unendlich kleinen Grössen $\pi'\chi'\rho'$ eingeführt werden; es ergiebt sich dann mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) und die aus Gleichungen (4) durch Variation entstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta\alpha_1 &= \gamma_1\chi' - \beta_1\rho', & \delta\beta_1 &= \alpha_1\rho' - \gamma_1\pi', & \delta\gamma_1 &= \beta_1\pi' - \alpha_1\chi', \\ \delta\alpha_2 &= \gamma_2\chi' - \beta_2\rho', & \delta\beta_2 &= \alpha_2\rho' - \gamma_2\pi', & \delta\gamma_1 &= \beta_2\pi' - \alpha_2\chi', \\ \delta\alpha_3 &= \gamma_3\chi' - \beta_3\rho', & \delta\beta_3 &= \alpha_3\rho' - \gamma_3\pi', & \delta\gamma_3 &= \beta_3\pi' - \alpha_3\chi'. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (8) werden hiernach mit Rücksicht auf die Gleichungen (1):

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \delta\alpha + (\zeta - \gamma)\chi' - (\eta - \beta)\rho', \\ \delta\eta &= \delta\beta + (\xi - \alpha)\rho' - (\zeta - \gamma)\pi', \\ \delta\zeta &= \delta\gamma + (\eta - \beta)\pi' - (\xi - \alpha)\chi'. \end{aligned} \tag{9}$$

Man kann hiernach die untersuchte unendlich kleine Bewegung des Körpers betrachten als zusammengesetzt aus 6 Einzelbewegungen, nämlich aus denjenigen, welche der Körper ausführen würde, wenn einmal nur $\delta\alpha$, ein anderes Mal nur

$\delta\beta$, 3) nur $\delta\gamma$, 4) nur π', 5) nur χ', 6) nur ρ' von 0 verschieden wäre. Ist nur $\delta\gamma$ vorhanden, so erhält man:

$$\delta\xi = 0, \quad \delta\eta = 0, \quad \delta\zeta = \delta\gamma,$$

d. h. der Körper führt eine Bewegung aus, bei welcher alle seine Punkte in derselben, nämlich der ζ-Richtung sich parallel verschieben und alle seine Linien deshalb sich selbst parallel bleiben; man nennt dies eine Verschiebung des Körpers in der ζ-Richtung, und ihr Betrag ist $\delta\gamma$. Ebenso ist die durch $\delta\alpha$ resp. durch $\delta\beta$ repräsentirte Einzelbewegung eine Verschiebung des Körpers in der ξ-Richtung um $\delta\alpha$ resp. in der η-Richtung um $\delta\beta$. Finden alle 3 Verschiebungen gleichzeitig statt, so erfährt der Körper eine Verschiebung, deren Richtung und Betrag durch die Resultante der Linien $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ angegeben wird.

Findet nur die durch ρ repräsentirte Bewegung statt, so ist

$$\delta\xi = -(\eta - \beta)\rho', \quad \delta\eta = (\xi - \alpha)\rho', \quad \delta\zeta = 0;$$

hierbei bleiben die Punkte der Linie $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$ an ihren Orten, diese Linie ist also eine Axe, und die Bewegung eine Drehung um sie. Der Drehungsbogen ist dabei

$$\rho' \sqrt{(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2},$$

folglich ist ρ' der Drehungswinkel. In analoger Weise ist die durch π' resp. χ' dargestellte Bewegung eine Drehung des Körpers um die Axe $\eta = \beta$, $\xi = \gamma$ um den Winkel π' resp. um die Axe $\zeta = \gamma$, $\xi = \alpha$ um den Winkel χ'. Es ist einleuchtend, dass die 3 Drehungsaxen den $\xi\eta\zeta =$ Axen beziehungsweise parallel sind. Finden alle 3 Drehungen gleichzeitig statt, so führt der Körper eine Drehung aus, bei welcher die Drehungsaxe die Gleichungen

$$\frac{\xi - \alpha}{\pi'} = \frac{\eta - \beta}{\chi'} = \frac{\zeta - \gamma}{\rho'}, \tag{10a}$$

und der Drehungswinkel die Grösse

$$\sqrt{\pi'^2 + \chi'^2 + \rho'^2}, \tag{10b}$$

hat; die Richtung der Drehungsaxe ist hiernach dadurch bestimmt, dass die Cosinus der Winkel, welche sie mit den $\xi\eta\gamma$-Axen bildet, gleich

$$\frac{\pi'}{\sqrt{\pi'^2 + \chi'^2 + \rho'^2}}, \quad \frac{\chi'}{\sqrt{\pi'^2 + \chi'^2 + \rho'^2}}, \quad \frac{\rho'}{\sqrt{\pi'^2 + \chi'^2 + \rho'^2}}, \tag{10c}$$

sind, auch geht diese Axe durch den Punkt $\alpha\beta\gamma$.

Um schliesslich noch zu veranschaulichen, in welchem Sinne eine Drehung als positive bezeichnet werden soll, denke man sich, das Coordinatensystem sei derart, dass, wenn eine menschliche Figur so gestellt ist, dass die von den Füssen nach dem Kopfe gehende Linie der ζ-Axe parallel ist und die Figur in der Richtung der η-Axe hinsieht, die ξ-Axe nach ihrer Rechten gewendet ist. Eine positive Drehung der Figur soll dann eine solche sein, welche ihre rechte Seite nach vorn bringt. Dasselbe soll auch für die Drehung um irgend eine Axe gelten, falls diese Axe ebenfalls von den Füssen zur Axe der Figur ginge.

J e d e u n e n d l i c h k l e i n e V e r r ü c k u n g e i n e s s t a r r e n K ö r p e r s l ä s s t s i c h h i e r n a c h a n s e h e n a l s z u s a m m e n g e s e t z t a u s e i n e r V e r s c h i e b u n g i n e i n e r g e w i s s e n R i c h t u n g u n d e i n e r D r e h u n g u m e i n e g e w i s s e d u r c h d e n P u n k t $\alpha\beta\gamma$ g e h e n d e A x e; die erstere Theilbewegung lässt sich wiederum zerlegen in die 3 Componenten der Verschiebung, letztere in die 3 Componenten der Drehung nach den Coordinatenaxen.

Eine etwas andere Darstellung der Bewegung erhält man, wenn man in den Gleichungen (9) die Glieder rechterseits etwas anders anordnet und

$$\delta\alpha - \gamma\chi' + \beta\rho' = \lambda', \quad \delta\beta - \alpha\rho' + \gamma\pi' = \mu', \quad \delta\gamma - \beta\pi' + \alpha\lambda' = \nu'$$

setzt; man erhält dann

$$\delta\xi = \lambda' + \zeta\chi' - \eta\rho',$$
$$\delta\eta = \mu' + \xi\rho' - \zeta\pi',$$
$$\delta\zeta = \nu' + \eta\pi' - \xi\chi',$$

oder, wenn man die ζ-Axe in die Axe der durch die beiden letzten Glieder rechterseits dieser Gleichungen dargestellten Drehung verlegt, wodurch $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\pi' = 0$, $\chi' = 0$ wird, die einfacheren Gleichungen

$$\delta\xi = -\eta\rho', \qquad \delta\eta = \xi\rho', \qquad \delta\zeta = \nu'.$$

Die allgemeinste unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers ist hiernach eine sogenannte Schraubenbewegung.

Es sei bemerkt, dass man die Bewegung, statt auf das Coordinatensystem der $\xi\eta\zeta$ auch auf das der xyz in seiner Anfangslage beziehen kann; man erhält dann die ähnlichen Formeln:

$$u' + zq' - yr',$$
$$v' + xr' - zp',$$
$$w' + yp' - xq'$$

für die Componenten der Bewegung; $u'\,v'\,w'$ sind die Componenten der Verschiebung, $p'q'r'$ die Componenten der Drehung. Zwischen den 6 Grössen $\lambda'\mu'\nu'\pi'\chi'\rho'$ und den 6 Grössen $u'v'w'p'q'r'$ bestehen gewisse Beziehungen, welche sich ohne Schwierigkeit ableiten lassen.

Von Wichtigkeit ist noch die Betrachtung der wirkenden Kraftcomponenten und der Drehungsmomente der Kräfte; nennt man diese in Bezug auf das im Körper feste Coordinatensystem $XYZM_xM_yM_z$, in Bezug auf das im Raume feste Coordinatensystem $\Xi\mathrm{H}\mathrm{Z}M_\xi M_\eta M_\zeta$, und giebt man der Einfachheit halber den beiden Coordinatensystemen denselben Anfangspunkt, wodurch $\alpha = \beta = \gamma = 0$ wird, so hat man

$$\begin{aligned} \Xi &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, & M_\xi &= \alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z, \\ \mathrm{H} &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, & M_\eta &= \beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z, \\ \mathrm{Z} &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z, & M_\zeta &= \gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z. \end{aligned} \tag{11}$$

Denkt man sich $M_xM_yM_z$ als die Coordinaten eines Punktes und verbindet diesen mit dem Anfangspunkt der Coordinaten, so heisst das Drehungsmoment in Bezug auf diese Axe das Hauptdrehungsmoment. Ist speziell nur eine einzige Kraft XYZ mit dem Angriffspunkt xyz vorhanden, so ist (s. oben pag. 74)

$$M_x = yZ - zY, \quad M_y = zX - xZ, \quad M_z = xY - yX, \tag{12}$$

die Axe des Hauptdrehungsmomentes steht dann senkrecht auf der durch die Kraftrichtung und die Linie vom Anfangspunkt nach xyz gelegte Ebene, und das Hauptdrehungsmoment ist

$$\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)(X^2+Y^2+Z^2) - (xX+yY+zZ)^2}, \tag{12a}$$

oder auch gleich dem Produkt aus dem Anfangsabstande des Punktes xyz, der Grösse der Kraft und dem Sinus des Winkels zwischen der Kraftrichtung und der Linie vom Anfangspunkt nach xyz.

Bewegungsgleichungen eines starren Körpers. Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der obigen Formeln eignet sich am besten die von dem Hamilton'schen Princip [Gleich. (7)] ausgehende Gleich. (8) (pag. 70). Es kommen daselbst vor die Variation der kinetischen Energie δK und die Arbeit der wirkenden Kräfte L. Die kinetische Energie ist eine Function der Componenten der Verschiebungsgeschwindigkeit und der Componenten der Drehungsgeschwindigkeit, also von 6 Grössen, welche man aus den bezüglichen oben untersuchten Verrückungen durch Division mit dt erhält; sie sollen mit den gleichen Buchstaben, aber unter Fortlassung der Striche, bezeichnet werden. Es ist dann

$$\delta K = \frac{\partial K}{\partial u}\delta u + \frac{\partial K}{\partial v}\delta v + \frac{\partial K}{\partial w}\delta w + \frac{\partial K}{\partial p}\delta p + \frac{\partial K}{\partial q}\delta q + \frac{\partial K}{\partial r}\delta r.$$

Die Variationen der Geschwindigkeiten kann man nun, je nachdem man sie auf das System der xyz oder der $\xi\eta\zeta$ zurückführen will, entweder durch $u'v'w'q'p'r'$ oder durch $\lambda'\mu'\nu'\pi'\chi'\rho'$ ausdrücken. Im ersten Falle findet man

$$\delta u = \frac{du'}{dt} + vr' - v'r + w'q - wq', \qquad \delta p = \frac{dp'}{dt} + qr' - q'r,$$

$$\delta v = \frac{dv'}{dt} + wp' - w'p + u'r - ur', \qquad \delta q = \frac{dq'}{dt} + rp' - r'p,$$

$$\delta w = \frac{dw'}{dt} + uq' - u'q + v'p - vp', \qquad \delta r = \frac{dr'}{dt} + pq' - p'q;$$

im anderen Falle

$$\delta u = \alpha_1\frac{d\lambda'}{dt} + \beta_1\frac{d\mu'}{dt} + \gamma_1\frac{d\nu'}{dt} + (\gamma_1\beta - \beta_1\gamma)\frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha)\frac{d\chi'}{dt} + (\beta_1\alpha - \alpha_1\beta)\frac{d\rho'}{dt},$$

$$\delta v = \alpha_2\frac{d\lambda'}{dt} + \beta_2\frac{d\mu'}{dt} + \gamma_2\frac{d\nu'}{dt} + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma)\frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha)\frac{d\chi'}{dt} + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta)\frac{d\rho'}{dt},$$

$$\delta w = \alpha_3\frac{d\lambda'}{dt} + \beta_3\frac{d\mu'}{dt} + \gamma_3\frac{d\nu'}{dt} + (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma)\frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha)\frac{d\chi'}{dt} + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta)\frac{d\rho'}{dt},$$

$$\delta p = \alpha_1\frac{d\pi'}{dt} + \beta_1\frac{d\chi'}{dt} + \gamma_1\frac{d\rho'}{dt},$$

$$\delta q = \alpha_2\frac{d\pi'}{dt} + \beta_2\frac{d\chi'}{dt} + \gamma_2\frac{d\rho'}{dt},$$

$$\delta r = \alpha_3\frac{d\pi'}{dt} + \beta_3\frac{d\chi'}{dt} + \gamma_3\frac{d\rho'}{dt}.$$

Andererseits ist die Arbeit im ersten Falle

$$L = Xu' + Yv' + Zw' + M_x p' + M_y q' + M_z r',$$

im anderen

$$L = \Xi\lambda' + \mathrm{H}\mu' + \mathrm{Z}\nu' + M_\xi\pi' + M_\eta\chi' + M_\zeta\rho'.$$

Bildet man nun die genannte Gleichung (8), so erhält man die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers entweder in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial u} &= r\frac{\partial K}{\partial v} - q\frac{\partial K}{\partial w} + X, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial v} &= p\frac{\partial K}{\partial w} - r\frac{\partial K}{\partial u} + Y, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial w} &= q\frac{\partial K}{\partial u} - p\frac{\partial K}{\partial v} + Z, \end{aligned} \tag{13a}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial p} &= w\frac{\partial K}{\partial v} - v\frac{\partial K}{\partial w} + r\frac{\partial K}{\partial q} - q\frac{\partial K}{\partial r} + M_x, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial q} &= u\frac{\partial K}{\partial w} - w\frac{\partial K}{\partial u} + p\frac{\partial K}{\partial r} - r\frac{\partial K}{\partial p} + M_y, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial r} &= v\frac{\partial K}{\partial u} - u\frac{\partial K}{\partial v} + q\frac{\partial K}{\partial p} - p\frac{\partial K}{\partial q} + M_z, \end{aligned} \tag{13b}$$

oder in der Form

$$\begin{aligned} \Xi &+ \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial K}{\partial u} + \alpha_2\frac{\partial K}{\partial v} + \alpha_3\frac{\partial K}{\partial w}\right), \\ \mathrm{H} &+ \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial K}{\partial u} + \beta_2\frac{\partial K}{\partial v} + \beta_3\frac{\partial K}{\partial w}\right), \\ \mathrm{Z} &= \frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial K}{\partial u} + \gamma_1\frac{\partial K}{\partial v} + \gamma_3\frac{\partial K}{\partial w}\right). \end{aligned} \tag{14a}$$

$$M_\xi = \frac{d}{dt}\left[(\gamma_1\beta - \beta_1\gamma)\frac{\partial K}{\partial u} + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma)\frac{\partial K}{\partial v} + (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma)\frac{\partial K}{\partial w} + \alpha_1\frac{\partial K}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial K}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial K}{\partial r}\right],$$

$$M_\eta = \frac{d}{dt}\left[(\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha)\frac{\partial K}{\partial u} + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha)\frac{\partial K}{\partial v} + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha)\frac{\partial K}{\partial w} + \beta_1\frac{\partial K}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial K}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial K}{\partial r}\right], \qquad (14\text{b})$$

$$M_\zeta = \frac{d}{dt}\left[(\beta_1\alpha - \alpha_1\beta)\frac{\partial K}{\partial u} + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta)\frac{\partial K}{\partial v} + (\beta_2\alpha - \alpha_3\beta)\frac{\partial K}{\partial w} + \gamma_1\frac{\partial K}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial K}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial K}{\partial r}\right].$$

Jedes dieser beiden Gleichungssysteme (13) und (14) besitzt eigenthümliche Vorzüge; wirken z. B. keine Kräfte, so enthalten jene keine anderen unbekannten Funktionen als $u\,v\,w\,p\,q\,r$, diese sind ohne weiteres integrabel. Ganz allgemein können sie als Ausspruch des Schwerpunktssatzes resp. als Ausspruch des Flächensatzes angesehen werden.

Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Wenn ein Punkt des Körpers fest ist und zum Anfangspunkt beider Coordinatensysteme gemacht wird, so kommen die Grössen $u\,v\,w$ $u'\,v'\,w'$ $\lambda'\,\mu'\,\nu'$ $\alpha\,\beta\,\gamma$ und folglich die Gleichungssysteme (13a) und (14a) in Fortfall, die Gleichungen (13b) und (14b) vereinfachen sich und man erhält bei der ersten Darstellungsart

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial p} &= r\frac{\partial K}{\partial q} - q\frac{\partial K}{\partial r} + M_x,\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial q} &= p\frac{\partial K}{\partial r} - r\frac{\partial K}{\partial p} + M_y,\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial r} &= q\frac{\partial K}{\partial p} - p\frac{\partial K}{\partial q} + M_z,\end{aligned} \qquad (15\text{a})$$

bei der andern

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial K}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial K}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial K}{\partial r}\right) &= M_\xi,\\ \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial K}{p} + \beta_2\frac{\partial K}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial K}{\partial r}\right) &= M_\eta,\\ \frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial K}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial K}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial K}{\partial r}\right) &= M_\zeta.\end{aligned} \qquad (15\text{b})$$

Die lebendige Kraft ist in diesem Falle das über alle Punkte des Körpers summirte halbe Product der Masse und des Quadrates der aus den Drehungsgeschwindigkeiten gebildeten Bewegungsausdrücke, d. h. es ist

$$2K = \int dm\,[(zq - yr)^2 + (xr - zp)^2 + (yp - xq)^2],$$

oder in anderer Anordnung

$$2K = p^2\int dm\,(y^2 + z^2) + q^2\int dm\,(z^2 + x^2) + r^2\int dm\,(x^2 + y^2) - 2qr\int yz\,dm - 2rp\int zx\,dm - 2pq\int xy\,dm,$$

dabei stellt die Linie vom Anfangspunkte nach dem Punkte pqr der Richtung nach die Drehungsaxe, der Grösse nach die Drehungsgeschwindigkeit um diese Axe dar. Nun liegt, wie man sieht, der Punkt pqr auf einer Fläche zweiten Grades; die Radien vektoren dieser Fläche stellen also die Drehungsgeschwindigkeiten dar, welche der Körper haben muss, wenn er bei der Drehung um sie die lebendige Kraft K haben soll. Eine Vereinfachung erzielt man, wenn man die xyz-Axen in die Hauptaxen der Fläche legt; es wird dann

$$2K = p^2\int dm(y^2 + z^2) + q^2\int dm(z^2 + x^2) + r^2\int dm(x^2 + y^2).$$

Man nennt dieses Ellipsoid das Trägheitsellipsoid, die Hauptaxen desselben die Hauptaxen des Körpers für den Anfangspunkt der xyz, sowie die offenbar durch die drei Integrale dargestellten Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptaxen die Hauptträgheitsmomente des Körpers für den Anfangspunkt der xyz; sie sind, wie man unmittelbar einsieht, die reziproken Quadrate der Halbaxen des Trägheitsellipsoids. Das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige Axe, T, drückt sich hiernach durch die Hauptträgheitsmomente PQR mittelst der Gleichung

$$T = P\cos^2\varphi + Q\cos^2\psi + R\cos^2\vartheta \tag{16}$$

aus, wo $\varphi\psi\vartheta$ die Richtungswinkel der betreffenden Axe sind.

Das Trägheitsellipsoid selbst bewegt sich natürlich gleichzeitig mit dem Köper, und zwar um seinen Mittelpunkt. Diese Bewegung besteht darin, dass es auf der durch den Endpunkt der augenblicklichen Drehungsaxe gelegten Tangentialebene ohne Gleichung rollt, diese Tangentialebene ist demgemäss im Raume fest, sie ist der Richtung nach identisch mit der früher erwähnten Laplace'schen Ebene und steht senkrecht auf der Hauptdrehungsaxe, d. h. der dem Hauptdrehungsmoment [s. oben Gleichung (12a)] entsprechenden Richtung. Der Ort der augenblicklichen Drehungsaxen im Körper ist, wie man ebenfalls leicht ableitet, ein Kegel zweiten Grades. Schliesslich ist anzumerken, dass die kinetische Energie sich nunmehr in der Form

$$K = \tfrac{1}{2}(Pp^2 + Qq^2 + Rr^2) \tag{17}$$

schreiben lässt.

In dem Falle, dass keine Kräfte wirken, lassen sich die Bewegungsgleichungen integriren. Setzt man den Werth (17) in die Gleichung (15a) ein, so erhält man

$$P\frac{dp}{dt} = (Q-R)qr, \quad Q\frac{dq}{dt} = (R-P)rp, \quad R\frac{dr}{dt} = (P-Q)pq.$$

Die Integrale dieser Gleichungen lassen sich mit Hilfe abgekürzter Bezeichnungen in der einfacheren Form hinschreiben:

$$p = a\cos\psi, \quad q = b\sin\psi, \quad r = c\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}.$$

Hierin ist ψ die Amplitude einer Grösse u nach dem Modul $\varkappa$, d. h. es steht ψ mit u in der Beziehung

$$u = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

und u ist als Funktion der Zeit durch die Gleichung

$$u = \lambda t + \mu$$

definirt; ferner sind von den sechs Constanten $a\,b\,c\,\varkappa\,\lambda\,\mu$ drei durch die Gleichungen

$$b^2 = a^2\frac{P(P-R)}{Q(Q-R)}, \quad \lambda^2 = c^2\frac{(P-R)(Q-R)}{PQ}, \quad \varkappa^2 = \frac{a^2}{c^2}\,\frac{P(P-Q)}{R(Q-R)}$$

bestimmt, die drei übrigen $a\,c\,\mu$ bestimmen sich aus den Anfangswerthen $p_0\,q_0\,r_0$ von $p\,q\,r$ für $t=0$, welche gegeben sein müssen, durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} P(P-R)a^2 = P(P-R)p_0^2 + Q(Q-R)q_0^2, \\ R(P-R)c^2 = Q(P-Q)q_0^2 + R(P-R)r_0^2, \\ p_0 = a\cos\operatorname{amp}\mu, \quad q_0 = b\sin\operatorname{amp}\mu, \quad r_0 = c\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{amp}\mu}. \end{gathered} \tag{18}$$

Die Vorzeichen der Constanten sind durch besondere Betrachtungen zu fixiren.

Zur Vervollständigung der Lösung müssen noch die Winkel $\varphi\,\psi\,\vartheta$ ermittelt werden, welche die Lage des Körpers im Raume jeden Augenblick bedingen[1]).

[1]) Es ist wohl nicht notwendig zu bemerken, dass der Winkel ψ mit der soeben vorübergehend benutzten Hilfsgrösse ψ nichts zu thun hat.

Hierzu dienen die auf das im Raume feste $\xi\eta\zeta$ System bezüglichen Gleichungen (15b), in welchen für unseren Fall die rechten Seiten Null sind. Integrirt man dieselben mit Rücksicht auf (17), so erhält man

$$\alpha_1 Pp + \alpha_2 Qq + \alpha_3 Rr = A,$$
$$\beta_1 Pp + \beta_2 Qq + \beta_3 Rr = B,$$
$$\gamma_1 Pp + \gamma_2 Qq + \gamma_3 Rr = C,$$

wo ABC Constanten sind; hieraus folgt, dass Pp, Qq, Rr, als rechtwinkelige Coordinaten im xyz-System betrachtet, demselben Punkt angehören, wie ABC im $\xi\eta\zeta$-System, d. h. einem constanten Punkt. Wählt man die Linie vom Anfangspunkt nach diesem Punkte zur ζ-Axe, so wird $A = 0$, $B = 0$, $C = \sqrt{P^2 a^2 + R^2 c^2}$. Die obigen Gleichungen geben dann, geeignet combinirt:

$$\gamma_1 = \frac{Pp}{\sqrt{P^2 a^2 + R^2 c^2}}, \quad \gamma_2 = \frac{Qq}{\sqrt{P^2 a^2 + R^2 c^2}}, \quad \gamma_3 = \frac{Rr}{\sqrt{P^2 a^2 + R^2 c^2}},$$

und hieraus findet man endlich

$$\vartheta = arc\, cos \gamma_3, \quad \psi = arc\, tg \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$
$$\varphi = \int \sqrt{P^2 a^2 + R^2 c^2}\, \frac{Pa^2 + Rc^2 \varkappa^2 sin^2 amp(\lambda t + \mu)}{P^2 a^2 + R^2 c^2 \varkappa^2 sin^2 amp(\lambda t + \mu)}\, dt;$$

der letzte der drei bestimmenden Winkel ist hiernach ein elliptisches Integral dritter Gattung.

Setzt man p_0 nnd q_0, also auch a unendlich klein, so gelangt man zu dem Fall, dass im Anfange der Bewegung die Drehungsaxe unendlich wenig von der z-Axe abweicht. Man findet dann

$$p = a\, cos(\lambda t + \mu), \quad q = b\, sin(\lambda t + \mu), \quad r = c\sqrt{1 - \varkappa^2 sin^2(\lambda t + \mu)},$$
$$sin^2 \vartheta = \frac{Pa^2}{Rc^2}\left(\frac{P}{R} + \frac{P - Q}{Q - R} sin^2(\lambda t + \mu)\right),$$
$$tg\, \psi = \frac{Qb}{Pa} tg(\lambda t + \mu), \quad \varphi = \psi + ct + const.$$

Die oben durchgeführte Constantenbestimmung führt nun nur dann zu brauchbaren Werthen derselben [s. oben Gleichung (18)], wenn festgesetzt wird, dass Q seiner Grösse nach das mittlere von den drei Trägheitsmomenten PQR sei. Die eben gefundenen Formeln zeigen daher, dass die Axe des grössten oder des kleinsten Hauptträgheitsmomentes, wenn sie der Drehungsaxe anfangs unendlich nahe war, dies immer bleibt. Die Annahme p_0 und r_0 unendlich klein führt dagegen zum entgegengesetzten Ergebnis, d. h. wenn der Körper um eine Axe sich dreht, welche seiner mittleren Hauptaxe unendlich nahe ist, so entfernt sich jene von dieser im Laufe der Zeit mehr und mehr. Man überträgt die Ausdrücke stabil und labil häufig vom Gleichgewicht auf die Bewegung; im vorliegenden Falle kann man dann sagen: die Rotation um die grösste sowohl als um die kleinste Hauptaxe eines Körpers ist stabil, seine Rotation um die mittlere Hauptaxe ist labil.

Für einen Rotationskörper wird $P = Q$, also $\varkappa = 0$, und man findet

$$p = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\, cos(\lambda t + \mu), \quad q = \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\, sin(\lambda t + \mu), \quad r = r_0,$$

also die letztere Drehungscomponente constant; ebenso wird von den Winkeln ϑ constant, φ und ψ lineare Funktionen der Zeit.

Weit complicirter wird natülich das Problem, wenn Kräfte wirken, also insbesondere die Bewegung eines der Schwere unterworfenen starren Körpers. Für einen Rotationskörper mit vertikaler Axe bleibt dann die eben gefundene Gleichung $r = const.$ giltig, dagegen werden die Winkel elliptische Funktionen der

Zeit. Die beiden wichtigsten Spezialfälle einer derartigen Bewegung sind derjenige, wo $r = 0$ ist und derjenige, wo anfangs $p = 0$ und $q = 0$ ist. Der erste entspricht dem sogenannten physischen Pendel (s. Art. »Pendel«), der zweite der sogenannten Kreiselbewegung (s. Art. »Kreisel«). Der oben in Betreff der Stabilität gezogene Schluss ist für diesen Fall zu modificiren. Thatsächlich ist nämlich hier nur die Hauptaxe des grössten Trägheitsmomentes stabil, die Axe des kleinsten Trägheitsmomentes ist labil, die mittlere Axe endlich verhält sich in der Ebene jener stabil, in der Ebene dieser labil. Die stabile Hauptaxe kann man experimentell bestimmen, indem man den Körper an einem Faden aufhängt, möglichst schnell rotiren lässt und die bleibende Einstellung abwartet. Der Schwerpunkt liegt dann vertikal unter dem Aufhängepunkte, und die Verbindungslinie beider ist die stabile Hauptaxe.

Ist der Körper gänzlich frei, so werden die durchgeführten Betrachtungen der letzten Seite im allgemeinen hinfällig; sie bleiben aber giltig, wenn es sich um eine Rotation um den Schwerpunkt des Körpers handelt. Ob nämlich der Schwerpunkt fest oder frei ist, kann nach dem Satze von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes keinen anderen Unterschied hervorrufen, als den, dass sich zu der Rotation noch eine forschreitende Bewegung addirt, welche derjenigen gleich ist, die der Schwerpunkt, wenn er ein einzelner Massenpunkt wäre, unter der Wirkung der Kräfte ausführen würde. Die Bewegung des Körpers relativ zum Schwerpunkt ist also umgeändert, und auch die Hauptaxen, welche in diesem Falle Hauptaxen der freien Drehung oder kürzer freie Axen heissen, spielen dieselbe Rolle wie zuvor[1]).

Zur Demonstration der bei der Drehung starrer Körper auftretenden Verhältnisse sind verschiedene Modelle und Apparate construirt worden. Es sei hier besonders auf diejenigen von Mach und von Obermayer hingewiesen.[2])

F. Auerbach.

Einfache Maschinen.

Allgemeines.

Unter der Bezeichnung «einfache Maschinen» fasst man eine Reihe von Apparaten zusammen, welche den Charakter von Maschinen haben, insofern sie dazu dienen, die in der Natur vorkommenden Verhältnisse in einer für die

[1]) Für die allgemeine Dynamik und insbesondere das Problem der Rotation seien hier aus der grossen Zahl in Betracht kommender Schriften und Abhandlungen die folgenden genannt: Roberval, Sur la comp. des mouv. Anc. Mém. Ac. Paris VI. — Wallis, Mechanica sive de motu. Lond. 1670. — Die Werke von Galiei, Huygens, Newton, Joh., Jac., D. Bernouilli. — Euler, Mechanica, Pet. 1736. — d'Alembert, Fr. de dynamique, Par. 1743. — Lagrange, Méc. analyt. P. 1788. — Laplace, Méc. céléste. P. 1799. — Poinsot, Th. nouv. de la rot. des corps. P. 1834. — Maccullagh, on the rot. etc. Proc. Ir. Ac. II u. III. (1840—1847). Frans. Jr. Ac. 22 (1855). — Clebsch, Crelle J. 57, pag. 73 (1860). — Jacobi, Vorl. üb. Dynamik; Berl. 1866. — Lottner, Crelle, J. Bd. 50 (1856). — Schlaefli, Progr. Berner Hochsch. 1867. — Semmler, In.-Diss. Gött. 1874. — Resal, Traité de cinématique. — Jullien, Probl. de méc. rat. — Weierstrass (Auszug v. Natani in Hoffmann's math. Wört., Art. »Rotation«, oder Vorles. v. J. 1879 u. s. w.). — Söderblom, N. Acta Ups. (3) 12 (1884). — Halphen, Cpt. Rend. 100, pag. 1065 (1885). — Paladini, Rend. Ac. Linc. (4) 4, pag. 187. Die Litteratur über die Kreiselbewegung im besonderen s. das.

[2]) Mach, Rep. d. Phys. 15, pag. 54 (1879). — v. Obermayer, Rep. d. Phys.

praktische Anwendung geeigneten Weise zu dirigiren, zu spezialisiren oder zu modificiren, und welche den Charakter der Einfachheit aufweisen, insofern sie keine Gliederung und Zusammensetzung in concreter und kein Zusammenwirken verschiedener Principien und Vorgänge in abstrakter Hinsicht darbieten. Namentlich gehören hierher der Hebel, die Rolle, die schiefe Ebene, der Keil und das Zahnrad. Andere hierher gehörige Maschinen sind specielle Formen oder Anwendungen der oben genannten Maschinen, z. B. die Waage ein auf dem Hebel beruhender Messapparat (s. Art. »Waage«), noch andere Modificationen oder Combinationen derselben, so das Wellrad ein modificirter Hebel, die Schraube eine modificirte schiefe Ebene, der Flaschenzug eine Combination von Rollen, der Bohrer eine Combination von Keil und Schraube.

Das, was diese Maschinen leisten, ist ein Mehrfaches und kann unter die folgenden Gesichtspunkte gebracht werden: 1. Aenderung der Kraftrichtung (einzelne Rolle). 2. Aenderung des Angriffspunktes der Kraft (Zahnräder, Seilräder). 3. Vergrösserung der Kraft auf Kosten der Schnelligkeit der Leistung oder auf Kosten des zurückgelegten Weges resp. der Hubhöhe, oder umgekehrt Beschleunigung der Leistung auf Kosten des Kraftaufwandes (Hebel, schiefe Ebene). 4. Vereinigung mehrerer dieser Leistungen, namentlich der Vergrösserung der Kraft und der Richtungsänderung (Flaschenzug, Keil).

Andererseits kann man diese Maschinen nach der Art ihrer Wirksamkeit in zwei Klassen theilen: In Maschinen mit drehender Bewegung (Hebel, Zahnrad u. s. w.) und in Maschinen mit fortschreitender Bewegung (schiefe Ebene u. s. w.), wobei jedoch zu bemerken ist, dass zuweilen auch beide Bewegungsarten vereinigt sich vorfinden (bewegliche Rollen, Schraube). Insoweit nun eine Maschine durch drehende Bewegung wirkt, ergiebt sich diese Wirkung aus dem Hebelprincip, d. h. aus dem Princip der virtuellen Verrückungen; insoweit sie durch fortschreitende Bewegung wirkt, aus dem Princip der Zerlegung der Kräfte; in Anbetracht der Beziehung zwischen dem Hebelprincip und dem Zerlegungsprincip (s. Art. »Statik«) kann jedoch auch dieser Trennung keine entschiedene Bedeutung beigelegt werden. Die Betrachtung der einzelnen Maschinen folgt daher hier ohne weitere Gliederung.

Der Hebel und seine Modificationen.

Hebelprincip. Ein Hebel im allgemeinsten Sinne des Wortes besteht aus zwei starren, von einem festen Punkte ausgehenden und in diesem starr mit einander verbundenen, in einer und derselben vertikalen Ebene verlaufenden geraden Linien. Der feste Punkt heisst der Drehpunkt; er ist gewöhnlich in der Wirklichkeit durch eine auf der genannten Vertikalebene senkrechte, kurze Drehaxe ersetzt, wodurch horizontale Schwankungen besser ausgeschlossen sind; hiervon und von dem Gewicht des Hebels soll im Folgenden abgesehen werden. Dagegen soll an jedem seiner Endpunkte eine Kraft in beliebiger Richtung wirken; die Verallgemeinerung der für diesen Fall giltigen Betrachtungen für den Fall, dass ausserdem auch in anderen Punkten des Hebels Kräfte angreifen, z. B. die in den Schwerpunkten vereinigt gedachten Gewichte der beiden Linien, wird keine Schwierigkeit darbieten. Es frägt sich alsdann, unter welchen Umständen die beiden Kräfte P und Q im Gleichgewicht sind. Das Princip der virtuellen Verrückungen[1]) giebt die Antwort hierauf ohne weiteres. Sind

[1]) s. Art. Statik, pag. 51.

nämlich δA und δB von den Verrückungen, welche die Punkte A und B bei einer kleinen Drehung erfahren, die Componenten in der Richtung der Kräfte P und Q, so muss

$$P\delta A + Q\delta B = 0$$

sein oder vielmehr, wenn berücksichtigt wird, dsss δA von A aus in der der Kraft entgegengesetzten Richtung verläuft,

$$-P\delta A + Q\delta B = 0, \quad \text{also} \quad P\delta A = Q\delta B. \tag{1}$$

(Ph. 15.)

Die wirklichen Verrückungen AA' und BB', von welchen $AE = \delta A$ und $BF = \delta B$ die nach den Kraftrichtungen genommenen Componenten sind, sind Kreisbögen von in Anbetracht der Starrheit des Winkels gleichen Centriwinkeln, AOA' und BOB', aber verschiedenen Radien OA und OB; sie verhalten sich also zu einander wie diese Radien. Bedenkt man nun, dass man diese Bögen ihrer Kleinheit wegen als gerade Linien betrachten kann, fällt man vom Drehpunkte O die Senkrechten OC und OD auf die Kraftrichtungen und nennt man die Winkel, welche δA mit AA' und δB mit BB' bildet, also auch die Winkel AOC und BOD α und β, so hat man

$$\delta A = AA' \cos\alpha, \qquad \delta B = BB' \cos\beta, \quad \text{und ebenso}$$
$$OC = OA \cos\alpha, \qquad OD = OB \cos\beta; \quad \text{andererseits:}$$
$$AA' : OA = BB' : OB; \quad \text{mithin} \quad OC : OD = \delta A : \delta B.$$

Setzt man für δA und δB diese ihnen proportionalen Werthe in die zweite Gleichung (1) ein, so erhält man

$$P \cdot OC = Q \cdot OD. \tag{2}$$

OC und OD heissen die Hebelarme, die Produkte aus Kraft und zugehörigem Hebelarm die statischen Momente des Hebels. In Worten lautet daher die Gleichung (2): Damit der Hebel im Gleichgewicht sei, müssen die statischen Momente einander gleich sein.[1])

Wirken an beiden Hebeltheilen mehrere Kräfte, so tritt an die Stelle der obigen Gleichung die allgemeinere

$$\sum Pa = \sum Qb, \tag{2a}$$

wo a und b die Abstände der verschiedenen linksseitigen resp. rechtsseitigen Kraftangriffspunkte vom Drehpunkt, senkrecht zu den resp. Kraftrichtungen sind. Hierin ist auch der Fall enthalten, dass der Hebel eigenes Gewicht besitzt, also, wie man auch sagt, kein mathematischer, sondern ein physischer Hebel ist. Wirken dann ausser den Gewichten G und H der beiden Hebelseiten nur noch in den Endpunkten die Kräfte P und Q, sind ferner a und b die Hebelarme, c und d die Abstände der Schwerpunkte der beiden Hebelseiten vom Drehpunkte, so ist

$$Pa + Gc = Qb + Hd. \tag{2b}$$

Der Zug der Kräfte und Gewichte überträgt sich natürlich durch die starren Seiten des Hebels auf den Drehpunkt; auf diesen wirkt also die Resultirende

[1]) Sachlich nicht stichhaltig, aber historisch interessant ist der ARCHIMEDES-GALILEI'sche Beweis des Hebelgesetzes, s. z. B. MACH, Die Mechanik.

aller dieser Kräfte; hiernach kann man die Stärke und Festigkeit beurtheilen, welche man dem Drehpunkt oder eventuell dem denselben tragenden Stativ geben muss, damit er im Stande sei, jener Gesammtwirkung Widerstand zu leisten.[1])

Die Gleichung (2) resp. (2a) ist, wie gezeigt, die Bedingung des Gleichgewichtes; welcher Art dieses Gleichgewicht ist, ob es nämlich indifferent, stabil oder labil ist, hängt davon ab, ob der Gesammtschwerpunkt in, unter oder über dem Drehpunkt liegt (s. Art. »Statik«.) Der Hebel mit indifferentem Gleichgewicht verharrt in jeder beliebigen, derjenige mit stabilen nur in einer bestimmten Stellung, nämlich in derjenigen, in welcher der Gesammtschwerpunkt vertikal unter dem Drehpunkte liegt, der Hebel mit labilem Gleichgewicht endlich schlägt um und verwandelt sich dadurch in einen solchen mit stabilem Gleichgewicht.

Formen des Hebels. Je nach der Gestalt kann man zwischen gradlinigen und krummlinigen Hebeln unterscheiden; ein prinzipieller Unterschied wird jedoch hierdurch nicht bedingt, da man sich die beiden krummen Theile eines krummlinigen Hebels meist ohne weiteres ersetzt denken kann durch die gradlinigen Verbindungen des Drehpunktes mit den beiden Enden;[2]) nur wenn auch an den Zwischenstellen Kräfte wirken, ist dies nicht ohne weiteres möglich. Greifen nur an den Enden Kräfte an und zwar, was häufig der Fall ist, in senkrechter Richtung, so sind die beiden graden Linien selbst die Hebelarme. Ein gradliniger Hebel ist im allgemeinen, da die beiden graden Linien im Drehpunkte einen Winkel mit einander bilden, ein Winkelhebel. Derartige Winkelhebel kommen z. B. bei der Briefwaage vor, wo sie zu Messungen dienen, ferner zur Arbeitsleistung dienend bei manchen Werkzeugen; so dient der Hammer ausser seinem Hauptzwecke noch dem Nebenzwecke, mittelst einer geschlitzten Metallkante kleine Gegenstände, wie Nägel, aus sehr festen Verbindungen zu befreien: in dieser Beziehung ist er ein Winkelhebel und dient, da die Kraft an dem weit längeren Stiel angreift, zur vergrösserten Uebertragung dieser Kraft an das Ende des anderen Armes. Eine grosse Rolle spielt die Wirkung von Winkelhebeln beim Mechanismus des menschlischen und thierischen Körpers, insbesondere des Kniees, wie denn auch statt Winkelhebel vielfach Kniehebel gesagt wird.

Besonders häufige Spezialfälle sind die beiden, wo der Winkel des Hebels gleich 180° oder gleich 0° wird; im ersten Falle erhält man den zweiarmigen und speziell, wenn die beiden Arme gleich lang sind, den gleicharmigen Hebel, im letzteren Falle den einarmigen Hebel. Der gleicharmige Hebel, bei welchem Kraftersparniss offenbar ausgeschlossen ist, dient nur zur Kraftübertragung und gleichzeitigen Richtungsumkehr, also in Fällen, wo der Angriffspunkt der Last unzugänglich ist, wo ein Abwärtsziehen bequemer ist als ein Aufwärtsziehen oder umgekehrt, oder wo beide Methoden mit einander abwechseln sollen (z. B. manche Constuktionen von Pumpenstengeln, Orgelgebläsen u. s. w.), endlich zu direkten Wägungen (s. Art. »Waage«). Beim ungleicharmigen, gleichviel ob ein- oder zweiarmigen Hebel hat man praktisch die

---

[1]) Der bei allen einfachen Maschinen auftretende Druck auf die Axe wird, als nur technischen Interesses, im Folgenden nicht mehr berührt. Messen kann man diesen Druck, indem man den Drehpunkt nicht fest, sondern an einer festen Rolle (s. u.) aufhängt; an das um diese geschlungene Seil muss man dann ein Gewicht gleich der Resultirenden von P und Q, z. B. bei Parallelkräften das Gewicht $P + Q$ hängen, damit Gleichgewicht stattfinde.

[2]) OA und OB in Fig. 15.

beiden Fälle zu unterscheiden, wo die Kraft am längeren, die zu überwindende Last am kürzeren, oder umgekehrt die Kraft am kürzeren, die Last am längeren Hebelarme wirkt; im ersteren Falle findet Kraftersparniss (d. h. Kraftvergrösserung) auf Kosten des Zeitaufwandes, im letzteren Zeit- oder Wegersparniss auf Kosten von Kraftaufwand statt. Die Scheere bietet ein Beispiel für beide Fälle dar, und zwar in den meisten Formen für den ersten, als Papierscheere für den zweiten. Die Scheere ebenso wie die Zange sind zweiarmige, der Nussknacker ein einarmiger Hebel. Jedoch ist zu bemerken, dass diese drei Werkzeuge streng genommen keine einfachen Hebel sind, sondern, ihrem Zwecke entsprechend, Verbindungen je zweier Hebel mit gemeinschaftlichem Drehpunkt. Ein einfacher Hebel, und zwar ein einarmiger, ist dagegen z. B. ein gehobener, ruhender Schiebkarren; dass durch Fortrollen des Drehpunktes oder vielmehr des um denselben angebrachten Rades der ganze Apparat eine fortschreitende Bewegung ausführen kann, kommt hier nicht in Betracht.

Zusammengesetzter Hebel. Eine Reihe von Hebeln, welche derart verbunden sind, dass sie mit ihren successiven Enden aufeinander wirken, nennt man einen zusammengesetzten Hebel. Von Wichtigkeit ist hier namentlich der Fall, dass nur am Anfang des ersten und am Ende des letzten Hebels Kräfte wirken. Es findet in diesem Falle Gleichgewicht statt, wenn das Produkt der einen Kraft mit dem Produkte aller ihr zugewandten Hebelarme gleich ist dem Produkte der andern Kraft mit dem Produkte aller dieser zugewandten Hebelarme. Durch passende Wahl der Längenverhältnisse der Arme kann man auf diese Weise offenbar eine grosse Kraftersparniss erzielen. Die Brückenwaage (s. Art. »Waage«) liefert ein Beispiel hierfür.

Rad an der Welle. Zu einer Modifikation des Hebels gelangt man, wenn man im Drehpunkte desselben auf der Hebelebene eine Senkrechte errichtet und den einen der beiden Hebelarme an einen beliebigen andern Punkt dieser Senkrechten, der sogen. Welle verpflanzt, ohne im übrigen seine Richtung zu ändern. Wie man nämlich häufig zum Angriffspunkte der Last keinen Zugang hat, so hat man nicht selten überhaupt zur Ebene, in welcher die Last wirkt, keinen Zugang; die Welle ermöglicht es alsdann, die Kraft nicht nur an einem andern Punkte, sondern sogar in einer anderen Ebene angreifen zu lassen. Ueberdies gewinnt man dabei den Vortheil, dass die Drehungen des einen und die des andern Hebelarmes sich nun gegenseitig nicht mehr stören können. Ein einfaches Beispiel bietet der Schlüssel: Der Schaft ist die Welle, die Breite des Bartes der Hebelarm der Last (es ist einleuchtend, dass die Ebene dieses Armes unzugänglich ist), der Querhalbmesser des Ringes ist der Hebelarm der Kraft; eine Kraftersparniss findet hier kaum statt, da der letztere Hebelarm meist nicht wesentlich länger als der erstere ist.

Die verbreitetste derartige Modifikation des Hebels ist das Rad an der Welle. Bei ihm ist die Welle in den beiden Endlagern drehbar und trägt irgendwo ein aufgesetztes Rad. Um eine Last Q, welche an einem um die Welle gewundenen Seil hängt, im Gleichgewicht zu halten, muss man, wenn r und R die Radien von Welle und Rad sind, an der Peripherie des Rades eine Kraft

$$P = \frac{r}{R} Q$$

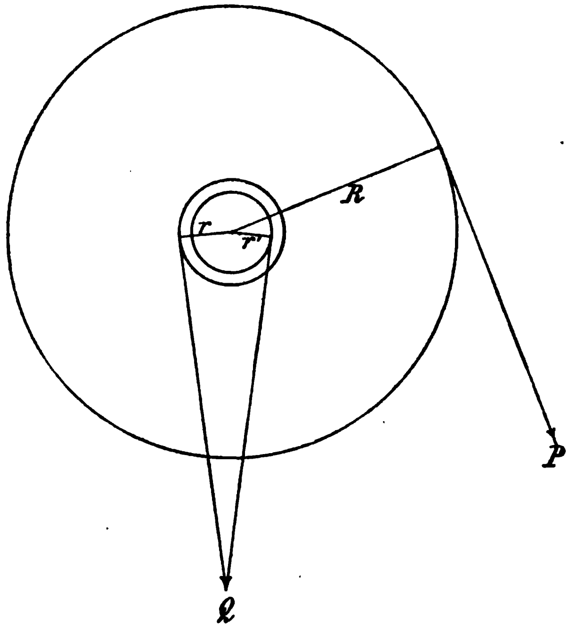
wirken lassen; um jene Last zu heben, also eine etwas grössere Kraft; denn r ist der Hebelarm der Last, R derjenige der Kraft. An die Stelle des Rades tritt häufig eine am Ende angebrachte Kurbel, deren Stange alsdann R

ist. Die Kraftersparniss im Verhältniss von $r : R$ wird nochmals vertheilt, wenn an beiden Enden Kurbeln angebracht werden. Dies ist z. B. bei der zweimännigen Haspel der Fall; bei der Winde dagegen, bei welcher die Welle nicht wie bei der Haspel horizontal, sondern vertikal steht, ist meist nur am oberen Ende, hier dafür aber eine vierarmige Kurbel, d. h. ein Drehkrenz angebracht. Aehnliche Apparate sind die Göpel, Tretwerke u. s. w.

Um eine möglichste Kraftersparniss zu erzielen, müsste man die Welle möglichst schwach oder das Rad möglichst gross machen. Da nun Beides, über eine gewisse Grenze hinaus, mit augenscheinlichen Unzuträglichkeiten verknüpft ist, wendet man in der Differentialwelle (Fig. 16) den Kunstgriff an, die Welle aus zwei Welltheilen von wenig abweichenden Radien r und r' bestehen zu lassen, derart, dass das Seil, an dem die Last hängt, von dem kleineren Welltheile sich abwindet, während es sich auf dem grösseren aufwindet. Es ist dann die Kraft

$$P = \frac{1}{2} \frac{r - r'}{R} Q;$$

man kann also durch Verkleinerung von $r - r'$, P beliebig verkleinern, ohne die gedachten Unzuträglichkeiten befürchten zu müssen.



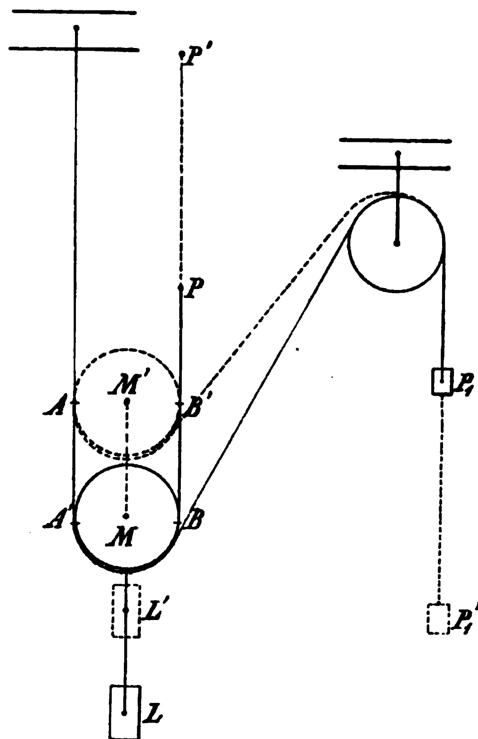
(Ph. 16.)

Rolle und Flaschenzug.

Rollen. Eine Rolle ist eine kreisförmige, flache Scheibe, die sich um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Axe drehen und an dem mit einer Rinne versehenen Rande ein Seil aufnehmen kann. Zum Zwecke der Befestigung oder des Anhängens von Gewichten ist an dem Mittelpunkte die sog. Scheere angebracht, deren beide Seiten über den Rand der Rolle hinausragen und dort sich zusammenschliessen. Ist diese Scheere an einem festen Gegenstande angebracht, sodass der Mittelpunkt der Rolle uubeweglich ist. so hat man eine feste Rolle vor sich. Sie ist im Princip nichts anderes als ein gleicharmiger Hebel und somit im Gleichgewicht, wenn an den Enden des um sie gelegten Seiles gleich grosse Kräfte angreifen. Diese Rolle leistet daher keine Kraftersparniss, sondern dient als Leit- oder Richtungsrolle nur zur Richtungsänderung; also z. B. um durch die Schwere eines Gewichtes eine Last zu heben, wobei die Kraft der Last entgegengesetzt sich bewegt; oder um durch die Vorwärtsbewegung eines Pferdes eine Last zu heben, wobei Kraft und Last in aufeinander senkrechten Richtungen sich bewegen; dasselbe findet bei manchen Klingelzügen statt, nur dass hier die Kraft vertikal wirkt, die Last horizontal bewegt wird.

Eine bewegliche oder lose Rolle andererseits erhält man, wenn man das eine Seilende an einem festen Punkte anhängt, das Seil über die untere Rinne der Rolle führt und auf das andere Seilende eine Kraft wirken lässt.

Damit Gleichgewicht bestehe, müssen die beiden Seilenden gleich gespannt sein; es muss aber hier noch eine weitere Bedingung erfüllt werden; da nämlich der Mittelpunkt der Rolle hier beweglich ist, würde die Resultirende der beiden an den Seilenden wirkenden Kräfte die Rolle heben, wenn nicht in diesem Mittelpunkte oder an der mit ihm verbundenen nach unten stehenden Scheere mittelst eines Hakens eine gleich grosse Last angebracht wäre. Ist die resultirende Kraft grösser als diese Last, so wird letztere gehoben. Sind insbesondere die beiden Seilenden vertikal, so vertheilt sich die Last auf beide zur Hälfte, und da die auf das angehängte Seilende ausgeübte Zughälfte von dem festen Punkte, an welchem es aufgehängt ist, aufgenommen wird, so braucht man an dem freien Ende nur mit der halben Kraft zu ziehen. Durch eine bewegliche Rolle wird somit die Kraft verdoppelt, natürlich wieder auf Kosten der Geschwindigkeit resp. des Weges; denn es ist klar, dass, wenn durch Zug nach oben das freie Seilende P bis P' gehoben wird, der Rollenmittelpunkt und folglich auch die Last nur um die Hälfte, von M bis M' resp. von L bis L' gehoben wird; man sieht dies am einfachsten ein, wenn man bedenkt, dass die beiden gleichen Seilstücke AA' und BB' fortfallen müssen, um das Stück PP' zu liefern.



(Ph. 17.)

Um den Zug, was meist bequemer ist, statt nach oben nach unten ausüben, also auch ein Gewicht P_1 dafür verwerthen zu können, schlingt man das freie Seilende um eine feste Rolle.

R o l l e n z u g. Noch weiter kann man die Last verkleinern, indem man das freie Seilende, statt unmittelbar an ihm zu ziehen, oder es um eine feste Rolle zu schlingen, als Last an die Scheere einer zweiten losen Rolle hängt, sodass eine nochmalige Vertheilung stattfindet und an dem freien Seilende der zweiten Rolle nur noch ein Viertel der ursprünglichen Last als Kraft zu wirken braucht. So kann man fortfahren und hat schliesslich für das Gleichgewicht, wenn n Rollen vorhanden sind:

$$P = \frac{Q}{2^n}.$$

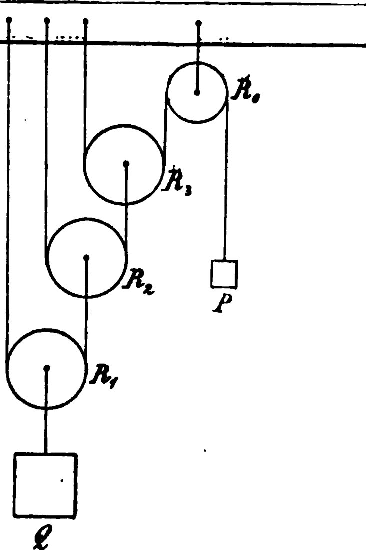
Schliesslich kann man wieder wie oben eine feste Rolle R_0 hinzufügen, um P abwärts wirken lassen zu können. Der obigen Formel verdankt dieser Apparat (Fig. 18) auch den Namen P o t e n z r o l l e n z u g (Potenzzug, fälschlich Potenzflaschenzug).

F l a s c h e n z u g. Unter einer F l a s c h e versteht man ein System von Rollen, welche entweder auf dieselbe Axe gesetzt sind oder, falls sie über einanderhängen, doch eine gemeinschaftliche Scheere besitzen. Verbindet man nun eine

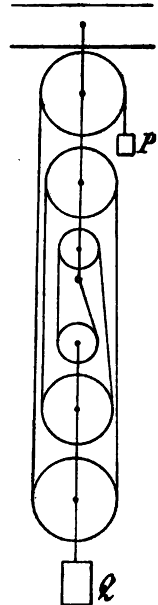
feste Flasche mit einer losen in der Weise, dass das an der Scheere der festen Flasche angeknüpfte Seil zunächst um die oberste der losen Rollen, dann hinauf und um die unterste der festen Rollen, dann wieder hinunter und um die zweite lose Rolle geht u. s. w., bis es von der obersten festen Rolle herabhängt, so erhält man den Flaschenzug (Fig. 19). Eine an die lose Scheere gehängte Last vertheilt sich hierbei auf soviel Seilstrecken, als im ganzen Rollen vorhanden sind; sind dies n, so findet Gleichgewicht statt, wenn das an das freie Seilende gehängte Gewicht

$$P = \frac{Q}{n}$$

ist; ein etwas grösseres Gewicht wird also die Last heben. Wie man sieht, ist der Flaschenzug für die Kraftersparniss weniger günstig als der Rollenzug; er wird aber trotzdem häufiger angewandt, da seine Construktion praktisch sicherer und vortheilhafter ist. Unter den auf Rollen und Flaschenzügen beruhenden Maschinen ist der Krahn die verbreitetste und wichtigste.



(Ph. 18.)



(Ph. 19.)

Rädetwerke.

Der doppelte Zweck der Uebertragung von Bewegungen an andere Stellen und der Kraftersparniss auf Kosten der Geschwindigkeit oder umgekehrt wird in ebenso einfacher wie günstiger Weise durch Apparate erreicht, deren leitende Idee der Gedanke ist, dass, wenn an einer Axe zwei Räder von verschiedenem Durchmesser starr verbunden sitzen, bei der gleichzeitigen Umdrehung die Peripherieen verschiedene Geschwindigkeiten annehmen. Hierzu kommt dann der zweite Gedanke, dass man durch irgend eine geeignete Verbindung die Geschwindigkeit des grossen Rades in unveränderter Grösse auf das kleinere Rad eines zweiten ähnlichen Apparates übertragen kann, wodurch dessen grosses Rad wiederum eine noch grössere Geschwindigkeit erhält. Setzt man dies fort, und bringt man an den beiden freien Anfangs- und Endrädern R_1 und r_n Kraft und Last an, so wird man, wenn die Kraft K an R_1, die Last L an r_n wirkt, eine sehr beträchtliche Kraftersparniss erzielen, dafür aber freilich die Last nur um einen sehr kleinen Bruchtheil der Strecke, welche die Kraft beschreibt, fördern; wirkt dagegen K an r_n, L an R_1, so kann man, freilich mit grossem Kraftaufwande, sehr erhebliche Geschwindigkeiten erzielen. Im ersten Falle gilt die Formel

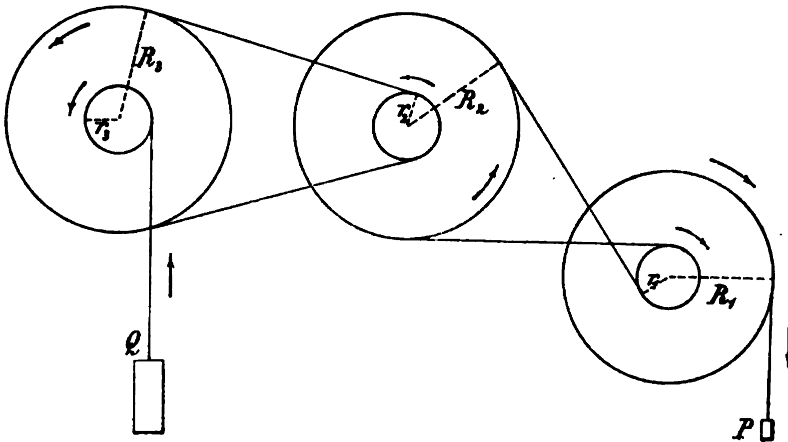
$$P = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{r_n}{R_n} Q,$$

im zweiten die umgekehrte

$$P = \frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{R_n}{r_n} Q.$$

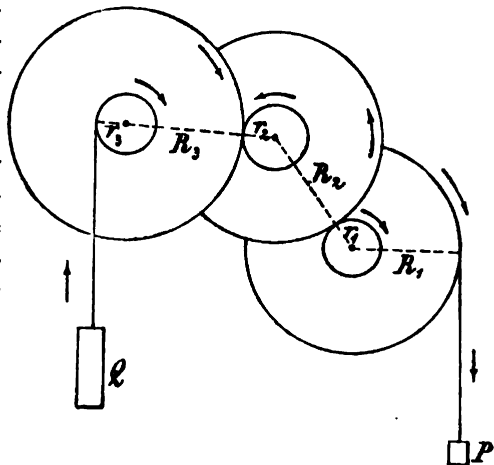
Seilräder und Zahnräder. Die beiden wichtigsten, durch die Methode der Geschwindigkeitsübertragung von Apparat zu Apparat sich unterscheidenden

Formen der Räderwerke sind die Seil- oder Riemenräder und die Zahnräder, deren Beschreibung sich erübrigt. Die Riemenräder haben den Vorzug, dass man die Bewegung auf grössere Entfernungen übertragen kann und dass man bei der Uebertragung der Bewegung von einem Räderpaar zum nächsten nach Belieben die Richtung der Drehung beibehalten oder umkehren kann, je nachdem man den Riemen gewöhnlich oder gekreuzt umlegt. Die Zahnräder andererseits wirken sicherer, weil ein Gleiten, wie das des Riemens, bei ihnen nicht stattfinden kann; man braucht, im Zusammenhange hiermit, bei ihnen keinen oder mindestens keinen so erheblichen Uebertragungsverlust, wie bei jenen anzu-



(Ph. 20.)

nehmen; sie sind auf weit kleinere Räderwerke anwendbar; schliesslich gestatten sie die Uebertragung der Bewegung in andere, zur ursprünglichen geneigte Ebenen. Will man bei kleinen Apparaten die erstere Verbindungsart anwenden, so nimmt man statt des Riemens Schnüre (Schwungmaschine, stroboskopische Scheibe u. s. w.). Zahnräderwerke werden in der Physik namentlich zur Erzielung grosser Drehungsgeschwindigkeiten verwendet (Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, der Elektricität u. s. w.).[1] Im Räderwerk der Uhr hat gewöhnlich beim »Sekundenrad« das Getriebe (d. h. das kleine Rad) 10 Zähne, beim »Mittelrad« das grosse Rad 8 mal 10 = 80, das Getriebe 12 Zähne, beim »Minutenrad« das grosse Rad 7½ mal 12 = 90, das Getriebe 12 Zähne, beim »Wechselrad« das grosse Rad 3 mal 12 = 36, das Getriebe 12 Zähne, endlich beim »Stundenrad« das grosse Rad 4 mal 12 = 48 Zähne; die Umdrehungszeiten sind demgemäss resp. 1, 8, 60, 180, 720 Minuten, d. h. wenn von den beiden Hilfsrädern abgesehen wird, 1 Minute, 1 Stunde, 12 Stunden.



(Ph. 21.)

[1]) Zur Erleichterung des Betriebes ist meist am freien Kraftrade eine Kurbel angebracht, welche trotz des grösseren zu beschreibenden Weges bequemer und vortheilhafter wirkt.

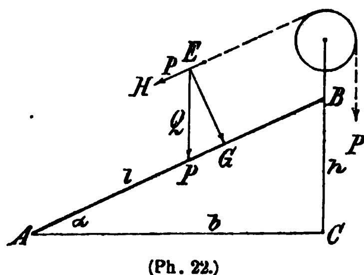
Schiefe Ebene, Schraube, Keil.

Schiefe Ebene. Fällt man von der schiefen Ebene AB das Perpendikel BC auf die horizontale Ebene, so heisst AB die Länge l, AC die Basis b und BC die Höhe h der schiefen Ebene. Das Gewicht eines auf dieser schiefen Ebene ruhenden Körpers sei durch die Verticallinie $EP = Q$ dargestellt und in die beiden Componenten EG senkrecht gegen die schiefe Ebene und EH parallel mit ihr zerlegt gedacht. Die erstere Componente wird durch den Widerstand der schiefen Ebene aufgehoben, für die andere $EH = P$ gilt die Proportion

$$P : Q = h : l.$$

Mit dieser Kraft würde der Körper die schiefe Ebene hinabgleiten oder rollen, wenn ihr nicht eine ebensogrosse, entgegengesetzt gerichtete Kraft das Gleichgewicht hielte. Versteht man unter P jetzt diese Gegenkraft, so erhält man den Satz: Auf der schiefen Ebene findet Gleichgewicht statt, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge. Da nun die Höhe stets kleiner ist als die Länge, so findet Kraftersparniss statt, und zwar eine desto grössere, je sanfter geneigt die schiefe Ebene ist. Nennt man den Neigungs winkel BAC α, so ist noch einfacher (Fig. 22)

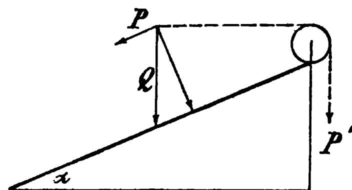
$$P = Q \sin\alpha.$$



(Ph. 22.)

In zahlreichen Fällen, so bei ansteigenden Strassen, Rampen u. s. w. wird das Princip der schiefen Ebene in dieser Form angewendet;[1]) in anderen Fällen, wo es unbequem ist, schräg aufwärts zu ziehen, führt man ein an der Last angebrachtes, der schiefen Ebene parallel laufendes Seil irgendwo über eine feste Rolle und kann nun in beliebiger Richtung, z. B. seitwärts oder vertical nach unten mit Gewichten arbeiten. In noch anderen Fällen lässt man die Kraft horizontal (Fig. 23) an der Last angreifen, hat dann aber, weil jetzt eine grössere Componente des Gewichtes Q in Betracht kommt, statt der obigen Gleichung die neue

$$P' = Q \operatorname{tg}\alpha,$$



(Ph. 23.)

woraus hervorgeht, dass in diesem Falle Kraftersparniss nur bei Steigungen bis zu 45° stattfindet. Der Kraftersparniss steht auch hier wieder in allen Fällen ein verhältnissmässiger Mehraufwand an Zeit resp. Weg gegenüber; die Last muss, um eine Hebung s zu erfahren, den Weg $s/\sin\alpha$ zurücklegen. Schliesslich ist zu bemerken, dass bei den obigen Betrachtungen die Reibung ausser Acht gelassen ist. Ist dieselbe von merklichem Einfluss, so muss man, da sie der Normalkraft $EG = \sqrt{Q^2 - P^2}$ proportional ist, statt P die Kraft $P + k\sqrt{Q^2 - P^2}$ zur Anwendung bringen, wo k der Reibungscoëfficient ist (s. Art. »Reibung«).

Ueber die freie Bewegung eines sich selbst überlassenen Körpers auf der schiefen Ebene s. Art. »Fall und Wurf«.

Schraube. Die wichtigste Modification der schiefen Ebene und in ihren Anwendungen weit verbreiteter als diese selbst ist die Schraube. Dieselbe lässt sich auffassen als eine um einen Cylinder, die Schraubenspindel, gewundene

---

[1]) Praktisch wird die Steigung einer schiefen Ebene meist nicht durch den Winkel α, sondern durch das Verhältniss $1 : l/h$ oder auch in Procenten ($100\ h/l$) angegeben.

schiefe Ebene; jedoch tritt in der Wirklichkeit, was freilich an dem Princip nichts ändert, an die Stelle der Ebene häufig ein dreikantiger oder vierkantiger Stab. Das Gewinde passt genau in die entsprechend vertieft gearbeitete Schraubenmutter. Ist die letztere, was der häufigere Fall ist, fest, denkt man sich das Ganze vertikal und lässt man am Kopfe der Schraube eine horizontale Drehkraft wirken, so steigt die Schraube, je nach der Drehrichtung und der Schnittrichtung des Gewindes (man unterscheidet rechtsgewundene und linksgewundene Schrauben) entweder in die Höhe oder in die Tiefe, kann also in jenem Falle eine Last heben (Schraubenwinde), in diesem einen Druck ausüben (Schraubenpresse). Ist Q diese Last oder dieser Druck, so ergiebt die Auffassung der Schraube als einer schiefen Ebene (zweiter der beiden oben unterschiedenen Fälle), sofort, wenn r der Spindelradius und h die Höhe eines Schraubenganges ist, die Gleichung

$$P = \frac{h}{2\pi r} Q = Q \, tg \, \alpha,$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie die Ganghöhe zum Spindelumfang, oder sie ist gleich dem Produkt der Last mit der Tangente des Steigungswinkels. Es würde hiernach Kraftersparniss stattfinden, wenn der Steigungswinkel $\alpha < 45°$, also die Ganghöhe kleiner als der Spindelumfang ist — ein Schluss, der jedoch durch die sehr beträchtliche Reibung der Schraube in der Mutter hinfällig gemacht wird. Dieser Reibung verdanken es die Schrauben, dass sie weit weniger als Kraftmaschinen als vielmehr einerseits als Befestigungsvorrichtungen, andererseits als Messungsvorrichtungen benutzt werden.[1] In ersterer Hinsicht sind die Druck- und Klemmschrauben, sowie die Schraubstöcke zu erwähnen und auf die Propfenzieher hinzuweisen, welche insofern ein instructives Beispiel abgeben, als von ihnen diejenigen Constructionen, welche die Schraube als Kraftmittel verwenden wollen, sich fast immer als unpraktisch erwiesen haben, nicht aber diejenigen, bei welchen die Schraube nur als Reibungsmittel, als Kraftmittel aber die Muskelkraft mit Hebel- oder Zahnradunterstützung benutzt wird. Für die Physik sind die Schrauben gerade in der letzterwähnten Hinsicht am wichtigsten, nämlich als Stell- und Messschrauben, weil bei ihnen eine verhältnissmässig beträchtliche Drehung nur eine sehr kleine Hebung oder Senkung resp. Fortrückung hervorruft; die Mikrometerschraube, das Sphärometer und die Theilmaschine sind Beispiele (s. Art. »Grundbegriffe«).

Die Schraube ohne Ende, welche nur wenige Gänge und keine Mutter hat, dient zur Uebertragung der Bewegung auf ein Zahnrad, in dessen Zähne die Gänge eingreifen. Hängt die Last an dem mit diesem Zahnrad verbundenen Getriebe und wirkt die die Schraube drehende Kraft, wie dies gewöhnlich geschieht, nicht am Schraubenkopf selbst, sondern an einer Kurbel, so ist, wenn r der Radius des Getriebes, R der des Zahnrades, ρ der der Spindel und l der der Kurbel, endlich h die Ganghöhe der Schraube ist:

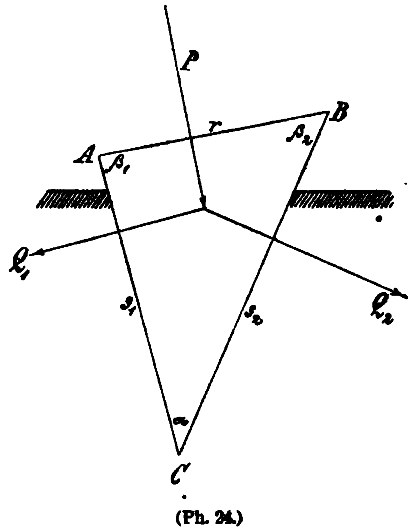
$$P = \frac{\rho}{l} \cdot \frac{h}{2\rho\pi} \cdot \frac{r}{R} \cdot Q = \frac{hr}{2\pi l R} Q;$$

der Spindelradius fällt aus der Formel ganz heraus.

Keil. Dieses Werkzeug dient zur Trennung von Theilen eines Körpers, zu deren direkter Trennung entweder der günstigste Punkt nicht zugänglich ist oder

[1]) Eine Ausnahme von freilich immenser Bedeutung bildet die Schiffsschraube, die aber, da die Mutter hier durch das flüssige Wasser dargestellt wird, mehr in die Hydrodynamik als hierher gehört.

ein zu grosser Kraftaufwand erforderlich wäre. Bei dem Keil wirkt die Kraft P auf den Rücken AB, treibt die Spitze desselben in den zu theilenden Körper hinein und zerlegt sich dabei in zwei zu den Seiten AC und BC senkrechte Kräfte Q_1 und Q_2. Entweder direkt oder durch Uebertragung der Betrachtungen über die schiefe Ebene erhält man, wenn r den Rücken, s_1 und s_2 die Seiten, α den Spitzenwinkel, β_1 und β_2 die beiden andern Winkel bezeichnen, die Formeln



(Ph. 24.)

$$\frac{Q_1}{P} = \frac{s_1}{r} = \frac{sin\beta_1}{sin\alpha}, \quad \frac{Q_2}{P} = \frac{s_2}{r} = \frac{sin\beta_2}{sin\alpha},$$

$$P = Q_1 cos\beta_2 + Q_2 cos\beta_1,$$

oder, wenn der Keil symmetrisch, also $Q_1 = Q_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $s_1 = s_2$ ist:

$$P = \frac{r}{s}\ Q = Q cos\beta.$$

Wie man sieht, verhält sich die Kraft zur Last, wie der Rücken zur Seite; je schärfer also der Keil ist, eine desto geringere Kraft genügt, um den Körper zu zerspalten; auch hier muss freilich wiederum der Rücken beträchtlich eindringen, um die Körperhälften wenig auseinanderzubringen. Der Keil findet bei einer grossen Zahl von Werkzeugen Anwendung, so bei den Beilen, Messern, Scheeren, Meisseln, Nägeln und Nadeln. Beim Hobel ist der Keil mit einer schiefen Ebene, beim Bohrer ist er mit einer Schraube verbunden.

Seil- und Kettenmaschinen.

Diese, wesentlich vom technischen Standpunkt interessante Klasse einfacher Maschinen kann und braucht hier nur erwähnungsweise behandelt zu werden. Wird das Wort Seil möglichst allgemein gefasst, so versteht man unter einer Seilmaschine ein Seil oder eine Verbindung von Seilen, an welchen Kräfte angreifen. Ein Angriffspunkt heisst ein Knoten, weil hier eine Richtungsänderung stattfindet, und es giebt feste und lose Knoten. Um das Gleichgewicht zu finden, muss man nach dem Zerlegungsprincip in jedem Knoten Gleichgewicht herstellen. Durch Vermehrung der Knoten ins Unendliche gelangt man von den Seilpolygonen zu den parabolischen Kettenlinien und zu den wirklichen Kettenlinien (s. Artikel »Statik«).[1]

F. Auerbach.

Fall und Wurf.

Allgemeines. Unter Fall und Wurf versteht man diejenigen Bewegungen irdischer Körper, welche man als Wirkungen einer ihrer allgemeinen Eigenschaften, oder, wie man auch sagt, einer Kraft, betrachtet; diese Eigenschaft

[1]) Näheres über die einfachen Maschinen in wissenschaftlicher und technischer Hinsicht findet man u. A. in Weisbach, Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. 4 Bde. — Apparate zur Demonstration der Gesetze der einf. Masch. sind vielfach, ganz neuerdings noch u. A. von V. v. Lang (Z. f. Instr. K. 3, pag. 159. 1883) und von W. Neu (Z. z. Förd. d. ph. U. 2, 1885) construirt worden.

oder Kraft heisst die Schwere. Dass die Schwere wirklich eine allgemeine Eigenschaft der irdischen Körper ist, zeigt sich schon im Ruhezustande derselben, und zwar durch den Druck, den sie auf die Unterlage ausüben; ein Druck, welcher, wie die Wägungen lehren, für denselben Körper an demselben Orte zu allen Zeiten der gleiche, für verschiedene Körper aber verschieden ist. Das Maass dieser Verschiedenheit ist das Gewicht der Körper; man kann also auch sagen: die Körper fallen durch ihr Gewicht herab. Endlich sagt man auch, auf Grund der Einordnung der irdischen Schwere unter eine allgemeinere Erscheinung (s. Art. »Gravitation«): Die Körper fallen in Folge der Anziehungskraft der Erde, oder sachgemässer ausgedrückt: in Folge der zwischen der Erde und ihnen wirksamen Anziehung.

Freier Fall, unfreier Fall, Wurfbewegung. Die in Rede stehenden Bewegungen können im wesentlichen von dreierlei verschiedenem Charakter sein. Beim freien Fall ist die Schwere das einzige für die Bewegung maassgebende Moment. Beim unfreien Fall tritt zu der Schwere noch ein Zwang hinzu, welchem der Körper bei seiner Bewegung gehorchen muss, z. B. der Zwang, auf einer Ebene zu bleiben: Fall auf der schiefen Ebene; oder der Zwang, auf krummen Flächen zu bleiben; ein Zwang, der entweder, wie z. B. beim Fall auf der Cycloide, durch eine Unterlage, oder aber, wie beim Pendel, durch die Verbindung mit einem festen Punkte, oder endlich, wie beim Cycloidenpendel, durch beides zugleich ausgeübt werden kann. Wenn drittens zu der Schwere ein anfänglicher, dem Körper ertheilter Impuls hinzukommt, so nennt man die Bewegung eine Wurfbewegung. Diese Fälle sollen hier untersucht werden, jedoch mit Ausschluss des Pendels, welchem seiner grossen Bedeutung halber ein selbstständiger Artikel gewidmet ist.

Richtung des freien Falles. Bei der Untersuchung einer Bewegung handelt es sich vor allem um zweierlei: um ihre Richtung und um ihre Geschwindigkeit. Wir untersuchen also zunächst die Richtung des freien Falles. Dieselbe ist, wie die Erfahrung lehrt, im allgemeinen und im grossen Ganzen übereinstimmend mit der Richtung des Lothes, d. h. mit der vertikalen Richtung. Beim Loth ist diese Richtung durch ein Nebeneinander, beim freien Falle durch ein Nacheinander von Punkten dargestellt. Ausser direkt durch das Loth kann man diese Richtung auch ermitteln, indem man auf einer freien Wasserfläche, welche horizontal ist, eine Senkrechte errichtet. Es frägt sich nun, wie sich die Lothrichtung, also auch die Fallrichtung, zur Figur der Erde verhält. Wäre die Erde eine genaue Kugel, so würde das Loth, wie schon aus Gründen der Symmetrie einleuchtet, an jedem Orte genau mit dem Erdradius zusammenfallen. Die Erde ist aber in Wahrheit ein, wenn auch nur wenig von der Kugelgestalt abweichendes Sphäroid (s. Art. »Gravitation«), und in Folge dessen stimmt die Lothrichtung und folglich auch die Richtung des freien Falles nur an den Polen und am Aequator mit der Richtung des Erdradius überein, weicht aber an allen anderen Orten ein wenig von derselben ab, und zwar verhältnissmässig am meisten in den mittleren Breiten. Eine andere Abweichung der Loth- und Fallrichtung von der Richtung des Erdradius lässt sich auf die Wirkung der aus der Drehung der Erde um ihre Axe resultirenden Centrifugalkraft (s. Art. »Dynamik«) zurückführen. An jedem Punkte der Erde nämlich, ausgenommen an den Polen, wo keine Rotation stattfindet, und am Aequator, wo die Centrifugalkraft der Schwere gerade entgegengerichtet ist, bilden beide Kraftrichtungen einen Winkel miteinander, der den Breitenwinkel des Ortes zu 180° ergänzt; und somit setzen sie sich zu einer Resultante zusammen, welche dem Loth und dem

fallenden Körper eine von der auf der freien Wasserfläche errichteten Vertikalen etwas abweichende Richtung ertheilt; die Anschauung lehrt, dass diese Abweichung auf der nördlichen Halbkugel nach Süden zu, auf der südlichen nach Norden zu stattfinden muss. Für die Physik hat diese Erscheinung jedoch keine aktuelle Bedeutung. Endlich ist noch eine dritte hierhergehörige Richtungsabweichung von Loth und Fall zu beachten: diejenige, welche eine Folge lokaler Unregelmässigkeiten der Erde ist; an Orten z. B., wo sich einerseits eine weite Ebene, andererseits aber ein massiger Berg befindet, weicht das Loth und die Fallrichtung nach der Seite des letzteren um einen durch feine Messungen zu ermittelnden Betrag von der Richtung, die ohnedies stattfinden würde, ab (s. Art. »Gravitation«).

Die bisher angeführten Richtungsabweichungen waren dem Loth und dem freien Fall gemeinsam, so dass man nach wie vor sagen darf: die Richtung des freien Falles ist lothrecht. Dagegen ist nunmehr eine Abweichung zu besprechen, welche nur die Richtung des freien Falles betrifft, welche also zur Folge hat, dass die Körper nicht lothrecht zur Erde fallen. Diese Abweichung rührt daher, dass der fallende Körper aus der Höhe, aus welcher er herabfällt, eine grössere Rotationsgeschwindigkeit um die Erdaxe mitbringt, als die Erdoberfläche selbst besitzt; dieser Ueberschuss an horizontaler Geschwindigkeit wird ihn also gegenüber dem Loth ostwärts vorauseilen lassen. Um wieviel, ergiebt folgende elementare Betrachtung. Ein an der Erdoberfläche befindlicher Punkt hat in Folge der Drehung der Erde die Geschwindigkeit

$$u_0 = \frac{\pi}{43200} R \cos\varphi$$

(R Erdradius, φ Breite des betreffenden Ortes), ein in der Höhe h über der Oberfläche befindlicher Punkt dagegen die Geschwindigkeit

$$u = \frac{\pi}{43200}(R + h)\cos\varphi.$$

Ein von der Höhe h auf die Oberfläche herabfallender Punkt befindet sich nun, wie aus den Fallgesetzen (s. u.) folgt, durchschnittlich in der Höhe $\frac{2}{3}h$; seine Voraneilung in der Sekunde beträgt also

$$u - u_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{43200} h \cos\varphi,$$

und folglich während der ganzen Fallzeit ($t = \sqrt{2h/g}$, siehe unten)

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{43200} h \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos\varphi. \tag{1}$$

Durch Versuche von BENZENBERG,[1]) REICH u. A. ist diese Vorauseilung in der That nachgewiesen worden, natürlich unter Anwendung beträchtlicher Fallhöhen. Am zahlreichsten und sorgfältigsten sind die Versuche von REICH[2]), welche bei einer Fallhöhe von 158·54 m eine östliche Abweichung von im Mittel 28·4 mm ergaben, während die entwickelte Theorie zu der Zahl 27·5 führt; die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist also eine fast vollständige. Aus der östlichen beobachtete übrigens REICH auch eine freilich unsichere und viel kleinere südliche Abweichung der freien Fallrichtung; vielleicht ist dieselbe auf Rechnung des Umstandes zu setzen, dass die vorhin besprochene, dem Loth und dem

---

[1]) BENZENBERG, Vers. üb. d. Gesetze des Falls u. s. w. Dortmund 1804. Die älteren Versuche, sowie die Theorien von GAUSS u. A. sind hier mitgetheilt und besprochen. Zuerst ausgesprochen wurde die Fallabweichung, wie es scheint, von NEWTON, zuerst constatirt von HOOKE.

[2]) REICH, Fallversuche. Freiberg 1831.

Fall gemeinsame südliche Abweichung in Folge der Centrifugalkraft bei dem aus beträchtlicher Höhe herabfallenden Körper grösser sein muss, als beim Loth, weil oben die Schwere kleiner, die Centrifugalkraft grösser, der Einfluss der letzteren also aus doppeltem Grunde beträchtlicher ist.[1])

Geschwindigkeitscharakter des freien Falles. Die Geschwindigkeit des freien Falles ist erfahrungsmässig nicht constant, sondern gleichförmig zunehmend, die Bewegung selbst also eine gleichförmig beschleunigte. Es stimmt dieses Ergebniss der Erfahrung überein mit der Folgerung, welche man theoretisch aus der Thatsache ziehen kann, dass die Schwere eine dauernde Eigenschaft der Körper, eine dauernde Kraft ist; denn unter der Wirkung einer solchen nimmt eine Bewegung stets den Charakter einer beschleunigten an (s. Art. »Grundbegriffe«); und zwar muss, da die Schwere von constanter Grösse ist, auch die Beschleunigung constant sein. Zu der Geschwindigkeit, welche der fallende Körper am Ende irgend eines Theilchens besitzt, und welche er nach dem Beharrungsprinzip (s. Art. »Princ. d. Mech.«) beibehalten würde, kommt in Folge der Schwere eine neue Geschwindigkeit, eben jene constante Beschleunigung hinzu. Es muss hier genügen anzuführen, dass diese Beschleunigung in runder Zahl

$$g = 9{\cdot}8 \frac{m}{sec}$$

beträgt, dass sie an den Polen grösser ist, als am Aequator und an der Erdoberfläche selbst grösser als entfernt von dieser in der Höhe, endlich dass sie verschieden angegeben werden muss, je nachdem man die wahre oder die scheinbare Beschleunigung durch die Schwere (unter Mitwirkung der Rotation der Erde) meint; in dem Art. »Gravitation« sind die Untersuchungen über die Grösse und die Variation von g im Zusammenhange dargestellt.

Zwischen den beiden Erscheinungen, welche man sich als Wirkungen der Schwere vorstellt, nämlich dem Druck der Körper auf ihre Unterlage und dem freien Fall der Körper, besteht nun aber ein wesentlicher Unterschied. Während nämlich jener Druck, je nach dem Gewichte der Körper, ein sehr verschiedener ist, so dass das Gewicht geradezu das Maass des Druckes ist, ist die Beschleunigung beim freien Fall für alle Körper die gleiche. Wenn man eine hölzerne und eine metallene Kugel, beide von gleicher Grösse und folglich von sehr verschiedenem Gewicht, zu gleicher Zeit von demselben Niveau herabfallen lässt, so erreichen sie gleichzeitig den Boden; es giebt Vorrichtungen, mittels deren sich dies sehr exakt nachweisen lässt. Haben die Körper auch noch verschiedene Gestalt, so fallen sie allerdings in Folge des verschiedenen Luftwiderstandes (s. unten) verschieden schnell; man braucht sie aber nur in einem hohen, auf den Teller der Luftpumpe gesetzten und dann ausgepumpten Glascylinder fallen zu lassen, um sich auch hier von der Gleichheit der Fallzeit zu überzeugen.[2]) Nach dem in Art. »Grundbegriffe« Gesagten ist es ohne weiteres klar, wie man sich von dieser Erscheinung Rechenschaft zu geben habe. Die Beschleunigung, welche eine Kraft einem Körper ertheilt, ist nämlich nicht blos der Grösse dieser Kraft direkt, sondern auch der Masse des zu bewegenden Körpers umgekehrt proportional; sie ist also in unserem Falle ein Quotient,

---

[1]) Ganz allgemein ist der »freie Fall aus e. Punkte der Erdoberfläche« von HOPPE (Arch. d. M. u. Ph. 64, pag. 96. 1879) behandelt worden.

[2]) Ein ohne Apparate anzustellender Versuch, der dasselbe, wenn auch nicht völlig überzeugend, nachweisst, besteht darin, dass man auf eine Münze eine Papierscheibe von gleicher Grösse legt und beide nun fallen lässt; sie erreichen dann zugleich den Boden. (Versuch und Deutung von P. ARIAGA um 1650 herrührend.)

dessen Zähler das Gewicht, dessen Nenner die Masse des fallenden Körpers ist; und da dieser Quotient erfahrungsgemäss für alle Körper der gleiche ist, so müssen wir annehmen, dass der Körper von grösserem Gewicht auch eine in demselben Verhältniss grössere Masse hat, dass also Gewicht und Masse proportionale Begriffe sind; der Proportionalitätsfaktor ist g. In Formeln

$$g = \frac{G}{M}, \quad G = gM, \quad M = \frac{G}{g},$$

wo M die Masse und G das Gewicht ist. G und g variiren für verschiedene Breiten und Höhen, M dagegen ist eine absolute, dem Körper charakteristische Constante.

Fallgesetze. Aus dem Charakter der gleichförmig beschleunigten Bewegung folgen unmittelbar die Formeln

$$v = gt, \quad t = \frac{v}{g},$$

wo v die Geschwindigkeit zur Zeit t ist; ferner, wenn man erwägt, dass die mittlere Geschwindigkeit während des Zeitraumes t gleich $\frac{0 + gt}{2}$ ist; für den in der Zeit t durchfallenen Raum h die Formel

$$h = \frac{0 + gt}{2} t, \quad \text{also} \quad h = \frac{1}{2} g t^2. \tag{2a}$$

Man hat also die Sätze:

1. Die Fallgeschwindigkeit ist der Fallzeit proportional.
2. Die Fallhöhe ist dem Quadrate der Fallzeit proportional.
3. Die Fallhöhe ist halb so gross, wie die Strecke, welche mit der erreichten Geschwindigkeit in derselben Zeit gleichförmig zurückgelegt werden würde.

Die beiden ersten Gesetze kann man, mit einer leicht zu machenden Ergänzung, auch folgendermaassen formuliren: 1. Die am Ende der einzelnen Sekunden erlangten Geschwindigkeiten verhalten sich wie die ganzen Zahlen. 2. Die in den einzelnen Sekunden, jede für sich genommen, durchfallenen Strecken verhalten sich wie die ungeraden Zahlen. 3. Die nach Ablauf der einzelnen Sekunden im ganzen durchfallenen Höhen verhalten sich wie die Quadrate der ganzen Zahlen.[1])

Von den drei Grössen Geschwindigkeit, Fallzeit und Fallhöhe lassen sich mit Hilfe der obigen und der folgenden Formeln

$$t = \frac{v}{g}, \quad h = \frac{v^2}{2g}, \tag{2b}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v = \sqrt{2gh} \tag{2c}$$

stets zwei aus der dritten berechnen.

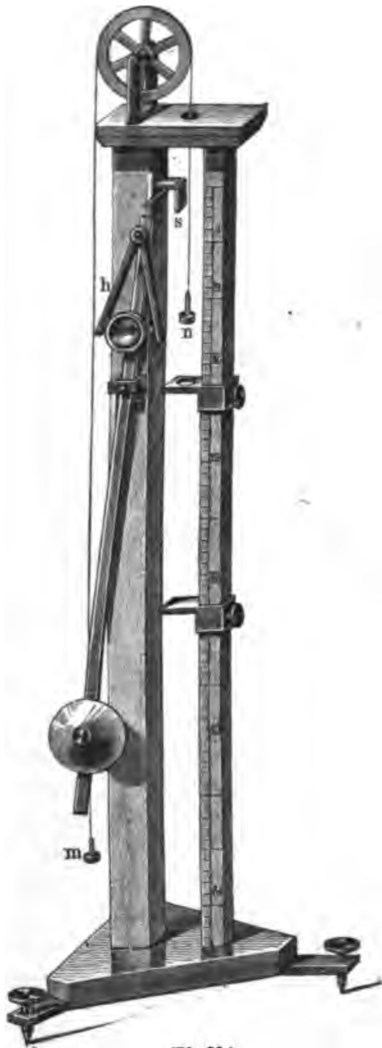
Die Atwood'sche Fallmaschine. Bei dem Versuche, die eben theoretisch entwickelten Fallgesetze experimentell zu prüfen, ist man in der Zeit, in welcher man diesen Versuch zuerst machte, auf die Schwierigkeit gestossen. dass der freie Fall viel zu rasch erfolgt, als dass man die einzelnen Zeitabschnitte in irgendwie genauer Weise mit einander vergleichen oder gar absolut messen könnte. Unter den Gedanken, durch welche man dieser Schwierigkeit begegnet ist, darf als einer der glücklichsten derjenige bezeichnet werden, welcher in der Atwood'schen Fallmaschine[2]) verwirklicht ist, und der in folgendem besteht.

[1]) Die Fallgesetze sind zuerst von Galilei gefunden worden.

[2]) Atwood, A treatise on the rect. motion etc. Cambr. 1784.

Die Beschleunigung beim freien Fall ist doch nur desshalb eine so grosse, weil jedes Gewicht nur grade seine eigene Masse in Bewegung zu setzen braucht. Kann man es durch irgend eine Vorrichtung erreichen, dass ein kleines Gewicht, also eine kleine Kraft, eine grosse Masse in Bewegung setzen muss, um selbst fallen zu können, so muss die Beschleunigung und zwar im Verhältniss des bewegenden Gewichtes zur bewegten Masse, kleiner ausfallen. Eine solche Vorrichtung ist ein über eine feste Rolle geschlungenes und an beiden Enden belastetes Seil (s. Art. »Einfache Maschinen«). Hängt an jedem Ende ein Gewicht P, so ist Gleichgewicht vorhanden; fügt man aber auf der einen Seite ein kleines Uebergewicht p hinzu, so ist das Gleichgewicht gestört, das Gewicht p ist bestrebt, seine eigene Masse abwärts zu ziehen und muss, um dies ausführen zu können, die Masse der Gewichte $2\,P$ mitnehmen. Die bewegende Kraft ist also p, die bewegte Masse diejenige, welche dem Gewicht $2P+p$ entspricht, also nach dem Obigen die Masse $(2P+p)/g$, oder genauer, weil noch das Gewicht π der Schnur hinzukommt, die Reibung ρ an der Rolle aber entgegenwirkt, die Masse $(2P+p+\pi-\rho)/g$. Folglich ist die Beschleunigung

$$g' = \frac{p}{\frac{1}{g}(2P+p+\pi-\rho)} = g\,\frac{p}{2P+p+\pi-\rho}. \qquad (3)$$



(Fig. 25.)

Durch geeignete Wahl des Grössenverhältnisses von P und p kann man also offenbar eine beliebig kleine Beschleunigung erzielen.

In der Form, welche ihr gegenwärtig gegeben zu werden pflegt, besteht die ATWOOD'sche Fallmaschine (Fig. 25) aus einer 2—3 *m* hohen vertikalen Säule, welche auf ihrem Gipfel die möglichst leichte und bewegliche, auf Friktionsrädchen ruhende Rolle mit der Schnur und den beiden gleichen Gewichten P trägt. In einiger Entfernung von der Hauptsäule verläuft ebenfalls vertikal eine zweite mit Maasseintheilung versehene, an welcher sich zwei Holzbrettchen verschieben lassen, ein durchlochtes, zum Durchlassen des fallenden Gewichtes bestimmtes, und ein massives, auf welches dasselbe aufschlägt. An der Hauptsäule ist unmittelbar unter der Rolle ebenfalls ein seitliches Brettchen befestigt, auf welchem zu Anfang des Versuches das Gewicht ruht, und welches von einem an der Hauptsäule angebrachten Sekundenpendel durch den ersten Sekundenschlag desselben umgeklappt wird. Als Uebergewichte benutzt man theils geschlitzte Metallringe, theils ebensolche mit zwei seitlichen Ansätzen, welche sie verhindern, das durchlochte Brettchen zu passiren. Besonders geeignete Maasse sind

je 97 g für die Gewichte (mit Schnur- und Reibungscorrektion) und je 2 g für die Uebergewichte; legt man dann nämlich ein Uebergewicht auf, so ist die Beschleunigung nach obiger Formel (3) gerade 10 *cm*, die Fallhöhe in der ersten Sekunde 5 *cm*. Man kann dies zunächst verifiziren, indem man das massive Brettchen 5 *cm* unterhalb der Klappe aufstellt; das Gewicht, das beim ersten Sekundenschlage seinen Fall begann, schlägt dann beim zweiten Sekundenschlage auf das Brettchen auf; bei der Feinheit des Ohres in der zeitlichen Differenzirung von Schallen ist hierbei eine verhältnissmässig grosse Genauigkeit erreichbar. Stellt man nun statt des massiven das durchlochte Brettchen bei 5 *cm* ein und benutzt ein Uebergewicht mit Ansätzen, so geht der Fallkörper am Ende der ersten Sekunde durch das Brettchen hindurch, lässt das Uebergewicht auf demselben liegen, geht nun nach dem Beharrungsprinzipe mit constanter Geschwindigkeit weiter und legt, wie man durch Einstellen des massiven Brettchens auf 15 oder 25 u. s. w. findet, nunmehr in jeder Sekunde 10 *cm* zurück. Benutzt man endlich, unter Beibehaltung der Einstellung des durchlochten Brettchens auf 5 ein Uebergewicht ohne Ansätze, so dass die Beschleunigung andauert, so muss man das massive Brettchen auf $4 \times 5 = 20$ oder auf $9 \times 5 = 45$ u. s. w. einstellen, damit der Fallkörper am Ende der zweiten, dritten u. s. w. Sekunde aufschlage. Durch diese und ähnliche Versuche lassen sich die verschiedenen für den freien Fall giltigen Gesetze und Beziehungen bestätigen und, durch umgekehrte Anwendung der Formel (3), mittelst Messung von g' die Grösse g (wenn auch nicht sehr genau) bestimmen. Will man sich von dem Einflusse der nicht gut genau bestimmbaren Reibung ρ freimachen, so beobachtet man die bei Anwendung zweier verschieden schwerer Uebergewichte p_1 und p_2 stattfindenden Beschleunigungen g_1 und g_2. Man hat dann

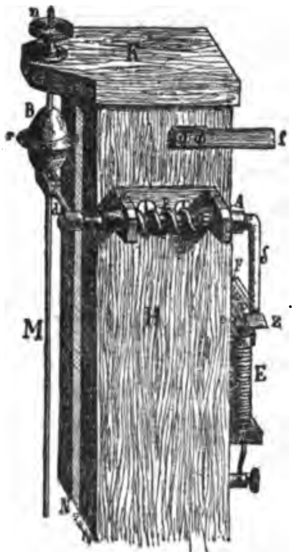
$$p_1 g = (2P + \pi - \rho + p_1) g_1, \quad p_2 g = (2P + \pi - \rho + p_2) g_2$$

und folglich durch Elimation von $2P + \pi - \rho$

$$g = \frac{(p_2 - p_1) g_1 g_2}{p_2 g_1 - p_1 g_2}.$$

Mit dem Pendel ist zuweilen noch ein Zifferblatt mit Sekundenzeiger verbunden. Diese und andere Neuerungen rühren von STROUMBO,[1]) BÉQUIÉ[2]) u. A. her.

Neuere Fallmaschinen. Die ATWOOD'sche Fallmaschine rührt, wie bemerkt, aus einer Zeit her, wo man kleine Zeiträume noch nicht messen und rasch auf einander folgende Zeitpunkte noch nicht exakt fixiren konnte. Gegenwärtig hingegen ist man in beiden Hinsichten schon sehr weit gediehen,[3]) und so ist eine grosse Anzahl von Fallmaschinen neuerdings construirt worden, welche, sonst auf sehr verschiedenartigen Gedanken beruhend, doch dies der ATWOOD'schen gegenüber gemeinsam haben, dass die Beschleunigung wirklich g ist. Es muss hier genügen, einen dieser Apparate hervorzuheben und einige andere kurz zu erwähnen.



(Ph. 26.)

Die Fallmaschine von MÖNNICH[4]) (Fig. 26 u. 27)

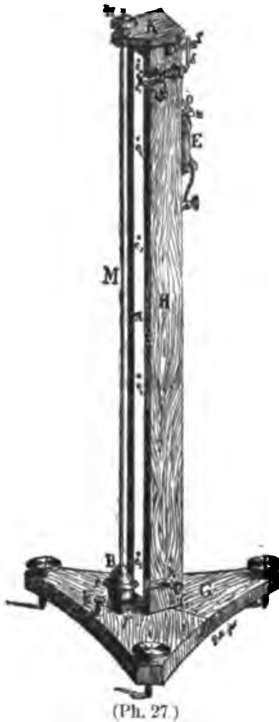
[1]) STROUMBO, Mondes 53, pag. 72 (1880).

[2]) BÉQUIÉ, J. de phys. (3) 2, pag. 323 (1883).

[3]) Man denke insbesondere an die Chronoskope von WHEATSTONE, HIPP u. A. s. Art. »Grundbegriffe«, pag. 13.

[4]) MÖNNICH, Rep. d. Phys. 21, pag. 31 (1885).

beruht auf der elektrolytischen Markirung der von dem Fallkörper nach gleichen Zeitabschnitten erreichten Orte. Der Fallkörper *B* ist central durchbohrt und fällt an einem senkrechten Draht *M* reibungslos herab; er trägt einen äquatorialen, scharf auslaufenden Gürtel *r*. Etwa 2 *mm* seitlich entfernt verläuft die Hauptsäule *H*, in diese ist eine Metallskala eingelassen, und auf diese wird bei Beginn des Versuches ein angefeuchteter weisser Papierstreifen geklebt und mit gekochtem Jodkaliumstärkekleister bestrichen. Das durch einen Hebelarm *d* gestützte Fallgewicht wird durch den Schluss eines elektrischen Stromes ausgelöst, in demselben Momente wird dieser Strom aber auch schon wieder unterbrochen, und der dadurch ineinem secundären Stromkreise erzeugte Inductionsstrom erzeugt einen Funken, der, von dem scharfen Rande des Fallkörpers auf den Papierstreifen überspringend, den Beginn des Falles durch einen schwarzen Fleck e_0 markirt. Während dann der Körper fällt, springen dann in gleichen Zeitintervallen von sehr kleiner Grösse, etwa 0·1 *s*, weitere derartige Funken, e_1, e_2 u. s. w. über. Es ist nun einleuchtend, dass man auf diese Weise die Fallgesetze unmittelbar für das Auge demonstriren, und dass man ferner, wenn man die Grösse des kleinen Zeitintervalls genau bestimmt (wozu sich das BEETZ'sche Vibrationschronoskop vorzüglich eignet) den Werth von *g* bestimmen kann und zwar, wie MÖNNICH's Versuche ergaben, bis auf wenige Tausendstel des Werthes genau. Als Stromunterbrecher dient eine (auf der Fig. 27 nicht mit angegebene) mit der Hand in Rotation versetzte Scheibe, deren Platinansatz bei jeder Umdrehung einmal mit dem Platinstift der Axe in leitende Berührung kommt, und deren Drehgeschwindigkeit man für die nur eine halbe bis eine Sekunde betragende Versuchsdauer als constant betrachten darf. Die Auslösung des Gewichtes endlich wird durch einen Elektromagneten *E* vermittelt.

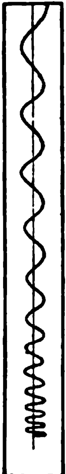


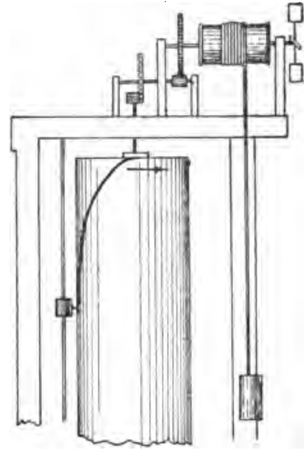
(Ph. 27.)

Bei anderen Fallapparaten, wie bei denjenigen von LABORDE, STÉVART,[1] LIPPICH, v. BABO, LEBOURG,[2] LAVAUT DE LESTRADE,[3] KRASS,[4] dem Lapsometer von ENGELBERT[5]) u. s. w. werden die Schwingungen einer Stimmgabel oder eines anderen elastischen Körpers entweder auf einem fallenden Körper oder durch einen fallenden Körper mittelst einer Schreibspitze und einer berussten Fläche verzeichnet; aus der abnehmenden Länge dieser Schwingungen (s. Fig. 28, welche sich auf den ersteren Fall bezieht), lässt sich dann alles schliessen. Bei noch anderen Apparaten wird das fruchtbare Princip der Auflösung der Zeit in eine horizontale Raumlinie in der Weise benutzt, dass die vertikale Fallbewegung und eine gleichzeitige horizontale Rotation zu einer graphisch als Curve sich darstellenden Bewegung vereinigt werden. Bei dem MORIN'schen Apparat[6]) (Fig. 29) wird

[1]) STÉVART, Cat. de l'Expos. de Brux. 1880, pag. 15.
[2]) LEBOURG, J. d. phys. 7, pag. 44 (1878).
[3]) LAVAUT DE LESTRADE, Mondes 45, pag. 501 (1878).
[4]) KRASS, Z. f. Instr. K. 4, pag. 347 (1884).
[5]) ENGELBERT, Mond. 50, pag. 354 (1879).
[6]) MORIN, s. JAMIN, Cours de physique 1, pag. 46 (1858).

dies dadurch erreicht, dass der an dem fallenden Körper angebrachte Stift auf einem gleichförmig rotirenden Papiercylinder seine Bahn verzeichnet; diese Bahn bewährt sich beim Aufrollen des Papieres als Parabel, entsprechend der durch Quadrirung der ersten der Gleichungen (2c) sich ergebenden Gleichung $t^2 = (2h)/g$. Bei dem Apparat von ROUSSEAU[1]) ist es der durch einen mit Papier beklebten Cylinder gebildete Fallkörper selbst, welchem durch zwei oben an ihm befestigte, auf zwei festliegende Curven sich stützende Arme beim Fall zugleich eine rotirende Bewegung mitgetheilt wird, während ein fester Stift oder Pinsel die Curve verzeichnet. Endlich sei noch der Fallapparat von PAQUET[2]) erwähnt, bei welchem ein Gewicht frei fällt, nach einer bestimmten Zeit ein anderes mitreisst und schliesslich beide zugleich angehalten werden. Das Verhältniss der Fallhöhen beider Gewichte lässt sich ablesen und hieraus eine Reihe von Schlüssen ziehen.

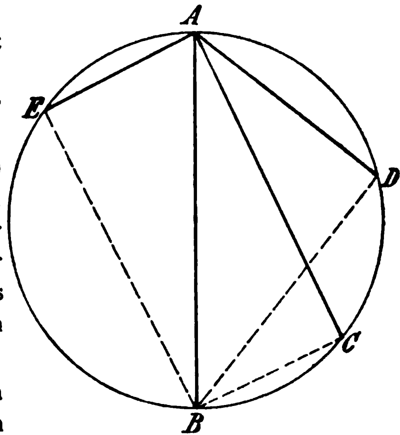

(Ph. 28.)


(Ph. 29.)

Schiefe Ebene. Ein anderes Mittel, um durch Verringerung der Beschleunigung die Fallgesetze beobachten zu können, ist die Ersetzung des freien Falles durch den unfreien auf einer schiefen Ebene. Auf diesem Wege sind die Fallgesetze überhaupt zuerst, und zwar von GALILEI, ermittelt worden. Nach dem im Artikel »Einfache Maschinen« Angegebenen ist es einleuchtend, dass, wenn w der Steigungswinkel der schiefen Ebene ist, die Beschleunigung beim Fall auf ihr nur $g \sin w$ beträgt, für $w = 36'$ z. B. nur $0{\cdot}1\,m$, so dass die Fallstrecken in den ersten Sekunden resp. 5, 15, 25 u. s. w. cm sind. Zu derartigen Versuchen eignet sich am besten eine lange, innen polirte Rinne mit Maasseintheilung. Ist h die Höhe, l die Länge der schiefen Ebene und g' die Beschleunigung beim Fall auf ihr, so hat man, analog der zweiten der Gleichungen (2c), die Gleichung $v' = \sqrt{2g'l}$; nun ist aber g' im Verhältniss von $\sin w$ kleiner als g, andererseits l im Verhältniss von $1 : \sin w$ grösser als h; man findet also:

$$v' = \sqrt{2gh}, \qquad (4)$$

d. h. ebenso gross wie v in der zweiten Gleichung (2c); in Worten: ein auf einer schiefen Ebene herabgefallener Körper besitzt dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er durch die Höhe der schiefen Ebene frei herabgefallen wäre.[3])



(Ph. 30.)

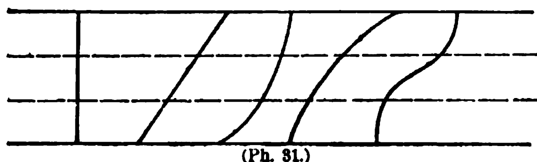
Zieht man (Fig. 30) von dem höchsten Punkte A eines Kreisumfanges den verticalen Durchmesser AB und eine Anzahl Sehnen

[1]) ROUSSEAU, Cat. de l'Expos. de Brux. 1880, pag. 16.
[2]) PAQUET, J. de phys. (2) 2, pag. 226. 1883.
[3]) Auch dieser Satz rührt schon von GALILEI her.

AC, *AD*, *AE*, so ist, da die Dreiecke *ACB*, *ADB*, *AEB* rechtwinklig und die Winkel *ABC*, *ABD*, *ABE* gleich den Neigungswinkeln der betreffenden schiefen Ebenen sind, jede derselben in demselben Verhältniss kürzer als der vertikale Durchmesser, in welchem die Beschleunigung durch die Schwere auf ihr kleiner ist als auf jenem Durchmesser. Diese beiden Einflüsse gleichen sich also aus, und es ergiebt sich: Die Fallzeit auf allen von *A* ausgehenden Linien *AB*, *AC*, *AD* u. s. w. ist die gleiche. Ebenso würden, wenn man sich die Figur auf den Kopf gestellt denkt, die zu gleicher Zeit in *B*, *C* u. s. w. losgelassenen Fallkörper zu gleicher Zeit in *A* eintreffen.[1])

Noch bequemer und umfassender kann man mit der schiefen Doppelebene, d. h. mit zwei, von links und von rechts kommenden, oben zusammenstossenden schiefen Ebenen experimentiren. Verbindet man dann die beiden auf ihnen befindlichen Körper durch ein Seil, so hat man einen Apparat vor sich, der sich zur einfachen schiefen Ebene verhält wie der ATWOOD'sche Fallapparat zum freien Fall.

Fall auf Curven. Jede Curve lässt sich ansehen als zusammengesetzt aus lauter kurzen, schiefen Ebenen von verschiedener Neigung. Man kann folglich einen für die schiefe Ebene erhaltenen Satz erweitern und folgendermaassen aussprechen: Gleichviel auf welchem Wege ein Körper von einer Höhenschicht nach einer anderen herabfällt, gleichviel von welchem Punkte der ersten Höhenschicht er ausgeht und in welchem der zweiten er eintrifft, die Geschwindigkeit, welche er in irgend einer Höhenschicht erreicht hat, also insbesondere auch die Geschwindigkeit, mit welcher er in der untersten Schicht anlangt, ist stets die gleiche. Es kann auch der Fall sein, dass die Curve, auf welcher der Punkt fällt, nur anfangs abwärts, später aber aufwärts verläuft. Der Punkt wird alsdann in Folge des Beharrungsvermögens auch diesen Zweig der Curve mindestens theilweise noch durchlaufen, und zwar in Erweiterung des obigen Satzes, in der Weise, dass er nach Erreichung derselben Höhenschicht wieder die Geschwindigkeit besitzt, wie beim Herabfallen, also auch gerade die Höhe erreicht, von welcher er fallen gelassen wurde. Im übrigen sei hierfür auf den Abschnitt über Wurfbewegung verwiesen, mit welcher dieser Fall das Wesentliche gemeinsam hat.



(Ph. 31.)

Brachistochrone. Von besonderem Interesse ist die Frage, auf welchem Wege ein Körper von einem von zwei gegebenen Punkten *A* zu dem anderen, tiefer und seitlich gelegenen *B* in der kürzesten Zeit durch Fall gelangen wird. Dieses Problem rührt ursprünglich von GALILEI her, wurde von JOH. BERNOUILLI in präciser Form gestellt und ist zuerst von LEIBNITZ gelöst worden.[2]) Zunächst ist klar, dass die gesuchte Curve in der durch die beiden Punkte gelegten Verticalebene verlaufen wird. Verliefe sie nämlich nicht in dieser und denkt man sich gleichzeitig auf ihr und auf ihrer auf die Verticalebene gemachten Projection zwei Körper gleichzeitig fallend, so haben beide nach obigem Satze in gleichen Höhenschichten die gleichen Geschwindigkeiten; der auf der Projections-

---

1) Ebenfalls von GALILEI gefunden.

2) In den Acta eruditorum 1696. — JOH. BERNOUILLI selbst löste das Problem durch geistvolle Analogie mit dem Gange eines Lichtstrahls auf dem kürzesten Wege; s. MACH, Die Mech., pag. 401.

curve fallende hat aber den kürzeren Weg und kommt folglich eher unten an. Legt man nun den Nullpunkt des Coordinatensystems in den tiefsten Punkt, während der höhere um h höher liegt, richtet man die z-Axe vertikal nach unten, die x-Axe horizontal, so hat man für irgend eine Höhenschicht z nach der zweiten Gleichung (2c) die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g(h-z)} = \frac{ds}{dt},$$

wo ds das Bogenelement, dt das Zeitelement ist; folglich ist die Fallzeit

$$T = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}} = \int_0^h \sqrt{\frac{1+x'^2}{2g(h-z)}}\, dz.$$

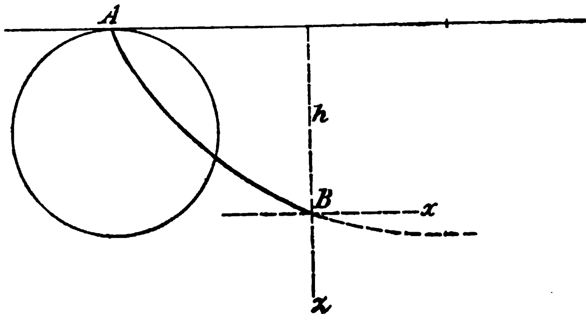
Dieses T soll nun ein Minimum werden. Die Variationsrechnung lehrt, dass dies erreicht wird, wenn der Differentialquotient der Funktion unter dem Integralzeichen nach x' einer Constanten c gleichgesetzt wird. Man erhält somit

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2g(h-z)}} = c, \qquad \text{also } x' = \sqrt{\frac{2c^2g(h-z)}{1-2c^2g(h-z)}},$$

und schliesslich, wenn für $z = h$ $x = x_1$ sein soll:

$$x = \pm \frac{1}{c\sqrt{2g}}\sqrt{(h-z) - 2c^2g\,(h-z)^2} \pm \frac{1}{4c^2g}\, arc\cos\,[1 - 4c^2g\,(h-z)] + x_1;$$

durch die Bedingung $z = 0$ für $x = 0$ bestimmt sich c. Diese Gleichung stellt eine Cycloide dar, welche durch einen auf der unteren Seite einer horizontalen Geraden rollenden Kreis von einem Peripheriepunkte desselben erzeugt wird; die complicirte Form der Gleichung erklärt sich dadurch, dass der Nullpunkt zwar der tiefste Punkt des vom Körper durchlaufenen Cycloidenbogens, aber kein ausgezeichneter Punkt der Cycloide als solcher ist; aus der Fig. 32 ist dies ohne Weiteres ersichtlich.[1])



(Ph. 32.)

Man sieht hiernach, dass die gerade Linie zwar räumlich die kürzeste Verbindung zwischen den beiden gegebenen Punkten ist, nicht aber der zeitlich kürzeste Fallweg; schon ein zwischen den Punkten gezogener Kreisbogen, nach oben concav, ist ein kürzerer, der kürzeste von allen aber der oben gefundene Cycloidenbogen. Man kann diese Verhältnisse leicht an einem Apparat demonstriren, der auf einem Stativ drei dicht nebeneinander anfangende und endende Rinnen trägt, eine von geradliniger, die zweite von kreisbogenförmiger, die dritte von cycloidischer Gestalt; von drei oben gleichzeitig ausgelösten Kugeln kommt dann erstere zuletzt, letztere zuerst unten an; zu weiteren Versuchen sind die Rinnen gewöhnlich gemeinschaftlich um eine horizontale Axe drehbar.

Tautochrone. Ein dem obigen verwandtes Problem betrifft die Ermittelung einer Curve von der Eigenschaft, dass ein Körper, um bis zu ihrem

[1]) Weiteres über dieses und verwandte Probleme s. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, Compt. Rend. 84, pag. 72, u. 83, pag. 143 u. ausführlicher Mém. Inst. 22, pag. 1 (1884).

tiefsten Punkte auf ihr selbst zu fallen, stets dieselbe Zeit braucht, gleichviel von welchem ihrer Punkte er ausgeht; die bezügliche Curve heisst Tautochrone. Der Nullpunkt des Coordinatensystems liege wie vorhin im tiefsten Punkte der Bahn des fallenden Körpers; im Gegensatz zum vorigen Problem ist dies aber hier zugleich der tiefste, also ein ausgezeichneter Punkt der Curve. Wieder sei z vertical, x horizontal, h die Fallhöhe und der Bogen $s = \varphi(z)$, sodass die Funktion φ zu bestimmen ist. Dann ist die Fallzeit

$$T = \int_0^h \frac{\varphi'(z)\,dx}{\sqrt{2g(h-z)}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{h}\varphi'(hu)\,du}{\sqrt{2g(1-u)}},$$

wo $z = hu$ substituirt worden ist. Damit dies von h unabhängig sei, muss, unter k eine Constante verstanden,

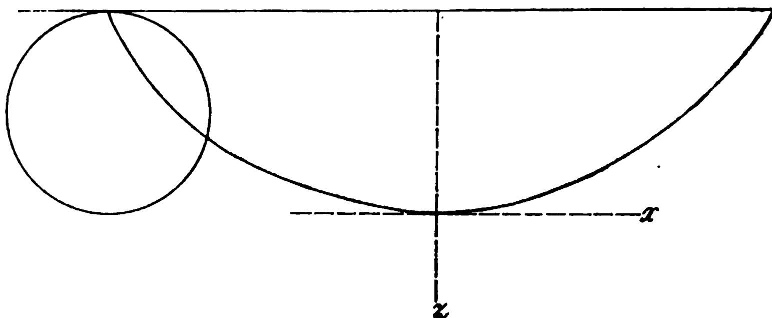
$$\varphi'(hu) = \frac{k}{\sqrt{uh}}, \quad \text{also} \quad \varphi'(z) = \frac{k}{\sqrt{z}}$$

sein. Nun wird der Reihe nach

$$s = 2k\sqrt{z}, \qquad \frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{k^2 - z}{z}},$$

$$x = \pm\sqrt{k^2 z - z^2} \pm \frac{k^2}{2} \, arc\cos \frac{k^2 - 2z}{k^2}.$$

Dies ist wiederum die Gleichung einer Cycloide, entstanden durch Rollen



(Ph. 38.)

eines Kreises (und zwar vom Radius $\frac{1}{2}k^2$) auf der unteren Seite einer horizontalen Graden. Die Gleichung ist einfacher als die vorige, weil sie auf den tiefsten Punkt der Cycloide als den Nullpunkt bezogen ist. Wenn der fallende Körper im tiefsten Punkt der Cycloide nicht aufgehalten wird, so bewegt er sich auf der anderen Seite nach oben weiter, fällt dann wieder herunter und führt somit Schwingungen aus; die Dauer dieser Schwingungen ist hiernach von der Amplitude völlig unabhängig (s. auch Cycloidenpendel im Artikel »Pendel«). Das vorliegende Problem ist zuerst von HUYGENS[1]) behandelt worden.[2])

Wurfbewegung. Vertikaler Wurf. Ertheilt man einem Körper, ehe man ihn frei fallen lässt, einen Impuls vertikal nach unten, so dass er bei Beginn des Falles schon die Geschwindigkeit w hat, so ist zwar die Beschleunigung nach wie vor gleich g, die Geschwindigkeit zur Zeit t aber nicht gt, sondern auf Grund des Unabhängigkeitsprincips (s. Princip d. Mech.)

[1]) HUYGENS, Horologium oscillatorium, Paris 1673. —

[2]) Näheres hierüber und über verwandte Probleme s. OHRTMANN, Berl. 1872 (Progr.) — AMODEO, Monographie d. tautochronen Curven, Avellino 1883. — BIELER, In.-Diss. Marburg 1884.

$$v = w + gt,$$

und folglich die zur Zeit t zurückgelegte Strecke

$$h = wt + \frac{1}{2}gt^2.$$

Wirft man den Körper mit derselben Geschwindigkeit w vertikal aufwärts, so ist

$$v = w - gt, \qquad h = wt - \frac{1}{2}gt^2. \tag{5}$$

Diese Bewegung ist dann nicht mehr eine gleichförmig beschleunigte, sondern eine gleichförmig verzögerte, die Geschwindigkeit nimmt mehr uud mehr ab, und für

$$t = \frac{T}{2} = \frac{w}{g}, \qquad h = H = \frac{w^2}{2g} \tag{6}$$

ist sie gleich null, der Körper fällt nun abwärts und erreicht nach der ersten Gleichung (2c), wo für h der obige Werth H zu setzen ist, nach nochmaligem Verlauf der Zeit $\frac{1}{2}T$ wieder den Ausgangspunkt; auch hat er beim Herabfallen in jedem Punkte die Geschwindigkeit, welche er in demselben Punkte beim Aufstieg hatte, kommt also insbesondere am Ausgangspunkte wieder mit der Geschwindigkeit w an. H kann man die Wurfhöhe, T die Wurfdauer nennen. Von besonderem Interesse ist noch der in der letzten Gleichung enthaltene Satz: Die Wurfhöhe ist dem Quadrate der Wurfgeschwindigkeit proportional, sowie die Umkehrung dieser Gleichung: $w = \sqrt{2gH}$, welche angiebt, welche Anfangsgeschwindigkeit man einem in die Höhe zu werfenden Körper ertheilen muss, wenn man wünscht, dass er eine gegebene Höhe erreiche.

Schiefer Wurf. Ertheilt man einem Körper, ehe man ihn frei fallen lässt, eine Geschwindigkeit w in irgend einer Richtung, welche mit der horizontalen den Winkel α, den sog. Elevationswinkel bildet (positiv, wenn nach oben, negativ, wenn nach unten gerichtet), so beschreibt der Körper eine Curve. Um diese zu ermitteln, hat man zunächst zu erwägen, dass sie in der Vertikalebene liegen wird, welche durch die Richtung von w gelegt ist, und sodann die Bewegungsgleichungen (x horizontal, z vertikal nach unten)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = g$$

zu integriren, und dabei zu beachten, dass die horizontale Componente der Anfangsgeschwindigkeit $w \cos\alpha$, die vertikale $w \sin\alpha$ ist. Man findet dann, wenn man den Ausgangspunkt zum Nullpunkt macht,

$$x = w \cos\alpha \cdot t, \qquad z = \frac{g}{2}t^2 - w \sin\alpha \cdot t,$$

und durch Elimination von t:

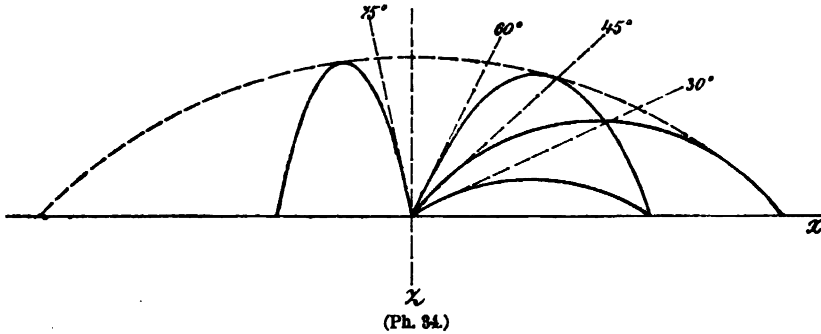
$$z = \frac{gx^2}{2w^2\cos^2\alpha} - x \tan\alpha. \tag{7}$$

Die Bahn ist also ein Stück einer Parabel, deren Axe vertikal steht. Ist α negativ, so ist nur ein Stück des absteigenden Zweiges vorhanden; ist dagegen α positiv, so steigt der Körper zunächst bis zu

$$t = \frac{T}{2} = \frac{w \sin\alpha}{g}, \qquad x = \frac{W}{2} = \frac{w^2 \sin 2\alpha}{2g}, \qquad -z = H = \frac{w^2 \sin^2\alpha}{2g}, \tag{8}$$

und erreicht dann, nachdem nochmals diese Zeit verstrichen und nochmals die horizontale Entfernung x durchmessen ist, wieder das Ausgangsniveau. W ist also, wenn der Ausgangspunkt am Erdboden sich befindet, die Wurfweite, H die Wurfhöhe, T die Wurfdauer; (liegt der Ausgangspunkt über dem Erdboden, so fällt der Körper noch weiter, und W und T haben dann entsprechend grössere Werthe); der höchste Punkt der Bahn liegt räumlich und zeitlich gerade in der

Mitte der Bahn. Die Wurfhöhe sowohl wie die Wurfweite ist proportional dem Quadrat der Anfangsgeschwindigkeit. Will man bei gegebenem Impuls eine



(Ph. 34.)

möglichst grosse Wurfweite erzielen, so muss man $\sin 2\alpha$ möglichst gross, also $\alpha = 45°$ (Fig. 34) machen; es wird dann

$$W_{max} = \frac{w^2}{g};$$

die Wurfweite ist also in diesem Falle doppelt so gross wie die Wurfhöhe senkrecht nach oben bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit. Allgemein muss man, um die Wurfweite W zu erzielen,

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{gW}{w^2} \tag{9}$$

wählen. Allgemeiner ist die Frage, wie man α wählen müsse, um den Punkt x, z zu treffen; die Antwort liegt in der Gleichung;

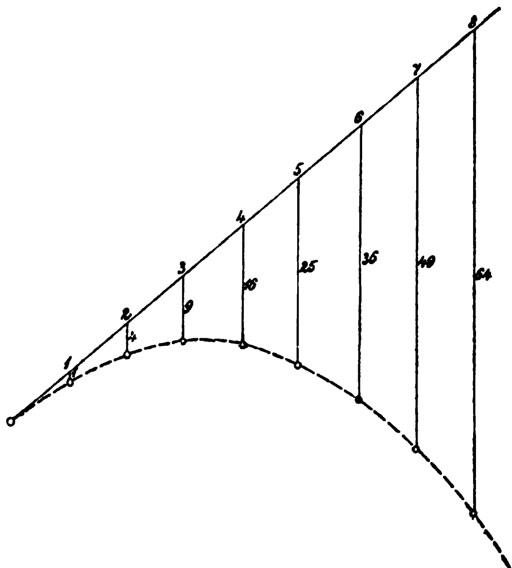
$$\tan g\,\alpha = \frac{1}{g}\left(\frac{w^2}{x} \pm \frac{1}{gx}\sqrt{w^4 - 2gzw^2 - g^2x^2}\right). \tag{10}$$

Punkte, welche ausserhalb der einhüllenden Curve (ebenfalls eine Parabel) liegen, kann man überhaupt nicht, die Punkte dieser Parabel selbst nur auf eine Weise, jeden innerhalb gelegenen aber, wie schon die Figur vermuten liess, auf zwei verschiedene Weisen treffen; und liegt insbesondere der Zielpunkt mit dem Ausgangspunkt in gleichem Niveau, so sind die beiden Elevationswinkel, mit welchen man denselben Punkt trifft, complementär[1]). In der Ballistik wird der Schuss mit kleinerem Elevationswinkel Kernschuss, derjenige mit grösserem Bombenschuss genannt. Je grösser w, desto grösser ist auch das Gebiet der erreichbaren Punkte. Weiteres über Ballistik sehe man unten.

Zur experimentellen Prüfung der Wurfgesetze wendet man am zweckmässigsten kleine Metallkugeln an. Da aber auch hier die Bewegung eine zu rasche ist, als dass man sie ohne weiteres studiren könnte, so greift man zu dem einfachen Hilfsmittel, die Bahn entweder graphisch zu fixieren oder, wie beim Fall, an die Stelle des freien Wurfes den Wurf auf der schiefen Ebene zu setzen. Zu ersterem Zweck bedient man sich bei Versuchen in grösserem Massstabe einer Reihe von mit Papier bespannten Rahmen, welche fest aufgestellt sind und von der Kugel der Reihe nach durchlocht werden. Handelt es sich einfach um die Bestätigung der parabolischen Gestalt der Bahn, so benutzt man einen Apparat, der aus einer Anzahl eine Parabel bildenden Ringen besteht: eine mit geeigneter Anfangsgeschwindigkeit in geeigneter Richtung geworfene Kugel fällt dann durch sämtliche Ringe hindurch. Man kann in diesem Apparate auch in sehr einfacher Weise die Entstehung der Wurflinie demonstriren, indem man

[1]) Auch das Wurfproblem ist, wenigstens theilweise, schon von GALILEI behandelt worden.

vom Anfangspunkte des Wurfes aus in der Anfangsrichtung desselben eine Stange ausgehen und von dieser in gleichen Abständen Ringe an Fäden herabhängen lässt; die Längen dieser Fäden verhalten sich dann, ganz wie die Theorie es verlangt, wie 1 : 4 : 9 : 16 u. s. w. Ueberdies ist die Stange um den Anfangspunkt drehbar, man kann also auch zeigen, dass bei Aenderung der Anfangsrichtung die Bahncurve sich ändert (mit Beibehaltung ihres parabolischen Charakters), dass die Wurfweite bei 45° am grössten ist u. s. w. (s. Fig. 35). Zu den Versuchen auf der schiefen Ebene dient am besten eine schwarze Holz- oder Schiefertafel, der man in einer ihrer beiden Richtungen eine geringe Neigung giebt; die zu benutzende Kugel taucht man vorher z. B. in Schlemmkreide, so dass sie, wenn man ihr verschieden grosse und verschieden gerichtete Anfangsgeschwindigkeiten ertheilt und sie dann herabrollen lässt, verschiedene Parabeln beschreibt. Die bei allen diesen Versuchen vorkommenden Anfangsgeschwindigkeiten erzielt man am besten dadurch, dass man die Kugel in einer entsprechend geneigten Rinne von einer passend zu wählenden Höhe herabfallen lässt. Andrerseits dienen verschiedene einfache Vorrichtungen zur Messung der in irgend einem Punkte erreichten Geschwindigkeit (für die Zwecke der Ballistik z. B. das ballistische Pendel). Uebrigens kann man diese Verhältnisse auch an der Gestalt ausgespritzter oder ausfliessender Wasserstrahlen beobachten.



(Ph. 35.)

Einfluss der Körpergestalt. Das bisher über Fall und Wurf Gesagte gilt streng genommen nur unter zwei Voraussetzungen. Die eine derselben ist die, dass der fallende oder geworfene Körper kugelförmig und sehr klein, also vom Charakter eines materiellen Punktes sei. Ist dies nicht der Fall, so gelten die erhaltenen Resultate nur für den Schwerpunkt des Körpers, während die Bewegung der übrigen Punkte desselben eine complicirtere ist und je nach den Umständen sehr verschieden ausfallen kann. Lässt man z. B. eine nicht homogene Kugel so los, dass ihr schwererer Theil oben liegt, so wird sie sich während des Falles überschlagen; auf der schiefen Ebene wird ein Würfel hinabgleiten, dagegen eine Kugel hinabrollen. In der Ballistik ertheilt man den Geschossen absichtlich durch spiralförmige Construction des Laufes eine rotirende Bewegung, weil sie hierdurch (s. Art. »Kreiselbewegung«) unabhängiger von äusseren Einflüssen werden. Wie abweichend die Bewegung einzelner Punkte eines fallenden Körpers von derjenigen seines Schwerpunktes sein kann, zeigt am besten die Thatsache, dass, während letzterer vertical fällt, erstere schräg oder gar vertical aufsteigen können. An der oben gedachten nicht homogenen Kugel lässt sich dies, wenn die Geschwindigkeit des Umschlagens beträchtlich ist, leicht einsehen. Am frappantesten vielleicht ist die Erscheinung bei einem altbekannten Apparat, der aus zwei verticalen, einen Winkel von etwa 30—40° bildenden, vom Scheitel

nach den Enden sich gleichmässig erhöhenden Holzwänden besteht; legt man nun einen hölzernen Doppelkegel nahe dem Scheitel symmetrisch auf, so dass seine Axe horizontal liegt, so rollen die Berührungspunkte an den Wänden hinauf, weil damit gleichzeitig der Schwerpunkt Gelegenheit erhält, sich abwärts zu bewegen.

Dass bei einem Körper sogar die Fallgesetze andre werden können, als bei einem materiellen Punkte, zeigt das Beispiel einer Kette, welche theils aut einer glatten, horizontalen Unterlage ruht, theils aber auf einer an diese sich anschliessenden schiefen Ebene (oder auch frei) herabhängt. Hier ist das Verhältniss der Kraft zur Masse ein variables, und man findet, dass die erlangte Geschwindigkeit nicht der Zeit oder dem Quadrate der Fallhöhe, sondern der Wurzel aus der Zeit oder der Fallhöhe selbst proportional ist.

Einfluss des Luftwiderstandes. Die zweite, bei den bisherigen Betrachtungen stillschweigend gemachte Voraussetzung ist die, dass die Bewegung im luftleeren Raum erfolge. Erfolgt sie in der Luft, so wird zwar bei specifisch schweren, kugeligen Körpern die Abweichung keine erhebliche sein, zumal bei kleinen Geschwindigkeiten; unter entgegengesetzten Umständen aber kann sie einen erheblichen Grad erreichen. Die Ursache dieser Abweichung ist eine dreifache, nämlich eine statische, insofern in Luft nur solche Körper, welche specifisch schwerer als Luft sind, herabfallen, andere aber in ihr schweben oder gar aufsteigen (s. Hydrostatik und Aeronautik), eine dynamische, insofern der Körper einen Theil der ihn umgebenden Luft mit in Bewegung setzen muss, und eine dritte, welche auf der Reibung beruht; und diese drei Einflüsse setzen sich meist in sehr verwickelter Weise zusammen. Da die bezüglichen Untersuchungen theils der Hydrodynamik (s. Art. »Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten«), theils der Reibung (s. d.) angehören, können hier nur einige Angaben gemacht werden. Handelt es sich um einen Körper vom Charakter eines materiellen Punktes, so kommt nur der dynamische Einfluss in Betracht. Setzt man denselben, den sogen. Luftwiderstand, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, also gleich kv^2, so findet man für den freien Fall

$$v=\sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{e^{+\sqrt{gk}\cdot t}-e^{-\sqrt{gk}\cdot t}}{e^{+\sqrt{gk}\cdot t}+e^{-\sqrt{gk}\cdot t}},\qquad s=\frac{1}{k}\log\frac{e^{+\sqrt{gk}\cdot t}+e^{-\sqrt{gk}\cdot t}}{2}. \tag{11}$$

Die Geschwindigkeit wächst also zwar auch hier, aber nicht gleichmässig, sondern allmählich immer langsamer bis zum Maximalwerth $\sqrt{g/k}$, die Beschleunigung wird also immer kleiner und zuletzt Null. In der Wirklichkeit kann diese Gleichförmigkeit der Bewegung schon nach verhältnissmässig kurzer Zeit eintreten, wie man dies für kleine Geschwindigkeiten am Staub und Schnee, für grosse am Regen und Hagel wahrnehmen kann.

Beim Wurf senkrecht nach unten gelten die obigen Formeln auch noch, wenn man zu t jedesmal eine und zu s ausserdem eine andere Constante hinzufügt; diese beiden Constanten drücken sich durch gk und die Wurfgeschwindigkeit w aus. Dagegen gelten für den Wurf senkrecht nach oben andere Formeln, nämlich

$$v=\sqrt{\frac{g}{k}}\,tang\left[\sqrt{gk}(t+c)\right],\qquad s=-\frac{1}{k}\log\cos\left[\sqrt{gk}(t+c)\right]+C, \tag{12}$$

wo die beiden Constanten c und C

$$c=-\frac{1}{\sqrt{gk}}\,arc\,tang\sqrt{\frac{k}{g}}\,w,\qquad C=\frac{1}{2k}\log\left(1+\frac{k}{g}w^2\right)$$

sind. Die Steighöhe H und die Geschwindigkeit bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt w' finden sich

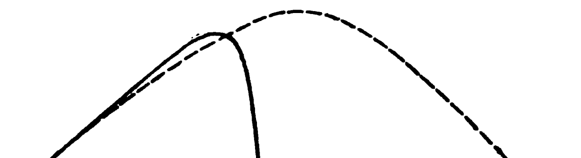
$$H = \frac{1}{2k} log \left(1 + k \frac{w^2}{g}\right), \quad w' = w \sqrt{\frac{g}{g + kw^2}}.$$

Die erreichte Höhe ist also, wie Reihenentwicklung im Vergleich mit Gleichung (6) zeigt, kleiner als ohne Luftwiderstand, die Rückkehrgeschwindigkeit kleiner als die Anfangsgeschwindigkeit.

Für schiefen Wurf endlich erhält man die Coordinaten eines Bahnpunktes durch den ihm entsprechenden Neigungswinkel α in folgender Form ausgedrückt

$$dx = \frac{d\alpha}{k\left[sin\,\alpha + cos^2\alpha\, log\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - c\, cos^2\alpha\right]},$$

wo c eine von der Anfangsgeschwindigkeit und dem Elevationswinkel abhängige Constante ist; da ferner $dz = tg\alpha\, dx$ ist, so kann man die Curve construiren.[1]) Sie erweist sich (Fig. 36) als von der Parabel abweichend und besteht, wenn die Anfangsgeschwindigkeit schräg nach oben gerichtet ist, nicht aus zwei symmetrischen Zweigen, sondern neigt mit dem zweiten früher und steiler zu Boden. Auch diese Curve weicht jedoch von der wirklichen »ballistischen Curve« noch ab, und man hält sich daher in der Ballistik vorzugsweise an das Experiment resp. an aus diesem abgeleitete Tafeln für Wurfhöhe, Wurfweite, Geschwindigkeit u. s. w.[2])



(Ph. 36.)

Der unfreie Fall auf Curven wird ebenfalls durch den Widerstand modifizirt; so behält die Cycloide nach NEWTON den Charakter des Tautochronismus bei, wenn der Widerstand der Geschwindigkeit, nicht aber, wenn er ihrem Quadrate proportional ist.[3])

Kommt, in Folge unregelmässiger Gestalt des fallenden oder geworfenen Körpers, auch noch Reibung hinzu, so wird die Flugbahn, wie beim Federball, Bumarang u. s. w. eine gänzlich abweichende (s. Reibung).

Zum Schlusse sei hier noch ein Apparat erwähnt, welcher die abschwächende Wirkung der Luft beim Falle der Körper dem Ohre bemerklich gemacht. Dieser Apparat, der sogen. Wasserhammer, ist eine zum Theil mit Wasser gefüllte, zum Theil luftleere Röhre, in welcher, wenn man sie umkippt, das Wasser mit lautem, hartem Schall gegen die Glaswand schlägt.

F. AUERBACH.

Waage und Wägung.

Instrumente, welche zur Bestimmung des Gewichtes dienen, nennt man **Waagen**, die Bestimmung des Gewichtes selbst heisst **Wägung**. Als Einheit des **Gewichtes** ist seit längerer Zeit fast ausschliesslich das **Gramm** in Gebrauch, d. h. das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser bei 4° C. Die Wägung

---

[1]) Die Ableitung s. RAUSENBERGER, Anal. Mech. (Leipz. 1888), Bd. I, pag. 21.

[2]) Das ballistische Problem ist zuerst von JOH. BERNOUILLI (Acta erud. 1719) und dann von LEGENDRE, POISSON, JACOBI, NELI., AUSTERLITZ u. v. A. behandelt worden.

[3]) Weiteres hierüber s. bei HATON DE LA GOUPILLIÈRE, Mém. Inst. 22, pag. 1 (1884).

eines Körpers beruht hiernach auf der Vergleichung desselben mit dem Gramm; gewöhnlich erfolgt diese Vergleichung jedoch nicht direkt, sondern man bedient sich hierzu eines Satzes von Gewichten aus irgend einem festen Material, welche selbst wiederum durch Vergleichung mit einem Normalgramme resp., was zweckmässiger ist, mit einem Normalkilogramm gewogen worden sind, oder denen auf Grund einer derartigen Vergleichung gleich bei der Herstellung Gewichte gegeben worden sind, welche die verschiedenen Vielfachen und die verschiedenen Bruchtheile eines Gramm darstellen, derart, dass man mittelst eines solchen Gewichtssatzes jedes beliebige zwischen zwei gewissen Grenzen liegende Gewicht zusammenstellen kann. Gewöhnlich bilden die Gewichte eines Satzes einen Theil der folgenden Reihe:

100 *kg*, 50 *kg*, 20 *kg* (2mal); 10 *kg* [oder auch 20 *kg* (1mal), dafür aber 10 *kg* (3mal)]; 5 *kg*, 2 *kg* (2mal); 1 *kg* [oder entsprechend wie oben], 500 *g*, 200 *g* (2mal); 100 *g*, 50 *g*, 20 *g* (2mal); 10 *g*, 5 *g*, 2 *g* (2mal); 1 *g*, 500 *mg*, 200 *mg* (2mal); 100 *mg*, 50 *mg*, 20 *mg* (2mal); 10 *mg*, 5 *mg*, 2 *mg* (2mal); 1 *mg*.[1])

Mit einem solchen Gewichtssatze kann man eine Wägung ganz schematisch ausführen: man greift dasjenige Gewicht heraus, von welchem man etwa glaubt, dass es dem Gewichte des zu wägenden Körpers am ehesten entsprechen werde; erweist es sich als zu klein, so fügt man noch das nächste hinzu; erweist es sich als zu gross, so ersetzt man es durch das nächste; und so fährt man fort, bis das Gewicht mit der gewünschten Genauigkeit ermittelt ist.

Von grosser Wichtigkeit für genaue Wägungen ist die Frage, ob und wie weit die Gewichte sich mit der Zeit verändern, sei es durch Materialverlust in Folge von Verunreinigung, Oxidation u. s. w. Hierfür ist, abgesehen von der selbstverständlichen, möglichst schonenden Behandlung und Aufbewahrung der Gewichte, das Material, aus welchem sie hergestellt sind, von hervorragender Bedeutung. Die Wahl desselben wird sich wesentlich nach dem gestatteten Kostenaufwande richten. Grosse Gewichte werden gewöhnlich aus Eisen oder Stahl, mittlere aus Messing hergestellt, dessen Vergoldung zweckmässig ist, kleine aus Platin, ganz kleine aus dem leichten Aluminium, weil sie alsdann beträchtlich grössere Dimensionen haben und darum weniger heikel sind. Für höchst feine Wägungen sind es zwei Stoffe, welche sich auf Grund vielfacher Prüfungen als besonders geeignet erwiesen haben: Bergkrystall und eine Legirung aus Platin und Iridium.[2]) Von Zeit zu Zeit muss man die Gewichte mit einem Normalgewicht vergleichen, eventuell, wenn man im Besitze eines solchen nicht ist, die Vergleichung anderwärts ausführen lassen (z. B. im Berliner Normal-Aichungsamt).

Verschiedene Klassen von Waagen. In den meisten Fällen, z. B. bei allen wissenschaftlichen Wägungen, bedient man sich der auf dem Prinzipe des Hebels beruhenden Waage und führt die Gewichtsvergleichung in jedem einzelnen Falle wirklich durch. Es giebt aber auch einige Arten von Waagen, bei welchen die Wirkung der verschiedenen Gewichte ein für allemal bestimmt und hiernach eine Skala an dem Apparat angebracht worden ist, welche, wenn man den zu

[1]) Ein andrer, aus weniger Stücken sich zusammensetzender, aber auch weniger praktischer Satz ist der folgende: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 *mg*, 1·024, 2·048, 4·096, 8·192, 16·384, 32·768, 65·536, 131·072 *g* u. s. w., oder der ähnliche aber brauchbarere: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 125, 250, 500 *mg*, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 125, 250, 500 *g*, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 *kg*.

[2]) Bei Versuchen, welche u. A. in St. Petersburg angestellt worden sind, haben diese beiden Stoffe sich als am widerstandsfähigsten gegen Erschütterungen und andre Einflüsse erwiesen. Die internationalen Normal-Urgewichte werden daher in Zukunft aus ihnen bestehen.

wägenden Körper mit dem Apparat in Verbindung bringt, sein Gewicht unmittelbar abzulesen gestattet; solche Waagen sind bequem, aber nicht genau; sie werden am Schlusse des Artikels besprochen werden.

Die gleicharmige Hebelwaage.

Diejenigen Waagen, bei welchen man den zu wägenden Körper thatsächlich mit Gewichtsstücken vergleicht, beruhen fast sämmtlich auf dem Prinzip des Hebels. Die gewöhnliche, in den verschiedensten Formen und für die verschiedensten Zwecke übliche Waage ist diejenige, bei welcher der Hebel zwei gleich lange Arme besitzt. An den Enden derselben sind die beiden Waagschalen aufgehängt, auf deren eine der zu wägende Körper, auf deren andere die Gewichtsstücke gebracht werden; letztere werden so lange verändert, bis die beiden Hebelarme, d. h. der Waagebalken, welcher, als beide Schalen leer waren, die horizontale Lage hatte, diese wiederum einnimmt. Zur Constatirung dieser Lage ist bei den für geringere Genauigkeit bestimmten Waagen im Drehpunkt des Waagebalkens senkrecht nach oben ein Zeiger, die Zunge, angebracht, welcher an den Schwingungen des Balkens theilnimmt und bei horizontaler Lage desselben, also bei vertikaler eigener Stellung gerade in einen Rahmen, die sog. Scheere einspielt, welche mit der Hängevorrichtung oder dem Stativ der Waage fest verbunden ist. Bei feinen Waagen ist in der Mitte des Balkens ein langer und spitzer, vertikal nach unten gehender Zeiger angebracht, dessen Spitze vor einer an dem Stativ befestigten kleinen Skala spielt und, wenn die Waage horizontal steht, den Nullpunkt der Theilung bedeckt. Die Skala ist gewöhnlich spiegelnd eingerichtet, damit man bei der Ablesung genau senkrecht auf sie blicken und auf diese Weise Parallaxenfehler vermeiden könne.[1]) Der Waagebalken selbst ist, um Festigkeit mit Leichtigkeit zu vereinigen, aus einem Metallrahmen gefertigt, dessen Stücke durch Querstücke verbunden sind. Die Drehungsaxe des Waagebalkens wird durch ein, in der Mitte desselben angebrachtes Stahlprisma gebildet, oder vielmehr durch dessen nach unten gekehrte Schneide, mit welcher der Balken auf einer Achat- oder Stahlplatte aufsitzt. Die Waagschalen hängen meistens mittelst Haken an den Enden des Waagebalkens; bei feineren Waagen trägt dagegen der Waagebalken auch an den Enden Prismen, und zwar diesmal mit den Kanten nach oben gerichtete; auf diesen Kanten ruhen wiederum ebene Achat- oder Stahlplättchen, und an diesen hängen die Waagschalen. Die drei Schneiden müssen möglichst in einer Ebene liegen. Nur in seltenen Fällen bedient man sich statt der Schneiden stählerner Federn zur Aufhängung des Balkens sowohl als der Schalen. Zur Vervollständigung der Beschreibung ist noch zu erwähnen: eine durch einen drehbaren Knopf gehandhabte mechanische Vorrichtung, um die drei Schneiden von den betreffenden Plättchen zu entfernen und den Waagebalken anderweitig festzulegen — bei feinen Wägungen muss dies stets geschehen, ausgenommen während der eigentlichen Ablesung —; eine Stellschraube über der Mitte des Waagebalkens, um den Schwerpunkt desselben auf- und abwärts verrücken zu können; Vorrichtungen zur Veränderung der Lage der drei Schneiden; endlich ein Glaskasten, in welchen die Waage gesetzt wird (bei den sog. Vacuumwaagen luftdicht abgeschlossen im luftleeren Raume), und in dessen Inneres mechanische Vorrichtungen hineinreichen mit der Bestimmung, möglichst viele der erforderlichen Manipulationen von aussen, ohne Oeffnung des Kastens, bewerkstelligen zu können.

[1]) Zuweilen ist der Zeiger, und dem entsprechend auch die Skala, seitlich angebracht, letztere fest, ersterer am Ende des Arms.

Theorie der Waage. Die drei wesentlichen Eigenschaften einer guten Waage sind: 1. Die Richtigkeit, d. h. die Eigenschaft, immer dieselben Resultate und zwar diejenigen Resultate zu ergeben, welche mittelst einer anderen, als richtig erkannten Waage oder auf irgend einem anderen Wege ermittelt worden sind. 2. Die Empfindlichkeit, d. h. die Eigenschaft, durch eine gewisse, minimale Aenderung der Belastung einer Schale noch merklich aus der bisherigen Lage abgelenkt zu werden; ein je kleinerer Bruchtheil der ganzen Belastung dieses Uebergewicht ist, desto grösser ist die Empfindlichkeit. 3. Die Stabilität, d. h. die Eigenschaft, Schwingungen um die Gleichgewichtslage zu machen, und zwar Schwingungen von bestimmter Schwingungsdauer; je kleiner diese Dauer ist, desto grösser ist die Stabilität. Auf diese drei Punkte ist also in der Theorie der Waage das Augenmerk hauptsächlich zu richten.

Gemäss der Theorie des Hebels findet Gleichgewicht statt, wenn der Schwerpunkt in der durch den Drehpunkt gelegten Vertikalen liegt; es ist also die Bedingung dafür, dass der Waagebalken bei beiderseitig gleicher Belastung in horizontaler Lage im Gleichgewicht sei, die, dass sein Schwerpunkt in der durch die Drehungsaxe, oder, wie wir hier kürzer sagen können, durch den Drehpunkt, senkrecht zur Balkenrichtung gelegten Linie liege. Die Art dieses Gleichgewichtes kann aber (s. Art. »Statik«, pag. 59) je nach der Lage des Schwerpunktes auf dieser Linie eine dreifach verschiedene sein. Liegt erstens der Schwerpunkt im Drehpunkt selbst, so ist das Gleichgewicht indifferent, d. h. der Waagebalken ist bei gleicher Belastung zwar in horizontaler Lage, aber auch in jeder anderen im Gleichgewicht. Das kleinste Uebergewicht auf der einen Seite hat in diesem Falle zur Folge, dass der Schwerpunkt horizontal neben den Drehpunkt fällt, so lange der Balken wagerecht steht. Damit also der Schwerpunkt wiederum vertikal unter den Drehpunkt falle, wird sich der Balken vertikal einstellen, d. h. um 90° drehen müssen. Man kommt also zu folgendem Ergebnisse: für gleiche Belastungen ist dieser Apparat unendlich unempfindlich, für Gewichtsdifferenzen auf beiden Seiten unendlich empfindlich. Aus beiden Gründen ist er zu Wägungen unbrauchbar. Liegt zweitens der Schwerpunkt senkrecht über dem Drehpunkt, so ist das Gleichgewicht labil; der Waagebalken wird daher zwar in horizontaler Lage, und in keiner anderen im Gleichgewicht sein; das kleinste Uebergewicht auf der einen Seite aber, oder selbst die minimalste zufällig eintretende Drehung wird zur Folge haben, dass der Balken umschlägt, d. h. sich um 180° dreht. Auch dieser Apparat ist offenbar zu Wägungen unbrauchbar. Es bleibt also nur die dritte Möglichkeit übrig, wobei der Schwerpunkt vertikal unter dem Drehpunkt liegt; dann ist das Gleichgewicht ein stabiles. Die Waage ist also ein gleicharmiger Hebel, dessen Schwerpunkt senkrecht unter dem Drehpunkt liegt.

Für die Richtigkeit der Waage kommen ausserdem noch drei wesentliche Punkte in Betracht. Der erste derselben betrifft die Gleichheit der Gewichte der beiden Waagehälften, und der beiden Schalen nebst Gehänge ebenfalls für sich. Diese Gewichtsgleichheit beider Seiten lässt sich nun aber einerseits leicht feststellen oder, wenn sie eine Abweichung zeigt, erreichen; andererseits handelt es sich hierbei um einen constanten Einfluss, der bei geeignetem Verfahren für das Ergebniss ohne Folge bleibt.

Weit wichtiger ist die Forderung der exakten Längengleichheit der beiden Hebelarme. Dass diese Forderung erfüllt ist, erkennt man z. B daran, dass zwei Gewichte, welche, auf die beiden Schalen gelegt, sich das Gleichgewicht halten, auch nach ihrer Vertauschung dies noch thun, so dass in

beiden Fällen der Zeiger der Waage auf denselben Skalentheil einspielt. Ist dies nicht der Fall, so sind die Arme ungleich lang, und man kann ihr Längenverhältniss folgendermaassen ermitteln. P und Q seien die beiden Gewichte, welche, wenn P links und Q rechts liegt, sich gerade ausgleichen; nach der Vertauschung hingegen sei es erforderlich, rechts zu P noch p hinzuzufügen, um wieder Gleichgewicht zu erhalten; endlich seien l und r die Längen der beiden Arme. Es ist dann nach der Grundgleichung des Hebels

$$Pl = Qr, \qquad Ql = (P+p)\,r,$$

also

$$\frac{l}{r} = \sqrt{1+\frac{p}{P}} = 1 + \frac{p}{2P},$$

letzteres in Anbetracht des Umstandes, dass p jedenfalls klein gegen P sein wird. Durch Division der beiden ersten Gleichungen findet man ferner

$$Q = \sqrt{P(P+p)} = P + \tfrac{1}{2}p.$$

Während also von den beiden obigen Wägungen die erste den Werth P, die zweite den Werth $P+p$ für Q ergab, ist dessen wahrer Werth das geometrische Mittel, oder, in Anbetracht des jedenfalls geringen Unterschiedes beider, näherungsweise das arithmetische Mittel aus beiden. Hiernach hat man die Wahl zwischen drei Möglichkeiten: entweder man beseitigt die Ungleichheit der Arme durch Verkürzung des zu langen, oder man wägt den Körper auf beiden Waagschalen und nimmt das Mittel aus den erhaltenen Zahlen, oder endlich man verschafft sich auf die angedeutete Weise die Kenntniss des Längenverhältnisses der beiden Arme und multiplicirt jedes durch Aufsetzen des Körpers auf die linke Schale erhaltene Resultat mit r/l.

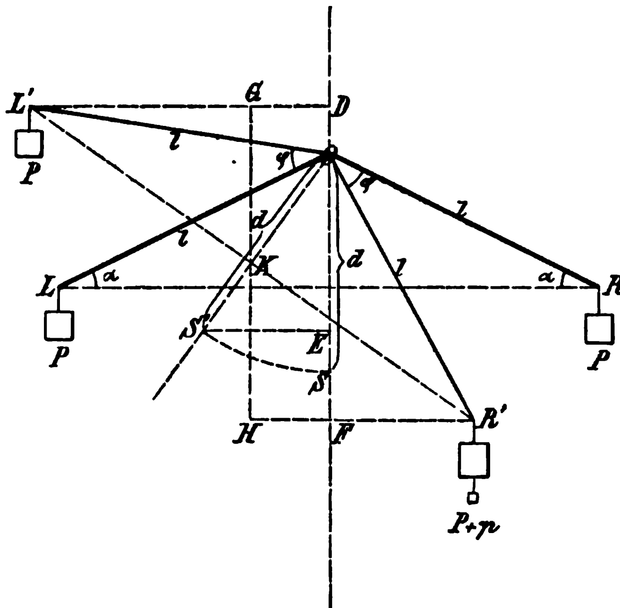
Endlich muss an eine genau richtige Waage die Anforderung gestellt werden, dass die drei Schneiden einander parallel sind und bleiben. Die Fehler, welche aus einer Schiefstellung der Endschneiden gegen die mittlere oder gar aus einer Neigung aller drei gegen die Horizontale entstehen, sind mannigfaltiger Art, auch tritt dann der weitere Uebelstand ein, dass es nicht mehr gleichgiltig ist, auf welche Stelle der Wagschale man den Körper, resp. die Gewichte setzt. Durch geeignete Detailconstruction der Endschneidensysteme, symmetrische Anordnung der Wägungen und Bestimmung gewisser Constanten kann man hiergegen Abhülfe schaffen.[1])

Empfindlichkeit.[2]) Gewöhnlich versteht man hierunter den Ausschlag der Waage bei einem einseitigen Uebergewicht von 1 *mg*. Von welchen Faktoren die Empfindlichkeit einer Waage abhängt, ergiebt sich durch folgende Betrachtung. Der Allgemeinheit halber nehmen wir an, dass die beiden Arme ungleich sind, und dass der mittlere Drehpunkt mit den beiden seitlichen nicht in einer Horizontalen, sondern z. B. darüber liege. Der Waagebalken wird alsdann unbelastet durch die Linie LOR dargestellt sein, ebenso auch, wenn die Belastung P beiderseits die gleiche ist. Wird dagegen rechts das Uebergewicht p hinzugefügt, so dreht sich der Waagebalken um den Winkel φ in die Lage $L'OR'$. Nach dem

---

[1]) Man sehe hierüber u. A. THIESEN, Z. f. Instr. K. 1882, pag. 359; u. 1883, pag. 81. Ferner: SARTORIUS, Z. f. Instr.. K. 1882, pag. 385.

[2]) Bei einer guten Waage für physikalische Zwecke soll die Emfindlichkeit so gross sein, dass sie noch den millionten Theil des Höchstgewichtes, mit welchem jede Schale belastet werden darf, angiebt, also für letzteres = 1 *kg* noch 1 *mg*. Des zulässigen Höchstgewichtes muss man, wie bei dieser Gelegenheit bemerkt werden möge, bei der Benutzung einer Waage stets eingedenk bleiben.



(Ph. 87.)

Hebelgesetz ist alsdann, wenn M das in dem Schwerpunkte (vor der Drehung S, jetzt S') des Balkens concentrirt zu denkende Gewicht desselben ist:

$$P \cdot L'D + M \cdot S'E = (P+p) R'F$$

oder

$$P(L'G + GD) + M \cdot S'E = (P+p)(R'H - H'F),$$

oder endlich, wenn die verschiedenen Katheten durch die betreffenden Hypotenusen und den Winkel φ ausgedrückt werden:

$$P(L'K \cos\varphi + KO \sin\varphi) + M \cdot S'O \sin\varphi = (P+p)(KR' \cos\varphi - KO \sin\varphi).$$

Hieraus ergiebt sich

$$tang\,\varphi = \frac{(P+p)KR' - P \cdot L'K}{(2P+p)KO + M \cdot S'O}. \tag{1}$$

Sind nun die beiden Arme gleich lang, so kann man, wenn l diese Länge und α der Neigungswinkel der Arme OL und OR gegen die Horizontale, also auch der Arme OL' und OR' gegen die Linie $L'R'$ ist, die Linien $L'K$ und KR', sowie die Linie KO durch l und α ausdrücken. Bezeichnet man dann noch die Tiefe des Schwerpunktes unter dem Drehpunkt, also die Linie $SO = S'O$ mit d, so erhält man

$$tang\,\varphi = \frac{pl\cos\alpha}{(2P+p)l\sin\alpha + Md}. \tag{2}$$

Wie man hiernach sieht, ist bei einer gleicharmigen Waage der Ausschlag, also die Empfindlichkeit, desto grösser: 1. je länger die Arme sind, 2. je leichter der Balken ist, 3. je kleiner α ist, d. h. je näher der mittlere Drehpunkt an der Verbindungslinie der beiden seitlichen liegt und 4. je näher der Schwerpunkt dem mittleren Drehpunkt liegt. Man macht demgemäss den Waagebalken feiner Waagen durch Anwendung der schon erwähnten durchbrochenen Construction möglichst lang und leicht; ferner sieht man die drei Schneiden geradezu in eine Ebene zu bringen, sodass LOR und $L'OR'$ gerade Linien werden und $\alpha = 0$ wird; dann hat man ganz einfach

$$tang\,\varphi = \frac{pl}{Md}. \tag{3}$$

Man erreicht hierbei noch einen weiteren Vortheil. In der allgemeineren Formel, deren Nenner das Glied $2P+p$ enthält, nimmt die Empfindlichkeit mit wachsender Gesammtbelastung ab, d. h. für dasselbe Uebergewicht wird der Ausschlag kleiner. Das gilt, wenn der mittlere Drehpunkt über der Verbindungslinie der seitlichen liegt; liegt er unter ihr, so nimmt, wie man in entsprechender Weise findet, die Empfindlichkeit mit wachsender Belastung zu; liegt dagegen derselbe in der Verbindungslinie jener, so ist, wie die zuletzt angegebene Formel

zeigt, die Empfindlichkeit der Waage unabhängig von der Belastung, d. h. die Waage hat eine constante, ihr ein für allemal eigenthümliche, durch eine Zahl ausdrückbare Empfindlichkeit. Vollkommen lässt sich dies freilich deshalb nicht erreichen, weil bei stärkeren Belastungen der Wagebalken durchgebogen, also die Linie der seitlichen Schneiden unter die mittlere herabgedrückt wird; wird die Bedingung aber für mittlere Belastung genau erfüllt, was bei feinen Waagen zu geschehen pflegt, so wird die Abweichung auch bei kleineren und grösseren Belastungen nicht erheblich werden.

Einer ähnlichen Discussion ist die Gleichung (1), welche für ungleicharmige Waagen gilt, fähig; wie man sieht, besteht hier ein weiteres Mittel zur Erhöhung der Empfindlichkeit darin, dass man die Länge des einen Armes gegenüber dem anderen verringert, und, um das Gleichgewicht zu wahren, zugleich die entsprechende Belastung in geeignetem Grade vergrössert. Waagen von einer derartigen Construction sind in manchen Fällen thatsächlich von Nutzen.

Endlich baut man den Waagebalken so, dass sein Schwerpunkt zwar senkrecht unter den Drehpunkt, aber möglichst nahe an denselben fällt. Man nähert sich hierbei dem oben kurz erwähnten Falle eines Hebels, dessen Schwerpunkt im Drehpunkt liegt; man erreicht also zwar für einseitiges Uebergewicht eine ausserordentliche Empfindlichkeit, ist aber zugleich der Gefahr ausgesetzt — zumal da stets etwas Reibung stattfindet, — dass bei gleichen Gewichten der Balken eine schiefe Lage einnehme (s. oben); durch Anwendung der gleich zu beschreibenden Schwingungsmethode kann man dieser Gefahr entgehen.

Für eine häufig zu benutzende feine Waage verschafft man sich zweckmässiger Weise die Kenntniss ihrer Empfindlichkeit, einmal um ihre Güte beurtheilen zu können, und sodann zur Vereinfachung der Wägungen. Ist man nämlich bei einer solchen schon so weit gediehen, dass man nur noch einen kleinen Ausschlag erhält, so braucht man diesen nur mit der Empfindlichkeit, d. h. mit dem Ausschlag durch 1 *mg* zu vergleichen; das Wievielfache jener Ausschlag von dieser Empfindlichkeit ist, so viele *mg* fehlen noch (oder sind zu viel). Nun ist die Empfindlichkeit, wie wir sahen, im Allgemeinen für jede Belastung eine andere; man muss sie also für eine Reihe von Belastungen (z. B. für 0, 10, 20, 50 u. s. w. *gr*) bestimmen und sich hiernach durch Eintragung der erhaltenen Werthe in Coordinatenpapier die Curve der Empfindlichkeit anfertigen. Bei jeder einzelnen dieser Bestimmungen verfährt man am besten so, dass man, nachdem beide Waagschalen die betreffende Belastung erhalten haben, auf die eine ein Uebergewicht legt, welches den Zeiger um einige Skalentheile aus der Nulllage ablenkt, auf die andere Schale alsdann das doppelte Uebergewicht legt, sodass der Zeiger sich jetzt ebensoweit nach der anderen Seite einstellt, und schliesslich die Skalentheile zwischen den beiden Einstellungen durch die *mgr*-Zahl des doppelten Uebergewichtes dividirt.[1])

Stabilität. Wir haben noch anzugeben, wovon die dritte der oben geforderten Bedingungen der Brauchbarkeit der Waage, die Stabilität, abhängt, zu welchem Zwecke wir die Schwingungsdauer der Waage ins Auge fassen müssen. Es möge hier aber der Kürze halber gleich das Resultat der bezüglichen Rechnung hingeschrieben werden, und zwar unter den vereinfachenden Annahmen, dass die Arme gleiche Länge haben, die beiderseitigen Belastungen gleich und die Schwingungen sehr klein sind. Werden dann die obigen Be-

[1]) Weiteres über die Empfindlichkeit s. THIESEN a. a. O., sowie in der grösseren Abh. »Etudes s. l. Balance« (Trav. du Bur. int. d. poids et mes. V, 2).

zeichnungen beibehalten, ist ferner g die Beschleunigung durch die Schwere und k derjenige Abstand vom mittleren Drehpunkt, in welchem man sich, in Rücksicht auf die Schwingungen, die Masse jedes Armes concentrirt denken kann (Gyrationsradius), so ist die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{Mk^2 + 2Pl\cos\alpha}{(2Pl\sin\alpha + Md)g}}.$$

Für eine gegebene Belastung ist die Stabilität also um so grösser: 1) je kleiner die Länge des Balkens ist, 2) je kleiner seine Masse ist, 3) je kleiner sein Gyrationsradius ist, 4) je weiter der Unterstützungspunkt von dem Balken und von dem Schwerpunkt desselben entfernt ist. Diese Erfordernisse sind, mit Ausnahme der zweiten, den für die Empfindlichkeit ermittelten direkt entgegengesetzt, und daher bleibt nichts anderes übrig, als einen angemessenen Compromiss zu schliessen. Je geringer aber die Masse des Balkens ist, um so besser ist die Waage sowohl hinsichtlich der Empfindlichkeit als auch der Stabilität.[1])

Führt man zur Abkürzung die Länge des Sekundenpendels L und den Bruchtheil $\sqrt{\beta}$ ein, welchen der Gyrationsradius eines Armes von seiner ganzen Länge bildet, so erhält man[2]) zwischen T und der Empfindlichkeit E die Beziehung

$$T^2 = E\,\frac{l}{L}\,(2P + \beta p).$$

Die Discussion derselben führt zu folgenden drei, durch zwei Grenzfälle geschiedenen Fällen, durch welche die oben in Betracht des Verhaltens der Empfindlichkeit gemachte Unterscheidung mit einer entsprechenden für die Stabilität verknüpft wird. 1) α (s. oben) $> d/2l\beta$ und positiv: mit wachsender Belastung nehmen E und T ab; ist d negativ, so wird die Waage erst von einer bestimmten Belastung an brauchbar. 1a) Grenzfall: $\alpha = d/2l\beta$ und positiv: mit wachsender Belastung nimmt E ab, T bleibt constant. 2) $\alpha < d/2l\beta$, aber positiv: E nimmt ab, T wächst. 2a) Grenzfall: $\alpha = 0$: E constant, T wächst. 3) α negativ: E und T nehmen zu; die Waage ist nur bis zu einer bestimmten Belastung brauchbar.

Schwingungsbeobachtungen. Bei rohen Wägungen wartet man bei jeder Ablesung ab oder bringt es selbst gewaltsam dazu, dass die Zunge oder der Zeiger still steht. Für genaue Wägungen hat diese Methode aber verschiedene Nachtheile: sie ist zeitraubend, und sie führt wegen der nicht ganz vermeidlichen Reibung nicht selten zu Fehlern. Man bedient sich daher mit Vortheil, unter Benutzung der Skala, der Schwingungsmethode, und zwar sowohl zur Bestimmung des Nullpunktes, d. h. der Zeigerstellung bei unbelasteter Waage, als auch zur Gewichtsbestimmung. Für manche Zwecke genügt es, einen Umkehrpunkt links und einen rechts zu beobachten und das Mittel zu nehmen. Für grössere Genauigkeit muss man, weil die Schwingungen allmählich kleiner werden, drei Umkehrpunkte (links, rechts, links) oder fünf beobachten und aus dem Mittel aller linken und dem Mittel aller rechten wiederum das Mittel nehmen. Noch genauer sind nach neueren Untersuchungen[3]) die für 3 resp. 4 Umkehrpunkte (l_1 u. s. w.) giltigen Formeln für die Ruhelage L:

$$L = \tfrac{1}{4}(l_1 + 2l_2 + l_3),$$
$$L = \tfrac{1}{8}(l_1 + 3l_2 + 3l_3 + l_4),$$

und zwar ist die zweite noch genauer als die erste. Hat man so den wahren Nullpunkt von dem auf der Skala markirten beträchtlich abweichend gefunden, so

[1]) THOMSON u. TAIT, Handb. d. theor. Physik. Deutsche Ausg. I, 2, pag. 100.
[2]) THIESEN, Z. f. Instr. K. 1882, pag. 361.
[3]) THIESEN, Etudes s. l. balance, pag. 22 ff.

corrigirt man die Gesammtstellung der Waage mit Hilfe von Stellschrauben an ihrem Stativ; bei kleinen Abweichungen ändert man nichts, sondern man betrachtet den gefundenen Nullpunkt (also z. B. den Theilstrich $+1$ der Skala) als den wahren. Allgemein sei dies der Skalentheil s_0. Nun setzt man den zu wägenden Körper auf und äquilibrirt ihn durch Gewichte annähernd, so dass der Zeiger bei seinen Schwingungen die Grenzen der Skala innehält; die hieraus nach obigem berechnete Einstellung desselben sei s, und es möge sich dabei ergeben haben, dass das aufgelegte Gewicht p noch nicht ganz ausreicht. Nun legt man einige *mgr* zu, so dass die Einstellung in einer auf den ersten Blick merkbaren Weise auf die andere Seite des Nullpunktes fällt; die Belastung sei jetzt P, die Einstellung S. Man kann dann aus diesen beiden ungefähren Wägungen das wahre Gewicht G des Körpers ohne weitere Wägungen nach der Formel

$$G = p + (P - p)\frac{s_0 - s}{S - s}$$

finden. Die übliche Einzeichnung der Skalentheile: 0 in der Mitte, und von hier nach beiden Seiten wachsend, ist hierbei recht unbequem, weil man die Zahlen der einen Seite positiv, die der anderen negativ in Rechnung bringen muss. Vortheilhafter ist es, die Skalentheile von einem Ende bis zum anderen fortlaufend, z. B. von 0 bis 40, zu numeriren, so dass der Strich 20 der Nullpunkt der Waage ist; und zwar thut man, da man links den Körper, rechts die Gewichte aufzulegen pflegt, gut, von rechts nach links zu numeriren; die beiden oben vorkommenden Differenzen $s_0 - s$ und $S - s$ sind dann positiv.

Gewichte. Zu den eingangs gemachten, allgemeinen Bemerkungen hierüber ist, soweit es sich um grössere Gewichte handelt, nichts hinzuzufügen. Kleinere Gewichte als 1 *mg* sind aber nicht anwendbar, und selbst die Handhabung von Gewichtsstücken von einigen *mg* ist für die meisten Zwecke zu heikel. Man geht daher gewöhnlich nicht unter 1 *cg* hinab. Um nun kleinere Gewichtsdifferenzen zu bestimmen resp. auszugleichen, hat man drei Methoden zur Verfügung. Erstens die eben besprochene Schwingungsmethode, die aber bei den meisten Waagen auf Gewichtsdifferenzen von einem ganzen *cg* ($P - p = 1\,cg = 10\,mg$) noch nicht anwendbar ist, weil der Zeiger alsdann beiderseits noch über das Skalenende hinaus ausschlagen würde; man müsste sich also mindestens noch halbe *cg* verschaffen. Zweitens — und das ist die üblichste Methode — kann man von dem Umstande Gebrauch machen, dass die Wirkung eines Gewichtes sich in demselben Verhältniss verringert, in welchem der Hebelarm, an dem es wirkt, sich verkürzt. Demgemäss stellt man sich eines jener kleinsten Gewichte, also z. B. ein *cg*, aus Platin- oder Aluminiumdraht in Form eines sogen. **Reiters**[1]) her, um es bequem auf denjenigen Arm des Waagebalkens setzen zu können, an welchem die für die Gewichte bestimmte Schale hängt. Dieser Hebelarm ist durch Marken in 10 oder 100 Theile getheilt; die ersteren entsprechen daher, wenn der Reiter 1 *cg* ist, Milligrammen, letztere Zehnteln derselben. Zur Verschiebung des Reiters, bis er den richtigen Stand hat, dient der Reiterschieber, den man von ausserhalb des Glaskastens handhaben kann, so dass man den Kasten nicht zu öffnen braucht. Eines zweiten derartigen Reiters kann man sich auch bedienen, um die nicht genau einstehende Waage vor der eigentlichen Wägung zu äquilibriren. Bei dem geringen Gewichte des Reiters wird es hier nicht nöthig sein, auf die Theorie[2]) seines Einflusses näher einzugehen; es sei

[1]) Die Idee der Reitergewichte oder ihre praktische Ausführung rührt von BERZELIUS her.

[2]) SCHWIRKUS, Z. f. Instr. K. 1887, pag. 46.

nur bemerkt, dass die mehrfach gemachte Annahme, die Linie, auf welcher der Reiter verschoben wird (das sogen. Reiterlineal), müsse mit der Linie der drei Drehpunkte zusammenfallen, nicht richtig ist; sie braucht ihr nur parallel zu sein, und selbst bei einer Neigung bis zu 10° ist der fehlerhafte Einfluss, der sich übrigens nur auf die Empfindlichkeit erstreckt, in fast allen Fällen zu vernachlässigen. Nur ist es zu empfehlen, den Reiter niemals ganz abzunehmen, sondern als integrirenden Bestandtheil der Waage zu betrachten; es hat das noch den weiteren Vortheil, dass dann der zur Aequilibrirung dienende Reiter fast immer auf dem anderen Arm wird belassen werden können, so dass er die Verschiebung des ersteren nicht stört.

Die dritte Methode besteht in der Anwendung von Anhängegewichten. Dieselben haben Hufeisenform und können mit Hilfe eines Mechanismus ohne Oeffnung des Gehäuses an die beiden Schalengehänge angehängt werden. Damit dieser Mechanismus nicht zu complicirt und seine Handhabung nicht zu zeitraubend werde, ist es erforderlich, mit möglichst wenig derartigen Gewichten auszukommen. Es sind hierfür verschiedene Vorschläge gemacht worden, z. B. die beiderseitige Anwendung der Reihe 1, 3, 9 u. s. w., durch deren Differenzen und Summen man bekanntlich alle Zahlen darstellen kann. Es ist aber zu beachten, dass man hier, um z. B. noch Differenzen von 1 *mg* bestimmen zu können, auch dem kleinsten Anhängegewicht das Gewicht 1 *mg* geben, ein zweites von 3 *mg* haben muss, also ohne 2 sehr kleine Stücke nicht auskommt. Von diesem Fehler frei ist die folgende, jüngst vorgeschlagene Combination:

Rechts $\frac{9}{8}$, $\frac{3}{2}$, 2, 8,
Links $\frac{17}{16}$, $\frac{5}{4}$, 1, 4.

Sind dies *cg*, so kann man alle beliebigen Sechszehntel *mg* bestimmen, also jedesmal noch $\frac{1}{16}$ des kleinsten erforderlichen Anhängegewichtes.[1])

Einfluss der Temperatur. Der Einfluss der Temperatur, welcher sich bei jeder irgendwie genauen Wägung geltend macht, giebt zu zwei verschiedenen Fragen Anlass, nämlich einerseits, wie man die unregelmässigen Einflüsse, d. h. die Schwankungen der Temperatur möglichst verhüten, und andererseits, ob man ihren regelmässigen Einfluss in Rechnung ziehen müsse. Den grössten unregelmässigen Einfluss übt der Beobachter selbst aus, und zwar hauptsächlich mit seiner beim Auflegen der Gewichte in den Kasten eingeführten Hand. In Anbetracht der 15 bis 20° betragenden Temperaturdifferenz zwischen Hand und Zimmerluft ist es verständlich, dass sich warme Strömungen ausbilden, welche ihrerseits die verschiedenen Theile der Waage beeinflussen. Die Folge ist theils eine rein mechanische, d. h. eine Verstellung, theils eine verschieden starke Ausdehnung der beiden Arme durch ungleiche Erwärmung (ein Unterschied von nur 0·1° würde auf ein 1 *kg* schon 2 *mg* Fehler hervorbringen), theils endlich die Ansammlung wärmerer Luft über den Waagschalen und unter der Decke des Kastens. Es empfiehlt sich daher, den Kasten nicht zu niedrig zu machen und die Thüren desselben so einzurichten, dass sie bis zur Decke geöffnet werden können. Ausserdem aber muss man in den letzten Stadien der Wägung langsam zu Werke gehen, damit sich die Einflüsse vertheilen, und schliesslich bei der Reiterhandhabung den Kasten überhaupt geschlossen lassen.[2]) Für feinste Wägungen ist es aber ein geradezu entscheidender Vortheil, wenn der Beobachter

[1]) Schwirkus, Z. f. Instr. K. 1887, pag. 83. — Die Idee der Differenzen-Wägung rührt von Arzberger her (Dingl. polyt. J. 219.).

[2]) Schwirkus, a. a. O. pag. 42.

der Waage überhaupt nicht nahe zu kommen braucht. Derartige Normalwaagen sind dementsprechend eingerichtet; die Schwingungen des Zeigers werden mit dem Fernrohr beobachtet, und die Arretirung der Waage, das Auflegen, Vertauschen und Abnehmen der Gewichte u. s. w. erfolgt ebenfalls aus der Ferne.[1])

Abgesehen von diesen unregelmässigen Temperatureinflüssen fragt es sich, ob auf das Ergebniss der Wägung der Umstand von Einfluss sei, dass die Temperatur innerhalb des Waagenkastens zwar in jedem einzelnen Falle constant, von Fall zu Fall aber eine andere ist, je nach der Zimmertemperatur, der Temperatur der zu wägenden Körper u. s. w. Was die Waage selbst anbetrifft, so ist nun aber klar, dass jener Einfluss, da er für beide Hälften der gleiche ist, aus dem Resultat herausfällt. Es bleibt also nur die Erwärmung der Luft zu berücksichtigen, was jedoch in die nächstfolgende Betrachtung gehört.

Reduction der Wägungen auf den luftleeren Raum. Die Wägung in der Luft ergiebt nicht das wahre Gewicht des gewogenen Körpers, einen besonderen Fall ausgenommen. Nach dem archimedischen Principe nämlich verliert jeder Körper, wenn er in eine Flüssigkeit oder ein Gas, also z. B. in Luft, getaucht wird, so viel von seinem Gewicht, als die von ihm verdrängte Flüssigkeits- oder Gasmenge, also hier Luftmenge, wiegt. Ist nun bei einer Wägung das Gleichgewicht zwischen dem zu wägenden Körper und den Gewichten hergestellt, so kann allerdings der Fall vorkommen, dass beide in Wahrheit gleich viel wiegen, nämlich, wenn beide dasselbe Volumen besitzen, also aus demselben Stoffe oder aus zwei gleich dichten Stoffen bestehen; dann verdrängen sie nämlich gleich viel Luft, der Gewichtsverlust ist also bei beiden derselbe, die Fehler heben sich auf, und die Wägung bleibt richtig. Anders, wenn Körper und Gewichte verschiedenes Volumen, also verschiedene Dichtigkeit haben. Das wahre Gewicht des Körpers ist dann gegenüber dem durch Wägung gefundenen einerseits in Anbetracht des Gewichtsverlustes des Körpers grösser, andererseits kleiner, weil die Gewichte, mit denen er gewogen wurde, in Folge ihres Gewichtsverlustes nicht voll zur Geltung kamen. Sind δ, d und D die Dichtigkeiten von Luft, Gewichten und Körper, v und V die Volumina von Gewichten und Körper, G' das gefundene, G das wahre Gewicht des Körpers, so sind die von den Gewichten, resp. dem Körper, verdrängten Luftvolumina ebenfalls v und V, also deren Gewichte, d. h. die Gewichtsverluste von Gewichten und Körper gleich δv und δV. Die Wägung lehrt also, dass

$$G - \delta V = G' - \delta v$$

ist. Nun ist aber

$$V = \frac{G}{D}, \quad v = \frac{G'}{d}.$$

Setzt man dies ein, so findet man

$$G = G' \frac{1 - \frac{\delta}{d}}{1 - \frac{\delta}{D}} = G'\left(1 - \frac{\delta}{d} + \frac{\delta}{D}\right),$$

letzteres in Anbetracht des Umstandes, dass man bei der Vereinfachung des ersteren Ausdruckes, wenn es sich um feste oder flüssige Körper handelt, δ als sehr klein gegen d und D betrachten darf. Es ist nun zu beachten — und das ist der Punkt, auf welchen oben hingewiesen wurde — dass die Dichtigkeit der

[1]) Eine solche Einrichtung besitzen die Waagen in den zur Feststellung und Vergleichung von Normalgewichten bestimmten Instituten, z. B. in dem Bur. internat. d. poids et mes. in Sèvres und im Berliner Normal-Aich-Institut.

Luft mit der Temperatur sich nicht unbeträchtlich ändert. Doch kommt dies nur für besonders feine Wägungen oder für solche bei sehr hohen oder sehr niedrigen Temperaturen in Betracht. Dasselbe gilt von dem Einfluss des herrschenden Luftdrucks. Für derartig feine Wägungen kann man den Werth von δ aus den Tabellen entnehmen (s. Art. Dichte).[1] In den meisten Fällen genügt es, $\delta = 0{\cdot}0012$ und demgemäss die anzubringende Correction

$$g = G' \cdot 0{\cdot}0012 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right)$$

zu setzen. Wägt man mit Messinggewichten resp. mit Platingewichten, so zeigen die Zahlen $g(M)$ resp. $g(P)$ der folgenden Tabelle, das Wievielfache des in Grammen gefundenen Körpergewichtes man in Milligrammen hinzuzufügen hat, wenn der Körper die Dichtigkeit D hat.

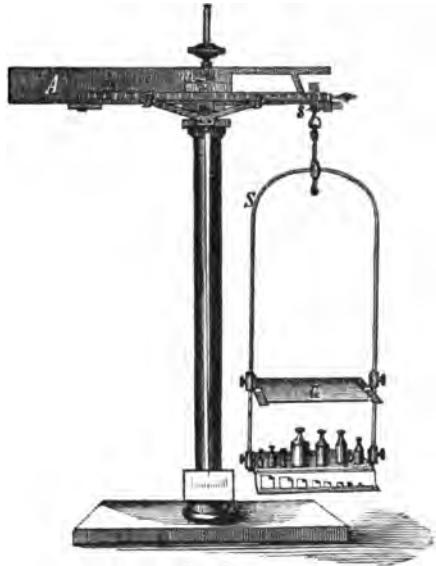
D	$g(M)$	$g(P)$	D	$g(M)$	$g(P)$
0·5	+ 2·26	+ 2·34	2·8	+ 0·29	+ 0·37
0·6	1·86	1·94	3·0	0·26	0·34
0·7	1·57	1·66	3·5	0·20	0·29
0·8	1·36	1·44	4·0	0·16	0·24
0·9	1·19	1·28	4·5	0·12	0·21
1·0	1·06	1·14	5·0	0·10	0·18
1·1	0·95	1·03	5·5	0·08	0·16
1·2	0·86	0·94	6·0	0·06	0·14
1·3	0·78	0·87	7·0	0·03	0·12
1·4	0·71	0·80	8·0	0·01	0·09
1·5	0·66	0·74	9·0	— 0·01	+ 0·08
1·6	0·61	0·69	10·0	— 0·02	0·06
1·7	0·56	0·65	11·0	— 0·03	0·05
1·8	0·52	0·61	12·0	— 0·04	0·04
1·9	0·49	0·58	14·0	— 0·06	0·03
2·0	0·46	0·54	16·0	— 0·07	0·02
2·2	0·40	0·49	18·0	— 0·08	0·01
2·4	0·36	0·44	20·0	— 0·08	+ 0·00
2·6	0·32	0·40	22·0	— 0·09	— 0·00

Tarirmethode. Es ist schon oben bei Besprechung der Länge der Hebelarme eine Methode erwähnt worden, welche **Doppelwägung** heisst, und darin besteht, dass man den Körper nach einander auf beiden Schalen wägt und das Mittel nimmt. Dadurch wird man von einer hauptsächlichen Fehlerquelle der Waage unabhängig. Durch eine andere Methode kann man sich sogar von den meisten Fehlerquellen unabhängig machen, nämlich durch die **Tarir-** oder **Substitutionswägung**, welche nur eine möglichste Empfindlichkeit der Waage voraussetzt. Man setzt den zu wägenden Körper auf die eine Waagschale und äquilibrirt ihn durch Schrotkörner resp. Sand auf der anderen Waagschale. Dann nimmt man den Körper fort und legt so viele Gewichte auf, bis Schrot und Sand wieder äquilibrirt sind. Die einzige Correction, welche in diesem Falle anzubringen ist, ist die wegen des Gewichtsverlustes in der Luft.[2] Bei der neuerdings verbesserten Substitutionswaage, die eigens zu Tarirwägungen be-

[1] Man muss dann ausser Druck und Temperatur aber auch noch die chemische Beschaffenheit der Luft, insbesondere ihren Gehalt an Wasserdampf und Kohlensäure berücksichtigen, der in Folge des Einflusses des Beobachters oft nicht unbeträchtlich ist. Vergl. SCHWIRKUS, a. a. O., pag. 414.

[2] Die Tarirmethode rührt von BORDA her (1788).

stimmt ist, erspart man Schrot und Sand sogar gänzlich. Die Waage (Fig. 38) hat nämlich nur eine Schale, aber mit zwei Platten übereinander; die untere ist als Gewichtskasten eingerichtet und enthält so viele Gewichtsstücke, als der höchsten Belastung entsprechen. Auf der anderen Seite ist der Waagebalken so schwer, dass er allein schon der ersten Seite das Gleichgewicht hält. Eine Wägung besteht dann einfach im Auflegen des Körpers auf die obere und entsprechender Abnahme von Gewichten von der unteren Platte; auch Reiter kann man in Anwendung bringen. Die Waage arbeitet bei verhältnissmässig grosser Genauigkeit sehr schnell. Uebrigens sei bemerkt, dass sie streng genommen nicht mehr zu den gleicharmigen Waagen gehört.[1])



(Ph. 38.)

Schliesslich ist anzuführen, dass es eine grosse Anzahl individuell verschiedener Waagenconstructionen giebt, die sich theils nach ihrer Bestimmung zu groben, mittleren, feinen und feinsten Wägungen, theils durch die Eigenthümlichkeiten unterscheiden, welche verschiedene Constrakteure den einzelnen Theilen gegeben haben. Insbesondere haben der Waagebalken uud die verschiedenen Schneiden die mannigfaltigsten Formen erhalten und sind mit den verschiedensten Hilfsvorrichtungen versehen worden.[2]) Eine besondere Klasse von Waagen bilden die zu ganz feinen Wägungen (z. B. zur Vergleichung von Normalkilogrammen) bestimmten Vacuumwagen, bei welchen im möglichst luftleeren Raume gewogen wird — eine Einrichtung, welche den Zweck hat, sich von den Einflüssen von Luftströmungen, Feuchtigkeit, Temperaturschwankungen, Gewichtsverlust u. s. w. völlig unabhängig zu machen. Solche Waagen bedürfen natürlich einer zum Theil ganz besonderen Construction; es würde jedoch zu weit führen, hier darau einzugehen.[3]) Auch die Sortirwaagen, d. h. die Waagen, welche automatisch die von ihnen gewogenen Körper in verschiedene Fächer werfen, je nachdem sie ein bestimmtes oder ein zu kleines oder ein zu grosses Gewicht haben — es gehören hierher u. A. die geistvollen Münzensortirwaagen[4]) und die Getreidewaagen — können hier nur Erwähnung finden.

Andere Waagen.

Eine für gröbere Zwecke häufig benutzte ungleicharmige Hebelwaage ist die Schnellwaage, auch römische Waage[5]) genannt. An dem kürzeren Arm hängt

[1]) S. Loewenherz, Ber. üb. d. wiss. App. auf d. Berl. Gew.-Ausst. 1879. Berl. 1880, pag. 196.

[2]) Unter den modernen Präcisionswaagen sind die von Stueckrath, Bunge, Rueprecht, Schickert, Reimann, Oertling u. A. hervorzuheben. S. Loewenherz, a. a. O. und in dem von v. Hofmann herausgegeb. Ber. üb. d. Lond. Ind.-Ausst. 1876. Braunschw. 1878, pag. 223.

[3]) Das Wägen im luftverdünnten Raume scheint zuerst von Regnault, Morin u. Brix 1860 ausgeführt worden zu sein.

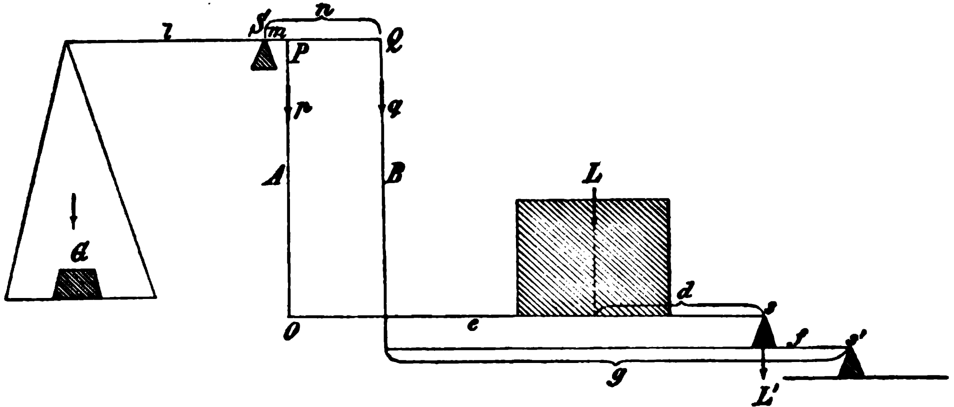
[4]) Am wichtigsten die Cottonwaage (England u. Deutschland) und die Séguier'sche (Frankreich).

[5]) Wahrscheinlich verdorben aus dem arabischen »Romman«, d. h. Granatapfel (Gestalt des Laufgewichts in alter Zeit).

die zu wägende Last, am längeren ist ein Laufgewicht verschiebbar, welches so gewählt ist, dass es, am äussersten Ende des Armes befindlich, die höchste Last, für welche die Waage bestimmt ist, äquilibrirt. Für alle leichteren Körper kann man dann offenbar durch Verschiebung des Laufgewichtes das Gleichgewicht herstellen. Mit Hilfe einer Reihe von Versuchen sind die den verschiedenen Stellen des Laufgewichtes entsprechenden Körpergewichte ein für allemal ermittelt und auf dem Arm verzeichnet, so dass man sie ohne weiteres ablesen kann.

Von ähnlicher Art ist die dänische oder schwedische Waage, bei welcher das Gewicht am Ende steht, dafür aber der Drehpunkt verschiebbar ist. Ihrer geringen Genauigkeit halber wird jedoch diese Waage nur ausnahmsweise angewendet

Die Brückenwaage (Fig. 39) ist als eine zusammengesetzte Hebelwaage zu be-



(Ph. 39.)

trachten. Die Last L wird auf eine Platte gebracht, welche an dem einen Ende O an einer Stange A befestigt ist, mit dem anderen auf einer Schneide s ruht. Die Stange A ist in dem Punkte P an den einen Arm eines auf der Schneide S ruhenden Hebels angehängt, dessen anderer Arm an seinem Ende die für die Gewichte bestimmte Schale trägt. Die Schneide s ist nun aber selbst nicht fes sondern ruht ihrerseits auf dem Hebel h, welcher mittelst der Stange B im Punkte Q des Haupthebels angehängt ist und am anderen Ende auf der festen Schneide s' ruht. Es seien nun l, m, n die Hebelarme, an welchen die Gewichte, die Brücke, d. h. die für die Last bestimmte Platte, und der zweite Hebel wirken. Ferner seien G die zur Messung benutzten Gewichte, p und q die in den Punkten P und Q angreifenden Gewichte. Auf der Brücke seien d und e die Abstände der Last (d. h. ihrer Schwerlinie) und der Stange A von der Schneide s. Endlich seien f und g die Abstände der auf den festen Hebel wirkenden Last L' und der Stange B von der Schneide s'. Es ist dann für den Haupthebel

$$Gl = pm + qn.$$

Für die Brücke, und zwar einerseits in Bezug auf s als Drehpunkt

$$pe = Ld,$$

andererseits in Bezug auf O als Drehpunkt

$$L'e = L(e - d).$$

Endlich für den festen Hebel

$$qg = L'f = Lf\frac{e-d}{e}.$$

Setzt man die Werthe von p und q in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$G = \frac{L}{le}\left[md + (e-d)\frac{nf}{g}\right].$$

Die Waage wird nun so gebaut, dass sich $n:m$ wie $g:f$ verhält. Einmal erreicht man hierdurch den Vortheil, dass die Brücke stets horizontal bleibt, und ferner vereinfacht sich in diesem Falle obige Gleichung zu der folgenden:

$$G = L\frac{m}{l}, \quad \text{also} \quad L = G\frac{l}{m}.$$

Es verhält sich also so, als ob die Last unmittelbar an der Stange A hinge; man hat aber den Vortheil, dass man sie an eine beliebige Stelle einer grossen Platte bringen kann, wozu noch andere Vortheile kommen. Bei der am häufigsten benutzten Brückenwaage, der Decimalwaage, ist $l/m = 10$, bei der Centesimalwaage ist $l/m = 100$. Die äussere Einrichtung dieser Waagen darf bei ihrer grossen Verbreitung als bekannt vorausgesetzt werden.[1])

Eine andere zusammengesetzte Hebelwaage ist die Tafelwaage, bei welcher die Schalen zu beiden Seiten sich über den übrigen Apparat frei erheben; übrigens giebt es auch einfach gleicharmige Tafelwaagen.

Noch zur Klasse der Hebelwaagen, aber andererseits schon zur Klasse der Skalenwaagen, bei welchen das Körpergewicht einfach an einer Skale abgelesen wird (s. oben, pag. 122), gehören die unter anderen als Briefwaagen gebräuchlichen Zeigerwaagen; der Hebel ist aber hier nicht nur ungleicharmig, sondern die beiden Arme bilden auch einen Winkel miteinander.

Den Hebelwaagen stehen die Federwaagen gegenüber. Das Gewicht, d. h. die Schwere, des zu wägenden Körpers wird hier nicht mit der entsprechenden Eigenschaft eines anderen Körpers (der Gewichte) verglichen, sondern mit der Wirkung einer ganz anderen Eigenschaft, der Elasticität metallener Federn. Auch hier wird von vornherein durch Anhängung bekannter Gewichte eine Skale hergestellt, welche man dann einfach abliest. Die Feder ist meist eine Schraubenfeder oder eine Winkelfeder; die äussere Einrichtung der Waage kann sehr mannigfaltig sein. Da die Elasticität stark veränderlich ist, sind die Federwaagen in dieser Form nur für Zwecke anwendbar, wo es weniger auf Genauigkeit als auf Schnelligkeit ankommt.[2]) Man kann aber auch genauere Wägungen mit ihnen ausführen, wenn man sich nicht auf die Skale verlässt, sondern, wie bei der Substitutionsmethode, zuerst den Körper, und nach Abnahme desselben so viel Gewichte auflegt resp. anhängt, dass der Zeiger wieder dieselbe Stellung einnimmt.[3])

Bei allen Skalenwaagen ist übrigens zu beachten, dass man dieselben ohne weiteres nur an dem Orte anwenden darf, wo sie hergestellt worden sind. Da nämlich die Schwerkraft, also auch das Gewicht der Körper, auf der Erde von Ort zu Ort variirt, so ist die Skale für andere Orte nicht ganz richtig, und man muss sich eine entsprechende Correktionstabelle anlegen.[4])

Schliesslich ist noch eine Methode zu erwähnen, welche sich von allen bisherigen principiell unterscheidet, das sogen. »Wägen ohne Gewichte«. Dasselbe

---

[1]) Die Construction der Brückenwaage in dieser Form rührt von dem Strassburger Mechaniker Quintenz (1821) her.

[2]) Auch das sogen. Aneroidbarometer ist nichts als eine Federwaage zur Messung des Gewichts der Luft, gerade wie das Quecksilberbarometer eine gewöhnliche Waage zu diesem Zwecke ist. Nur pflegt man, statt des Gewichtes der Luft, die Quecksilberhöhe anzugeben und auf den Skalen zu verzeichnen, und zwar auch bei dem Aneroidbarometer. S. Art. Luftdruck.

[3]) S. auch die Reimann'sche Federwaage, Loewenherz, Ber. v. d. Berl. Ausst., pag. 198. Dieselbe ist freilich eine combinirte Feder-Hebel-Waage. Eine unter gewissen Umständen sehr brauchbare Federwaage ist die von Jolly.

[4]) Ueber Gravimeter, Waagen z. Best. d. Gewichts der Erde u. s. w. s. Art. Gravitation.

beruht auf dem archimedrischen Princip und ist der auf pag. 10 erwähnten Methode der Volumenbestimmung mit der Waage gerade entgegengesetzt. Man stellt auf die eine Schale einer gleicharmigen Hebelwaage ein Gefäss mit Wasser, äquilibrirt dasselbe durch auf die andere Schale gelegtes Schrot, fügt zu letzterem dann den zu wägenden Körper hinzu, und senkt schliesslich einen in *ccm* getheilten Glasstab, der an einem feststehenden Stativ angebracht ist, so weit in das Wasser hinab, bis das Gleichgewicht von neuem hergestellt ist. Soviel *ccm* und Bruchtheile eintauchen, soviel *gr* und Bruchtheile wiegt (bei 4° C. Zimmertemperatur) der Körper. F. AUERBACH.

Dichte.

(Dichtigkeit, specifisches Gewicht, Dampfdichte.)

Zwei nahe verwandte Begriffe sind die Dichte, auch Dichtigkeit genannt, und das specifische Gewicht. Unter Dichte versteht man die Masse der Volumeneinheit, unter specifischem Gewicht das Gewicht der Volumeneinheit eines Körpers. Nun ist allerdings Masse nicht identisch mit Gewicht (s. Grundbegriffe); aber an einem bestimmten Orte der Erdoberfläche ist das Verhältniss von Masse und Gewicht für alle Körper dasselbe; dasjenige von Dichte und specifischem Gewicht wird es also auch sein. Der Werth dieses Verhältnisses ist dabei gleich der Beschleunigung, welche die Schwerkraft an dem betreffenden Orte ertheilt. Man pflegt nun meist von diesem Proportionalitätsfaktor abzusehen und die Begriffe Dichte und specifisches Gewicht zu identificiren. Wählt man ferner *cbmm* und *mg*, oder *ccm* und *g*, oder *l* (Liter) und *kg* als entsprechende Raum- und Gewichtseinheiten, so besitzt die Raumeinheit Wasser von 4° C. die Gewichtseinheit, d. h. die Dichte oder das specifische Gewicht von Wasser von 4° ist gleich 1. Man kann also auch sagen: Dichte oder specifisches Gewicht ist das Verhältniss der Masse oder des Gewichtes eines Körpers zur Masse oder dem Gewichte eines gleichen Volumens destillirten Wassers von 4°. Bei Gasen vergleicht man, statt mit Wasser, meist mit Luft von 0° und 760 *mm* Druck, bei Dämpfen mit Luft von gleicher Temperatur und Druck (Dampfdichte, s. unten).

Messungsmethoden.

A. Für feste Körper.

1. Die nächstliegende und direkteste Methode besteht in der Messung des Volumens des Körpers, seiner Wägung und der Division der erhaltenen Zahlen durch einander.

a) Die Volumenmessung kann in manchen Fällen, namentlich wenn der Körper regelmässige Gestalt hat (Kugel, Würfel u. s. w.) direkt geschehen, sei es durch mechanisches, sei es durch optisches Ausmessen.

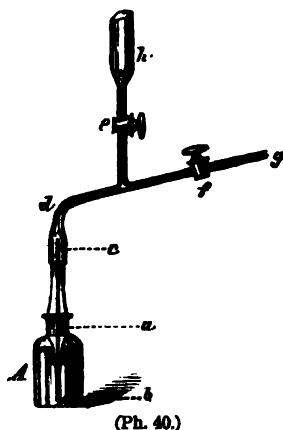
b) In den meisten Fällen ist die direkte Ausmessung entweder überhaupt nicht möglich oder zu ungenau; man wirft dann den Körper in eine Flüssigkeit, welche ihn nicht angreift, und in welcher er untersinkt; in dem geaichten und graduirten Gefässe, in welchem sich die Flüssigkeit befindet, kann man dann die Volumenzunahme, also das Volumen des hineingeworfenen Körpers ablesen.

Besondere Messcylinder dieser Art rühren von BRÜGELMANN, PHIPSON[1]) u. A. her. Genauer wird die Messung, wenn man, nach dem Vorschlage von GISEVIUS[2]) ein enges, mit dem Gefässe communicirendes Seitenrohr benutzt, in welchem dann, bei geeigneter Anordnung, die Volumenzunahme sich durch ein verhältnissmässig sehr beträchtliches Ansteigen der Flüssigkeit geltend macht. Schliesslich kann man auch, wenn die Flüssigkeit Wasser oder ihr specifisches Gewicht bekannt ist, die überschüssige Flüssigkeit austreten lassen und wägen, womit offenbar in diesem Falle die Aufgabe gelöst ist. Sinkt der Körper in der Flüssigkeit nicht unter, so befestigt man ihn an einem Draht und taucht ihn nur soweit ein, dass er gerade vollständig, der Draht aber noch gar nicht in der Flüssigkeit sich befindet. Poröse Körper muss man durch einen geeigneten, natürlich möglichst dünnen Ueberzug vor dem Eindringen der Flüssigkeit schützen. Endlich ist sorgfältig darauf zu achten, dass keine Luftblasen an dem eingetauchten Körper sitzen; eventuell sind dieselben mittelst eines Pinsels oder anderweitig zu entfernen.

Die zuletzt gemachten Bemerkungen gelten übrigens auch für einen Theil der nachfolgenden Methoden.

2. Mit dem Tarirfläschchen oder Pyknometer. Diese Methode ist eine Ausführung und Vervollkommnung des oben erwähnten Verfahrens, das überschüssige Wasser austreten zu lassen. Tarirfläschchen oder Pyknometer sind kleine Glasgefässe, welche, bis auf den Boden und den kurzen Hals, kugelförmig oder fläschchenförmig sind. Die innere Wandung des Halses ist abgeschliffen, und in sie passt ein hohler Glasstöpsel, welcher unten zuweilen ein in das Gefäss hinabreichendes kleines Thermometer trägt, oben aber in eine capillare Röhre ausläuft. Man wägt das Pyknometer, wenn es völlig mit Wasser gefüllt ist (p), andrerseits den zu untersuchenden Körper für sich (P); bringt man nun den Körper hinein, so muss nothwendig Wasser ausfliessen, so dass, wenn man jetzt das Gefäss mit Wasser und festem Körper wägt, man nicht $p + P$, sondern den kleineren Werth π erhält; die Differenz $p + P - \pi$ ist also das Gewicht des ausgetretenen Wassers, und folglich die Dichte s des Körpers

$$s = \frac{P}{p + P - \pi}.$$



(Ph. 40.)

Eine Form des Pyknometers, welche die mancherlei Fehlerquellen, die dem Verfahren anhaften, möglichst verringert, ist die von E. WIEDEMANN[3]) (Fig. 40). a ist ein eingeschliffener Glasstöpsel, c ein Schliff. Zunächst wägt man das Pyknometer mit dem schwach gefetteten Stöpsel a für sich, verbindet es dann mit dem anderen Teil, schliesst c, dessen Hohlraum vorher mit einem Tropfen Wasser gefüllt worden ist, öffnet f und evacuirt mit der Quecksilberluftpumpe möglichst bis zum Vacuum. Dann lässt man aus h das vorher gut ausgekochte Wasser eintreten, löst das Pyknometer bei c los, wischt das Fett ab und wägt; schliesslich trocknet man es aus, bringt das Pulver hinein und wiederholt das eben beschriebene Verfahren.

Das WIEDEMANN'sche Pyknometer ist besonders für Pulver sehr geeignet. Andere Formen rühren von FLECK (für feinste Pulver) und PIOTROWSKI (Niederschläge) her.

---

[1]) S. WIED. Ann., Beibl. 6, pag. 417.

[2]) GISEVIUS, Dissertation, Bonn 1882.

[3]) E. WIEDEMANN, WIED. Ann. 17, pag. 983. 1882. — Modification von SCHULZE, ebendas. 28, pag. 144. 1886.

Es ist gleich hier auf die verschiedenen **Temperatur-Correktionen** hinzuweisen, welche, wie bei allen Dichtigkeitsbestimmungen, so auch bei der Anwendung des Pyknometers anzubringen sind. Zunächst werde angenommen, dass während der ganzen Versuchsdauer die Temperatur constant sei. Ist sie gleich 4°, so erhält man ohne jede Correktur die Dichte des Körpers bei 4°. Ist sie eine andere, so hat man zu berücksichtigen, dass alsdann das Wasser nicht die Dichte 1, sondern eine andere δ hat; in demselben Verhältnis ist also auch die wahre Dichte des Körpers bei jener Temperatur kleiner als die direkt gefundene; man muss also, um erstere zu erhalten, letztere mit δ multipliciren. Die Grösse δ kann man aus den Tabellen (s. unten) entnehmen. Die gefundone Dichte gilt dann ebenfalls für die Versuchstemperatur.

Aendert sich hingegen während des Versuches die Temperatur, und ist sie bei der Wägung mit Wasser allein t, bei der Wägung mit Wasser nnd Körper t', so ist wegen der alsdann bei beiden Wägungen verschiedenen Dichtigkeiten des Wassers δ und δ', sowie wegen der kubischen Ausdehnung des Glases (linearer Ausdehnungscoëfficient β) noch eine besondere Correktion an dem Gewichte des ausgetretenen Wassers anzubringen, um aus ihm das Gewicht w des bei der Temperatur t' dem Körper gleichen Volumens Wasser zu erhalten; es ist nämzu setzen, wenn g das Gewicht des leeren Gefässes ist,

$$w = p + P - \pi + (p - g)\,[\delta' - \delta + 3\beta\,(t' - t)].$$

Diesen Werth hat man dann in die Schlussformel für die wahre Dichte des Körpers

$$s = \frac{P}{w}\,\delta'$$

einzusetzen.

Will man ausserdem noch die Correktion wegen des Gewichtsverlustes in der Luft anbringen, so benutzt man statt der letzten Formel, unter λ die Dichtig keit der Luft verstanden, die folgende:

$$s = \frac{P}{w}\,(\delta' - \lambda) + \lambda.$$

In den meisten Fällen genügt es, für 3β den Werth 0·000025, für λ den Werth 0·0012 zu setzen: anderenfalls vergleiche man die unten folgenden Tabellen und den Art. Ausdehnung. Der Einfluss von λ wird verhältnismässig gross, wenn der untersuchte Körper sehr schwer oder sehr leicht ist.

Eine Anzahl von hierher gehörigen Spezialapparaten, wie die mannigfaltigen **Densimeter, Xylometer** u. s. w. hat ausschliesslich technisches Interesse.

3. **Mit dem Volumenometer.** Diese Methode hat den Vortheil, dass man den Körper überhaupt nicht in eine tropfbare Flüssigkeit zu bringen braucht. An die Stelle der letzteren tritt vielmehr ein abgeschlossener Luftraum, dessen Volumen man, zuerst ohne, dann mit dem betreffenden Körper, durch Druckmessung mit Benutzung des BOYLE'schen Gesetzes bestimmt. Ist unter dem Drucke p das Volumen einer abgeschlossenen Luftmenge v, unter dem Drucke P dagegen V, so ist nach jenem Gesetze $V:v = p:P$, also $V:V-v = p:p-P$ Die Drucke misst man manometrisch; richtet man es ausserdem so ein, dass das Differenzvolumen entweder bekannt ist, oder in eine kalibrirte Röhre fällt, so kann man V bestimmen. Eine analoge Bestimmung führt man dann aus, nachdem man den festen Körper in denselben Raum gebracht hat: das Resultat sei V'; es ist dann $V-V'$ das Volumen des Körpers, welches in Verbindung mit seinem absoluten Gewichte sein specifisches Gewicht ergiebt.

Diese Idee ist in den Apparaten von SAY, KOPP, REGNAULT, RUEDORFF

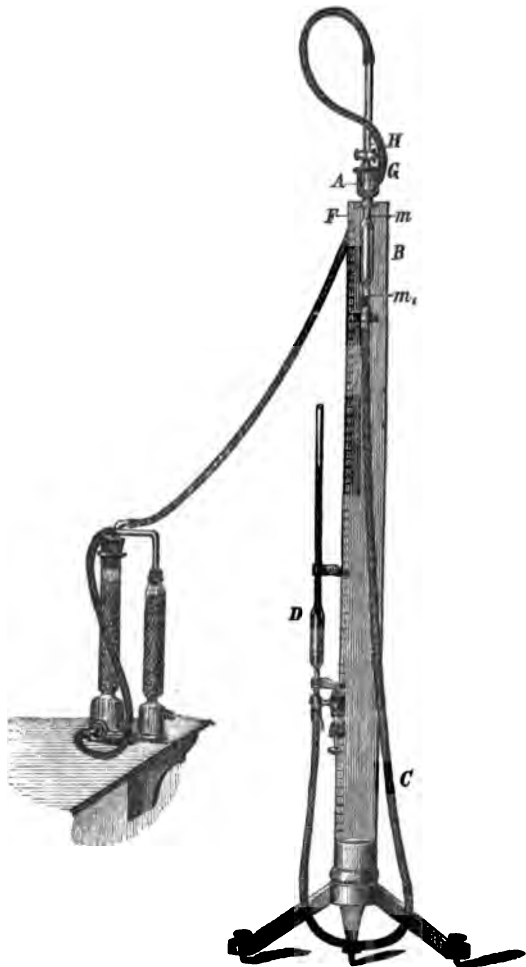
und PAALZOW[1]) auf verschiedenartige Weise verwirklicht worden. Der letztgenannte ist in Fig. 41 abgebildet; er besteht im wesentlichen aus dem Gefäss A mit dem luftdicht aufsetzbaren Deckel G, dem Zusatzraume B zwischen den Marken m und m', dessen Volumen a bekannt ist, dem Schlauch C und dem mit seiner Hilfe verschiebbaren Schenkel D, welcher somit den Druck zu variiren gestattet; im Uebrigen erläutert die Figur den Apparat. Die Formel wird am einfachsten, wenn man den durch Verschiebung von D in A (dessen Deckel vorher geschlossen ist) entstehenden Unterdruck mit p oder p' bezeichnet, je nachdem es sich um den Versuch ohne Körper oder um den Versuch mit hineingeworfenem Körper handelt; ist dann b der Barometerstand, so ist das Volumen des Körpers

$$v_0 = a\left(\frac{p}{b-p} - \frac{p'}{b-p'}\right)$$

und folglich

$$s = \frac{g}{v_0}[1 + (\alpha - \beta)t],$$

wo g das absolute Gewicht des Körpers, t die Temperatur und α und β die Ausdehnungscoëfficienten von Körper und Glas sind.



(Ph. 41.)

4. **Nach dem archimedischen Princip.** Nach diesem Princip verliert ein Körper, in eine Flüssigkeit getaucht, soviel an Gewicht, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt. Ist also G sein Gewicht in Luft, g in Wasser und σ das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ergiebt sich dasjenige des festen Körpers s aus der Proportion $G:G-g = s:\sigma$, also

$$s = \frac{G}{G-g}\sigma, \text{ speciell } s = \frac{G}{G-g},$$

wenn die benutzte Flüssigkeit Wasser von 4° ist. Gewöhnlich hängt man den Körper mit einem dünnen Draht oder Faden an der Schale der zur Wägung dienenden Waage auf; von dem Zähler G ist alsdann das Gewicht des Fadens in Luft, von dem Nenner $G-g$ sein Gewichtsverlust in Wasser abzuziehen.

Eine sehr bequeme Modifikation dieses Verfahrens stellen die **Dichtigkeitswaagen für feste Körper** dar. Der Körper wird durch ein Laufgewicht äquilibrirt, und nach dem Eintauchen des Körpers in Wasser durch Verschiebung des Läufers das Gleichgewicht wieder hergestellt; eine beigegebene Tabelle ge-

[1]) SAY, GILB. Ann. 2. 1799. — KOPP, LIEB. Ann. 35. 1840. — REGNAULT, POGG. Ann. 66. 1845. — RUEDORFF, WIED. Ann. 6, pag. 288. 1879. — PAALZOW, ebd. 13, pag. 332. 1881.



(Fig. 42.)

stattet aus den beiden Läuferstellungen das specifische Gewicht des Körpers zu finden.

5. Mit der NICHOLSON'schen Senkwaage (Fig. 42). Dieselbe besteht aus einem hohlen, beiderseits konisch zugespitzten Messingcylinder, welcher oben an einem Stäbchen einen Teller, unten ein konisches Gewicht mit ebenfalls ebener Platte trägt. Das Gewicht des Apparates ist so gewählt, dass eine an dem Stäbchen angebrachte Marke beim Eintauchen des Apparates in Wasser aus diesem hervorragt. Man kann es nun einerseits durch Auflegen von Gewichten G, andererseits durch Auflegen des zu untersuchenden Körpers K nebst geeigneten Zusatzgewichten g auf die obere Platte erreichen, dass beide Mal die Senkwaage bis zur Marke eintaucht (vorausgesetzt, dass nicht schon der Körper allein zu schwer ist). Dann ist offenbar $K+g=G$, also $G-g$ das absolute Gewicht des Körpers. Legt man nun drittens den Körper auf die untere Platte, so verliert er an Gewicht, und man wird, um wieder auf die Marke einzustellen, zu g noch ein weiteres, dem Gewichtsverluste des Körpers in Wasser gleiches Gewicht g' auf die obere Platte hinzufügen, so dass auf derselben jetzt das Gesammtgewicht G' sich befindet. Es ist dann

$$s=\frac{G-g}{g'} \quad \text{oder auch} \quad s=\frac{G-g}{G'-g}.$$

In neuerer Zeit sind mehrfach Modifikationen dieses Apparates construirt worden.

6. Nach dem umgekehrten archimedischen Princip. Wenn man einen Körper in Wasser taucht, so nimmt nicht nur das Gewicht des Körpers um das Gewicht der verdrängten Wassermenge ab, sondern auch das Gewicht des Wassers um ebensoviel zu. Man wägt hiernach ein Gefäss mit Wasser und bestimmt dann die Gewichtszunahme, welche eintritt, wenn man den betreffenden Körper, den man an einem Faden mit der Hand hält oder an einem festen Stativ aufhängt, in das Wasser taucht; der Quotient aus dem absoluten Gewichte des Körpers und jener Gewichtszunahme ist alsdann wiederum sein specifisches Gewicht.

7. Mit JOLLY's hydrostatischer Federwaage.[1]) An einem spiralförmigen Drahte hängen übereinander zwei Waagschalen, von denen die untere ständig in Wasser taucht. Je nachdem man den zu untersuchenden Körper auf die obere oder untere Schale legt, erfährt die Spirale die Verschiebungen d und d'; es ist dann $s=d/(d-d')$. Die Verschiebungen misst man an einer Skale oder, wenn es sich um grössere Genauigkeit handelt, mit dem Kathetometer. Man kann diese Messungen auch vermeiden, wenn man am unteren Ende der Spirale eine Marke anbringt und nun (ganz ähnlich wie bei der Senkwaage) die Gewichte bestimmt, welche, auf die obere Schale gelegt, die Marke in eine bestimmte Stellung bringen, je nachdem die Schalen leer sind oder der Körper auf der oberen oder drittens der Körper auf der unteren Schale liegt.

8. Auflösungsmethode. Für sehr leicht lösliche Substanzen hat ZEHNDER[2]) eine Methode angegeben, welche im wesentlichen darauf beruht, dass ein mit Luft und dem Körper gefülltes Pyknometer umgekehrt unter Wasser gestülpt wird,

---

1) v. JOLLY, Münch. Ber. 1864, pag. 162.

2) ZEHNDER, WIED. Ann. 29, pag. 249. 1886.

so dass beim Oeffnen der Körper herausfällt, statt dessen dringt Wasser in das Fläschchen ausserdem ist aber dafür gesorgt, dass die an dem Körper haften gebliebene Luft ebenfalls wieder zurückgeführt wird.

9. **Durch Vergleichung mit gleich dichten Flüssigkeiten.** Man stelle eine Flüssigkeit her, in welcher der Körper gerade schwebt, ohne andererseits von ihr durchdrungen oder chemisch angegriffen zu werden. Die specifischen Gewichte sind alsdann gleich. Hierzu eignen sich u. a. folgende Flüssigkeiten, deren Dichten meist zwischen 2 und 4 liegen: Merkuronitrat, Lösungen von Quecksilberjodid in Jodkalium oder Jodbarium, Chlorzink oder Chlorblei (s = ca. 5), Lösungen von Wolframboraten u. s. w.

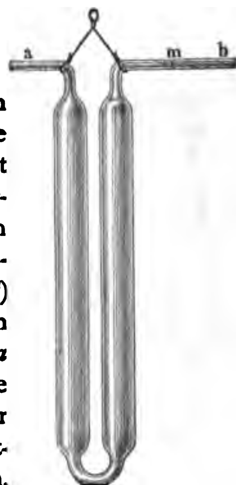
Nach J. JOLY[1]) kann man diese Methode auch auf poröse Körper, oder solche von sehr grosser Dichte anwenden, indem man sie in Paraffin bettet, die Dichte des ganzen Präparates bestimmt, und schliesslich den Einfluss des Paraffins eliminirt. Als Flüssigkeit wird hierbei eine gemischte Lösung von Quecksilberjodid und Jodkalium empfohlen, der man jede beliebige Dichte bis hinauf zu 2·8 geben kann. Man kann auf diese Weise das specifische Gewicht ganz kleiner Körper bis hinab zu 1 *cg* bestimmen.



(Ph. 43.)

B. Für Flüssigkeiten.

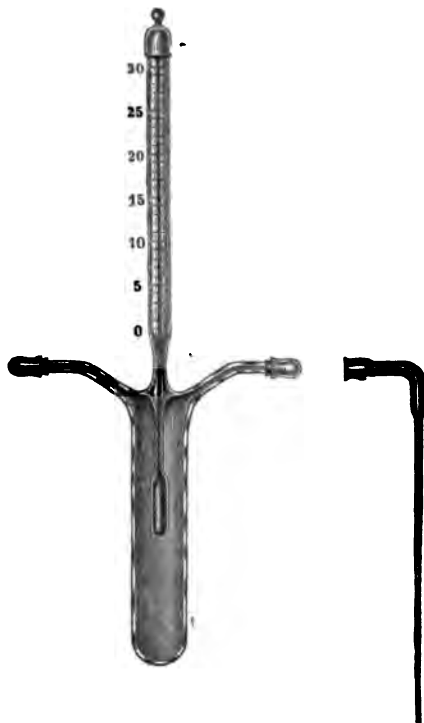
1. **Mit dem Pyknometer** (s. o.), welchem für diesen Zweck verschiedene Formen gegeben worden sind. Eine derselben zeigt Fig. 43. Der Verschluss ist hier gleich mit einem Thermometer verbunden; *A* ist die Thermometerkugel, *h* die Schliffstelle, *c* ein Seitenröhrchen, in welchem die Marke *m* zur Festlegung eines stets gleichen Flüssigkeitsvolumens dient. Eine andere Form ist die von SPRENGEL[2]) (Fig. 44). Von einem *U*-Rohr sind die engen Theile oben nach beiden Seiten horizontal umgebogen, wobei der linke *a* kürzer und enger als der rechte *b* ist. Letzterer trägt nahe der Biegung eine Marke *m*. *b* wird eingetaucht bei *a* unter Einschaltung eines Kugelrohres gesaugt und so lange entweder abgetupft oder mittelst eines Stäbchens zugegeben, bis in *b* die Flüssigkeit gerade bis *m* steht. Das LANDOLT'sche Pyknometer[3]) (Fig. 45) trägt beiderseits Röhrchen mit Käppchen; die Füllung



(Ph. 44.)

[1]) J. JOLY, Proc. Dubl. Soc. 5, pag. 41. 1886.
[2]) SPRENGEL, POGG. Ann. 150, pag. 459. 1873.
[3]) LANDOLT, Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen, Ber. 1879.

erfolgt, indem man das eine derselben durch einen aufpassenden Heber ersetzt. Noch andere Formen sind von KAHLBAUM[1]) angegeben.



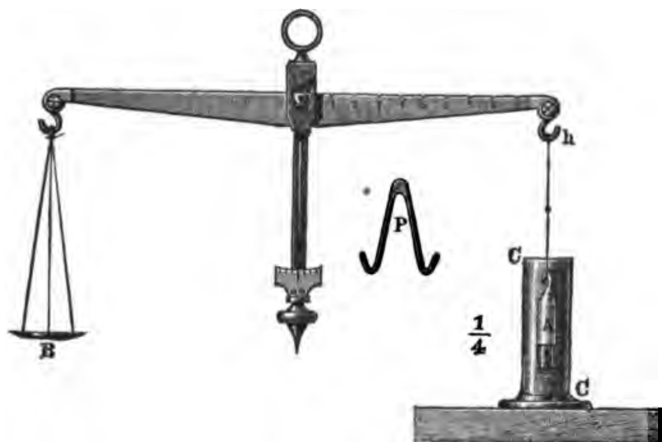
(Ph. 45.)

Specielle Pyknometer zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten bei höheren Temperaturen hat R. SCHIFF[2]) construirt.

Hieran mögen dann gleich einige weitere, vorzugsweise für den Chemiker wichtige Methoden, deren Erwähnung hier genügt, angeschlossen werden: Die Methoden von RAMSAY[3]) und von SCHALL[4]) für siedende Flüssigkeiten, sowie die Methode von BLÜMCKE[5]) für Flüssigkeiten, welche Gase unter hohem Drucke absorbirt enthalten.

2. Durch Wägung und Volumenbestimmung. In kalibrirten Röhren oder Gefässen lässt sich letztere leicht direkt ausführen. Nur muss man die capillaren Fehlerquellen dadurch vermeiden, dass man die gewogene Flüssigkeitsmenge nicht iu die leere, sondern in die schon vorher mit etwas gleicher Flüssigkeit gefüllte Röhre giesst und stets den horizontalen Theil der Oberfläche abliest; die Ablesung selbst erfolgt mit Skale oder Kathetometer.

3. Nach dem archimedischen Princip (s. o.). Man wägt irgend einen Körper, z. B. eine an einem Draht aufgehängte, theilweise mit Quecksilber gefüllte Glaskugel der Reihe nach in Luft (1), in Wasser (2), und in der zu untersuchenden Flüssigkeit (3); es ist dann $s = (1-3)/(1-2)$. Bei den von BRUNNER construirten Glasstücken ist der Gewichtsverlust in Wasser gerade gleich 1 *g*, also sehr einfach $s = (1-3)$.



(Ph. 46.)

4. Mit der MOHR-schen Waage.[6]) In derselben gelangt das vorige Princip in bequemer Weise zur Anwendung (Fig. 46). An

[1]) KAHLBAUM, WIED. Ann. 19, pag. 378. 1883.
[2]) SCHIFF, Chem. Ber. 14, pag. 2761. 1881.
[3]) RAMSAY, Journ. Chem. Soc. 1870.
[4]) SCHALL, Chem. Ber. 17, pag. 2199. 1884.
[5]) BLÜMCKE, WIED. Ann. 23, pag. 404. 1884.
[6]) MOHR, Pharmaceutische Technik. 1853.

dem einen Arm des Waagebalkens hängt der Glaskörper A, welcher meist gleichzeitig als Thermometer dient, und welcher durch ein Gegengewicht am anderen Arme gerade äquilibrirt wird. Giesst man dagegen Wasser in das Gefäss, so muss man den Reiter P auf das Ende des in zehn Theile getheilten Armes setzen, um das gestörte Gleichgewicht wieder herzustellen; das Gewicht des Reiters ist nämlich gerade gleich dem Gewichtsverluste des Glaskörpers in Wasser. Giesst man endlich statt Wasser die zu untersuchende Flüssigkeit in das Gefäss, so muss man, wenn sie leichter als Wasser ist, den Reiter auf einen der Axe näheren Theilstrich bringen, wenn sie schwerer als Wasser ist, zu dem am Ende des Armes zu belassenden Reiter noch einen oder mehrere gleich schwere hinzufügen, und zwar alle bis auf den letzten ebenfalls auf das Ende, den letzten aber auf den geeigneten Theilstrich setzen. Erhält man auf diese Weise durch eine einzige Wägung das specifische Gewicht der Flüssigkeit in Ganzen und Zehnteln, so dienen zwei weitere Reiter, von denen der eine $0{\cdot}1\,P$, der andere $0{\cdot}01\,P$ wiegt, zur Ermittelung der zweiten und dritten Decimalstelle. Bei concentrirter Schwefelsäure müsste man z. B. einen P-Reiter an das Ende, einen anderen auf Theilstrich 8, den kleinen Reiter auf 4 und den ganz kleinen auf 8 bringen; es ergiebt sich also $s = 1{\cdot}848$.



(Ph. 47.)

Derartige Waagen werden in verschiedenartiger Ausführung, namentlich von WESTPHAL,[1] ROHRBECK und REIMANN hergestellt. Uebrigens sei bemerkt, dass in derselben Weise, wie hier die Hebelwaage, so auch die Neigungswaage und Waagen anderer Art zur Bestimmung des specifischen Gewichtes verwendet werden können.[2]

5. Mit der NICHOLSON'schen Senkwaage (s. o.). Ist deren Gewicht A, und P das Uebergewicht, das erforderlich ist, um in Wasser die Marke einzustellen, so ist $A + P$ das Gewicht des dem eintauchenden Theile gleichen Volumens Wasser; ist nun das in der zu untersuchenden Flüssigkeit zur Einstellung der Marke erforderliche Uebergewicht p, so ist $s = (A + p)/(A + P)$.

Eine hydrostatische Waage, welche gewissermaassen eine Umkehrung der NICHOLSON'schen Senkwaage ist, hat J. JOLY[3] construirt, hauptsächlich in der Absicht, die aus der Adhäsion sich ergebenden Fehler zu verringern.

6. Mit der JOLLY'schen Federwaage (ganz analog wie oben bei festen Körpern).

7. Mit dem Aräometer. Während man bei der Senkwaage durch Veränderung des Gewichtes stets dasselbe eingetauchte Volumen erreicht, bleibt hier umgekehrt das Gewicht des Tauchkörpers stets dasselbe, und man beobachtet, wie weit derselbe in der betreffenden Flüssigkeit eintaucht. In Folge ihrer Bequemlichkeit hat diese Methode in der Praxis eine grosse Verbreitung gefunden; aber auch in der Wissenschaft ist sie, wenn es sich weniger um Genauigkeit als um Schnelligkeit handelt, häufig brauchbar. Fig. 47 stellt ein Aräometer typisch dar. Wie man sieht, besteht dasselbe aus einer Glasröhre, welche unten zur Beschwerung etwas Quecksilber enthält und oben in eine engere Röhre sich fortsetzt, damit schon ein kleiner Unterschied der eingetauchten Volumina sich durch einen verhältnissmässig grossen Längenunterschied

[1]) WESTPHAL, Arch. Pharm. 10, pag. 322. 1867.

[2]) S. hierüber den Bericht üb. die Lond. Ausst. Braunschw. 1878, pag. 264 ff.

[3]) J. JOLY, Proc. Dubl. Soc. 5, pag. 347. 1887.

des herausragenden Stückes zu erkennen gebe, d. h. damit auf der auf dieser Verlängerung angebrachten Skale die Theilstriche recht weit auseinander kommen; die Empfindlichkeit wird dann eine um so grössere sein. Bei einem derartigen Apparate ist offenbar das specifische Gewicht der Flüssigkeit, in welche man ihn eintaucht, dem eingetauchten Volumen umgekehrt proportional. Die Skale muss also Volumentheile angeben. Man stellt sie jedoch gewöhnlich nicht durch wirkliche Ausmessung der Volumina her, sondern kalibrirt sie empirisch. Dabei beschränkt man sich, damit der Apparat nicht zu lang werde, auf die Herstellung einer Skale, welche entweder für Flüssigkeiten, die schwerer als Wasser sind, oder für Flüssigkeiten, die leichter als Wasser sind, brauchbar ist. Im ersteren Falle misst man die vor dem Zuschmelzen der Röhre einzufüllende Quecksilbermenge so ab, dass beim Eintauchen in Wasser die Skale gänzlich eintaucht und folglich die Wassermarke, die man jetzt anbringt, ganz oben hinfällt. Nach dem Zuschmelzen taucht man dann den Apparat in eine schwere Flüssigkeit, z. B. von $s = 2$. Die entsprechende Marke liefert dann den anderen festen Punkt der Skale, und es erübrigt nur noch, den Raum zwischen beiden, resp. auch noch über letztere hinaus, in gleiche Theile zu theilen. Am bequemsten sind die Skalen, auf welchen unmittelbar die specifischen Gewichte angegeben sind; bei anderen ist die Wassermarke mit 100, die andere mit 50 bezeichnet, so dass, wenn man die Zahl n abliest, $s = 100/n$ ist. Ganz analog bei den für leichtere Flüssigkeiten bestimmten Aräometern; nur liegt hier die Wassermarke am unteren Ende der Skale, und die andere Marke wird durch eine leichte Flüssigkeit ermittelt.

Zuweilen nennt man Aräometer, welche gleich die specifischen Gewichte angeben, Densimeter, die anderen Volumeter.

Eine besondere Klasse von Aräometern hat die Bestimmung, durch Messung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeitsgemischen, Lösungen oder Lösungsgemischen den Antheil der einzelnen Bestandtheile, d. h. die Zusammensetzung der Flüssigkeit zu ermitteln. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass diese Ermittelung nicht etwa immer auf rechnerischem Wege erfolgen kann. Sind nämlich s, s', S die specifischen Gewichte der Bestandtheile und der Mischung, und sind in 100 Volumentheilen der letzteren v resp. v' Volumentheile der Bestandtheile enthalten, so drückt die Gleichung

$$100\,S = vs + v's'$$

die Thatsache aus, dass das Gesammtgewicht gleich der Summe der einzelnen Gewichte ist. Kann man nun weiter annehmen, dass auch das Volumen nach der Vereinigung gleich der Summe der einzelnen Volumina ist, so kann man $100 - v$ statt v' schreiben, also

$$100\,S = vs + (100 - v)\,s'$$

setzen, wodurch

$$v = 100\,\frac{S - s'}{s - s'}$$

wird. In vielen Fällen findet aber bei der Vereinigung zweier Stoffe eine Volumenänderung statt. Dann muss man zunächst mittelst anderer Methoden die specifischen Gewichte der verschiedenen Mischungen jener Stoffe ermitteln und hiernach die betreffende Aräometerskala berechnen.

So verhält es sich z. B. bei Mischungen von Wasser und Alkohol (s. unten); die betreffenden Apparate, welche Alkoholometer heissen, sind daher sämmtlich empirisch, von den verschiedenen Construkteuren aber ganz verschieden graduirt. Die älteren Apparate, z. B. von Baumé, Cartier und Beck, haben

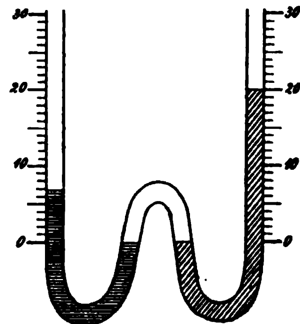
ganz willkürliche Skalen; bei den neueren (aber auch einigen alten, wie denen von GAY-LUSSAC und TRALLES) liest man unmittelbar den Procentgehalt an Alkohol ab, und zwar bei dem von TRALLES die Raumprocente, bei dem von RICHTER die Gewichtsprocente.

Andere Instrumente dieser Art sind die Oelmesser, Galaktometer, Laugenmesser, Sacharometer, Salzwaagen u. s. w. Zur Reduction einiger willkürlicher Aräometerskalen auf specifische Gewichte diene folgende Tabelle:

Leichter als Wasser				Schwerer als Wasser		
Spec. Gew.	BAUMÉ	BECK	CARTIER	Spec. Gew.	BAUMÉ	BECK
0·75	58·4	56·7	—	1·0	0·0	0·0
0·80	46·3	42·5	43·0	1·1	13·2	15·4
0·85	35·6	30·0	33·6	1·2	24·2	28·3
0·90	26·1	18·9	25·2	1·3	33·5	39·2
0·95	17·7	8·9	17·7	1·4	41·5	48·6
1·00	10·0	0·0	11·0	1·5	48·4	56·7
				1·6	54·4	63·7
				1·7	59·8	70·0
				1·8	64·5	75·6
				1·9	68·6	
				2·0	72·6	

8. Durch Vergleichung mit festen Körpern von bekanntem specif. Gewicht. Als solche können für rasche Bestimmungen die WILSON'schen Glasperlen dienen; man wirft dieselben, deren jede ein anderes auf ihr bezeichnetes spec. Gewicht hat, in die betreffende Flüssigkeit; es werden dann sämmtliche bis auf eine entweder untersinken oder oben schwimmen, und nur jene eine wird im Innern der Flüssigkeit schweben; dem specif. Gewicht dieser kommt das der Flüssigkeit am nächsten.

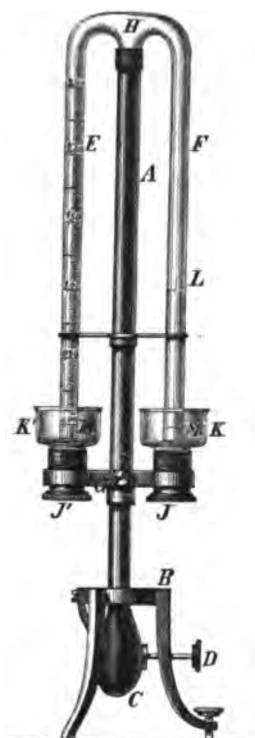
9. Mit communicirenden Röhren. In zwei communicirenden Röhren verhalten sich die Höhen verschiedener Flüssigkeiten umgekehrt wie ihre specif. Gewichte. Dieser Satz liefert also eine Methode zur Bestimmung der letzteren, bei welcher nur Längenmessungen resp. Skalenablesungen, aber gar keine Wägung erforderlich ist. Bei Flüssigkeiten, welche sich bei der gegenseitigen Berührung nicht beeinflussen, kann man einfach ein U-Rohr mit langen Schenkeln anwenden und zuerst Wasser, dann die Flüssigkeit einfüllen resp. umgekehrt, je nachdem die Flüssigkeit leichter oder schwerer als Wasser ist; es steht dann schliesslich die schwerere Flüssigkeit in dem einen Schenkel, in der Biegung und im anderen Schenkel bis zur Nullmarke, wo sich dann die andere anschliesst; in gleicher Höhe mit der erwähnten Marke befindet sich eine solche auch in dem ersten Schenkel, und von diesen Marken nach oben laufen die Skalen. Reicht das Wasser bis m, die Flüssigkeit bis n, so ist $s = m/n$. Darf die Flüssigkeit mit Wasser nicht in Berührung kommen, so trennt man sie entweder durch Quecksilber, das man vorher in die Biegung giesst, so dass es beiderseits bis zu den Nullmarken reicht, und füllt dann in die eine Röhre Wasser, in die andere so viel Flüssigkeit, bis dies wiederum der Fall ist; oder man wendet eine Röhre



(Ph. 48.)

von der in Fig. 48 angedeuteten Form an; zwischen beiden Flüssigkeiten befindet sich dann freilich in der Regel comprimirte Luft; ihr Druck ist aber beiderseits der gleiche und kommt daher nicht in Betracht.

Bei anderen Apparaten dieser Art füllt man die beiden Flüssigkeiten nicht ein, sondern lässt sie in einem luftverdünnten Raume aufsteigen; ein solcher wurde zuerst von ALEXANDER angegeben. Sehr bequem ist das pneumatische Densimeter von MICHAELIS (Fig. 49)[1]). Mit der Schraube D presst man aus einem Gummiball C etwas Luft heraus, die durch A aus E und F entweicht. Dann lässt man die Gefässe K und K' mit dem Querbalken G herab, füllt K' mit Wasser, K mit der Flüssigkeit und hebt sie jetzt wieder so weit, bis die Röhren eintauchen. Nun dreht man D wieder zurück, sodass C sich erweitert und die Flüssigkeiten in E und F aufsteigen. Durch combinirte Benutzung der drei Schrauben D, J und J' bringt man dann die Flüssigkeiten in F, K und K' resp. bis zu den Marken L' M M'. Der Stand in E ist dann unmittelbar das gesuchte specif. Gewicht.



(Ph. 49.)

Weitere hierher gehörige Methoden oder Apparate sind von BOHN, HANDL[2]), AMAT u. A. angegeben worden.

C. Für Gase und Dämpfe.

Zu der eingangs gegebenen Definition ist hier noch folgendes zu bemerken. Zunächst kann man entweder Wasser von 4° oder Luft von 0° und 760 mm Quecksilberdruck als Einheit zu Grunde legen. In beiden Fällen hat man es mit einer Grösse zu thun, welche von dem Druck und der Temperatur des betreffenden Gases in hohem Grade abhängig ist, so dass es sich hier nicht bloss, wie bei dem Einfluss der Temperatur auf das spec. Gewicht der festen und flüssigen Körper, um eine Correktion handelt. Man muss sich also entweder darauf beschränken zu sagen: Das Gas hat bei der Temperatur t und dem Druck p das spec. Gewicht s (bezogen auf Luft von 0° und 760 mm) oder man muss eine ganze Versuchsreihe anstellen, um das spec. Gewicht des Gases bei verschiedenen Drucken und Temperaturen zu bestimmen. Für die eigentlichen Gase, d. h. für diejenigen Stoffe, welche bei gewöhnlicher Temperatur und Druck gasförmig sind, ist dies nun aber, wenigstens für die Ermittelung der spec. Gewichte innerhalb dieses Temperatur- und Druckbereiches, deshalb nicht nöthig, weil das Verhalten dieser Stoffe sehr näherungsweise durch die Gesetze von BOYLE und GAY-LUSSAC bestimmt wird, sodass, wenn man das spec. Gewicht des Gases in einem einzigen Zustande, z. B. bei 0° und 760 mm kennt, es sich für jeden anderen Zustand nach der Formel

$$s = s_0 \frac{p}{760} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t}$$

berechnen lässt, wo $\alpha = 0{,}00367$ ist. Da diese Formel für alle der erwähnten Klasse angehörigen Gase die gleiche ist, so wird das spec. Gewicht eines Gases bei 0 und 760, bezogen auf Luft von 0 und 760, genau ebenso gross sein, wie

[1]) MICHAELIS, Z. f. Instr. K. 1883. pag. 268.

[2]) HANDL, Z. z. Förd. d. phys. Unt. 2, pag. 155. 1885.

das spec. Gewicht des Gases bei t und p, bezogen auf Luft bei t und p. Macht man daher nunmehr die Unterscheidung, dass man den Ausdruck spec. Gewicht stets dann gebraucht, wenn Wasser von 4° oder Luft von 0° und 760 als Einheit zu Grunde liegt, den Ausdruck Dichte dagegen, wenn man das Gas immer mit Luft von gleicher Temperatur und Druck vergleicht, so kann man sagen: das spec. Gewicht der Gase ist eine variable, die Gasdichte ist eine constante Grösse. Anders verhält es sich bei den übrigen Gasen, den sogen. Dämpfen, welche, ausser bei ganz hohen Temperaturen, dem BOYLE- GAY-LUSSAC'schen Gesetz auch nicht annähernd gehorchen. Hier wird nicht nur das spec. Gewicht, sondern auch die Dichte, die sogen. Dampfdichte, mit Druck und Temperatur variiren, wenn auch nicht so stark wie jenes. Aus chemischen Gründen pflegt man bei Dämpfen meist nicht das spec. Gewicht, sondern die Dampfdichte zu ermitteln. Man muss dabei im allgemeinen das p und t hinzufügen, für welches sie gelten soll; thut man es nicht, so heisst das: p und t haben solche Werthe, dass der Dampf von seinem Condensationspunkte weit entfernt ist, sich also wie ein Gas verhält. (Tabelle 11).

Methoden für Gase. 1. Direkte Methoden. Ein Glasballon, dessen Volumen v durch Füllung mit Wasser und Wägung dieses Wassers ermittelt ist, wird bei t^0 und dem Barometerstand b mit dem Gase gefüllt und gewogen. Das Gewicht sei G. Dann wird mittelst eines am Ballon angebrachten Hahnes durch Verbindung mit einer Luftpumpe einTheil des Gases ausgepumpt, sodass der Druck im Ballon nur noch p, und das Gewicht G' ist. Es ist dann, wie leicht auszurechnen, das spec. Gewicht bei 0 und 760

$$s_0 = \frac{G - G'}{v} \frac{760}{b - p}(1 + \alpha t).$$

Diese Methode[1]), ohne weiteres angewandt, würde aber wegen der Ausdehnung des Glases, des Gewichtsverlustes in Luft u. s. w. zu ungenaue Resultate ergeben. Die Ausdehnung des Glases wurde zuerst von ARAGO und BIOT berücksichtigt, und zwar, wenn β der betreffende Coefficient ist, durch Hinzufügung des Factors $1 + \beta t$ im Nenner. Ein von allen Fehlerquellen freies Verfahren wandte REGNAULT[2]) an. Anstatt den Ballon mittelst Gewichten zu äquilibriren, hängte er an die andere Wagschale einen zweiten Ballon von demselben Glase und möglichst gleichem Volumen. Der kleine Gewichtsunterschied, welchen die Ballons, mit Wasser gefüllt, ergaben, wurde durch ein Zusatzgewicht ausgeglichen, ebenso des weiteren die Gleichgewichtsstörung, welche beim Eintauchen der Ballons in Wasser in Folge ihrer Volumenverschiedenheit eintrat, durch Anhängen eines kleinen Glaskörpers an die den kleineren Ballon tragende Schale. Hier mit ist der Einfluss der Luft eliminirt. Mittelst eines eigenen Apparates wird nun der grössere Ballon mit Gas von 0°, dem Drucke p und völliger Trockenheit gefüllt; das zur Herstellung des Gleichgewichtes jetzt von neuem erforderliche Zusatzgewicht sei g. Bei der Wiederholung des Versuches habe das Gas wieder 0°, aber den Druck p' und das Zusatzgewicht sei g'; es ist dann, bezogen auf Wasser,

$$s_0 = \frac{g - g'}{v} \frac{760}{p - p'}$$

[1]) ARAGO u. BIOT, Mém Ac. 1806. — DUMAS u. BOUSSINGAULT, Ann. Ch. Phys. (3) 3. 1841.

[2]) REGNAULT, Mém. Acad. 21. — Andere Abänderungen rühren von BUFF, MARCHAND u. A. her.

und, bezogen auf Luft, wenn man mit dieser die entsprechenden Versuche anstellt, und dabei P und P', G und G' findet:

$$\sigma_0 = \frac{g-g'}{G-G'} \frac{P-P'}{p-p'} .$$

2. Durch Ausströmungsversuche. Sowohl die Theorie von DANIEL BERNOUILLI[1]), als auch die Versuche von GRAHAM[2]), BUNSEN[3]) u. A. führen zu dem Satze, dass die Ausströmungszeiten gleicher Volumina verschiedener Gase aus engen Oeffnungen in dünner Wand den Quadratwurzeln aus ihren specif. Gewichten proportional sind; beobachtet man also die Ausflusszeiten t und t_0 für ein Gas und für Luft, so findet man, bezogen auf Luft,

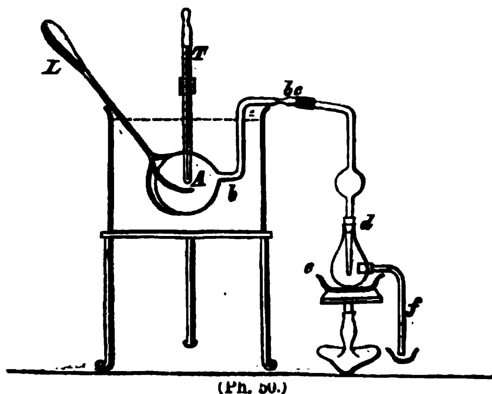
$$s = \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 .$$

3. Nach dem archimedischen Prinzip. Auf diesem beruhende Apparate sind insbesondere von LUX[4]) und LOMMEL[5]) construirt worden. Da es mit Schwierigkeiten verknüpft ist, das Gefäss, in welches der in diesem Falle nothwendiger Weise grosse Senkkörper eintaucht, gasdicht zu machen und längere Zeit hindurch mit der gleichen Gasmenge gefüllt zu erhalten, so lässt man lieber einen continuirlichen Gasstrom durch das Gefäss hindurchgehen; auch dann wird das archimedische Prinzip angewendet werden dürfen.

LUX[4]) hat übrigens für denselben Zweck auch andere Apparate construirt, darunter solche, welche das spec. Gewicht der Gase unmittelbar auf einer Skala abzulesen gestatten.

4. Besondere Apparate und Methoden für hohe Temperaturen, z. B. der Apparat von V. MEYER.

Methoden für Dämpfe. 1. Durch Wägung und Volumenmessung des Dampfes. Bei dieser von DUMAS[6]) eingeführten Methode kann man sich folgenden Apparates bedienen (Fig. 50).



(Fig. 50.)

An einem Glasballon A von ca. $^1/_4$ Liter Inhalt ist eine, am Ende c sich etwas verengende Glasröhre b b angesetzt. Man bringt einige Gramm der Flüssigkeit, deren Dampf untersucht werden soll, in den Ballon. Das Bad, in welchem sich der Ballon befindet (z. B. ein Oelbad), erhitzt man auf 10 bis 20° über den Siedepunkt, sodass die ganze Substanz in dem Ballon verdampft ist, was man an dem Aufhören des Dampfaustrittes aus c erkennt. Es sei bemerkt, dass c frei in die Luft münden kann, besser aber mit einem Condensationsapparat e d f, Luftpumpe und Manometer verbunden wird.

[1]) D. BERNOUILLI, Hydrodynamica, Argent. 1738; pag. 224.
[2]) GRAHAM, Phil. Mag. (3) 2, pag. 175. 1833. — Trans. R. Soc. 1846, pag. 573. — 1863, pag. 385.
[3]) BUNSEN, Gasometrische Methoden, Braunschw. 1857, pag. 128.
[4]) LUX, Zeitschr. f. Instr. K. 1885, pag. 411; 1886, pag. 255. — Z. f. anal. Ch. 25, pag. 3. 1886.
[5]) LOMMEL, Z. f. Instr. K. 1886, pag. 109. — Wied. Ann. 27, pag. 144. 1886.
[6]) DUMAS, POGG. Ann. Bd. 9. 1827.

Man schmilzt nun bei c zu, liest bei t' und p' ab, trocknet den herausgenommenen und abgekühlten Ballon ab, wägt ihn und liest wieder t und p ab. Endlich wägt man nach Abbrechen der Spitze den Ballon, einmal mit Luft, sodann mit Wasser gefüllt. Die Gewichte des Ballons mit Wasser, Luft, Dampf seien M, m, m', die Dichte von Luft und Wasser σ und s, endlich 3β der kubische Ausdehnungscoefficient des Glases; dann ist die gesuchte Dampfdichte

$$d = \frac{(m' - m)\frac{s}{\sigma} + (M - m')}{(M - m)\frac{p}{p'}\frac{1 + 0{\cdot}00367\,t'}{1 + 0{\cdot}00367\,t}[1 + 3\beta(t - t')]}$$

oder angenähert, aber nur für rohe Zwecke

$$d = \left(\frac{m' - m}{M - m}\frac{1}{\sigma} + 1\right)\frac{p'}{p}\frac{1 + 0{\cdot}00367\,t}{1 + 0{\cdot}00367\,t'}.$$

Modifizirte Gestalten erhielt der Ballon durch PLAYFAIR und WANKLYN, PETTERSSON und PAWLEWSKI[1]); letzterer verkleinerte ihn überdies auf 20 bis 30 ccm und ersetzte das Zuschmelzen des Röhrchens durch rasches Schliessen desselben, wodurch man den Vortheil erlangt, Experiment und Rechnung zu vereinfachen. Ferner wenden DEVILLE und TROOST[2]) ein Dampfbad an, um das Verfahren auf höhere Temperaturen anwendbar zu machen; der Ballon ist dabei aus Glas oder wenn 440° überschritten werden, aus Porzellan.

Sehr einfach, aber oft brauchbar, ist die REGNAULT'sche Methode[3]). In zwei lose verschlossenen eisernen Flaschen wird gleichzeitig Quecksilber und die zu untersuchende Substanz erhitzt, sodass die überschüssigen Dämpfe entweichen; dann wird wieder abgekühlt und die Gewichte m und m_0 der Substanz und des Quecksilbers, welche zurückgeblieben sind, gemessen; sind v und v_0 die Volumina der Flaschen, so ist (da die Dampfdichte des Quecksilbers etwa 6,98 ist)

$$d = 6{\cdot}98\,\frac{m}{m_0}\,\frac{v_0}{v}.$$

Endlich ist noch die Methode von BUNSEN[4]) zu erwähnen, welche unmittelbar die Gewichte gleicher Volumina Dampf und Luft bei gleichem t und p liefert.

2. Durch Volumenmessung des Dampfes, welchen ein gegebenes Flüssigkeitsgewicht entwickelt. Diese Methode ist die älteste von allen und von GAY-LUSSAC[5]) ersonnen worden. In einem eisernen, zum Theil mit Quecksilber gefüllten Gefässe erhebt sich eine oben geschlossene, weite, mit ihm communizirende Glasröhre, welche, da sie nur etwa halb so lang wie eine Barometerröhre ist, völlig mit Quecksilber angefüllt ist. In ein Kügelchen aus ganz dünnem Glase, das an einer Stelle in eine offene Spitze ausläuft, bringt man die zu untersuchende Substanz in festem oder flüssigem Zustande, und schmilzt dann die Spitze zu. Nun lässt man das Kügelchen von unten in die Röhre aufsteigen, umgiebt letztere zum Zwecke der Temperaturmessung mit einem weiten Glasrohr mit Wasser und setzt den ganzen Apparat auf einen Heizofen. Das Kügelchen wird dann sehr bald zersprengt, die Substanz verdampft und drückt das Quecksilber bis zu einem Theilstrich der kalibrirten

1) PAWLEWSKI, Ch. Ber. 16, pag. 1293. 1883.
2) DEVILLE u. TROOST, Ann. Ch. Phys. (3) 58, pag. 257. 1858.
3) REGNAULT, ebd. (3), 63, pag. 45. 1861.
4) BUNSEN, Lieb. Ann. 141, pag. 273. 1867.
5) GAY-LUSSAC, Ann. Chim. Phys. 80, pag. 118. 1811.

Röhre hinab, an welchem man das auf 0° bezügliche Volumen direct ablesen kann. Wog die in das Kügelchen gebrachte Substanz m, ist das abgelesene Dampfvolumen v_0 und 3β der kubische Ausdehnungscoefficient des Glases, so ist bei der im Wasserrohr gemessenen Temperatur t und bei dem Drucke $p = b - h$ (b Barometerstand, h Quecksilberhöhe in der Röhre)

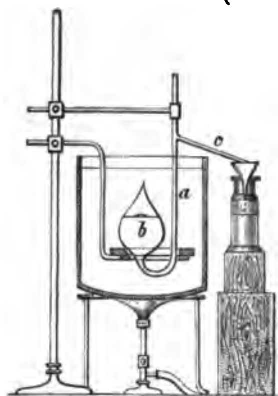
$$d = \frac{m}{v_0(1 + 3\beta t)}.$$

Die Methode, resp. der Apparat hat dann später durch LANDOLT[1]), GRABOWSKI, ganz besonders durch A. W. v. HOFMANN[2]) mannigfaltige Verbesserungen erfahren.

3. Verdrängungsmethode.

a) Verdrängung von Flüssigkeiten. Diese Methode rührt von A. W. v. HOFMANN[3]) her und ist von V. MEYER[4]) u. A. modificirt worden.

Am besten bedient man sich hierzu folgenden Apparates (Fig. 51). In b wird die Substanz (Gewicht m) gebracht, dann durch die Röhre a Quecksilber, der Ballon, wenn er voll ist, oben zugeschmolzen, Quecksilber nachgegossen, bis es bei c ausfliesst, dann der Ballon in das Bad gebracht, so dass Quecksilber ausfliesst, p und t abgelesen, herausgenommen und der Quecksilberstand im Ballon bezeichnet. Der Druckunterschied zwischen diesem Stande und c sei, auf 0° reducirt, p'; ferner sei t_0 die Anfangstemperatur des Quecksilbers, α sein Ausdehnungscoefficient, π seine Spannkraft bei $t°$, δ seine Dichte, v das beobachtete Volumen des Dampfes; endlich M das Gewicht des ganzen, M' das des ausgeflossenen Quecksilbers. Durch Einführung der nöthigen Correctionen und Constanten erhält man dann



(Phys. 51.)

$$v = \frac{M'}{\delta} - \frac{M}{\delta_0}(\alpha - 0{\cdot}0000275)(t - t_0)$$

und hiermit schliesslich

$$d = \frac{m}{0{\cdot}001296\, v}\,\frac{760(1 + 0{\cdot}00367\, t)}{p + p' - \pi}.$$

Bei der MEYER'schen Modification tritt WOOD'sches Metall an die Stelle von Quecksilber.

b) Verdrängung von Gasen. Die erste derartige Anordnung rührt von DULONG[5]) her, die einfachste und brauchbarste aber von V. MEYER[6]) (Fig. 52). An einen Cylinder von 100 *ccm* Inhalt und 200 *mm* Höhe wird ein 600 *mm* langes, 6 *mm* weites Glasrohr angeschmolzen, das oben in der Erweiterung d endet und durch einen Kautschukpfropfen verschlossen ist. Bei a geht ein enges Seitenrohr ab, das bald nach unten umbiegt und in Wasser unter der Oeffnung eines kalibrirten Rohres endigt. Das Rohr db steckt in einem weiteren Rohre, das, je

[1]) LANDOLT, Ch. Ber. 5, pag. 497. 1872.

[2]) A. W. v. HOFMANN, Ch. Ber. 1 u. ff.

[3]) v. HOFMANN, Lieb. Ann. Suppl. 1, pag. 10. 1861.

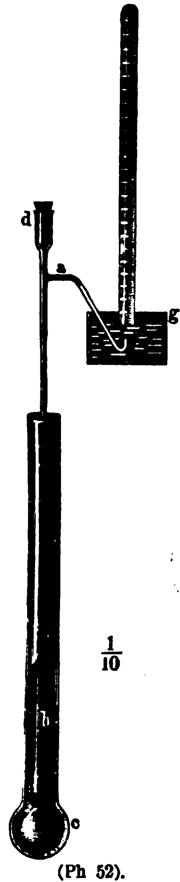
[4]) V. MEYER, Ch. Ber. 9, pag. 1216; 11, pag. 2068 u. s. w.

[5]) DULONG, Compt. Rend. 78, pag. 536. 1874.

[6]) V. MEYER, Ch. Ber. 11, pag. 2253. 1879.

nach der Temperatur, aus Glas, Schmiedeeisen u. s. w. besteht und von dem aus der in *c* befindlichen Substanz entwickelten Dampf erfüllt ist. Je nach der erforderlichen Temperatur können als Heizflüssigkeiten dienen: Wasser (Siedep. 100°), Xylol (140°), Anilin (185°), Diphenylamin (310°), Anthrachinon (368°) u. s. w., für ganz hohe Temperaturen wird eventuell ein Bleibad angewandt. Sobald die Temperatur constant geworden ist, wirft man die zu untersuchende Substanz, in ein Glaskügelchen oder Fläschchen eingeschlossen, von oben in das Rohr *bd* und schliesst wieder; damit das Fläschchen beim Aufschlagen keinen Schaden anrichte, bedeckt man den Boden mit etwas Quecksilber oder dichter Glaswolle. Das Fläschchen platzt, und der sich bildende Dampf verdrängt ein ihm gleiches Volumen Gas, welches sich in dem kalibrirten Rohre über dem Wasser ansammelt. Als verdrängtes Gas eignet sich Luft oder Stickstoff. Ist *m* das Gewicht der untersuchten Substanz, *v* das verdrängte Gasvolumen bei der Temperatur *t* des absperrenden Wassers, *b* der Barometerstand, *h* die Wasserhöhe im Rohr über dem äusseren Niveau, also, wenn *s* das specifische Gewicht des Qecksilbers bezogen auf Wasser von $t°$ ist, $h|s$ der Quecksilberdruck jener Wasserhöhe, endlich π die Spannung des Wasserdampfes bei $t°$, so hat man

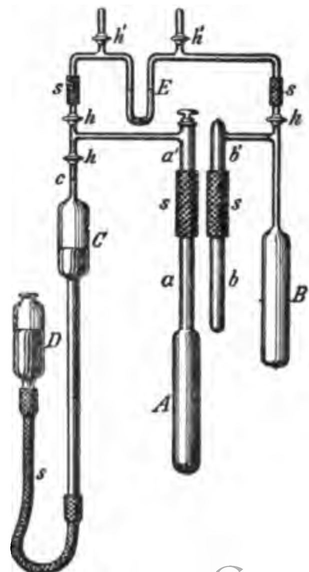
$$d = \frac{m}{0{\cdot}001296\,v} \cdot \frac{760\,(1 + 0{\cdot}00367\,t)}{b - \frac{h}{s} - \pi}.$$



(Ph 52).

Diese Methode hat vielfache Abänderungen erfahren, so von V. Meyer[1]) selbst, Crafts[2]), Meunier[3]) (für Bestimmungen bei vermindertem und variablem Druck), Klobukoff[4]) u. s. w.

Eine besondere Erwähnung verdient der neueste und, wie es scheint, in höchst befriedigender Weise functionirende Apparat von Nilsson und Pettersson[5]), mit welchem man unter exakter Temperaturmessung die Dampfdichte flüchtiger Körper in wenigen Minuten bestimmen kann (Fig. 53). Der Verdampfungsraum *A* und die Rohre *a* und *b* sind aus Platin, alles übrige aus Glas. *C* ist die von *c* an graduirte Messröhre, in welcher der Quecksilberstand mittelst *D* verändert werden kann. *E* ist ein capillares, mit einigen Tropfen concentrirter Schwefelsäure gefülltes Differentialmanometer. *A* und *B*, ebenso *a* und *b*, ebenso die von hier zum Manometer gehenden Capillarröhren sind genau gleich gross. Die Substanz wird in einem Becherchen nach *a'* gebracht und durch Quetschung von *s* dort gehalten; *B* wird auf 0° er-



(Ph. 53).

1) V. Meyer, Ch. Ber. in versch. Bdn.
2) Crafts, Compt. rend. 90, pag. 184. 1880.
3) Meunier, Compt. rend. 98, pag. 1268. 1884.
4) Klobukoff, Wied. Ann. 22, pag. 465. 1884.
5) Nilsson u. Pettersson, J. f. pr. Ch. 33, pag. 1. 1886.

halten. Zur Füllung des Apparates dient trockene Kohlensäure. Während man *A* erhitzt, stellt man *C* fortwährend so ein, dass im Apparat kein nennenswerther Ueberdruck entsteht und nach Erreichung constanter Temperatur die Schwefelsäure in beiden Röhren gleich hoch steht. Die Berechnung der Temperatur beruht darauf, dass das Gas in *A* sich unter constantem Druck ausdehnt und die Wirkung der Temperaturerhöhung in *a* durch den gleichen Vorgang in *b* compensirt wird. Sodann wird der im Apparat herrschende Druck durch kurzes Oeffnen der Hähne *h'* beseitigt und das Becherchen aus *a'* in *A* fallen gelassen. Die Substanz vergast in wenigen Sekunden und das verdrängte Gasvolumen wird in *C* abgelesen, wobei *E* zur feineren Einstellung dient.

4. Der letzteren ähnliche, aber speciell für ganz hohe Temperaturen eingerichtete Methoden von C. Langer und V. Meyer[1]).

5. Verschiedene Methoden, u. A. von Klobukoff (auf dem archimedischen Princip beruhend, »Dampfdichtearäometer,«) Horstmann; Playfayr und Wanklyn, Neumann, Negri, Bott und Macnair[2]) (Bestimmung der Druckänderung, welche durch Verdampfung einer bestimmten Menge Substanz in einem Gefässe von bekanntem Volumen bewirkt wird).

Resultate.

In den folgenden Tabellen ist ein, selbstverständlich nur kleiner Theil der nach den obigen Methoden erhaltenen Resultate zusammengestellt. Hierzu sind noch einige allgemeine Bemerkungen zu machen.

Die Dichten fester und flüssiger Körper hängen in geringem, die der Gase und Dämpfe in hohem Grade von der Temperatur ab. Bei festen und flüssigen Körpern bringt eine Steigerung der Temperatur um 100° meist nur eine Abnahme der Dichtigkeit um 1/1000 bis 20/1000 hervor, bei den Gasen, welche dem Gay-Lussac'schen Gesetz gehorchen, um 367/1000, bei den Dämpfen, soweit sie dies nicht ebenfalls thun, oft noch beträchtlich mehr. Alles weitere s. in den betr. Art. der Wärmelehre. Die Tabellen enthalten meist nur die einer bestimmten Temperatur entsprechende Dichtigkeit und zwar, wenn nichts vermerkt, für 0° oder für mittlere Zimmertemperatur. Nur für Wasser, dessen Dichtigkeit bis 4° zunimmt und dann erst wieder fällt, für Quecksilber sowie für Luft ist die Dichte für eine ganze Reihe von Temperaturen angegeben, weil diese Zahlen in den obigen Formeln vielfach eine wesentliche Rolle spielen und auch sonst von besonderer Bedeutung sind.

Von dem Drucke, unter welchem der Körper steht, hängt seine Dichte ebenfalls ab. Bei festen und flüssigen Körpern ist aber die durch Drucksteigerung erzielte Dichtesteigerung wiederum sehr geringfügig, bei Gasen, welche dem Boyle'schen Gesetz genügen, ist die Abhängigkeit eine sehr starke: die Dichte ist dem Druck umgekehrt proportional; noch stärker ist sie bei den Dämpfen, so weit dieselben jenem Gesetze nicht mehr gehorchen. Das Nähere s. bei den Art. Elasticität, Flüssigkeiten, Gase, Boyle'sches Gesetz, Dämpfe. Hier sei nur Folgendes bemerkt. Bei den festen Metallen lässt sich eine einfache Zahl für die Dichte meist deshalb nicht angeben, weil es ganz darauf ankommt, ob das Metall gegossen, gewalzt resp. gezogen oder gehämmert ist.

---

[1]) C. Langer und V. Meyer, Pyrochemische Untersuchungen; Braunschweig 1885.

[2]) Bott u. Macnair, Ch. Ber. 20, pag. 916. 1887.

Durch Guss hergestelltes Metall ist fast immer am wenigsten dicht, gewalztes oder gezogenes dichter, gehämmertes am dichtesten. Eine gewisse Mittelstellung nimmt elektrolytisches Metall ein.

Hierzu kommt noch ein weiterer, die Metalle betreffender Umstand. Nicht nur, dass Stücke desselben Metalls, die auf verschiedenem Wege gewonnen sind oder von verschiedenen Fundorten stammen, verschiedene Dichte zeigen, sondern auch Bruchstücke, welche man von demselben Ganzen loslöst, zeigen eine oft beträchtliche, auf unvollkommene Homogenität dieses Ganzen hinweisende Verschiedenheit der Dichte. Diese Verschiedenheit ist zum einen Theil eine örtlich regellos vertheilte (am grössten bei Legirungen z. B. Messing). Bei Messing ist ausserdem eine reguläre Abnahme der Dichte von aussen nach innen constatirt worden, sodass also die beim Guss zuerst erstarrten Theile die dichtesten sind; und dieses Verhalten ist auch für andere Metalle wahrscheinlich[1]).

Aus alledem folgt, dass man für genauere Zwecke die Dichte von Metallkörpern stets eigens bestimmen muss.

Einen weiteren, und zwar meist überaus beträchtlichen Einfluss auf die Dichte hat der Aggregatzustand des Körpers. Beim Schmelzen tritt bei der Mehrzahl der Körper Verringerung, bei den übrigen (z. B. Wasser) Erhöhung der Dichte ein; s. Schmelzen. Beim Verdampfen tritt stets eine starke Verminderung der Dichte ein; s. Dämpfe. Im übrigen sieht man aus den Tabellen, dass zwar die meisten festen Stoffe dichter sind als die meisten Flüssigkeiten; es giebt aber auch einige Flüssigkeiten, welche dichter als die meisten festen Stoffe sind; und im Vergleich mit einigen festen Stoffen, z. B. Kork, sind sogar alle Flüssigkeiten dichter. Von den Gasen und Dämpfen sind zwar selbst die schwersten noch mindestens 20 Mal so leicht wie die leichtesten festen oder flüssigen Stoffe; das gilt aber nur für gewöhnlichen Druck und nicht mehr für Drucke von mehr als 20 Atmosphären. Ist z. B. ein Gefäss mit Arsendampf von 50 Atmosphären Druck oder mit Sauerstoff von etwas über 400 Atmosphären Druck gefüllt, so würde ein Stück festen Lithiummetalls hineingebracht auf dem Dampfe schwimmen.

Das specifische Gewicht chemischer Verbindungen steht zu denen der Bestandtheile im allgemeinen in keiner einfachen Beziehung. Auch die Dichte von Flüssigkeitsgemischen und Lösungen, sowie von Metalllegirungen lässt sich aus den Dichten der Bestandtheile im allgemeinen nicht berechnen, weil dabei eine Vergrösserung oder Verkleinerung des Volumens ins Spiel kommt.

Bei den Gasen und Dämpfen, soweit sie dem BOYLE-GAY-LUSSAC'schen Gesetze genügen, steht die hier speciell so genannte Gasdichte resp. Dampfdichte in einer sehr merkwürdigen und wichtigen Beziehung zum Molekulargewicht. Nach dem Satze von AVOGADRO ist nämlich in gleichen Räumen verschiedener Gase, gleichviel ob sie Elemente oder Verbindungen sind, bei gleichem Druck und Temperatur die gleiche Anzahl von Molekeln vorhanden. Hieraus folgt, dass die Gewichte der Volumeneinheiten zu den Gewichten der einzelnen Molekeln, d. h. die Dichten zu den Molekulargewichten in einem für alle Gase gleichen Verhältnisse stehen müssen. Nun werden die Molekulargewichte auf das Atomgewicht des Wasserstoffes als Einheit bezogen;

[1]) HENNIG, WIED. Ann. 27, pag. 321. 1886.

die aus zwei Atomen bestehende Wasserstoffmolekel hat also das Mgw. 2. Andererseits hat Wasserstoff, auf Luft = 1 bezogen, die Dampfdichte 0·0691. Jenes constante Verhältniss ist also gleich 28·9. Bezieht man die Dampfdichten, statt auf Luft = 1, auf Wasserstoff = 2, so werden die Molekulargewichte und die Dichten sogar durch ganz dieselben Zahlen dargestellt, immer vorausgesetzt, dass Gas oder Dampf genügend weit vom Condensationspunkte entfernt sind. Die auf diese Weise indirekt berechneten Molekulargewichte stimmen mit den direkt ermittelten fast völlig überein. Da nun die direkte Bestimmung nicht selten Unbestimmtheiten bestehen lässt (z. B. bei den polymeren Kohlenwasserstoffen, für welche die Analyse nur die allgemeine Form C_mH_n ergiebt), so kann man die Kenntniss der Dampfdichte benutzen, um diese Unbestimmtheiten zu beseitigen. Andererseits ist das für die meisten Stoffe bekannte Molekulargewicht wichtig für die Kenntnis des idealen Werthes der Dampfdichte, welchem sich die experimentell gefundenen Werthe immer mehr nähern müssen, je mehr sich Gas oder Dampf dem Zustande nähert, in welchem das BOYLE-GAY-LUSSAC'sche Gesetz genau gilt.

Tabellen.[1]

1. Luft (trocken)

bei verschiedenem Druck und Temperatur, unter 45° Breite und im Meeresspiegel.

Anmerkung. Ist p der Druck, t die Temperatur, B die Breite des Ortes, H seine Höhe über dem Meere und R der Erdradius, so ist allgemein die Dichte der Luft von der absoluten Feuchtigkeit f:

$$d = 0{\cdot}001292743 \frac{p - 0{\cdot}354\,(1 + 0{\cdot}00367\,t)\,f}{(1 + 0{\cdot}00367\,t)\cdot 760} \times (1 - 0{\cdot}00265 \cos 2B)\left(1 - 2\frac{H}{R}\right).$$

t	$p = 720$	$p = 730$	$p = 740$	$p = 750$	$p = 760$	$p = 770$
0	0·001225	0·001242	0·001259	0·001276	0·001293	0·001310
2	1216	1233	1250	1267	1284	1301
4	1208	1224	1241	1258	1275	1291
6	1199	1216	1232	1249	1266	1282
8	1190	1207	1223	1240	1257	1273
10	1182	1198	1215	1231	1248	1264
12	1174	1190	1206	1223	1239	1255
14	1165	1182	1198	1214	1230	1246
16	1157	1174	1190	1206	1222	1238
18	1149	1165	1181	1197	1213	1229
20	1142	1157	1173	1189	1205	1221
22	1134	1150	1165	1181	1197	1213
24	1126	1142	1158	1173	1189	1204
26	1119	1134	1150	1165	1181	1196
28	1111	1127	1142	1158	1173	1188
30	1104	1119	1135	1150	1165	1181

[1]) Die Reihenfolge der Tabellen wurde z. Th. durch Satzrücksichten bestimmt.

2. Feste und flüssige chemische Elemente.

Element	Dichte	Mittelwerth	Element	Dichte	Mittelwerth
Aluminium, gegossen	2·56		Natrium		0·98
„ gewalzt	2·66	2·6	Nickel, gegossen	8·28	
„ gehämmert	2·75		„ gehämmert	8·67	8·9
„ rein bei 4°	2·58		„ gezogen	9·20	
Antimon		6·7	Niob	6·7—7·5	7·2
Arsen	(14°)	5·72	Osmium		22·48
Barium		3·85	Palladium	10·9—12·1	11·35
Beryll		2·06	Phosphor, gelb		1·83
Blei, gegossen	11·34		„ roth		2·19
„ gewalzt	11·38	11·36	„ met.		2·34
„ gezogen	11·41		Platin, gegossen	20·9—21·5	
Bor	2·5—2·7	2·6	„ gehämmert	21·3	21·2
Brom		3·15	„ gezogen	21·2—21·7	
Cadmium, gegossen	8·55	8·61	Quecksilber	(0°)	13·596
„ gehämmert	8·67		„ fest (—39°)	14·19	
Cäsium		1·9	Rhodium		12·1
Calcium		1·58	Rubidium		1·5
Cer		6·7	Ruthenium	11·0—12·3	11·9
Chlor (flüssig)		1·35	Sauerstoff (flüssig)		0·9
Chrom	5·9—7·0	6·4	bei 0° u. 200 At.	0·6	
Didym		6·54	bei —130° u. 300 At.	0·9	
Eisen, gegossen	7·0—7·7		Schwefel, rhombisch		2·07
„ geschmiedet	7·8		„ monoklin		1·96
„ gezogen	7·7	7·8	„ amorph	1·92—2·06	1·98
„ Stahl	7·6—7·8		Selen, krystallinisch	4·5—4·8	4·35
„ rein	7·86		„ amorph	4·2	
Gallium		5·9	Silber, gegossen	10·4—10·5	
Gold, gediegen	18·6—19·2		„ gepresst	10·56	
„ gegossen	19·3	19·3	„ gewalzt	10·62	10·53
„ gezogen	19·4		„ gezogen	10·48	
Indium		7·4	„ elektrolytisch	10·53	
Iridium		22·42	Silicium, krystallinisch		2·4
Jod		4·95	„ amorph		2·0
Kalium		0·87	Stickstoff, flüssig	(0° u. 300 At.)	0·4
Kobalt, gegossen	8·7	8·9	Strontium		2·54
„ gehämmert	9·1		Tantal		10·6
Kohlenstoff: Diamant		3·52	Tellur, krystallinisch		6·4
Graphit	2·17—2·33	2·25	„ amorph		5·9
Gaskohle		1·9	Thallium		11·8
Holzkohle		1·5	Thorium		11·0
Kupfer, gegossen	8·8—8·9		Uran		18·6
„ gehämmert	8·88—8·95		Vanadium		5·5
„ gezogen	8·93—8·96	8·92	Wasserstoff (flüssig)	(300 At.)	0·03
„ elektrolytisch	8·95		Wismuth		9·8
Lanthan		6·1	Wolfram	17·0—19·2	18·8
Lithium		0·59	Zink		7·2
Magnesium		1·74	Zinn		7·3
Mangan	7·1—8·0	7·7	Zirkonium		4·15
Molybdän		8·56			

3. Legirungen.

Messing, gelb . . . gegossen	8·44	8·5	8·4
Messing, gelb . . . gewalzt	8·56		
Messing, gelb . . . gezogen	8·70		
„ roth	8·6		
„ weiss	8·2		
Bronze:			
90 Cu, 10 Sn	8·78		8·8
85 „ 15 „	8·89		
80 „ 20 „	8·74		
75 „ 25 „	8·83		
Neusilber:			
Chinesisch 26·3 Cu, 36·8 Zn, 36·8 Ni	8·30		8·4
Berlin I. 52 „ 26 „ 22 „	8·45		
„ II. 59 „ 30 „ 11 „	8·34		
„ III. 63 „ 31 „ 6 „	8·30		
Nickelin	8·77		
Blei-Zinn:			
87·5 Pb, 12·5 Sn	10·60		
84 „ 16 „	10·33		
77·8 „ 22·2 „	10·05		
63·7 „ 36·3 „	9·43		
46·7 „ 53·3 „	8·73		
30·5 „ 69·5 „	8·24		

Blei-Wismuth-Cadmium: 7 Cd, 40 Pb, 53 Bi . .	10·56
Wood'sches Metall	9·7
Cadmium-Zinn (32:68) . .	7·7
Gold-Kupfer:	
98 Au, 2 Cu	18·84
96 „ 4 „	18·36
94 „ 6 „	17·95
92 „ 8 „	17·52
90 „ 10 „	17·16
88 „ 12 „	16·81
86 „ 14 „	16·47
Aluminiumbronze (10 % Al.) .	7·7
Aluminium-Zinn (91 % Al.) . .	2·85
Amalgame:	
Blei-Amalgam	12·0—12·8
Wismuth-Amalgam . .	10·2—11·2
Gold-Amalgam . . .	15·4
Zinn-Amalgam, Hg Sn .	10·3
„ „ $HgSn_2$.	9·3
„ „ $HgSn_3$.	8·8

4. Hölzer.

Sorte	grün		trocken	
	Grenzen	Mittelwerth	Grenzen	Mittelwerth
Ahorn	0·87—1·05	0·96	0·61—0·74	0·67
Apfel	0·95—1·26	1·1	0·66—0·84	0·75
Birke	0·80—1·09	0·95	0·51—0·77	0·72
Buche	0·90—1·12	1	0·66—0·83	0·75
Buxbaum	—	—	—	1·33
Ceder	—	—	—	0·56
Cypresse	—	—	—	0·60
Ebenholz	—	—	1·19—1·23	1·22
Eiche	0·93—1·28	1·1	0·69—1·03	0·9
Erle	0·63—1·01	0·8	0·42—0·64	0·50
Esche	0·70—1·14	0·9	0·57—0·94	0·75
Fichte	0·40—1·07	0·7	0·35—0·60	0·47
Hainbuche	0·92—1·25	1·1	0·62—0·82	0·75
Kiefer	0·38—1·03	0·7	0·31—0·74	0·55
Lärche	0·52—1·00	0·75	0·44—0·80	0·63
Linde	0·61—0·87	0·75	0·32—0·59	0·48
Mahagoni	—	—	—	1·06
Nussbaum	—	—	0·64—0·70	0·67
Pappel	0·73—1·07	0·9	0·34—0·52	0·38
Pockholz	—	—	1·26—1·33	1·28
Rosskastanie . . .	0·76—1·04	0·9	0·52—0·63	0·58
Tanne	0·77—1·23	1·0	0·37—0·60	0·52
Ulme	0·73—1·18	0·95	0·56—0·82	0·68
Weide	0·73—0·97	0·85	0·43—0·63	0·54

5. Quecksilber

bei einigen verschiedenen Temperaturen.

0°	13·595	60°	13·449	220°	13·066
5°	13·583	70°	13·425	240°	13·018
10°	13·571	80°	13·400	260°	12·971
15°	13·558	90°	13·376	280°	12·923
20°	13·546	100°	13·352	300°	12·875
25°	13·534	120°	13·304	320°	12·828
30°	13·522	140°	13·256	340°	12·780
35°	13·509	160°	13·209	360°	12·732
40°	13·497	180°	13·161		
50°	13·473	200°	13·113		

(Ausführlicher bei LANDOLT und BÖRNSTEIN, Phys.-Chem. Tabellen, pag. 36 ff.)

6. Wasser

bei verschiedenen Temperaturen.

—10°	0·99815	14°	0·99930	65°	0·9807
— 8°	69	16°	00	70°	0·9779
— 6°	0·99912	18°	0·99865	75°	49
— 4°	46	20°	26	80°	19
— 2°	70	22°	0·99783	85°	0·9688
0°	87	24°	37	90°	56
+ 1°	93	26°	0·99687	95°	21
2°	97	28°	33	100°	0·9587
3°	99	30°	0·99577		
4°	1·00000	35°	417		
5°	0·99999	40°	236	Eis:	
6°	97	45°	035	— 1°	0·9181
8°	88	50°	0·9882	—10°	0·9191
10°	75	55°	58	—20°	0·9203
12°	55	60°	33		

7. Verdünnte Säuren bei 15°.

Gew.-Proc.	HNO_3	H_2SO_4	HCl	$C_2H_4O_2$	H_3PO_4
0	0·999	0·999	0·999	0·999	0·999
5	1·028	1·032	1·024	1·007	1·028
10	1·059	1·068	1·049	1·014	1·057
15	1·089	1·106	1·073	1·021	1·087
20	1·120	1·144	1·098	1·028	1·120
25	1·153	1·182	1·123	1·035	1·153
30	1·185	1·223	1·149	1·041	1·189
35	1·218	1·264	1·174	1·047	1·226
40	1·251	1·306	1·197	1·052	1·265
45	1·284	1·351		1·057	1·306
50	1·317	1·398		1·062	1·349
55	1·346	1·448		1·065	1·393
60	1·374	1·501		1·069	1·440
65	1·400	1·557		1·071	
70	1·423	1·615		1·073	
75	1·442	1·675		1·075	
80	1·460	1·734		1·075	
85	1·478	1·786		1·074	
90	1·495	1·822		1·071	
95	1·513	1·838		1·066	
100	1·530	1·843		1·055	

8. Verschiedene Lösungen
bei 15°, bez. auf gleich warmes Wasser.

Gew.-Proc.	NH_3	NaHO	KHO	NaCl	KCl	$CaCl_2$[1] + 6 *aq*	Na_2CO_3 + 10 *aq*	K_2CO_3	$FeSO_4$ + 7 *aq*	$CuSO_4$ + 5 *aq*	Zucker[2]
2	0·9915	1·023	1·017	1·0145	1·0130	1·0079	1·0076	1·0183	1·011	1·0126	1·0078
4	831	46	33	290	260	159	153	366	21	254	157
6	749	70	49	437	392	241	231	551	32	384	237
8	670	92	65	585	525	323	309	740	43	516	319
10	593	115	83	734	658	407	388	928	54	649	401
12	520	37	101	886	796	491	468	1·1124	65	785	485
14	449	59	19	1·1038	935	577	548	320	77	923	570
16	380	81	37	194	1·1075	663	628	520	88	1·1063	657
18	314	202	55	352	218	750	708	724	1·100	208	744
20	251	25	77	511	361	838	789	929	12	354	832
22	191	47	98	676	509	927	871	1·2140	25	501	922
24	133	69	220	840	1·1657	1·1017	953	352	37	659	1·1013
26	078	90	41	1·2010	(bei	107	1·1035	568	49	817	106
28	026	310	64	(bei	24·9°	199	117	789	61	980	200
30	0·8976	32	88	26·4°	1·1723)	292	200	1·3011	74	1·2146	295
32	929	53	311	1·2043)		386	284	242	87		391
34	885	74	36			480	368	473	1·200		490
36	844	95	61			575	452	708	13		590
38	(bei	415	87			671	536	948	26		692
40	14°)	37	412			768	620	1·4187	39		794
45		88	75			1·2012	830	804			1·2057
50		540	539			262	1·2045	1·5441			329
55		91	604			516	(bei	(bei			608
60		643	67			773	23°)	52°			899
65		95	729			1·3034		1·5708)			1·3320
70		1·748	1·790			3300					510

[1]) bei 18·3°. [2]) bei 17·5°.

9. Alkohol.

Gew.-Proc.	bei 0°	bei 10°	bei 20°	bei 30°
0	0·99988	0·99975	0·99831	0·99579
5	0·99135	0·99113	0·98945	0·98680
10	0·98493	0·98409	0·98195	0·97892
15	0·97995	0·97816	0·97527	0·97142
20	0·97566	0·97263	0·96877	0·96413
25	0·97115	0·96672	0·96185	0·95628
30	0·96540	0·95998	0·95403	0·94751
35	0·95784	0·95174	0·94514	0·93813
40	0·94939	0·94255	0·93511	0·92787
45	0·93977	0·93254	0·92493	0·91710
50	0·92940	0·92182	0·91400	0·90577
55	0·91848	0·91074	0·90275	0·89456
60	0·90742	0·89944	0·89129	0·88304
65	0·89595	0·88790	0·87961	0·87125
70	0·88420	0·87613	0·86781	0·85925
75	0·87245	0·86427	0·85580	0·84719
80	0·86035	0·85215	0·84366	0·83483
85	0·84789	0·83967	0·83115	0·82232
90	0·83482	0·82665	0·81801	0·80918
95	0·82119	0·81291	0·80433	0·79553
100	0·80625	0·79788	0·78945	0·78096

10. Verschiedene feste und flüssige Substanzen (meist bei 0°).

Aceton	0·81
Achat	2·59
Aethyläther	0·74
Alabaster	2·7
Alaun	1·71
Allylalkohol	0·87
Ameisensäure	1·23
Ammoniak, condensirt	0·64
Amyläther	0·80
Amylalkohol	0·83
Anilin	1·04
Arragonit	2·93
Asbest . . . 2·1 bis	2·8
Asphalt	1·12
Basalt . . . 2·7 bis	3·2
Benzol	0·89
Bergkrystall	2·65
Bernstein	1·08
Bimstein . . 0·9 bis	1·6
Bittersalz	1·75
Bleioxydul	9·77
Bleioxyd	9·25
Bleisuperoxyd	8·91
Borax	1·72
Borsäure	1·46
Braunkohle . 1·2 bis	1·4
Braunstein . . 4·1 bis	4·9
Bromoform	2·9
Bromwasserstoff	1·49
Bromsilber	6·33
Butter (frisch)	0·87
Buttersäure	0·97
Butylalkohol	0·82
Campher	1·00
Cement . . 2·7 bis	3·1
Chlorcalcium	2·22
Chloroform	1·53
Chlorsilber	5·5
Copal	1·1
Cyan, flüssig (17°)	0·87
Cymol	0·87
Diphenyl	1·17
Eisenglanz	5·24
Eisenvitriol	1·90
Elfenbein	1·88
Feldspath	2·55
Fett, thierisch	0·92
Feuerstein	2·65
Fichtenharz	1·07
Fluorwasserstoff	0·99
Flussspath	3·15
Fuchsin	1·22
Glas, grünes	2·6
„ Spiegel-	2·46
„ Kron-	2·7
„ Krystall-	2·9
„ Flint- . 3·15 bis	3·9
Glaubersalz	1·46
Glimmer . . 2·65 bis	3·15
Glycerin	1·26
Granat	3·7
Granit . . . 2·5 bis	3·1
Gummi arabicum	1·4
Guttapercha	0·97
Gyps	2·31
Hartgummi	1·15
Holzgeist	0·81
Indigo	0·77
Jodsilber	5·61
Kalk, gebrannt 2·3 bis	3·2
Kalkspath	2·72
Kalkstein . . 2·5 bis	2·8
Kautschuk	0·95
Knochen . . 1·8 bis	2·0
Kochsalz	2·14
Kohlensäure, flüssig (0°)	0·95
„ „ (15°)	0·86
Kork	0·24
Kreide . . . 2·1 bis	2·7
Kupfervitriol	2·27
Magnesia	3·3
Magneteisenstein	5·1
Magnetkies	4·4
Marmor	2·75
Meerschaum	1·35
Meerwasser	1·02
Mehl, Weizen-	1·56
Mennige	9·15
Milch	1·03
Milchzucker	1·53
Naphtol	1·22
Nitroglycerin	1·60
Oel, Baum-	0·92
„ Lein-	0·94
„ Oliven-	0·92
„ Rüb-	0·91
Oxalsäure	1·63
Paraffin	0·89
Pech	1·07
Petroleum . . 0·78 bis	0·88
Phenol	1·08
Porphyr	2·75
Porzellan . . 2·2 bis	2·5
Phosphorsäure	1·88
Propionsäure	1·02
Propylalkohol	0·82
Quarz	2·65
Salicylsäure	1·49
Salmiak	1·46
Salpeter	1·95
Salzsäure, rauchend	1·22
Sand, trocken	1·5
„ feucht	1·9
Sandstein	2·3
Schiefer	2·65
Schwefelkohlenstoff	1·27
Schwerspath	4·44
Serpentin	2·5
Smaragd	2·77
Speckstein	2·6
Stearin	0·97
Steinsalz	2·28
Terpentin	0·87
Thon . . . 1·8 bis	2·5
Thonschiefer	2·8
Toluol	0·88
Traubenzucker	1·57
Turmalin	3·15
Wachs	0·97
Wallrath	0·98
Wasserstoffsuperoxyd	1·45
Wein . . . 0·99 bis	1·03
Weinsäure	1·75
Ziegelstein . 1·4 bis	2·2
Zinnober	8·1
Zucker	1·61

11. Gase und Dämpfe.

Stoff	Formel	Dichte Luft = 1	Spec. Gew. Wasser v. 4° = 1
Aceton	C_3H_6O	2·0025	0·002590
Acetylen	C_2H_2	0·92	1165
Aethan	C_2H_6	1·0367	1341
Aethylen	C_2H_4	0·9674	1252
Aether	$C_4H_{10}O$	2·565	3317
Aethylalkohol	C_2H_6O	1·603	2086
Aldehyd	C_2H_4O	1·532	1981
Allylen	C_3H_4	1·3819	1788
Ammoniak	H_3N	0·5889	0762
Arsen	As_2	10·39	13436
Arsenwasserstoff	H_3As	2·6973	3490
Benzol	C_6H_6	2·77	3582
Brom	Br_2	5·3933	6870
Bromwasserstoff	BrH	2·731	3532
Butan	C_4H_{10}	2·0041	2591
Butylen	C_4H_8	1·9349	2504
Chlor	Cl_2	2·448	3180
Chlorcyan	$CNCl$	2·1244	2747
Chloroform	$CHCl_3$	4·215	4451
Chlorwasserstoff	ClH	1·2474	1613
Cyan	$(CN)_2$	1·8064	2336
Cyanwasserstoff	CNH	0·9456	1223
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	2·08	—
Essigsäureäther	$C_4H_8O_2$	3·067	3966
Fluorwasserstoff	FH	0·693	0896
Grubengas	CH_4	0·556	0719
Jod	J_2	8·716	11271
Jodwasserstoff	JH	4·433	5746
Kohlenoxyd	CO	0·967	1251
Kohlensäure	CO_2	1·529	1977
Methylalkohol	CH_4O	1·12	1448
Phosphor	P_2	4·355	5631
Phosphorwasserstoff	PH_3	1·185	1535
Propylen	C_3H_6	1·4512	1878
Quecksilber	Hg	6·976	9021
Sauerstoff	O_2	1·1056	1430
Schwefel	S_2	2·20	2843
Schwefelkohlenstoff	CS_2	2·645	3420
Schwefelsäure	H_2SO_4	2·15	2780
Schwefelsäure-Anhydrid	SO_3	2·763	3573
Schwefelwasserstoff	SH_2	1·1921	1542
Schweflige Säure-Anhydrid	SO_2	2·234	2869
Selen	Se_2	5·7	7023
Selenwasserstoff	H_2Se	2·7846	3601
Stickstoff	N_2	0·9714	1256
Stickstoffoxyd	NO	1·039	1344
Stickstoffoxydul	N_2O	1·527	1974
Wasser	H_2O	0·6235	0806
Wasserstoff	H_2	0·0693	0090
Luft	—	1·0000	1293

F. Auerbach.

Pendel.

Uebersicht. Der Begriff Pendel in seiner allgemeinsten Bedeutung umfasst diejenigen Apparate, bei welchen ein Körper um einen festen Punkt (oder eine feste Axe) beweglich ist. Beim einfachen oder mathematischen Pendel besteht dieser Körper lediglich aus einem materiellen Punkte, welcher der Schwere unterworfen ist, und aus einem gewichtslosen Faden, welcher die Verbindung des schweren mit dem festen Punkte herstellt. Dieser Faden wird in den meisten Fällen als undehnbar und unbiegsam angenommen, so dass er eine grade Linie von constanter Länge darstellt, und alsdann kommt seine Bedeutung darauf hinaus, dass der schwere Punkt dem Zwange unterworfen ist, trotz der Wirkung der Schwere auf einer Kugelfläche zu bleiben. Dieses Pendel heisst deshalb sphärisches oder, in Rücksicht auf den geometrischen Ort des Fadens, konisches Pendel. Ein besonderer Fall desselben ist das ebene oder Kreispendel. Dem gegenüber setzt z. B. das Cycloidenpendel einen zwar immer noch undehnbaren, aber biegsamen Faden voraus. Die Art der Bewegung, welche der schwere Punkt eines sphärischen Pendels ausführen kann, ist eine sehr mannigfaltige; sie geht z. B. beim Centrifugal- oder Horizontalpendel in einer horizontalen Kreislinie vor sich. Dagegen handelt es sich beim ebenen Pendel nur um zwei, durch einen Uebergangsfall getrennte Bewegungsarten: um Schwingungen oder Rotationen; erstere hat man gewöhnlich im Auge, wenn man vom Pendel im engeren Sinne des Wortes spricht. In der Wirklichkeit kommt niemals ein mathematisches Pendel, sondern stets ein physisches Pendel in Betracht. Die Theorie desselben ist natürlich viel verwickelter, führt aber grade in Bezug auf eine der wichtigsten Fragen durch Vergleichung mit dem mathematischen Pendel zu praktisch verwerthbaren Ergebnissen. Den Pendeln mit unifilarer stehen die mit bifilarer Aufhängung, deren Theorie eine selbständige ist, gegenüber. Von besonderem Interesse sind schliesslich noch zwei Einflüsse: der des Luftwiderstandes und derjenige der Erddrehung.

Mathematisches Pendel. Die z-Axe des rechtwinkligen Coordinatensystemes sei vertikal nach unten gerichtet, t sei die Zeit und l die Fadenlänge; der Zwang ist alsdann durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \tag{1}$$

ausgedrückt, und folglich lauten die Bewegungsgleichungen, wenn $\frac{1}{2}\lambda$ der unbestimmte Multiplikator ist (s. Art. »Dynamik«, pag. 67),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda y,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = g + \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial f}{\partial z} = g + \lambda z. \tag{2}$$

Aus (1) folgt

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

und aus dieser und (2):

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (2gz + C)\,dt^2 \tag{3}$$

(C eine willkürliche Constante); andererseits erhält man aus (2) allein

$$x\,dy - y\,dx = c\,dt \tag{4}$$

(c eine zweite willkürliche Constante). Die Gleichungen (3) und (4) nehmen, wenn man mittelst der Gleichungen

$$x = l\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = l\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = l\cos\vartheta \tag{5}$$

Polarcoordinaten einführt, die folgende Gestalt an:

$$l^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) = (2gl\cos\vartheta + C)\, dt^2,$$
$$l^2 \sin^2 d\varphi = c\, dt. \tag{6}$$

Für $c = 0$ wird $\varphi = const.$, nach (5) geht also die Bewegung in einer vertikalen Kreislinie vor sich, und man hat es mit einem ebenen Pendel zu thun.

Ebenes Pendel. Durch Streichung von $d\varphi$ in (6) erhält man

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}\cos\vartheta + \frac{C}{l^2}. \tag{7}$$

Es möge hier gleich noch die daraus folgende Gleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\vartheta \tag{7a}$$

Platz finden. C/l^2 in (7) ist offenbar das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, also C das der Streckengeschwindigkeit für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d. h. bei horizontaler Fadenlage.

Da in (7) $\cos\vartheta$ bald positiv bald negativ ist, so hängt es von dem Werthe von C ab, ob durch diese Gleichung Rotationen oder Schwingungen dargestellt werden; für $C > 2gl$ ist das erstere der Fall, d. h. der schwere Punkt rotirt fortwährend in derselben Richtung um den festen Punkt, für $C < 2gl$ das letztere, d. h. der schwere Punkt pendelt zwischen zwei extremen Lagen links und rechts fortwährend hin und her. In physikalischer Fassung: Das Pendel rotirt, wenn der Pendelkörper bei horizontaler Fadenlage eine grössere, es schwingt, wenn er eine kleinere »Fallhöhe« als l hat. Im ersten Falle erhält man, wenn man

$$C + 2gl = v_0^2, \qquad \frac{4gl}{v_0^2} = k^2, \qquad \sin\frac{\vartheta}{2} = u$$

setzt, die Lösung in der Form:

$$u = \sin am\left(k, \frac{v_0 t}{2l}\right) \tag{8}$$

und die Rotationsdauer

$$T = \frac{2l\pi}{v_0^2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4gl}{v_0^2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{(4gl)^2}{v_0^4} + \dots\right]. \tag{9}$$

v_0 ist die Geschwindigkeit im tiefsten Bahnpunkte, im höchsten ist sie $\sqrt{v_0^2 - 4gl}$, im äussersten Punkte rechts oder links $\sqrt{v_0^2 - 2gl}$; sie ist also unten am grössten, oben am kleinsten. Man kann diese Bewegung folglich hervorrufen, indem man dem schweren Punkte, ehe man ihn in irgend einer Stellung loslässt, durch einen Impuls die dieser Stellung entsprechende Geschwindigkeit ertheilt.

In dem Grenzfalle, wo $C = 2gl$ ist, ergiebt sich

$$u = \frac{e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}}{e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}}. \tag{10}$$

Die Geschwindigkeit im höchsten Bahnpunkte ist hier gleich Null, und man kann mithin den Fall verwirklichen, indem man den (an einem festen Stäbchen befestigten) schweren Punkt in seiner höchsten Stellung ohne Impuls loslässt. Er fällt dann in Folge des labilen Gleichgewichtes auf der einen Kreishälfte herunter und steigt auf der anderen wieder herauf, und zwar, wie (10) lehrt, derart, dass die Geschwindigkeit mehr und mehr abnimmt und der höchste Punkt erst nach unendlich langer Zeit wieder erreicht wird. Mit der durch die allgemeine Theorie des Falles geforderten Symmetrie des Vorganges stimmt

dieses Ergebniss überein, insofern auch der Beginn der Bewegung aus dem labilen Gleichgewichtszustande heraus im Princip eine unendlich lange Zeit beansprucht.

Schwingungen des ebenen Pendels. Am wichtigsten ist der noch übrig bleibende dritte Fall, nämlich der, in welchem entweder $C < 2gl$ oder C negativ, aber $> -2gl$ ist, also C zwischen $-2gl$ und $+2gl$ liegt. In diesem Falle giebt es nach (7) auf jeder Seite einen Werth von ϑ, für welchen die Geschwindigkeit Null wird, der schwere Punkt also umkehrt; es finden also Schwingungen statt. Der Maximalwerth von ϑ, ϑ_0, oder bei experimentellen Betrachtungen meist das Doppelte desselben, heisst dann die Amplitude oder Weite der Schwingungen; und indem man für sie die der Gleichung (7) entsprechende Gleichung bildet und von jener abzieht, erhält man

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),$$

welche vor (7) den Vorzug hat, dass die Constante ϑ_0 von einfacherer und wichtigerer Bedeutung ist, als die bisherige Constante C. Setzt man nun

$$\sin\frac{\vartheta_0}{2} = k, \qquad \sin\frac{\vartheta}{2} = ku,$$

so findet man

$$u = \sin am\left(k, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

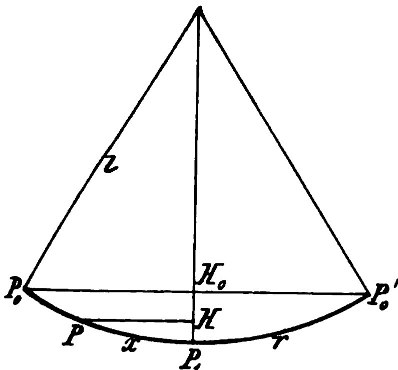
also

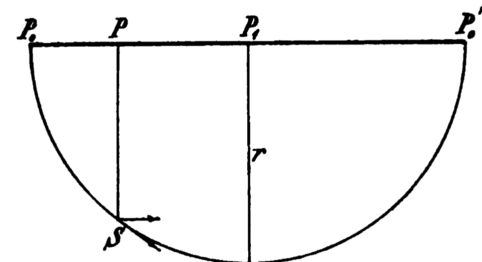
$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\vartheta_0}{2}\sin am\left(\sin\frac{\vartheta_0}{2}, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \tag{11}$$

und die Schwingungsdauer (von $\vartheta = +\vartheta_0$ bis $\vartheta = -\vartheta_0$)

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\vartheta_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\vartheta_0}{2} + \dots\right]. \tag{12}$$

Ist die Amplitude so klein, dass man den Bogen für den Sinus setzen kann, so wird





(Fig. 54.)

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\vartheta_0^2}{16}\right), \tag{12a}$$

und für ganz kleine Amplituden

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{12b}$$

Dieses letztere Resultat kann man, auch unabhängig von der allgemeinen Theorie, ganz elementar ableiten. Befindet sich der schwere Punkt (Fig. 54) auf seiner Bahn von P_0 nach P_1 in P, so hat er, da er die Höhe H_0H

$$H_0H = H_0P_1 - HP_1 = \frac{P_0P_1^2 - PP_1^2}{2l}$$

durchfallen hat, die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}(P_0P_1^2 - PP_1^2)}.$$

An Stelle der Sehnen P_0P_1 und PP_1 kann man bei sehr kleinen Winkeln die Bögen r und x setzen; es wird also

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}(r^2 - x^2)}.$$

Hieraus könnte man T berechnen, wenn v constant wäre; ein Kunstgriff gestattet jenes zu ermitteln, obgleich dieses nicht constant ist. Ist nämlich P_0P_0' der in eine Gerade entwickelte Schwingungsbogen, und lässt man einen Punkt statt dessen den Halbkreis P_0SP_0' mit der constanten Geschwindigkeit $r\sqrt{g/l}$ beschreiben, so ist die x-Componente seiner Geschwindigkeit, also auch die Zeit, in welcher er nach P_0' gelangt, übereinstimmend mit den entsprechenden Grössen für den ersten Punkt. Für den zweiten ist aber die Zeit

$$\frac{\pi r}{r\sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

folglich ist dies auch die Schwingungsdauer des Pendels.

Pendelgesetze. Die entwickelte Theorie führt zu einer Reihe von Ergebnissen, welche man leicht durch die Erfahrung prüfen und bestätigen kann. Das erste dieser Gesetze lautet: Die Schwingungsdauer des ebenen Pendels ist von der Amplitude nur in sehr geringem Grade und bei kleinen Amplituden überhaupt nicht abhängig. Um sich hiervon experimentell zu überzeugen, benutzt man ein aus einem Faden und einer Metallkugel bestehendes Pendel, versetzt dasselbe mit beträchtlicher Amplitude in Schwingungen und beobachtet die Dauer der ersten hundert, der zweiten hundert u. s. w. Schwingungen und zugleich die in Folge des Luftwiderstandes langsam abnehmenden Amplituden (über die Art dieser Messungen s. Art. »Dynamik«). Man findet dann Zahlen, welche anfangs wenig und später, sobald die Amplitude nur noch einige Grad beträgt, gar nicht mehr abnehmen. Man bezeichnet diese Erscheinung als den Isochronismus kleiner Schwingungen.

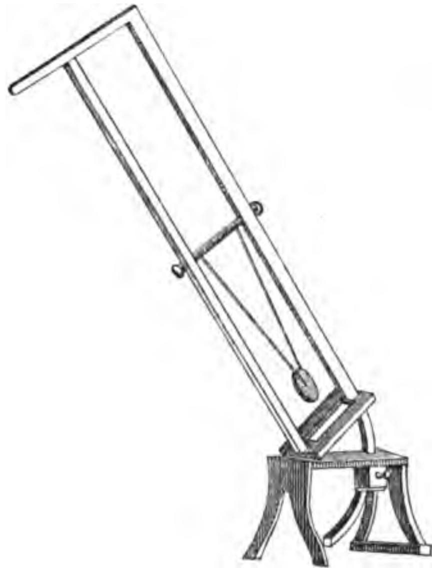
Ein zweites Gesetz ist schon in Gleichung (12) enthalten, gilt also für beliebige Amplituden und lautet: Die Schwingungsdauern verschieden langer einfacher Pendel verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen. In der That, wenn man sich mehrere, dem Charakter des mathematischen möglichst nahe kommende Pendel herstellt, deren Längen sich wie 1:4:9 u. s. w. verhalten, so findet man Schwingungsdauern, welche sich wie 1:2:3 u. s. w. verhalten.

Dasjenige Pendel, dessen Schwingungsdauer genau eine Sekunde beträgt, heisst Sekundenpendel, und die Messung der Länge L, welche es haben muss, ist eine der wichtigsten Grundlagen exakter Zeitmessung geworden. Näherungsweise kann man dieselbe mittelst der aus (12b) folgenden Formel $L = g/\pi^2$ mit Benutzung eines irgendwie gewonnenen Werthes von g, genauer durch Beobachtungen an möglichst einfachen Pendeln nach der Proportion $L:l = 1:t^2$, also nach der Formel $L = l/t^2$ bestimmen; zur exakten Messung ist es aber nothwendig, die Abweichungen des benutzten Pendels vom Charakter eines einfachen, sowie andere Einflüsse zu berücksichtigen (s. unten).

Drittens zeigen die Formeln, dass die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels der Quadratwurzel aus der Beschleunigung durch die Schwere umgekehrt proportional ist. Auch dieses Gesetz wird durch die Erfahrung bestätigt. Bringt man, was RICHER[1]) schon 1671 that, ein Pendel unter einen niederen Breitengrad, oder steigt man mit ihm in ansehnliche Höhen, so nimmt die Schwingungsdauer zu. Aber auch an einem und demselben Ort kann man einem Pendel verschiedene Schwingungsdauern ertheilen, indem man es durch geeignete starre Verbindungen, wie sie bei dem Apparate von MACH[2]) (Fig. 55) verwirklicht sind, zwingt, in einer schiefen Ebene zu schwingen, sodass die wirkende Beschleunigung nur noch $g' = g \cos \varphi$ (φ Neigung der Ebene gegen die Vertikale) ist; für $\varphi = 90°$ ist $T = \infty$. Dieser Apparat ist das Analogon der schiefen Ebene für das Pendel. Von besonderer Wichtigkeit wird die durch das 3. Gesetz ausgesprochene Beziehung in ihrer Umkehrung

$$g = \frac{l\pi^2}{T^2}, \qquad (13)$$

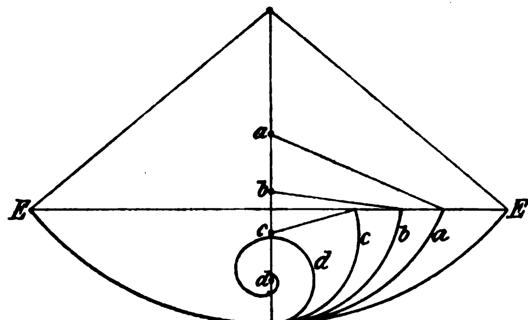
in welcher sie zeigt, dass man durch Messung von l und Beobachtung von T die Grösse g ermitteln kann. Betrachtet man wiederum ein aus einem dünnen Faden und einer Bleikugel bestehendes Pendel als ein einfaches, so kann man l angenähert messen und somit g näherungsweise bestimmen; in Bezug auf die exakte Bestimmung muss auch hier auf das Folgende verwiesen werden.



(Ph. 55.)

Das vierte Gesetz drückt die Thatsache aus, dass in der Formel (12b) weder die Masse noch die chemische Beschaffenheit des Pendelkörpers enthalten ist und lautet: Die Schwingungszeit ist von der Beschaffenheit des Pendelkörpers unabhängig. Versuche bestätigen dies in vollstem Maasse.

Ein fünftes Gesetz bezieht sich auf die Amplitude der Schwingungen und sagt aus: Diese Amplitude ist constant. In der That kann man im leeren Raum ein Pendel sehr lange in Schwingungen erhalten; die Reibung am Aufhängepunkte lässt sie aber doch mit der Zeit abnehmen und schliesslich erlöschen. Das, was an dieser Constanz das Wesentliche ist, ist freilich nicht die Constanz des Amplitudenwinkels als solchen, sondern die Constanz der Höhe, bis zu welcher der Pendelkörper jedesmal emporsteigt, (s. »Fall und Wurf«). Man kann dies am deutlichsten an dem schon von GALILEI angegebenen Nagelpendel (Fig. 56) sehen. Wo man auch den



(Ph. 56.)

[1]) RICHER, Observ. astrom. et phys. etc. Paris 1679.

[2]) MACH, WIED. Ann. Beibl. 6. pag. 57. 1882.

Nagel einschlägt, das Pendel geht stets bis zum Niveau *EE;* kann es dies wie im Falle der Nagelstellung *d* nicht mehr, so schlingt sich der Faden um den Nagel herum.

Das letzte und in gewisser Hinsicht wichtigste der Pendelgesetze bezieht sich nicht auf die Schwingungsdauer, sondern auf den Verlauf einer Schwingung im einzelnen, d. h. auf die Art und Weise, wie sich Ort und Geschwindigkeit des schweren Punktes mit der Zeit ändern. Diese Art und Weise ist, wie die Gleichung (11) erkennen lässt, im allgemeinen eine ziemlich verwickelte; für kleine Schwingungen aber findet man durch Vernachlässigungen den Winkel

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin t \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (14)$$

und die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\vartheta}{dt} = v = v_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad (14a)$$

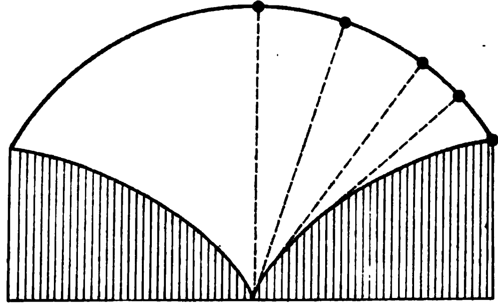
wobei der Anfangspunkt der Zeit und die tiefste Stellung des Pendelkörpers als einander entsprechend gewählt wurden. Wie man sieht, sind Ort und Geschwindigkeit des Pendelkörpers einfache Sinus- resp. Cosinusfunctionen der Zeit. Derartige Pendelschwingungen heissen daher auch Sinusschwingungen. Zur experimentellen Beobachtung dieser Verhältnisse dient das graphische Pendel, welches, unbeschadet seiner sehr verschiedenartigen Ausführung in den Einzelheiten, im Principe darauf beruht, dass eine an dem Pendelkörper angebrachte Schreibvorrichtung die Bewegung desselben auf einer horizontalen Platte verzeichnet, welche in einer zur Pendelebene senkrechten Richtung sich gleichmässig fortbewegt. Diese Richtung stellt alsdann die zur räumlichen Abcisse gewordene Zeit dar, während die Ordinate die Elongationen des Pendels aus der Gleichgewichtslage angiebt. Man erhält auf diese Weise Curven, welche sich nicht nur als Sinuscurven erweisen, sondern auch die einschlägigen quantitativen Verhältnisse zu studiren gestatten[1]). Im Anschlusse hieran sei noch eines allgemeineren Apparates, des Pendels zur Darstellung der Schwingungscurven, gedacht, dessen ausführliche Betrachtung in die Lehre von den Schwingungen (s. d.) gehört. Bei diesem Pendel ist der Aufhängepunkt durch eine lange Drehungsaxe, und der Aufhängefaden durch zwei, an den Enden der Axe befestigte Fäden ersetzt; beide Fäden gehen durch eine gemeinsame Hülse hindurch, so dass sie oberhalb derselben mit der Axe eine vertikale Dreiecksebene bilden, unterhalb derselben aber wie ein einziger Faden herabhängen und am Ende den mit der Schreibvorrichtung versehenen Pendelkörper tragen. Der ganze Apparat ist ein Pendel, fähig in der zur Dreiecksebene senkrechten Ebene zu schwingen, der Theilapparat von der Hülse abwärts ist ein Pendel von kürzerer Länge und beliebiger Schwingungsrichtung. Da nun die Hülse verschiebbar ist, so kann man auf diese Weise Schwingungen von Pendeln von beliebigem Längenverhältniss und beliebigem Winkel der Schwingungsrichtungen combiniren und erhält dann mittelst graphischer Aufzeichnung Curven, welche den durch analog combinirte Stimmgabeln erzeugten LISSAJOUS'schen Curven ganz entsprechend sind[2]). Auch die Untersuchung des Verhaltens eines Pendels, dessen Aufhängepunkt periodisch hin und her bewegt wird, gehört als Grundlage für die Theorie

[1]) Ein graphisches Pendel, das für exacte Versuche sich sehr geeignet erwiesen hat, haben neuerdings CZERMAK u. HIECKE in Graz construirt (s. Centr. Ztg. f. Opt. u. Mech. 1885, pag. 217).

[2]) Derartige Apparate sind u. A. von BLACKBURN (MAYER, Sound, pag. 30) u. BAZZI [N. Cim. (3) 12, pag. 275. (1882)] angegeben worden.

der Resonanz in die Akustik[1]). Für diese ist überhaupt die Theorie der Pendelschwingungen von fundamentaler Bedeutung, und zwar deshalb, weil diejenigen Töne, welche physiologisch und mathematisch als die Elemente aller übrigen zu betrachten sind, auf Sinus- oder Pendelschwingungen beruhen. Von wesentlich mathematischem Interesse endlich ist das Doppelpendel, bestehend aus einem einfachen Pendel, dessen Aufhängepunkt der schwere Punkt eines zweiten einfachen Pendels ist[2]).

Cycloidenpendel. Solange man den Pendelfaden als unbiegsam annimmt, beschreibt der Pendelkörper (bei ebenen Schwingungen) Kreisbögen. Auch wenn der Faden biegsam ist, wird dies in Folge der Spannung, welche der Faden durch den schweren Punkt erfährt, noch der Fall sein, ausgenommen gewisse Fälle bei Amplituden von mehr als 180°.[3]) Wenn man aber dem Faden ein Hinderniss in den Weg stellt, z. B. eine krumme Linie, so wird er sich an diese anlehnen, und die Bahn des Körpers wird kein Kreisbogen mehr sein.



(Fig. 57).

Hierauf und auf der Eigenschaft der Cycloide, dass ihre Evolute selbst wieder eine Cycloide ist, beruht das Cycloidenpendel (Fig. 57). Sowohl die beiderseitigen Anlehnungscurven, als auch die Bahncurve sind hier Cycloiden. Da nun diese (s. Fall u. Wurf) die Tautochrone ist, so folgt, dass die Schwingungsdauer des Cycloidenpendels von der Amplitude nicht nur, wie beim Kreispendel, näherungsweise, sondern völlig unabhängig ist[4]).

Sphärisches Pendel. Hierbei hat man von den beiden Gl. (6) auszugehen. Durch Elimination von φ erhält man zunächst

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}\cos\vartheta + \frac{C}{l^2} - \frac{c^2}{l^4\sin^2\vartheta}, \tag{15}$$

also

$$t = l^2\int\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{l^2\sin^2\vartheta(C+2gl\cos\vartheta)-c^2}} \tag{16}$$

und dann weiter

$$\varphi = c\int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{2l^2\sin^2\vartheta(C+2gl\cos\vartheta)-c^2}}. \tag{17}$$

Indem man hierin statt ϑ wiederum $z = l\cos\vartheta$ einführt, erhält man

$$t = -l\int\frac{dz}{\sqrt{2(l^2-z^2)(C+2gz)-c^2}}, \tag{16a}$$

$$\varphi = -cl\int\frac{dz}{(l^2-z^2)\sqrt{2(l^2-z^2)(C+2gz)-c^2}}. \tag{17a}$$

Um die Natur der hierdurch dargestellten Bewegung zu verfolgen, ist es von Wichtigkeit, die höchste und die tiefste Stellung, welche der schwere Punkt

---

[1]) Eine allg. Behandlung dieses Problems findet man u. A. bei J. Roth, Progr. Gymn. Jever 1883/1884. —

[2]) Aus der zahlreichen Litteratur hierüber seien angeführt: Jackwitz (Progr. Gymn. Posen 1882) und Luxenberg (Z. f. Math. u. Physik 28, pag. 309. 1883). —

[3]) Nouvel, Ueb. d. Bewegung eines Fadenpendels in d. Ebene. Progr. Gym. Koethen 1886. —

[4]) Huygens, Horologium oscillatorium, Paris 1673.

einnimmt, zu ermitteln, d. h. die Werthe von z, für welche $dz/dt = 0$ ist; man findet dieselben aus der Gleichung

$$2(l^2 - z^2)(C + 2gz) - c^2 = 0. \tag{18}$$

Durch Discussion dieser Gleichung, welche drei Wurzeln (eine davon ohne physikalische Bedeutung) besitzt, gelangt man zu folgendem Ergebniss: Der tiefste Punkt der Bahn liegt stets auf der unteren Kugelhälfte. Für $C < 0$ liegt auch der höchste Punkt in der unteren Hälfte der Kugel; für $C = 0$ liegt er in ihrem Aequator, und für $C > 0$ liegt er auf ihrer oberen Hälfte. Aus der elliptischen Integralform von t in Gleichung (16a) folgt ferner, dass die Bahn periodisch durch die ermittelten höchsten und tiefsten Punkte geht. Wendet man dann auf die Bewegung des schweren Punktes die Bezeichnung Schwingungen an, nennt man von den drei Wurzeln der Gleichung (18) diejenigen beiden, welche dem höchsten und tiefsten Bahnpunkte entsprechen, z_1 und z_2, die dritte z_0 und setzt man

$$u = \varphi \frac{\sqrt{z_0 - z_1}}{\sqrt{z_0 - z_2}}, \quad k^2 = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} \quad (\leqq 1),$$

so findet man die Schwingungsdauer

$$T = \frac{4l\sqrt{2}}{\sqrt{g}\sqrt{z_0 - z_2}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}} \tag{19}$$

$$= \frac{2l\pi\sqrt{2}}{\sqrt{g(z_0 - z_2)}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots\right]. \tag{19a}$$

Um die Bewegung vollständig zu charakterisiren, ist nun noch das Verhalten von φ zu verfolgen. Ohne weiteres lehrt die Gleichung (17a), dass, wenn z zu demselben Werthe zurückkehrt, φ um eine constante, von c abhängige Grösse sich geändert hat. Durch weitere Analyse findet man schliesslich folgendes Ergebniss: Das sphärische Pendel beschreibt eine sphärische Figur, welche näherungsweise mit einer Ellipse verglichen werden kann, deren grosse Axe sich gleichförmig in der Bewegungsrichtung dreht, und zwar desto schneller, je höher bei gleicher Lage des höchsten Bahnpunktes der tiefste Bahnpunkt liegt.[1])

Wenn Maximum und Minimum von z zusammenfallen, so ist überhaupt z constant; die Bahn des Pendelkörpers liegt also in einer horizontalen Ebene und kann folglich, da sie ausserdem der Kugeloberfläche angehört, nur ein Kreis sein. Nach dem Flächenprincip, d. h. nach der Gleichung (4) ist dabei die Geschwindigkeit eine constante. Man nennt ein derartiges Pendel Horizontalpendel oder auch Centrifugalpendel. Es bietet einerseits theoretisches Interesse dar, insofern es eine Fallbewegung ohne Fall und ohne Beschleunigung ergiebt, andererseits praktisches, insofern es in verschiedenen Formen, z. B. als Regulator, bei Terzenuhren u. s. w. Anwendung findet. Die constante Geschwindigkeit und die Umlaufszeit ergeben sich, wenn α die constante Neigung des Fadens gegen die Vertikale bedeutet

$$v = \sqrt{gl \sin\alpha \, tg\,\alpha}, \tag{20}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{z}{g}}; \tag{20a}$$

---

[1]) Versuche über das sphärische Pendel und insbesondere über die Drehung der grossen Axe haben kürzlich Czermak und Hiecke (Centr. Ztg. f. Opt. u. Mech. 1885, pag. 217) mit dem oben erwähnten graphischen Pendel angestellt.

letztere ist also gleich der doppelten Schwingungsdauer (bei kleineren Amplituden) eines ebenen Pendels von der Länge s.[1])

Physisches oder zusammengesetztes Pendel. Das mathematische Pendel, dem die bisherigen Betrachtungen gewidmet waren, ist nur eine Abstraction von der Wirklichkeit. Thatsächlich kann man ein Pendel dieser abstrakten Gestalt nur mehr oder weniger nähern, muss es aber aus anderen Gründen häufig sogar völlig abweichend von ihm construiren. Es besteht dann, wenn man sich auf ebene Schwingungen beschränkt, aus einem irgendwie gestalteten Körper, der um eine horizontale Axe drehbar ist. Die Theorie dieses Apparates, den man physisches oder zusammengesetztes Pendel nennt, ist natürlich complicirter als die des mathematischen; sie lässt sich aber, wenigstens was die Hauptpunkte betrifft, mit Leichtigkeit auf diese zurückführen. Man braucht nämlich nur zu fragen, welche Länge ein einfaches Pendel haben muss, um bei gleicher Amplitude die gleiche Schwingungsdauer zu besitzen wie das vorliegende zusammengesetzte Pendel. Man könnte für den Augenblick meinen, diese Frage dahin beantworten zu sollen, dass die betreffende Länge der Abstand des Schwerpunktes vom Drehpunkte sei. Es ist aber daran zu erinnern, dass der Schwerpunkt (s. Art. »Dynamik«) einen Körper nur bei fortschreitenden Bewegungen vertritt, dass dagegen bei drehenden, also auch schwingenden Bewegungen an seine Stelle ein anderer tritt, dessen Lage sich mit Hilfe des Trägheitsmomentes des Körpers (pag. 77) leicht angeben lässt. Sein Abstand l von der Drehaxe verhält sich nämlich zum Trägheitsmoment k, wie sich der Abstand s des Schwerpunktes von der Drehaxe zum Trägheitsmoment ms^2 der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Körpermasse m verhält; in Formel

$$l:k = s:ms^2.$$

Es ergiebt sich also

$$l = \frac{k}{ms}. \qquad (21)$$

Diese Grösse l heisst die Länge des dem physischen Pendel correspondirenden mathematischen Pendels oder auch kürzer die Länge des physischen Pendels; der Endpunkt der durch l dargestellten Strecke (allgemein Trägheitsmittelpunkt) wird Schwingungspunkt (oder Schwingungsmittelpunkt) genannt.[2])

Beispiele für die Reduction des physischen Pendels. 1. Der Faden sei so leicht, dass seine Masse vernachlässigt werden kann. Dagegen unterscheide sich das Pendel von einem einfachen dadurch, dass an dem Faden kein schwerer Punkt, sondern eine ausgedehnte homogene Kugel hängt. Das Trägheitsmoment der Kugel um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Axe ist (s. Artikel »Dynamik«, pag. 81) $\frac{2}{5}mr^2$, wo m und r Masse und Radius der Kugel sind; also dasjenige um die Drehungsaxe des Pendels $m\,(s^2 + 2/5\,r^2)$, wo s der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Drehaxe ist. Es wird also

$$l = s + \frac{2}{5}\,\frac{r^2}{s} = f + r + \frac{2}{5}\,\frac{r^2}{f+r} \quad (f \text{ Fadenlänge}). \qquad (22)$$

---

[1]) Die Theorie des einfachen Pendels ist zuerst von GALILEI und HUYGENS und dann successive weiter entwickelt worden.

[2]) Die Frage des Schwingungspunktes ist von MERSENNE angeregt, von DESCARTES behandelt, aber erst von HUYGENS gelöst worden.

2. Hängt an dem wiederum zu vernachlässigenden Faden von der Länge f ein homogener Kreiscylinder von der Länge c, dem Radius r und der Masse m, so ist

$$s = f + \frac{1}{2}c, \quad k = m\left[\left(f + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right]$$

und folglich

$$l = \frac{\left(f + \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{12} + \frac{r^2}{4}}{f + \frac{c}{2}}. \qquad (23)$$

Besteht das Pendel unter Fortfall des Fadens überhaupt nur aus dem gedachten Cylinder, so hat man

$$l = \frac{4c^2 + 3r^2}{6c} \qquad (24)$$

und wenn r zu vernachlässigen ist (»Pendelstange«)

$$l = \frac{2}{3}c.$$

Wenn endlich der Cylinder noch mit der Länge d über die Schneide hinausreicht, (was sich mittelst einer beiderseits hervorragenden Schneide und einer diese hervorragenden Enden stützenden Unterlage erreichen lässt), so wird

$$l = \frac{\frac{r^2}{4} + \frac{(c+d)^2}{12} + \frac{(c-d)^2}{4}}{\frac{c-d}{2}}$$

und bei vernachlässigtem r

$$l = \frac{2}{3}\,\frac{c^2 - cd + d^2}{c - d}. \qquad (25)$$

3. Durch Combination der Fälle 1 und 2 gelangt man zu dem besonders wichtigen Falle eines **Pendels, welches aus einer Stange (oder einem Faden, Draht oder Stab) und einer am Ende derselben angebrachten Kugel besteht.** Ist m wieder die Masse der Kugel und r ihr Radius, m_1 und r_1 die entsprechenden Grössen für die Stange, deren Länge unterhalb der Drehaxe c, oberhalb d, so ist

$$l = \frac{(c+r)^2 + \frac{2}{5}r^2 + \frac{m_1}{m}\left[\frac{(c+d)^2}{12} + \frac{(c-d)^2}{4} + \frac{r_1^2}{4}\right]}{(c+r) + \frac{m_1}{m}\,\frac{c-d}{2}}. \qquad (26)$$

Hängt kein Stück über, so wird einfacher

$$l = \frac{(c+r)^2 + \frac{2}{5}r^2 + \frac{m_1}{m}\left[\frac{c^2}{3} + \frac{r_1^2}{4}\right]}{c + r + \frac{m_1}{m}\,\frac{c}{2}}. \qquad (26a)$$

Bei dünnen Fäden oder Drähten kann man hierin meistens r_1 vernachlässigen; kann man auch m_1 gegen m vernachlässigen, so kommt man auf die Formel (22) zurück; wenn endlich auch $\frac{2}{5}r^2$ gegen $(c+r)^2$ vernachlässigt werden darf, so heisst dies: Das Pendel darf innerhalb der gewünschten Genauigkeitsgrenzen als ein einfaches betrachtet werden. Beträgt r beispielsweise $5\frac{0}{0}$ von $c + r$, so erreicht man bei Vernachlässigung von r im Zähler eine Genauigkeit von $1:1000$, bei $r = 1\frac{0}{0}$ eine solche von $1:25000$.

Nicht selten kommt es auch vor, dass zwar bei der gewünschten Genauigkeit weder $\frac{2}{5}r^2$ gegen $(c+r)^2$ noch auch m_1 gegen m vernachlässigt werden darf, wohl aber beides gleichzeitig, weil hierdurch Zähler und Nenner des Ausdruckes für l annähernd in gleichem Maasse verkleinert werden.

4. Ist an irgend einer Stelle des gewichtslosen Pendelfadens, etwa im Abstande s von der Drehaxe, eine Masse m und am Ende des Fadens, im Abstande s_1, eine gleiche Masse concentrirt, so ist

$$l = \frac{ms^2 + ms_1^2}{2m\left(\frac{s+s_1}{2}\right)} = \frac{s^2+s_1^2}{s+s_1}; \tag{27}$$

liegt z. B. m in der Mitte des Fadens, so ist $l = \frac{5}{3}s = \frac{5}{6}s_1$. Sind die Massen m und m_1 verschieden, so wird

$$l = \frac{ms^2 + m_1 s_1^2}{(m+m_1)\left[s + (s_1 - s)\frac{m_1}{m+m_1}\right]} = \frac{ms^2 + m_1 s_1^2}{ms + m_1 s_1}. \tag{27a}$$

Sind die Massen m und m_1 ausgedehnte Körper z. B. Kugeln, so hat man die Formeln des ersten Beispiels mit dieser zu verbinden.

Differentialpendel. Mit diesem Namen kann man ein Pendel bezeichnen, welches wie das in dem letzten Beispiel betrachtete aus zwei getrennten Massen besteht, bei welchem diese aber auf entgegengesetzten Seiten der Drehaxe sich befinden. Die Bedeutung dieses Apparates wird am deutlichsten, wenn man ihn mit der Atwood'schen Fallmaschine und mit der doppelten schiefen Ebene in Parallele stellt. Bei allen drei Apparaten hat man es mit zwei getrennten Massen zu thun; sind die Momente derselben gleich, so besteht Gleichgewicht, und zwar indifferentes; ist die eine Masse grösser, so tritt Bewegung ein, aber mit einer in demselben Verhältniss geringeren Beschleunigung g', in welchem das Uebergewicht p kleiner ist, als die gesammte Masse $2P+p$. Der Unterschied der drei Apparate liegt nur darin, dass der eine diesen Satz für den vertikalen Fall, der zweite für den Fall auf der schiefen Ebene, der dritte für den Fall auf der Kreislinie demonstrirt. Man hat hiernach zu erwarten, dass, da die Schwingungsdauer dieses Pendels (für gleiche Abstände l' der beiden Gewichte)

$$T = \pi\sqrt{\frac{l'}{g'}} = \pi\sqrt{\frac{(2P+p)}{pg}\,l'} \tag{28}$$

also sehr gross sein muss, auch die ihm correspondirende Länge sehr gross ausfallen wird. In der That erhält man aus (27a), wenn man das Zeichen von s_1 umkehrt, zunächst

$$l = \frac{ms^2 + m_1 s_1^2}{ms - m_1 s_1},$$

und wenn man hierin $s = s_1 = l'$, $m = P+p$, $m_1 = P$ setzt:

$$l = \frac{2P+p}{p}\,l', \tag{29}$$

in Uebereinstimmung mit (28). Man kann sich auf diese Weise Pendel herstellen, welche trotz kleiner Dimensionen eine sehr grosse Schwingungsdauer haben. Macht man z. B. die leichte Holzstange jederseits 1 Meter lang, steckt auf die Enden Bleikugeln von je 1 Pfund und auf die eine derselben ein Uebergewicht von 10 Gramm, so erhält man eine Schwingungsdauer von fast 10 Sekunden, zu deren Erzielung man eines einfachen Pendels von fast 100 Meter bedurft hätte. Ferner kann man den Apparat analog wie die beiden anderen benutzen, um das Gesetz zu demonstriren, dass die Schwingungsdauer umgekehrt

proportional der Quadratwurzel aus der beschleunigenden Kraft ist; wendet man z. B. bei dem obigen Apparat ($2P = 1$ Kilo) der Reihe nach Uebergewichte von $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{24}$ Kilo an, so erhält man Schwingungsdauern, die sich innerhalb der Grenzen der Versuchsgenauigkeit wie 2:3:4:5 verhalten.

Govi'sches Pendel[1]). Man bringe an einem leichten starren Stab ein Laufgewicht an und bestimme die Schwingungsdauer, ausser wenn das Gewicht am Ende sich befindet, auch noch bei drei anderen Abständen $b_1\, b_2\, b_3$ desselben von der Axe. Das Resultat sei $T\, T_1\, T_2\, T_3$; dann ist

$$l = \frac{b_1 b_3 (b_3 - b_1)(T^2 - T_2^2) - b_1 b_2 (b_2 - b_1)(T^2 - T_3^2) - b_2 b_3 (b_3 - b_2)(T^2 - T_1^2).}{b_1 b_3 (T_1^2 - T_3^2)(T^2 - T_2^2) - b_1 b_2 (T_1^2 - T_2^2)(T^2 - T_3^2) - b_2 b_3 (T_2^2 - T_3^2)(T^2 - T_1^2)}$$

Reversionspendel. Wenn man nach dem Gesagten die Länge eines physischen Pendels theoretisch berechnen könnte, so muss man doch dreierlei bedenken: 1. Dass diese Berechnung zahlreiche Messungen und Wägungen involvirt, 2. dass sie desto complicirter wird, je zusammengesetzter die Gestalt des Pendels ist und 3. dass die Berechnung die Homogenität jedes einzelnen der Theile des Pendels voraussetzt; diese Voraussetzung trifft aber fast nie völlig zu. Diese Mängel bezeichnen zugleich die Vorzüge des BOHNENBERGER'schen Reversionspendels. Dasselbe besteht aus einer Stange, welche ausser dem Pendelkörper zwei als Drehaxen dienende Schneiden, davon die eine verschiebbar, trägt; die Schärfen der beiden Schneiden sind einander zugekehrt. Im Allgemeinen wird die Schwingungsdauer und folglich auch die Länge des correspondirenden einfachen Pendels eine andere sein, je nachdem das Reversionspendel um die eine oder die andere Axe schwingt, nämlich, wenn m die Masse des Pendels, k sein Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt parallel zu den Schneiden gelegte Axe ist und s_1 und s_2 die Entfernungen des Schwerpunktes von den Schneiden sind:

$$l_1 = \frac{m s_1^2 + k}{m s_1}, \quad l_2 = \frac{m s_2^2 + k}{m s_2}.$$

Damit diese Ausdrücke gleich seien, muss die eine der beiden Grössen s_1 s_2 zu der anderen in der Beziehung

$$s_2 = \frac{k}{m s_1}$$

stehen, und es wird dann nach der ersten der obigen Gleichungen

$$l = s_1 + s_2. \tag{30}$$

Ist also das Pendel so gearbeitet, dass der Schwerpunkt in der Ebene der beiden Schneiden liegt, so ergiebt sich der Satz: die correspondirende Länge eines auf beiden Schneiden isochron schwingenden Reversionspendels ist gleich dem Abstande seiner beiden Schneiden; für die Schwingungen um jede von beiden ist die andere der Schwingungspunkt. Durch eine einzige Längenmessung kann man also auf diese Weise l finden, ohne sonst etwas über die Vertheilung der Massen ermitteln zu müssen. Sind die beiden Schwingungsdauern des Reversionspendels verschieden, so giebt es natürlich ebenfalls ein einfaches Pendel von der Länge $s_1 + s_2$, und seine Schwingungsdauer ist

$$T = \sqrt{\frac{s_1 T_1^2 - s_2 T_2^2}{s_1 - s_2}};$$

ist der Unterschied der beiden Schwingungsdauern nur gering und setzt man dann $T_1^2 - T_1^2 = \delta$, so findet man

[1]) GOVI, Compt. rend. 91, pag. 105 (1880).

$$T = T_2 + \frac{s_1}{2(s_1 - s_2)} \cdot \frac{\delta}{T_2};$$

auf diese Weise kann man sich helfen, wenn es aus Mangel an Zeit oder aus anderen Gründen nicht gelingt, die beiden Schwingungsdauern gleich zu machen. (Man beachte, dass T nicht etwa, wie man vielleicht vermuthet hätte, zwischen T_1 und T_2 liegt, sondern grösser als beide ist). Man kann aber noch anders verfahren, nämlich l_1 und l_2 berechnen, ohne Gleichheit vorauszusetzen; man findet dann bei geeigneter Schreibweise

$$l_1 = (s_1 + s_2)\frac{T_1^2}{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2} + \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2}\,\frac{T_1^2 - T_2^2}{2}}, \quad l_2 = (s_1 + s_2)\frac{T_2^2}{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2} + \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2}\,\frac{T_1^2 - T_2^2}{2}}.$$

Diese Ausdrücke haben den Vortheil, dass die vom Schwerpunkt abhängige Grösse $s_1 - s_2$ nur in einem Correctionsgliede, im übrigen aber nur der leicht zu messende Schneidenabstand $s_1 + s_2$ vorkommt.[1])

Ein Analogon des Reversionspendels ist das FINGER'sche Pendel[2]). Dasselbe hat nur eine Schneide, aber zwei Massen m_1 und m_2 in den Abständen x_1 und x_2 von der Axe. Diese lassen sich mit einander vertauschen. Bleibt hierbei T constant, so ist wieder

$$l = x_1 + x_2.$$

Als eine interessante Verallgemeinerung des Reversionspendels ist schliesslich noch das von BÖKLEN[3]) zu erwähnen.

Ermittelung von g durch Pendelversuche. Nachdem gezeigt ist, dass man für jedes physische Pendel l bestimmen kann, sieht man ein, dass man in der Formel $T = \pi\sqrt{l/g}$ von den beiden Grössen g und T die eine berechnen kann, wenn man die andere kennt. Die Berechnung von T aus g hat nur dann einen Sinn, wenn zur Ermittelung von l die Beobachtung von T nicht benutzt worden war; sie liefert dann, in Verbindung mit der Beobachtung von T, eine Bestätigung der Theorie des physischen Pendels. Viel wichtiger ist aber die Berechnung von von g aus l und T, entweder nach der allgemeinen Formel

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$$

oder aus der für $T = 1$ specialisirten

$$g = \pi^2 L;$$

das betreffende Pendel heisst dann Sekundenpendel und L die Länge des einfachen Sekundenpendels; unter 45° ist im Meeresspiegel

$$L = 0{\cdot}99353\ m.$$

Auf diese Weise sind die genauesten Werthe der Beschleunigung durch die Schwere ermittelt worden. Die bezüglichen Ergebnisse sehe man in Art. »Gravitation«; hier handelt es sich nur um die Methodik. Bis jetzt ist nur gezeigt worden, wie l ermittelt wird; das Gleiche ist nun noch für T zu thun. Damit ist aber die Aufgabe noch nicht erledigt; vielmehr sind dann noch die Vorsichtsmassregeln und Correctionen zu besprechen, welche zu beachten sind, damit die Resultate die gewünschte Genauigkeit besitzen.

---

[1]) Das Reversionspendel ist von BOHNENBERGER (Astronomie, Tüb. 1811) und von KATER (Phil. Trans. R. Soc. 1818, pag. 33) angegeben worden; als Vorläufer der Erfindung ist PRONY anzusehen (Compt. rend. 107, pag. 1657. 1888).

[2]) FINGER, Ber. d. Wien. Ak. (2) 84, pag. 170 (1881).

[3]) BÖKLEN, Z. f. Math. u. Phys. 28, pag. 304 (1883).

Bestimmung der Schwingungsdauer. Obgleich man auf verschiedene oben erwähnte Arten die Schwingungsdauer eines Pendels verhältnissmässig gross machen kann, so reicht doch die Messung einzelner Schwingungen bei weitem nicht aus, um irgend welche Genauigkeit zu erreichen. Man muss also einen ganzen Satz von Beobachtungen machen, um einen genaueren Mittelwerth zu erzielen, und hat hierbei die allgemeine Methode zur Messung von Schwingungsdauern, sowie zur Reduction derselben auf kleine Amplituden anzuwenden (s. Art. »Dynamik,« pag. 82 ff). Speciell für Pendel giebt es aber noch andere Methoden, welche unter Umständen eine noch grössere Genauigkeit gewähren. Die wichtigste derselben ist die Methode der Coincidenzen.[1]) Bei dieser vergleicht man die gesuchte Schwingungsdauer des Pendels P mit derjenigen des Sekundenpendels S einer genau regulirten astronomischen Uhr, indem man beide gleichzeitig durch ein Fernrohr beobachtet, das so aufgestellt ist, dass beide Pendelbilder im Ruhezustande durch den im Gesichtsfelde vertikal ausgespannten Spinnfaden hindurchgehen. Nimmt man an, dass P schneller schwingt als S, setzt man beide Pendel in Gang, wartet man ab, bis beide Pendel gleichzeitig und in gleichem Sinne durch den Faden gehen und beginnt nun zu beobachten, so wird man P dem S vorauseilen sehen. Der einfachste Fall, welcher eintreten kann, ist nun der, dass die Vorauseilung gerade in dem Momente eine Schwingung beträgt, in welchem S wieder einmal, z. B. zum $n$ten Male, durch den Faden geht; P geht dann ebenfalls hindurch, aber im entgegengesetzten Sinne und man kann schon aus dem Vergleich dieser beiden ersten Coincidenzen die Schwingungsdauer $T = n/(n+1)$ berechnen; besser ist es jedoch, die dritte Coincidenz, welche wieder eine gleichsinnige ist, abzuwarten und, wenn zwischen der ersten und dritten n_1 Sekunden vergangen sind, mit der Formel $T = n_1/(n_1 + 2)$ zu rechnen. Natürlich kann man dies zur Erhöhung der Genauigkeit fortsetzen und, wenn man für n_1 verschiedene Werthe findet, das Mittel aus ihnen nehmen. Der bisher geschilderte einfache Fall tritt aber, wie man sieht, nur ein, wenn sich die Schwingungsdauern der beiden Pendel wie zwei ganze aufeinander folgende Zahlen $n : n+1$ verhalten. Schon complicirter wird die Beobachtung, wenn sich dieses Verhältniss nicht einfacher als in der Form $n + \frac{1}{2} : n + \frac{3}{2}$ oder $2n + 1 : 2n + 3$ darstellen lässt. Die zweite Coincidenz, d. h. die erste gegensinnige, entgeht dann der Beobachtung gewissermassen, weil sie nicht in den Faden fällt; nach n Sekunden geht P noch etwas später, nach $n + 1$ Sekunden aber schon um ebensoviel früher durch den Faden; wartet man weiter, bis $2n + 1$ Sekunden vergangen sind, so erhält man wieder eine gleichsinnige Coincidenz, deren Sinn jedoch dem der ersten entgegengesetzt ist; und man muss noch die vierte (wieder gegensinnige, unbeobachtbare) und die fünfte Coincidenz abwarten, um wieder genau die Erscheinung wie zu Anfang vor sich zu haben. Je nachdem man bloss die Sekunden n bis zur dritten oder, was besser ist, die Sekunden n_1 bis zur fünften Coincidenz zählt, hat man

$$T = \frac{n}{n+2} \quad \text{oder} \quad T = \frac{n_1}{n_1 + 4}.$$

Verhalten sich endlich ganz allgemein die beiden Schwingungsdauern, in den kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt, wie $a:b$, so muss man längere Zeit warten, bis eine Coincidenz genau im Faden stattfindet. Ist dies die $p$te Coincidenz, und sind n Sekunden vergangen, so ist

[1]) BORDA, in: Base du syst. métr. Par. 1810, T. 3, pag. 337, und in Biot et Arago: Recueil d'obs. etc. exéc. par ordre du Bur. des Long. Par. 1821.

$$T = \frac{n}{n+p}.$$

Eilt in allen diesen Fällen P nicht voraus, sondern bleibt es zurück, so hat man nur nöthig, in allen obigen Formeln an Stelle des positiven Zeichens das negative zu setzen. Besonders empfindlich ist diese Methode und am häufigsten angewandt wird sie daher in dem Falle, wo die Schwingungsdauer von P nahezu gleich 1, 2, 3 u. s. w. Sekunden ist. Man vergleicht dann 1, 2, 3 u. s. w. Schwingungen des Sekundenpendels mit einer des anderen, hat es fast immer mit dem ersten der obigen Fälle zu thun und bekommt für n grosse Zahlen, so dass man mit aller Ruhe und Genauigkeit beobachten kann und genügend Zeit findet, um die zur Reduction auf kleine Schwingungen erforderliche Messung der Amplitude vorzunehmen.

Die Methode der Coincidenzen, welche man sehr treffend mit der Benutzung des Nonius bei Längenmessungen verglichen hat, ist von BORDA erfunden und von BESSEL [1]) wesentlich verbessert worden, hauptsächlich dadurch, dass nunmehr das Pendel nicht in dem Uhrkasten dicht vor dem Sekundenpendel aufgehängt wurde, wobei sich beide Pendel durch Mitschwingung beeinflussen, sondern das eine getrennt und unabhängig von dem anderen. Um trotzdem beide im Fernrohr beobachten zu können, braucht man nur zwischen beiden eine Linse derartig aufzustellen, dass das Bild des entfernteren in die Schwingungsebene des näheren gebracht wird. [2])

Von den übrigen Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer sei hier nur die elektrische Registrirmethode angeführt. Das zu untersuchende Pendel trägt ein feines, berusstes Papierblatt; letzteres trennt zwei gegenüber stehende Spitzen von einander, zwischen denen mit Hilfe einer genau regulirten Uhr, eines primären und eines sekundären Stromkreises in constanten Zeitintervallen Funken überspringen. Diese markiren auf dem berussten Papier, wenn das Pendel schwingt, weisse Punkte, deren man durch Verstellen der Spitzen nach oben oder unten mehrere Reihen erhalten kann. Die Ableitung der Schwingungsdauer aus den Abständen der Punkte von einander ist leicht zu machen.

Noch andere Methoden beruhen auf der Anwendung des Chronoskopes oder des Chronographen.

Einfluss der Aufhängung. Die Aufhängung eines Pendels kann und muss eine sehr verschiedenartige sein, je nachem es sich um geringere oder grössere Präcision handelt, je nachdem das Pendel ebene oder räumliche Schwingungen ausführen soll und je nachdem der Pendelkörper an einem Faden oder an einer Stange befestigt ist. Fäden und Drähte kann man einklemmen oder einschrauben, für gewöhnliche Zwecke auch anknüpfen; bei Stangenpendeln sowie überhaupt bei allen genaueren Versuchen muss man, wie bei genauen Waagen, Schneiden anwenden; bei ganz genauen Untersuchungen ist sogar ein zusammengesetztes System von Schneiden erforderlich, und man kann hierbei mit grossem Vortheil die Idee des cardanischen Ringes mit verwenden, wodurch man ein sogen. GAUSS'sches Pendel erhält. [3]) Bei allen Schneidenpendeln

[1]) BESSEL, Unt. üb. d. Länge d. einf. Secundenpendels, Berl. 1828.

[2]) In Bezug auf die technische Ausführung der Coincidenzbeobachtungen sind gegenwärtig zwei weitere Methoden zu der BESSEL'schen hinzugekommen, die Schweizer Registrir-Methode s. BRUHNS, Astr.-geod. Arbeiten 1870), und die von H. C. VOGEL (Rep. d. Phys. 17, pag. 337. (1881); die letzte scheint die genaueste zu sein.

[3]) S. hierüber LORENTZEN, Astr. Nachr. 114, pag. 241 (1886).

ist die Schneide die Drehaxe. Sie soll es wenigstens sein, ist es aber nicht genau, weil sie niemals eine mathematische Linie, sondern stets ein schmaler Theil einer Cylinderfläche von sehr kleinem Halbmesser r ist. LAPLACE und BESSEL zeigten, dass hierdurch die beobachtete Pendellänge l' zu gross ausfällt; die wahre l ist, wenn s der Schwerpunktsabstand ist:

$$l = l'\left(1 - \frac{r}{s}\right);$$

der Fehler ist also nicht so ganz unbedeutend, da er direkt proportional mit r ist; er beträgt z. B. für $r = 0\cdot1$ *mm* und $s = 0\cdot5$ *m* immerhin 0·0002 des Werthes. Da man aber r nur schwer bestimmen kann, thut man besser seinen Einfluss zu eliminiren, wofür BESSEL verschiedene Methoden angegeben hat. Benutzt man z. B. zwei Pendel, die aus derselben Kugel, derselben Schneide, aber verschieden langen Drähten gebildet sind, so kann man aus den Schwingungsdauern und dem Längenunterschied der Drähte die correspondirenden Längen berechnen, unabhängig von der Schärfe der Schneide (und zugleich unabhängig von der Homogenität der Kugel.[1])

Einfluss der Temperatur. Je höher die Temperatur, desto kürzer wird die Pendelstange und umgekehrt. Man muss also bei wissenschaftlichen Angaben die Temperatur hinzufügen. Bei Uhren macht man sich durch die sogen. Compensation (s. Ausdehnung durch die Wärme) von der Temperatur unabhängig.

Einfluss der umgebenden Luft. Bei allen genaueren Pendeluntersuchungen ist zu berücksichtigen, dass die in den Gleichungen (2) u. s. w. enthaltene Theorie durch den Einfluss der Luft modificirt wird. Dieser Einfluss erstreckt sich auf Amplitude und Schwingungsdauer. In ersterer Hinsicht sei nur kurz bemerkt, dass alsdann die Amplituden abnehmen, und zwar in geometrischer Progression, im übrigen aber auf weiter unten folgende Artikel verwiesen. Im luftleeren Raume kann man es, wenn man überdies die Reibung in der Aufhängung möglichst verringert, dahin bringen, dass ein Pendel tage-, ja wochenlang schwingt.[2]) Der Einfluss auf die Schwingungsdauer ist ein doppelter, ein aerostatischer und ein aerodynamischer. Um den ersteren zu berücksichtigen, muss man nach dem archimedischen Princip die verdrängte Luftmasse m_1, deren Schwerpunktsabstand s_1 sei, in Rechnung ziehen. Der andere Einfluss rührt daher, dass das Pendel eine gewisse Luftmenge mit sich hin und herführt, und dass hierdurch sein Trägheitsmoment vergrössert wird. Man kann demnach, wenn ε eine von der Gestalt und Schwingungsdauer des Pendels abhängige Constante ist, die Länge des correspondirenden einfachen Pendels

$$l = \frac{k + \varepsilon m_1 s_1^2}{ms - m_1 s_1}$$

setzen. Nach BESSEL kann man ε experimentell bestimmen, indem man zwei Pendel von gleicher Gestalt und fast gleicher Schwingungsdauer, aber verschiedener Masse benutzt. In Bezug auf das weitere sei auf die Untersuchungen von BESSEL[3]) und von O. E. MEYER[4]) verwiesen, und nur noch die von Letzterem abgeleitete, genaue und detaillirte Formel, welche auch die innere Reibung der Luft berücksichtigt, angegeben:

---

[1]) Näheres bei BESSEL, a. a. O. u. bei F. NEUMANN, Einl. in die theor. Phys. (Hrsg. v. PAPE). Leipz. 1883, pag. 78.

[2]) BOTTOMLEY, Phil. Mag. 23, pag. 72 (1887).

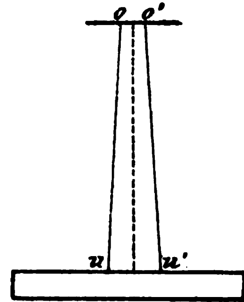
[3]) BESSEL, a. a. O.

[4]) O. E. MEYER, CRELLE's J. 73, pag. 31 (1871). — POGG. Ann. 142, pag. 481 (1871).

$$l = \frac{(M + kM')(\lambda + a)^2 + \mu + \frac{1}{3} m \lambda^2}{(M - M')(\lambda + a) + \frac{1}{2}(m - m')\lambda}.$$

(M Masse der Kugel, M' der von ihr verdrängten Luft, a ihr Radius, μ ihr Trägheitsmoment in Bezug auf die Mittelpunktsaxe, λ die Länge des Pendelfadens, m seine Masse, m' diejenige der von ihm verdrängten Luft, endlich $k = \frac{1}{2} + \frac{9}{4\nu a}$, wo ν von der Reibung abhängig ist). Bei gewöhnlichen Pendeln schwächt man den Luftwiderstand dadurch ab, dass man den Pendelkörpern die Gestalt von Linsen giebt, welche die Luft gewissermassen durchschneiden. Beim Reversionspendel kann man den Lufteinfluss gänzlich eliminiren, wenn man ihm nach Bessel zwei Linsen von gleichen Dimensionen giebt, von welchen die eine voll, die andere hohl ist und zu denen die beiden Schneiden symmetrisch liegen. Es verschwindet dann in dem Ausdrucke für l sowohl die aerostatische als auch die aerodynamische Correction, und man erhält wie früher $l = s_1 + s_2$. Näheres hierüber sehe man in den Art. »Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten« und »Reibung.«

Bifilare Aufhängung. Ein an einem Faden aufgehängter Körper kann zwar, ausser um eine horizontale Axe, auch um den Faden als verticale Axe, schwingen; diese Schwingungen darf man aber nicht als durch die Schwere, sondern muss sie als durch die Torsion des Fadens hervorgerufen betrachten. Hängt man einen Körper aber an zwei im Ruhezustande verticalen Fäden auf, so führt er nicht nur um die horizontale Verbindungslinie der beiden oberen Endpunkte der Fäden, sondern auch um eine in der Mitte zwischen ihnen liegende vertikale Axe Schwingungen aus, welche man als eine Folge der Schwere zu betrachten hat, weil mit ihnen eine periodische Senkung und Hebung des Körpers verknüpft ist, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil die als unausdehnbar angenommenen Fäden bei der Drehung des Körpers eine schräge Lage erhalten und folglich nicht mehr so weit herabreichen wie vorher. Die Theorie dieser Erscheinung lässt sich sogar für den Fall, dass die Fäden wie in Fig. 58 nach unten divergiren, leicht entwickeln. Die obere Entfernung der Fäden sei $2o$, die untere $2u$ und die Länge L. Im abgelenkten Zustande bieten die Fäden alsdann von oben gesehen das Bild der zweiten Fig. 58; in dieser Stellung sei uu' noch um z tiefer als oo'. Bezeichnet man noch mit M die Masse und mit K das Trägheitsmoment des Stabes um die Drehaxe, so findet man die Winkelbeschleunigung



(Ph. 58).

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{Mgou\sin\vartheta}{LK},$$

also durch Vergleichung mit der entsprechenden Formel für das einfache Pendel die correspondirende Länge

$$l = \frac{K}{M} \cdot \frac{L}{ou}$$

und somit die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{K}{M} \frac{L}{ou}}.$$

Die somit abgeleitete Formel findet weniger in dieser Gestalt zur Bestätigung der Theorie, als vielmehr in der umgekehrten

$$K = \frac{T^2}{\pi^2} Mg \frac{ou}{L}$$

zur Ermittelung des Trägheitsmomentes Anwendung. Um dabei die nicht genau messbaren Grössen o und u zu eliminiren, kann man entweder bei zwei verschiedenen Werthen von L beobachten und aus den beiden so erhaltenen Gleichungen für T und T_1, $o\,u$ eliminiren, oder nach Gauss ganz so wie bei bei der analogen Methode für unifilare Aufhängung (s. Art. »Dynamik«, pag. 81) die Masse des Körpers durch Anhängung zweier gleicher Körper in gleichem Abstande zu beiden Seiten der Drehaxe vermehren und nun wieder die Schwingungsdauer bestimmen. Ist K_1 das hinzugefügte Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehaxe und M die hinzugefügte Masse, so erhält man

$$K = \frac{K_1}{\frac{T_1^2}{T^2} \frac{M + M_1}{M} - 1}.$$

Das Trägheitsmoment K_1 kann man, da man gewöhnlich cylindrische Körper hinzufügt, entweder berechnen, oder durch einen dritten Versuch, bei welchem man dieselben nicht im Abstand d_1, sondern im Abstande d_2 von der Drehaxe anbringt, eliminiren; im letzteren Falle erhält man

$$K = \frac{T^2 M M_1 \left[\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2\right]}{(T_1^2 - T_2^2)(M + M_1)}.$$[1]

Einfluss der Erdrotation; Foucault'sches Pendel. Während sich der Einfluss der Erdrotation auf Fall und Wurf (s. d.) durch die Theilnahme der betreffenden Körper an der Bewegung der Erde erklärt, gestaltet sich derselbe Einfluss auf die Bewegung des Pendels gerade entgegengesetzt und lässt sich im Princip durch den Ausspruch beschreiben, dass ein solcher Einfluss nicht vorhanden ist. Wenn trotzdem dieser Gegenstand von Interesse ist, so liegt dies einestheils darin, dass wir die Bewegung der Erde nicht wahrnehmen, und folglich an einem Körper, welcher diese Bewegung nicht theilt, eine entgegengesetzt gerichtete, scheinbare Bewegung beobachten werden, theils darin, dass, wenn wir an einem Pendel ohne ansreichenden Grund eine Drehung der Schwingungsebene wahrnehmen, wir hierin einen Beweis für die Drehung der Erde erblicken dürfen. Dass die Schwingungsebene des Pendels durch anderweitige Drehungen nicht beeinflusst wird, kann man auch künstlich zeigen, z. B. indem man den zwischen den Fingern gehaltenen Pendelfaden dreht, wobei der Pendelkörper zwar in Rotation um seine Axe geräth, aber in derselben Ebene weiterschwingt; oder indem man ein schwingendes Pendel in verschiedensten Richtungen hin- und herträgt; oder endlich indem man es an einen hohen, auf die Schwungmaschine gesetzten Bügel hängt und diese in Rotation versetzt.

Der Versuch, zum Zwecke des Nachweises der Rotation der Erde um ihre Axe die scheinbare Drehung der Schwingungsebene des Pendels zu demonstriren ist zuerst von Foucault[2]) und seitdem in den mannigfachsten Formen ausgeführt

[1]) Die Theorie der bifilaren Aufhängung ist namentlich von Bessel, Gauss und F. Neumann entwickelt worden.

[2]) Foucault, Compt. R. 32, pag. 135 (1851).

worden. Hat man einen hohen Raum zur Verfügung, so hängt man einen feinen, aber tragfähigen Draht an der Decke mittelst einer Vorrichtung auf, welche möglichste Freiheit der Bewegung gewährt und die Bevorzugung einer Richtung vor anderen als ausgeschlossen erscheinen lässt, und befestigt an ihm eine möglichst schwere, unten mit einer Spitze versehene Kugel. Mit dem Centrum dicht unter dieser stellt man eine mit Gradeintheilung versehene Kreisscheibe auf. Bindet man nun das Pendel in einer schiefen Stellung, in welcher die Spitze gerade über dem Nullpunkte der Theilung sich befindet, mittelst eines Fadens irgendwo an und brennt den Faden in einem bestimmten Zeitpunkte durch, so schwingt das Pendel gradlinig von 0 nach 180. Aber schon nach wenigen Minuten kann man eine Abweichung von dieser Richtung beobachten, und nach 10 Minuten beträgt sie, wenn z. B. in Berlin beobachtet wird, bereits 2°, und zwar im Sinne der Uhrzeigerbewegung. Die Abweichung wird immer grösser, bis sie schliesslich wegen Abnahme der Amplitude oder Ausartung der ebenen in sphärische Schwingungen sich der Beobachtung entzieht. Auch im gewöhnlichen Zimmer, also mit viel kürzeren Pendeln, kann man sich mit Anwendung von Kunstgriffen schon in nicht viel längerer Zeit, etwa innerhalb $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ Stunde von der scheinbaren Drehung überzeugen. Ein solcher Kunstgriff ist z. B. die Benutzung zweier Pendel, welche ursprünglich in derselben Ebene schwingen, und deren Kugeln abwechselnd einander ganz nahe kommen und sich von einander entfernen. Mit der Zeit treffen dann die Kugeln nicht mehr genau auf einander, sondern weichen nach entgegengesetzten Richtungen ab, und ihr transversaler Abstand im Momente der grössten Annäherung nimmt mit doppelter Geschwindigkeit zu. Mittelst verschiedener Projectionsmetoden kann man dies auch einem grösseren Publikum sichtbar machen[1]).

Was die Theorie der Erscheinung betrifft, so ergeben zunächst die Gesetze der Dynamik folgendes. An die Stelle der Gleichungen (2) treten neue, welche sich durch der Rotation der Erde entsprechende Glieder von ihnen unterscheiden. Legt man den Anfangspunkt in den schweren Punkt des als einfach betrachteten Pendels, die z-Axe vertikal abwärts, die x-Axe in den Meridian, ist ω die Winkelgeschwindigkeit und φ die geographische Breite, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt} + \lambda x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\left(\sin\varphi \frac{dx}{dt} + \cos\varphi \frac{dz}{dt}\right) + \lambda y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g + 2\omega \cos\varphi \frac{dy}{dt} + \lambda(z - l).$$

Diese Gleichungen können allgemein nur für unendlich kleine Schwingungen integrirt werden. Setzt man $x = r\cos\vartheta'$, $y = r\sin\vartheta'$, so dass r und ϑ' die Polarcoordinaten des schweren Punktes in der jedesmaligen Horizontalebene sind, bezeichnet man mit c und C willkürliche Constanten, und führt man endlich einen neuen Winkel durch die Gleichung $\vartheta' + t\omega\sin\varphi = \vartheta$ ein, so wird

[1]) Aus der grossen Zahl der experimentellen Untersuchungen über das FOUCAULT'sche Pendel seien hier angeführt: DUFOUR, C. R. 33, pag. 13 (1851). — MORREN, C. R. 33, pag. 62 (1851). — DEJEAN DE FONROQUE, C. R. 88, pag. 771 (1879). — CZERMAK u. HIECKE, Centr. Z. f. Opt. u. Mech. 1885, pag. 217. — Hierher gehört auch das von G. SIRE (J. de Phys. 10, pag. 401, 1881) construirte »Devioskop«, sowie das von E. v. GOTHARD angegebene »Kremaklitron«(Z. f. Instr. K. 5, pag. 19, 1885).

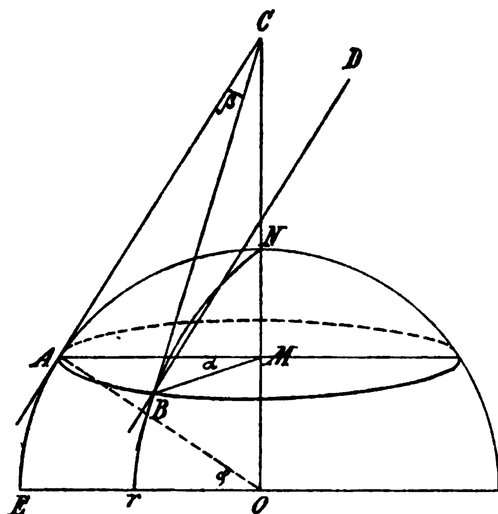
$$r^2 d\vartheta = c\,dt,$$

$$dr^2 + r^2 d\vartheta^2 = \left(\frac{g}{l} r^2 + C\right) dt^2.$$

Diese Gleichungen zeigen dadurch, dass sie ω nicht enthalten, in der That, dass die Schwingungsvorgänge unabhängig sind von der Rotation der Erde. Eine eingehendere Analyse zeigt freilich, dass dies nur für die grossen Züge der Erscheinung, nicht aber für die Vorgänge jeder einzelnen Schwingung gilt. Die Erscheinung, welche das FOUCAULT'sche Pendel darbietet, wird häufig als Erhaltung der Schwingungsebene beseichnet (s. unten).

Hiermit ist der wahre Sachverhalt charakterisirt. Von besonderem Interesse ist es aber hier, den Vorgang, wie er sich uns scheinbar darstellt, zu verfolgen.

Begnügt man sich mit einer angenäherten Darstellung und beschränkt man sich darauf, die Erscheinung nur kurze Zeit, etwa höchstens bis zu einer Stunde zu verfolgen, so gelangt man für ebene Schwingungen in kurzer und ganz elementarer Weise zum Ziel. Am Pole ist die Winkelgeschwindigkeit der scheinbaren Drehung offenbar dieselbe, wie die wahre der Erddrehung, in einer Stunde dreht sich also die Schwingungsebene um 15° und in einem Tage — in diesem Specialfalle darf man verallgemeinern — ein ganzes Mal herum. Am Aequator findet eine Drehung überhaupt nicht statt, weil hier das Flächenstück, über welchem das Pendel schwingt, bei der Erddrehung sich nur verschiebt, ohne sich in sich selbst zu drehen; es dreht sich zwar um die Erdaxe aber diese Drehung macht die Pendelebene, die doch stets vertikal bleiben muss, selbstverständlich mit. An jedem anderen Orte wird demgemäss die Erscheinung zwischen beiden Extremen liegen. Setzt man das Pendel im Orte A der Einfachheit halber in der Richtung des Meridians AC in Schwingungen, so bildet die Schwingungsrichtung BD im Orte B mit dem Meridian dieses Ortes den Winkel $CBD = ACB = \beta$. Ist wieder φ die geographische Breite und α der Drehungswinkel AMB, endlich r der Erdradius, so ist $AB = \alpha r \cos\varphi$; andrerseits $AC = r\,tang\,AOC = r\,cotg\,\varphi$, und hiermit $AB = \beta r\,cotg\,\varphi$; also durch Vergleichung der beiden Ausdrücke für AB



(Ph. 59).

$$\beta = \alpha \sin\varphi,$$

in Worten: die Drehung der Schwingungsrichtung ist proportional dem Sinus der geographischen Breite. Beispielsweise ist für Berlin $\beta = 0{,}793\,\alpha$, die scheinbare Drehung beträgt also hier in einer Stunde etwa 12°. Man kann an einem Globus leicht diese Vorgänge verfolgen und überzeugt sich dann, wie die wirkliche Bewegung der Pendelebene beschaffen ist. Der Ausdruck »Erhaltung der Schwingungsebene« erweist sich dabei, wenigstens ohne weiteren Zusatz, als ungerechtfertigt.

So einfach diese Annäherung, welche übrigens durch das Experiment so ziemlich bestätigt wird, ist, so complicirt ist die exakte Theorie, und es herrscht

trotz der seit FOUCAULT und namentlich in den letzten zehn Jahren mächtig angeschwollenen Litteratur hierüber noch manche Unklarheit selbst über wesentlichere Punkte. Dass die obige elementare Entwickelung nicht streng ist, ergiebt sich durch verschiedene Erwägungen, z. B. durch die, dass die in B zu AC gezogene Paralle BD gar keine horizontale Linie mehr ist, also auch nicht Schwingungsrichtung sein kann. Wird also schon unter den dortigen einfachen Annahmen die strenge Behandlung selbst für unendlich kleine Schwingungen schwierig, so bietet sie fast unübersteigliche Hindernisse, wenn man sie unter den der Wirklichkeit entsprechenden Bedingungen durchführen will. Indem in dieser Hinsicht auf die erwähnte Litteratur verwiesen wird, muss es hier genügen, die wichtigsten in Betracht kommenden Momente zu erwähnen. 1. Die Schwingungsebene kann nicht sich selbst parallel bleiben, weil sie stets vertikal, im Sinne des augenblicklichen Ortes sein muss. 2. Im Moment des Losbrennens des Fadens besitzt das Pendel bereits eine seitliche Drehungsgeschwindigkeit, welche berücksichtigt werden muss. 3. Es kommt darauf an, in welcher Richtung das Pendel anfangs schwingt. 4. Mit der Zeit verwandeln sich die Schwingungen in sphärische und es tritt dann zu der scheinbaren Drehung die oben abgeleitete wirkliche hinzu. 5. Es kommt darauf an, ob die Schwingungen durch einen Impuls in der Gleichgewichtslage oder durch Loslassen in der abgelenkten erzeugt werden. 6. Die Schwingungsdauer wird eine andere. Endlich käme 7. noch der Luftwiderstand in Betracht; derselbe ist aber auf das Drehungsgesetz ohne Einfluss[1]).

Anwendungen des Pendels. Die wichtigste Anwendung des Pendels ist die zur Regulirung zeitmessender Apparate, d. h. als Uhrpendel. Die Pendeluhr ist eine der vielen Ideen von HUYGENS[2]). Die Regulirung geschieht dadurch, dass immer abwechselnd der eine oder der andere von zwei mit dem Pendel verbundenen Haken in dasjenige Zahnrad eingreift, welches durch ein Gewicht in ständige Drehung versetzt wird; es kann in Folge dessen dieses Rad während jeder Schwingung nur um einen Zahn vorrücken. Andererseits sorgt das Zahnrad durch den Stoss, welchen es dem Haken jedesmal giebt, dafür, dass die Pendelschwingungen nicht nur dauernd, sondern auch bei gleicher Amplitude erhalten werden. Zur Ermöglichung absoluter Regulirung der Uhr ist die Linse verschiebbar; ein Hinaufschieben beschleunigt, ein Hinabschieben verzögert die Bewegung.

Eine andere, ähnliche Anwendung des Pendels ist der von MÄLZEL 1813 erfundene Taktmesser oder Metronom.[3]) Bei demselben ist, um langsame Schwingungen bei kleinen Dimensionen des Apparates zu haben, die Idee des Differentialpendels (s. o.) verwirklicht, die Pendelstange über den Drehpunkt hinaus

---

[1]) Einige der wichtigsten Arbeiten über die Theorie des FOUCAULT'schen Pendels sind: DUMAS, CRELLE J. 50, pag. 52 u. 126 (1854). — BINET, LIOUVILLE, VILLARCEAU, BERTRAND u. a. in verschiedenen Bänden der Compt. Rend. — ROETHIG, Z. f. Math. u. Phys. 24, pag. 153 (1879). — SIACCI, Atti R. Acc. Torino 13 (1878). — TAMMEN, Rep. d. Phys. 17, pag. 278 (1882), und Jahr. Ber. Ver. f. Nat. Zwickau 1882, pag. 47. — I. FRANZ, Dissertation, Halle 1872. — KAMERLING ONNES, Dissertation, Gröningn. 1879. — WEIHRAUCH, Rep. d. Phys. 22, pag. 480 u. 643 (1887). — DE SPARRE, Ann. Soc. Brux. 17, pag. 111 (1882).

Ein ähnliches Problem, nämlich die Bewegung des Pendels in einem Eisenbahnwagen, ist von P. DE ST. ROBERT (Atti R. Acc. Linc. (3) 3, pag. 277 (1879) behandelt worden. Auch hier findet die sog. »Erhaltung der Schwingungsebene« nicht statt.

[2]) HUYGENS, Horologium oscillatorium. Paris 1673.

[3]) Kurze Abhandlung über den Metronom und dessen Anwendung, Mainz 1836.

verlängert und trägt hier ein Gewicht, dessen Verschiebbarkeit verschiedene Schwingungsdauern zu erzielen ermöglicht.

Das ballistische Pendel besteht entweder aus dem an starken Stangen pendelnd aufgehängten Geschützlauf und dient alsdann dazu, durch den Rückschlag die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses zu bestimmen; oder es besteht aus einem pendelnd aufgehängten, mit Thon gefüllten Kasten, in welchen die Kugel einschlägt und auf den sie, in ihm stecken bleibend, ihre Wucht überträgt, so dass man ihre Geschwindigkeit an dieser Stelle ihrer Bahn berechnen kann.

Das elektrische Pendel endlich ist ein solches, welches dadurch, dass es zwischen den Polen einer sogenannten trockenen Säule schwingt und von diesen abwechselnd abgestossen wird, bei geeigneter Aufstellung monate- und selbst jahrelang im Gang bleibt und scherzweise Perpetuum mobile genannt wird. Uebrigens finden bei elektrischen und magnetischen Versuchen auch sonst Pendel vielfach Anwendung.[1]) F. Auerbach.

Kreiselbewegung.

Kreiselbewegung ist die Rotation eines starren Körpers um eine Hauptträgheitsaxe, von welcher entweder nur ein Punkt oder gar keiner fest ist. Man nennt eine solche Axe eine freie Axe (s. Art. Dynamik); ist sie ganz frei, so kommt zu der gedachten Rotation im allgemeinen noch eine fortschreitende Bewegung des Körpers hinzu. In allen Fällen aber (von einem Specialfalle abgesehen) treten, durch die Rotation als primäre Erscheinung bedingt, secundäre Bewegungen auf, welche die bezüglichen Vorgänge besonders interessant und mannigfaltig gestalten. Noch verwickelter endlich werden die Erscheinungen durch die in der Wirklichkeit stets nicht unerheblich sich geltend machende Reibung, von welcher jedoch hier zunächst abgesehen wird.

Die auffallendste Erscheinung, welche sich darbietet, ist die, dass kreiselnde Körper nicht umfallen, obgleich sie es thun würden, wenn sie sich, ohne zu kreiseln, in derselben Stellung befänden. Beispiele liefern ein fortrollendes Rad, ein um seine vertikale Axe sich drehender Teller und der bekannte einfache Kreisel. Der einfachste Fall ist der, dass der Schwerpunkt vertikal über dem Stützpunkte liegt; die Drehungsaxe liegt alsdann, symmetrische Massenvertheilung vorausgesetzt, beim Rade horizontal, beim Kreisel vertikal. In ruhendem Zustande würden diese Körper thatsächlich umfallen, weil sie sich im labilen Gleichgewichtszustande befinden; im kreiselnden Zustande ist dies nicht der Fall, ja es bedarf einer gewissen Kraftanstrengung, um sie umzuwerfen. Diese Erscheinung heisst die Erhaltung der Rotationsebene. Damit ist die Erscheinung natürlich nur bezeichnet, aber nicht erklärt; worauf sie beruht, davon kann man sich ohne Rechnung folgendermassen eine Vorstellung machen. Der ruhende Kreisel fällt um, weil bei der leisesten Lagenänderung der Schwerpunkt sich nach der einen Seite verschiebt, während sich gleichzeitig die Punkte dieser Seite senken; damit ist das Gleichgewicht gestört und der Kreisel muss auf die betreffende Seite fallen. Beim kreiselnden Kreisel findet im ersten Moment dasselbe statt, d. h. durch einen Zufall senkt sich die eine Hälfte des Kreisels ein wenig, wobei sich die andere Hälfte um denselben Betrag hebt; sehr bald aber, nämlich schon nach einer halben Umdrehung, haben die beiden Hälften ihre Stellung und folglich

[1]) Die Figur 57 ist leider auf den Kopf gestellt.

ihre Rollen miteinander vertauscht, und es wird daher die Wirkung jetzt die umgekehrte sein: die gehobene Hälfte wird sich senken, die gesunkene sich heben; durch einen fortwährenden Ausgleich wird also, wie man sieht, die ursprüngliche Lage erhalten[1]). Man kann dies ganz kurz auch so aussprechen: Der ruhende Kreisel fällt um, weil er durch Zufall einen Anstoss nach einer bestimmten Richtung erhält; der rotirende Kreisel bleibt aufrecht, weil der durch Zufall in einer bestimmten Richtung erhaltene Anstoss sich durch die Rotation auf alle Richtungen gleichmässig vertheilt.



(Fig. 60.)

Die Erhaltung der Rotationsebene offenbart sich, wie erwähnt, auch dadurch, dass man eine unverhältnismässige Gewalt anwenden muss, um diese Ebene zu verändern. Man kann dies z. B. an einem Apparat wahrnehmen, welcher aus einer in zwei Hälften zerlegbaren Hohlkugel besteht, in deren Inneres sich ein Kreisel einsetzen lässt; rotiert derselbe, so kann man die Kugel zwar um die Kreiselaxe mit Leichtigkeit, um alle übrigen Axen aber nur mit Anstrengung drehen. Man wird sich hiervon in ähnlicher Weise wie oben Rechenschaft geben können.

Besonders geeignet zur Demonstration der Erhaltung der Rotationsebene ist der Bohnenberger'sche Apparat (Fig. 60)[2]). Derselbe besteht aus drei mittelst Spitzen in einander liegenden Ringen; der äusserste A ist vertikal festgestellt, der zweite B kann sich um eine vertikale, der dritte C um eine horizontale Axe drehen, endlich die in dem letzteren hängende Kugel D um eine auf der letztgenannten senkrechte Axe; um den Aequator der Kugel läuft eine Rolle, von welcher man eine Schnur abziehen und hierdurch die Kugel in rasche Rotation versetzen kann. Vermöge dieser Aufhängung kann sich die Kugel nach allen Richtungen frei drehen, und in der That genügt, so lange die Kugel ruht, der leisesteexcentrische Druck, um die Axe in der gewünschten Richtung zu drehen; kreiselt sie aber, so kann man den ganzen Apparat beliebig neigen und drehen, ohne dass dies auf die absolute Richtung der Axe einen Einfluss hätte.

Die Erhaltung der Rotationsebene kommt indessen nur in zwei Fällen voll zum Ausdruck: entweder muss die Axe vertikal stehen, oder der feste Punkt muss mit dem gemeinsamen Schwerpunkt des Körpers im allgemeinen und der Axe im Besonderen zusammenfallen. Ist keines von beiden der Fall, so setzt sich die äussere Wirkung, also beim Kreisel die Schwere, mit dem Bestreben die Rotationsebene zu erhalten, zu einer neuen Bewegung zusammen, welche neben der kreiselnden Bewegung hergeht und darin besteht, dass die Axe um den festen Punkt eine Kegelfläche bestimmter Art beschreibt; an jedem schief aufgesetzten Kreisel kann man diese Bewegung wahrnehmen. Im grossen und ganzen kann man[3]) auch von dieser Erscheinung ohne Rechnung ein Verständnis gewinnen. Die

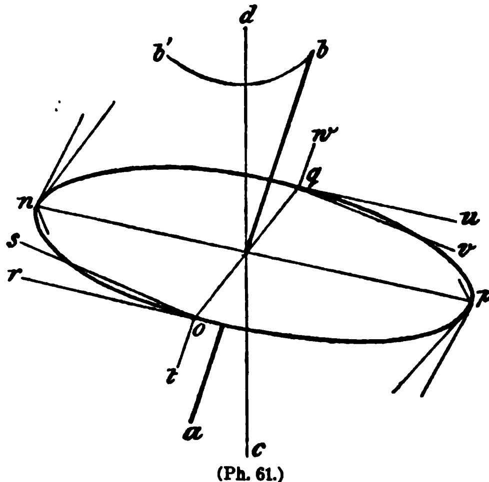
---

[1]) Bei einem rollenden Rade kann man die periodischen Schwankungen ganz deutlich verfolgen; sie werden desto stärker, je langsamer das Rad rollt, und schliesslich, wenn der Ausgleich zu spät erfolgt, fällt das Rad um.

[2]) Bohnenberger, Beschreibung einer Maschine u. s. w. Tüb. 1817.

[3]) Poggendorff, Pogg. Ann. 90, pag. 348 (1853).

Schwere sucht (Fig. 61) die Neigung der Axe *a b* gegen die Vertikale *c d* zu vergrössern, also die rotirende Scheibe um eine mit *o q* parallele Axe zu drehen. Die Geschwindigkeit der Punkte *o* und *q* hört in Folge dessen auf, eine rein tangentiale *o r* resp. *q u*, wie bisher, zu sein; sie lässt sich vielmehr, nachdem die Schwere die Scheibe um ein weniges gekippt hat, in die tangentialen Componenten *o s* und *q v* und in die zur Scheibenebene senkrechten Componenten *o t* und *q w* zerlegen; vermöge der ersteren wird die Kreiselbewegung fortgesetzt, vermöge der letzteren wird die Scheibe um eine mit *n p* parallele Axe gedreht, also die Kreiselaxe *a b* in einer auf der Ebene *a b c d* senkrechten Richtung vornüber gekippt. Sobald dies, wenn auch noch so wenig, der Fall ist, hört auch die Geschwindigkeit der Punkte *n* und *p* auf rein tangential zu sein, sie erhält vielmehr eine auf der Scheibenebene senkrechte, in *n* nach unten, in *p* nach oben gerichtete Componente, und die Scheibe wird sich um eine zu *o q* parallele Axe in aufrichtendem Sinne drehen. Die Folge des Zusammenwirkens dieser Umstände ist also eine doppelte: einmal die Verhinderung des Umfallens, und sodann eine zu der Kreislinie *b b'* tangentiale Bewegung der Kreiselaxe, vermöge deren letztere eine Kegelfläche beschreibt. Diese Bewegung wird Präcession genannt.



(Ph. 61.)

Zur Beobachtung der Präcession unter beliebig zu verändernden Umständen eignet sich ganz besonders der von PLÜCKER[1]) angegebene und von FESSEL construirte Rotationsapparat (Fig. 62). Die mit einem peripherischen Wulst versehene Scheibe *a* sitzt mit ihrer Axe *b* in einem Ringe *c*, der selbst wieder zwischen den Spitzen *n n* eines äusseren Ringes *d* hängt. Der an letzterem befestigte Stift *f* ist mittelst eines horizontalen Stiftes in der Gabel *i* befestigt. Der Apparat ist also um eine horizontale Axe, ausserdem aber, vermöge der freien Verbindung des Gabelstieles *h* mit dem Stativ, auch um eine vertikale Axe beweglich. Versetzt man nun die Scheibe durch Abziehen einer auf *b* gewickelten Schnur in Kreiselbewegung, so treten, je nach der Stellung des verschiebbaren Gegengewichtes *g*, drei Fälle ein, welche (innerhalb gewisser Grenzen) das Gemeinsame haben, dass der Apparat



(Ph. 62.)

1) PLÜCKER, Pogg. Ann. 91 (1854).

weder nach der einen noch nach der anderen Seite umfällt, die sich aber in folgender Weise von einander unterscheiden: Steht *g* so, dass der Kreisel das Uebergewicht hat, so dreht sich der ganze Apparat um die Verticale, und zwar in entgegengesetzter Richtung wie der höchste Punkt der Scheibe *a*. Hat zweitens *g* das Uebergewicht, so findet eine entgegengesetzte Drehung statt. Beide Drehungen erfolgen desto schneller, je grösser, bei gleicher Geschwindigkeit der Kreiselbewegung das einseitige Uebergewicht ist. Wenn drittens die beiden Seiten des Apparates sich gerade das Gleichgewicht halten, so ruft die Kreiselbewegung gar keine Drehung um die Vertikale hervor.

Die genaueren und insbesondere die quantitativen Verhältnisse der Präcessionsbewegung müssen aus dem allgemeinen Rotationsproblem (s. Art. »Dynamik«) hergeleitet werden. Indem in dieser Hinsicht namentlich auf die Untersuchungen von W. Hess[1]) verwiesen wird, muss er hier genügen, die wichtigsten Resultate anzuführen. Der Abstand des Schwerpunktes S des starren Rotationskörpers vom festen Punkte O sei d, das Trägheitsmoment in Bezug auf eine in der Aequatorebene (d. h. in der durch O senkrecht zur Axe gelegten Ebene) verlaufende Gerade sei A, das Trägheitsmoment um die Kreiselaxe C, das Gewicht P, die Neigung der Kreiselaxe ϑ_0, die Winkelgeschwindigkeit des Kreiselns n (also das Drehungsmoment, das ertheilt werden muss, $C\,n$). Das Moment der Schwere ist alsdann $P d \sin \vartheta_0$, also die Winkelgeschwindigkeit dieser zweiten Drehung $P d \sin \vartheta_0 / A$. Beide Drehungen erfolgen um freie Axen. Setzt man sie aber zu einer einzigen Drehung zusammen, indem man in der bekannten Weise das Parallelogramm — hier Rechteck — der Componenten und in diesem die Diagonale construirt, so ergiebt sich eine neue Drehungsaxe, welche nicht Hauptträgheitsaxe, also auch nicht freie Axe ist. Sie ist auch nicht permanente, sondern nur momentane Drehungsaxe, und es muss daher notwendig eine Bewegung der Kreiselaxe um O eintreten.

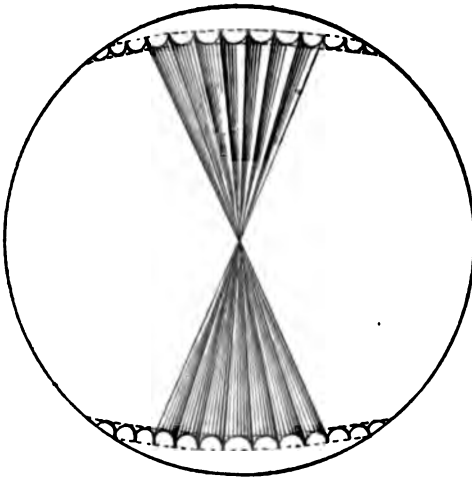
Diese Bewegung erweist sich nun als eine doppelte. Zu der Drehung der Kreiselaxe um die Vertikale, also zu der oben bereits abgeleiteten Präcession kommt nämlich noch eine Veränderlichkeit in der Neiguung der Kreiselaxe gegen die Vertikale; diese Bewegung heisst Nutation. Der Sinn der Bewegung ist für eine auf O in der Kreiselaxe stehende Person gleich oder entgegengesetzt dem Sinne der Kreiselbewegung, je nachdem zu Anfang der Schwerpunkt oberhalb oder nicht oberhalb des festen Punktes liegt. Auch sonst sind diese beiden Fälle in mancher Beziehung von einander abweichend. Liegt S unterhalb oder in gleichem Niveau mit O, so kann es im ganzen Verlaufe der Bewegung sich nie über dasselbe erheben; liegt zu Anfang S oberhalb O, so bleibt es stets oberhalb oder tritt zeitweise herunter, je nachdem

$$\frac{C^2 n^2}{4APd} > \text{ oder } < \frac{1}{2 \cos \vartheta_0}$$

ist. Die Kreiselaxe beschreibt eine Kegelfläche, deren Querdurchschnitt eine aus lauter spitz zusammenstossenden Bögen bestehende Curve ist; für S unterhalb O sind die Spitzen nach aussen, für den andern Fall nach innen gekehrt; die untere Hälfte der Fig. 63 bezieht sich auf jenen, die obere auf diesen Fall. Der Schwerpunkt bleibt stets innerhalb einer bestimmten Zone der um O mit d beschriebenen Kugel, und diese Zone ist im ersten Falle desto breiter, d. h. die

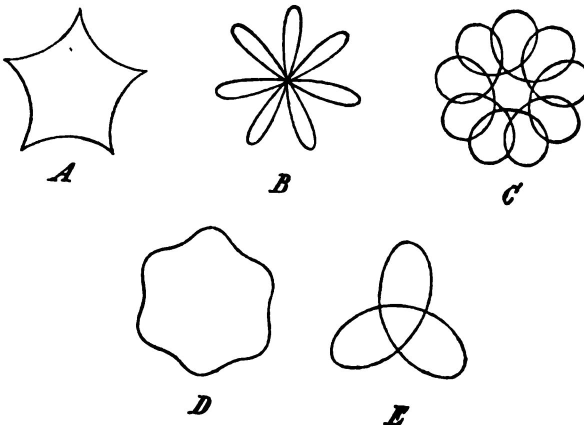
[1]) Hess, Math. Ann. Bd. 19, pag. 121 (1881) und 29 (1886); ferner Rep. d. Phys. 18, pag. 233 (1882).

Nutation um so beträchtlicher, je grösser *P*, *A*, *d* und je kleiner *C*, *n* und die anfängliche Tiefe des Schwerpunktes ist; im zweiten Falle desto breiter, je grösser *P*, *A*, *d*, *n* und je kleiner *C* ist, ferner desto breiter, je kleiner oder grösser ϑ_0 ist, je nachdem die Bewegung nur oberhalb oder auch unterhalb verläuft. Für die Bedeutung der Nutation kommt aber ausser ihrer Amplitude auch noch die zu jeder Ausbuchtung erforderliche Zeit, also das, was man die Schwingungsdauer der Nutation nennen kann, in Betracht. Diese Dauer ist desto grösser, also die Nutation wiederum um so deutlicher (in beiden Fällen), je kleiner *P*, *C*, *n* und ϑ_0 und je grösser *A* ist; ausserdem muss für *S* unterhalb *O d* möglichst gross, im anderen Falle möglichst klein sein. Wie man sieht, wirken einige dieser Einflüsse auf Amplitude und Schwingungsdauer in entgegengesetztem, andere in gleichem Sinne; auf die letzteren kommt es, wenn die Nutation möglichst bedeutend sein soll, bei der Construction des Apparates besonders an, zumal *n* der Reibung halber sogar sehr gross gewählt werden muss. Bei einem Apparat, bei welchem die Masse 380 *gr*, $d = 4{\cdot}88$, $C = 3864$ $A = 11496$ ist, findet sich z. B. für $n = 942$ und $\vartheta_0 = 30°$ die Amplitude nur etwa zu $5\frac{1}{3}$ Bogenminuten, die Länge einer Nutation nur $13\frac{2}{3}$ Bogenminuten und die Dauer nur 0·01 Zeitsekunden. Will man möglichst starke Nutation erhalten, so muss man nach obigem das Trägheitsmoment um die Kreiselaxe möglichst klein, dasjenige senkrecht dazu möglichst gross machen; gerade umgekehrt muss man verfahren, wenn man eine möglichst nutationsfreie, reine Präcessionsbewegung erhalten will.



(Ph. 63.)

Das vorstehende, namentlich die Zackenform des Querschnitts des von der Axe beschriebenen Kegels, erleidet eine Modifikation, wenn zu der Rotation, in die der Kreisel versetzt wird, noch seitliche Stösse in dieser oder jener Richtung hinzukommen; die Spitzen verwandeln sich dann in Schleifen, Bögen u. s. w.



(Ph. 64).

Um diese Verhältnisse experimentell zu prüfen, bedient man sich besonders fein gearbeiteter, nicht auf Spitzen stehender, sondern an Fäden hängender Kreiselapparate, welche man, in Erweiterung eines von Foucault eingeführten Namens (s. unten), Gyroskope nennt, und die man zu diesem Zwecke nach dem Vorgange von Bobyleff [1])

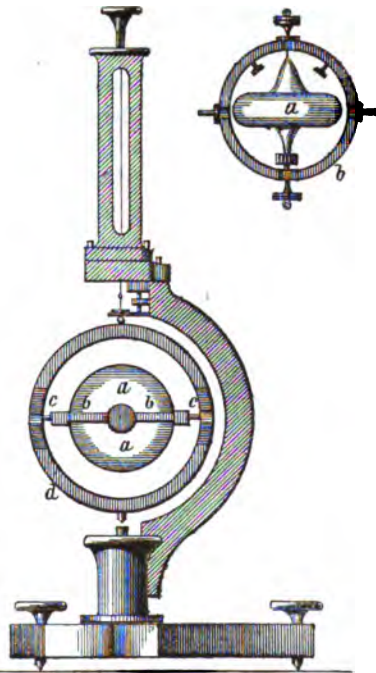
[1]) Bobyleff, Seánces d. l. soc. franç. de phys. 1884. pag. 134.

mit einer Schreibvorrichtung versieht. In Fig. 64 sind die von diesem Physiker erhaltenen Curven dargestellt; der Schwerpunkt lag unterhalb des festen Punktes. Bei *A* fand bloss Rotation statt, bei den anderen Versuchen wurde ausserdem noch ein seitlicher Stoss in dieser oder jener Richtung ertheilt. Auch mit einem gewöhnlichen Kreisel, wo dann der Schwerpunkt über dem festen Punkte liegt, kann man durch schwach excentrisches Einstecken einer Schreibspitze, z. B. eines Bleistiftes, in das obere Ende der Axe, Wahl einer geeigneten Unterlage u. s. w. graphische Darstellungen der Kreiselbewegung selbst, der Präcession und der Nutation erzielen; dieselben zeigen dann aber (Fig. 65) in ihren zeitlich aufeinander folgenden Theilen eine Verschiedenheit, welche in einer Veränderlichkeit des Präcessionsradius, der Nutationsamplitude, der Zacken- resp. Schleifenform u. s. w. besteht und eine Folge der abnehmenden Winkelgeschwindigkeit, der Reibung und anderer Einflüsse ist. Im übrigen entnimmt man den Fig. 64 und 65 die Thatsache, dass die Theorie mit dem Experiment in völliger Uebereinstimmung ist.[1])



(Ph. 65.)

Die Kreiselbewegung kann benutzt werden, um die Axendrehung der Erde nachzuweisen, und zwar, wie FOUCAULT[2]) erkannt hat, auf zwei ganz verschiedene Arten; die eine ist analog der entsprechenden Anwendung des Pendels und bedient sich des Falles, wo die Erhaltung der Rotationsebene stattfindet (s. oben); die andere beruht auf der Herstellung von Bedingungen, bei denen gewissermassen das Gegentheil von der Erhaltung der Rotationsebene erzielt wird, nämlich die Einstellung derselben in eine bestimmte, von der ursprünglich gewählten ganz unabhängige Richtung.



(Ph. 66.)

Das FOUCAULT'sche Gyroskop (Fig. 66) besteht aus dem noch einmal für sich abgebildeten Kreisel *a* in dem Ringe *b*, welcher, ähnlich wie bei den oben beschriebenen Apparaten, mittelst der Schneiden *c* in dem äusseren Ringe *d* ruht, der selbst wieder an einem torsionsfreien Faden vertikal hängt, so dass er mit

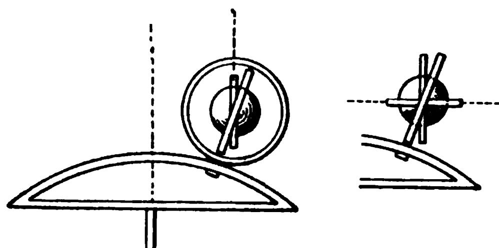
[1]) Weitere Untersuchungen über Kreiselbewegung: G. HAUCK, Z. f. math. Unt. 17, pag. 81 und 423 (1886). — FRANKE, daselbst, pag. 422 und Progr. Gymn. Seehausen 1873/74. — SCHMIDT, die elementare Behandlung d. Kreiselproblems, Tüb. 1886. — FINGER, Wien. Ber. 63, pag. 317 (1874) und Rep. d. Phys. 10, pag. 138 (1874). — Schliesslich sei auf die Kreiselapparate des Mechanikers SCHMIDT in Dresden hingewiesen, mit denen sich zahlreiche interessante Versuche anstellen lassen.

[2]) FOUCAULT, Compt. rend. 35, pag. 421, 424, 469, 602 (1852). — Ueber die Vorläufer FOUCAULT's (ATKINSON 1827, SANG 1836) s. BLYTH, Gyroscope und Gyrostate, in der Enc. Brit. 11, pag. 351.

einer unten angebrachten Spitze dicht über einem Plättchen des Fusses einspielt. Der Apparat ist so fein und frei construirt, dass im Ruhezustande ein Hauch genügt, um die Kreiselaxe in eine andere Lage zu bringen. Rotirt dagegen der Kreisel, so behält die Axe ihre Richtung bei und zwar absolut, wie man daraus ersieht, dass bei mikroskopischer Beobachtung eine stetige scheinbare Bewegung derselben conform mit der scheinbaren Bewegung des Himmels auftritt. Man muss also hieraus auf die Axendrehung der Erde schliessen.

Ganz anders, wenn man die freie Bewegung der Kreiselaxe in der Art beschränkt, dass dieselbe aus einer bestimmten Ebene nicht heraus kann. Man kann dies leicht auf zwei verschiedene Weisen erreichen. Fixirt man nämlich den Ring *b* in horizontaler Ebene, so muss die Kreiselaxe selbst in der Horizontalebene bleiben; fixirt man andererseits den äusseren Ring in geeigneter Lage, so kann sich die Kreiselaxe nur in einer bestimmten Vertikalebene — es sei dies die Meridianebene des Ortes — frei bewegen. In beiden Fällen zeigt sich, dass die Kreiselaxe, welche Lage in der betreffenden Ebene sie auch ursprünglich eingenommen haben möge, sich nach einigen Schwingungen in eine bestimmte Richtung einstellt, nämlich im ersten Falle in die des Meridianes, im zweiten Falle in die der Erdaxe; und zwar beide Male so, dass der Kreisel in demselben Sinne rotirt, wie die Erde. Man kann diese Erscheinungen in den Satz zusammenfassen: Wenn ein Körper um eine seiner Hauptaxen rotirt und eine Kraft eine Drehung um eine andere Axe hervorzubringen strebt, so bewegt sich die erstere in die Richtung der letzteren und zwar auf einem solchen Wege, dass der Sinn der Drehung ein übereinstimmender wird.

Man kann diese Erscheinungen mittelst der Schwungmaschine willkürlich hervorrufen, indem man z. B. einen Bohnenberger'schen Apparat durch Vermittelung eines gekrümmten Bügels (Fig. 67) excentrisch und schief auf sie aufsetzt. Je nachdem man den äusseren und mittleren, oder den inneren und mittleren Ring in zu einander senkrechter Stellung festklemmt, stellt sich die Kreiselaxe parallel der Axe der Schwungmaschine (Fig. 67a) oder parallel dem Meridian (Fig. 67*b*). Sind diese Stellungen eingenommen, und dreht man nun die Schwungmaschine plötzlich umgekehrt wie bisher, so schlägt die Kreiselaxe um 180° um, um aus dem labilen in das stabile Gleichgewicht zu gelangen.



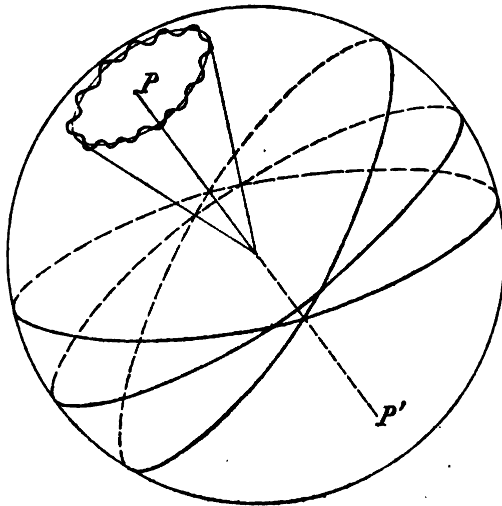
(Ph. 67).

Die betrachtete Erscheinung, die man im Gegensatz zur »Erhaltung der Rotationsebene« als »Richtung der Rotationsebene« bezeichnen kann, ist von Foucault's Nachfolgern theoretisch und experimentell in verschiedenen Richtungen ausgebildet worden.[1] So zeigt sich ganz allgemein, dass, welches auch die der Kreiselaxe freigegebene Ebene sei, man in ihr die Gleichgewichtslage erhält, wenn man die Erdaxe auf sie projicirt. Steht die gedachte Ebene senkrecht zur Erdaxe, so ist die Kreiselaxe in jeder Lage im indifferenten Gleichgewicht. Was endlich die Schwingungen betrifft, welche die Axe ausführt, ehe

[1]) Die Arbeiten von Foucault selbst, Person, Sire (Gyroskopisches Pendel u. s. w.), Gruey, Henry u. A. finden sich in zahlreichen Bdn. der Comptes rend. der Pariser Akademie. Ferner sind zu nennen: Th. Gilbert, Bull. sc. math. et phys. (Brux.) (2) 6, pag. 189 und J. de phys. (2) 2, pag. 101 (1883). — E. C. O. Neumann, Pogg. Ann. 132 (1867) und Rep. d. Phys. 4, pag. 127 (1868).

sie die Gleichgewichtslage annimmt, so steht deren Dauer in Beziehung zur Dauer des Erdtages und zur geographischen Breite des Ortes. Wie man sieht, kann man das Gyroskop nicht bloss zum Nachweis der Axendrehung der Erde, sondern geradezu für praktische Orientirungszwecke benützen, nämlich zur Ermittelung der Meridianrichtung, der Richtung der Erdaxe, der Breite u. s. w. Schliesslich ist auf die grosse Zahl von Apparaten hinzuweisen, welche theils wissenschaftlichen, theils praktischen Zwecken dienend, auf Grund der obigen oder ähnlicher Betrachtungen construirt worden sind. Dahin gehören zunächst Combinationen von gewöhnlichen Kreiseln. Eine der wichtigsten in obigem erhaltenen Erscheinungen, nämlich das Bestreben der Rotationsaxen parallel zu werden (auch Parallelismus der Rotationsaxen genannt) lässt sich z. B. zeigen, indem man einen kleineren Kreisel schräg auf einen grösseren setzt, dessen Axe vertikal steht; der erstere richtet sich dann allmählich auf, falls er in gleichem Sinne wie der andere Kreisel, dagegen neigt er sich mehr und mehr und fällt schliesslich herunter, wenn er im entgegengesetzten Sinne kreiselt. Von neueren Apparaten sind namentlich die von SIRE[1]) (Polytrop, gyroskopisches Pendel, Barogyroskop) und von GRUEY[1]), sowie die wesentlich praktischen Zwecken gewidmeten von CROVA[2]) (Magnetisches Gyroskop), DUBOIS[3]) (Marine-Gyroskop), Sir W. THOMSON[4]) (Gyrostatische Waage u. A.) bemerkenswerth.

Präcession und Nutation der Erde. Eine Kreiselbewegung setzt sich im Allgemeinen, wie gezeigt worden ist, aus drei verschiedenen Vorgängen, nämlich aus Rotation, Präcession und Nutation zusammen. In grossartigem Maassstabe wird eine solche Kreiselbewegung von der Erde ausgeführt. Ihre Drehung um die Sonne ist dabei ausser Acht zu lassen. Wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre, so würde ihre Axe stets dieselbe Richtung im Raume einnehmen, d. h. stets nach demselben Fixstern zeigen. Wäre andererseits die Erde, wie sie es ist, am Aequator ausgebaucht und drehte sie sich nicht um ihre Axe, so würde die Sonne den in Folge der Neigung der Ekliptik, also der Erdaxe, schief gegen sie stehenden Aequator der Erde in die Ebene der Erdbahn hineinziehen, also die Erdaxe senkrecht gegen diese stellen. Da aber die Erde um ihre Axe rotirt, so tritt keiner von beiden Fällen ein, sondern die Erdaxe beschreibt im Laufe der Zeit um die Vertikale auf der Erdbahn einen Kegel. Dies ist die Präcession der Erdaxe. Ein vollständiges Umlaufen der Kegelfläche dauert etwa 26000 Jahre, d. h. erst auf mehr als 9 Millionen Kreiselumläufe kommt ein Präcessionsumlauf. In derselben Periode variirt natürlich auch



(Ph. 68.)

[1]) S. oben.
[2]) CROVA, J. de phys. (2) 1, pag. 271 (1882).
[3]) DUBOIS, Compt. rend. 98, pag. 227 (1884).
[4]) THOMSON, Nature 30, pag. 524 (1884).

der Nordpol des Himmels; der Abstand des Polarsternes von demselben wird in 300 Jahren nicht mehr $1\frac{1}{3}°$, sondern nur noch 21′ betragen, dann aber wieder wachsen, und in 12000 Jahren wird die Vega Polarstern sein. Der Querschnitt des betrachteten Kegels ist nun aber ebenso wenig wie beim gewöhnlichen Kreisel eine Kreislinie; sie ist vielmehr eine Wellenlinie, die in der Figur unter Vergrösserung der einzelnen Wellen (deren Zahl thatsächlich ausserordentlich gross ist) dargestellt ist, und an deren Erzeugung auch der Mond wesentlich betheiligt ist. Dies ist die Nutation der Erdaxe. Die hiermit im Zusammenhange stehenden Erscheinungen, z. B. die Präcession der Aequinoctialpunkte, gehören in die Astronomie.[1] F. AUERBACH.

Allgemeine Gravitation.

Allgemeines. Nachdem COPERNICUS den geocentrischen Bann durch sein heliocentrisches System gebrochen hatte, blieb es KEPLER vorbehalten, diesem System durch die drei nach ihm benannten Gesetze einen strengen Ausdruck zu verleihen. Diese Gesetze sind zwar im Vergleich zu der grossen Mannigfaltigkeit der beobachteten Erscheinungen, welche sie umfassen, von erstaunlicher Einfachheit, stellen aber immerhin noch Beziehungen auf, welche merkwürdig genug sind, um den Wunsch nach einer Zusammenfassung derselben in eine noch höhere Einheit zu erregen. Dieser Wunsch ist von NEWTON durch sein Gravitationsgesetz in sofern mehr als befriedigt worden, als dieses Gesetz nicht nur zur Darstellung der von den KEPLER'schen Gesetzen umfassten Erscheinungen, d. h. nicht nur zur Darstellung der Planetenbewegungen geeignet ist, sondern auch die Bewegungen der übrigen Himmelskörper und der auf der Erde fallenden oder geworfenen Körper beherrscht. Die irdische Schwere stellt sich hiernach als ein specieller Fall der allgemeinen Gravitation dar. Ob freilich das NEWTON'sche Gesetz die äusserste erreichbare Erkenntnissgrenze auf diesem Gebiete bilde, darüber sind die Ansichten getheilt.

KEPLER'sche Gesetze. Dieselben sind von KEPLER aus fremden und eigenen Beobachtungen abgeleitet worden[2]) und lauten:

1. Die Planeten bewegen sich in elliptischen Bahnen um die Sonne, und diese steht in dem einen der beiden Brennpunkte der Ellipse.

2. Der Radius vector eines Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen, also in verschiedenen Zeiten Flächen, welche sich wie diese verhalten.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Abstände von der Sonne.

Ableitung des NEWTON'schen aus den KEPLER'schen Gesetzen. Aus jedem der drei KEPLER'schen Gesetze folgt eine andere Eigenschaft der Kraft, welche man zwischen Sonne und Planeten wirksam anzunehmen hat, um die Bewegung der letzteren so einfach wie möglich darzustellen. Aus dem zweiten nämlich folgt, dass diese Kraft die Richtung der Verbindungslinie zwischen

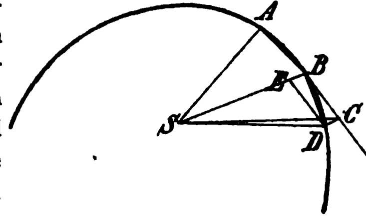
---

[1]) S. hierüber und über die bez. Literatur z. B. GÜNTHER, Lehrbuch der Geophysik 1, pag. 253.

[2]) KEPLER, Astronomia nova, Prag 1609 (enthält die beiden ersten Gesetze), und Epitome astronomiae copernicanae, Linz 1618 (enthält das dritte Gesetz).

Sonne und Planeten hat, und zwar nach der Sonne zu, dass sie also eine Anziehungskraft ist; aus dem ersten folgt, dass sie dem Quadrate der Entfernung zwischen Sonne und Planet umgekehrt proportional ist; aus dem dritten endlich folgt, dass sie der Masse des betreffenden Planeten direkt proportional ist.

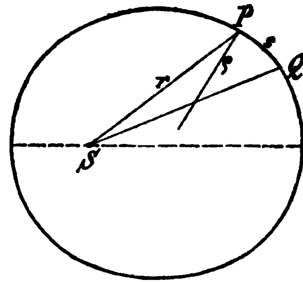
a) Angenäherte elementare Ableitung. Es sei S (Fig. 69) die Sonne, AB die vom Planeten in einem kleinen Zeittheilchen zurückgelegte Strecke, BC die gleich grosse Strecke, welche er im zweiten Zeittheilchen in derselben Richtung zurücklegen würde, wenn er nicht durch eine Kraft aus dieser Richtung abgelenkt und somit, statt nach C, nach D gelangte. Nun sind die Dreiecke SAB und SBC aus geometrischen Gründen, die Dreiecke SAB und SBD nach dem zweiten KEPLER'schen Gesetze einander gleich, also auch die Dreiecke SBC und SBD; es liegen folglich ihre Spitzen C und D in einer zur Grundlinie SB parallelen Linie. Hiernach ist BD die Resultante von BC und einer Linie BE, welche in die Richtung BS fällt. Erstere entspricht dem Beharrungsvermögen, letztere der ablenkenden Kraft. Dieselbe ist also nach der Sonne gerichtet.



(Ph. 69.)

Ferner ist in Fig. 2 das Dreieck $SPQ = \frac{1}{2} s \cdot r \cos r\rho$, wo s die kleine Wegstrecke und ρ die Ellipsennormale ist. Ist c eine Constante und t das Zeittheilchen, in welchem s zurückgelegt wird, so ist nach dem zweiten KEPLER'schen Gesetz

$$\tfrac{1}{2} s r \cos(r\rho) = ct.$$



(Ph. 70.)

Nun ist (s. Art. »Dynamik« pag. 75) die centripetale Beschleunigung

$$G = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{s}{t}\right)^2 = \frac{4c^2}{\rho r^2 \cos^2 r\rho},$$

wo v die Geschwindigkeit ist und die bisher nur der Richtung nach definirte Grösse ρ nunmehr der Grösse nach den Krümmungsradius darstellt. Für die beiden Endpunkte der grossen Axe, AA_1, ergiebt sich hieraus unmittelbar

$$G : G_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2};$$

Für die übrigen Punkte ergiebt es sich, wenn man berücksichtigt, dass bei der Ellipse die Beziehung $\rho \cos^2 r\rho = const$ gilt.

Für zwei verschiedene Planeten endlich hat man nach Obigem

$$G : G_1 = \frac{v^2}{r} : \frac{v_1^2}{r_1},$$

also, wenn mittelst der Gleichungen $v = 2r\pi/T$ und $v_1 = 2r\pi/T_1$ die Umlaufszeiten T und T_1 eingeführt werden,

$$G : G_1 = \frac{r}{T^2} : \frac{r_1}{T_1^2}.$$

Nun ist aber nach dem dritten KEPLER'schen Gesetze

$$T^2 : T_1^2 = r^3 : r_1^3;$$

folglich ergiebt sich

$$G : G_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2}.$$

Die umgekehrte Proportionalität mit dem Quadrat der Entfernung gilt also nicht bloss für die verschiedenen Sonnenabstände eines und desselben, sondern

auch bei der Vergleichung verschiedener Planeten. Haben diese nun die Massen m und m_1, so erhält man für die Kräfte, welche den obigen Beschleunigungen entsprechen:

$$K:K_1 = \frac{m}{r^2}:\frac{m_1}{r_1^2}, \tag{1}$$

d. h. das NEWTON'sche Gesetz.

Andere Ableitung nach HELM[1]). Durch Zusammensetzung der elliptischen Bewegung aus zwei auf einander senkrechten geradlinigen ergiebt sich, dass ein Punkt sich auf einer Ellipse bewegt, wenn nach dem Mittelpunkt die Beschleunigungen $P = (2\pi/T)^2 R$ (R Abstand eines Punktes M vom Mittelpunkt O) wirkt. Ist also N die Ellipsennormale in M, F der Brennpunkt, $FM = r$, Winkel $(N, r) = \alpha$, Winkel $(N, R) = A$, so ist die Beschleunigung p nach F durch die Gleichung

$$\frac{p \cos\alpha}{P \cos A} = \frac{v^2}{V^2}$$

gegeben, in welcher V und v die Geschwindigkeiten resp. um O und F sind. Nach dem zweiten KEPLER'schen Gesetze ist nun $R\cos A : r\cos\alpha = v : V$, also wird

$$p = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R^2\cos^2 A}{r^2\cos^3\alpha}.$$

Ist ferner a die grosse Halbaxe, so ist $R\cos A = a\cos\alpha$, also

$$p = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2 r^2},$$

also nach dem dritten KEPLER'schen Gesetze

$$p = const \cdot \frac{1}{r^2}.$$

b) Strenge Ableitung[2]). Die Bewegung ist eine freie, also, wenn ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt wird und XYZ die Componenten der beschleunigenden Kraft sind,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \tag{2}$$

Wird die Bahnebene zur xy Ebene gewählt, so ist $z = 0$, also auch $Z = 0$. Ferner liege der Anfangspunkt der Coordinaten in der Sonne, r sei der Radius vector und φ ihr Winkel mit der x-Axe. Nach dem zweiten KEPLER'schen Gesetze ist alsdann die doppelte Dreiecksfläche

$$r^2 d\varphi = c\,dt, \tag{3}$$

also in rechtwinkligen Coordinaten ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$)

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c, \tag{3a}$$

und durch Differentiation

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0. \tag{4}$$

Aus (4) und (2) folgt die Proportion $X : Y = x : y$; sie spricht aus, dass die gesuchte Kraft die Richtung der Verbindungslinie zwischen Sonne und Planet hat. Ist K diese Kraft (positiv, wenn abstossend, negativ, wenn anziehend), so hat man

$$X = \frac{x}{r}K, \quad Y = \frac{y}{r}K,$$

und folglich wegen $x^2 + y^2 = r^2$, also $x\,dx + y\,dy = r\,dr$:

$$X\,dx + Y\,dy = K\,dr. \tag{5}$$

---

[1]) HELM, Grun. Arch. d. Math. u. Phys. 1879, pag. 326.

[2]) KIRCHHOFF, Mechanik pag. 7.

Die linke Seite ist nach (2) identisch mit

$$\frac{1}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right], \text{ d. h. mit } \frac{1}{2}d(v^2),$$

und für die Geschwindigkeit v ergiebt sich durch Combination der Gleichung (3a) mit der Gleichung $x\,dx+y\,dy=r\,dr$:

$$v^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{c^2}{r^2}.$$

Die Gleichung (5) nimmt also die Gestalt an

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{c^2}{r^3}+K. \tag{6}$$

Die linke Seite kann nun auf Grund des ersten KEPLER'schen Gesetzes aus der Gestalt der Bahn berechnet werden. Ist nämlich a die grosse Halbaxe, ε die Excentrizität der Ellipse ($\varepsilon < 1$), so ist deren Gleichung

$$r=a(1-\varepsilon^2)-\varepsilon x,$$

also

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}=-\varepsilon H=-K\frac{\varepsilon x}{r}=-K\left(\frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}-1\right).$$

Setzt man dies in (6) ein und berechnet K, so findet man

$$K=\frac{-c^2}{a(1-\varepsilon^2)}\frac{1}{r^2}=\frac{-const}{r^2};$$

d. h. die Kraft ist eine Anziehungskraft und dem Quadrat des Sonnenabstandes des Planeten umgekehrt proportional.

Für verschiedene Planeten sind allerdings c, a, ε verschieden; ist aber T die Umlaufszeit, so ist nach (3) cT das Doppelte der Ellipsenfläche, d. h. $cT=2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Es wird somit

$$K=-4\pi^2\frac{a^3}{T^2}\frac{1}{r^2},$$

also nach dem dritten KEPLER'schen Gesetze wiederum

$$K=\frac{-const}{r^2}.$$

Ableitung der Himmelsbewegungen aus dem NEWTON'schen Gesetz.[1]) Die obige Ableitung des NEWTON'schen Gesetzes aus dem KEPLER'schen entspricht dem induktiven und historischen Entwickelungsgange des Problems. Die umgekehrte Aufgabe, welche deduktiven Charakters ist, bietet insofern ein erweitertes Interesse dar, als sie nicht bloss zu den KEPLER'schen Gesetzen führt, also nicht bloss zur Darstellung der Planetenbewegungen geeignet ist, sondern auch die der übrigen Himmelskörper und des Falles und Wurfes auf der Erde ergiebt. Auch fällt dabei die Beschränkung fort, dass ein Körper, dort die Sonne, gewissermaassen der ganzen Erscheinung zu Grunde gelegt wird, sodass ihre Bewegung nicht in Betracht kommt und ihre Masse keine Rolle spielt. Die Folge davon war, dass sich das NEWTON'sche Gesetz nur in folgender specieller Form ergab:

Die Sonne zieht die Planeten mit einer Kraft an, welche ihren Massen direkt und den Quadraten ihrer Sonnenabstände umgekehrt proportional ist.

Das allgemeine NEWTON'sche Gesetz,[2]) von welchem wir nunmehr ausgehen, lautet:

Je zwei Körper, deren Volumina klein sind im Vergleich zu ihrer gegenseitigen Entfernung, ziehen sich gegenseitig mit einer Kraft

[1]) Im wesentlichen im Anschlusse an: RAUSENBERGER, Analyt. Mechanik, Leipz. 1888.

[2]) NEWTON, Philosophiae naturalis principia math. Lond. 1687.

an, welche dem Produkte ihrer Massen direkt und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist.

In Formel:

$$G = k\frac{mm_1}{r^2}.$$

Die Kraft G heisst die Gravitation (die Schwere g wird sich als ein besonderer Fall derselben ergeben), die Constante k die Gravitationsconstante; es ist die Anziehung zwischen zwei, in der Einheit des Abstandes von einander befindlichen, je der Einheit der Masse gleichen materiellen Punkten.

Um aus dem NEWTON'schen Gesetz das zweite KEPLER'sche herzuleiten, hat man einfach den umgekehrten Weg wie oben einzuschlagen, es sei denn, dass man sich überhaupt auf den von der allgemeinen Dynamik (s. d.) gelieferten Flächensatz beruft, von welchem jenes Gesetz nur ein specieller Ausdruck ist. Es handelt sich also nur noch um die Deduction des ersten und dritten der KEPLER'schen Gesetze.

Sind xyz und $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten der beiden als materielle Punkte gedachten Körper, m und m_1 ihre Massen und

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

ihre Entfernung, so erhält man die Bewegungsgleichungen aus der Ueberlegung, dass die Beschleunigung, welche der eine Punkt erfährt, aus der NEWTON'schen Kraft mm_1/r^2 durch Division mit seiner Masse erhalten wird, dass das Gleiche für den andern Punkt gilt, und dass die Componenten der NEWTON'schen Kraft aus dieser durch Multiplication mit $(x - x_1)/r$ erhalten werden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= m_1 \frac{x - x_1}{r^3}, & \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= m \frac{x_1 - x}{r^3}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= m_1 \frac{y - y_1}{r^3}, & \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= m \frac{y_1 - y}{r^3}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= m_1 \frac{z - z_1}{r^3}, & \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= m \frac{z_1 - z}{r^3}. \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Gleichungen enthalten jedoch eine allgemeinere Bewegung, als sie hier darzustellen beabsichtigt wird. Nach den Lehren der Dynamik (s. d.) bewegt sich nämlich der Schwerpunkt beider Punkte, da auf ihn keine Kraft wirkt, gleichförmig und gradlinig, während es hier offenbar nur auf den speciellen Fall ankommt, dass der Schwerpunkt in Ruhe bleibt, die beiden Körper also um ihren ruhenden gemeinschaftlichen Schwerpunkt sich bewegen. In diesem Falle leuchtet durch Anschauung ein, dass die Bahnen beider Körper geometrisch ähnlich sind, da für ihre Schwerpunktsabstände die Proportion $\rho : \rho_1 = m_1 : m$ gilt, so dass

$$r = \frac{\rho(m + m_1)}{m_1} = \frac{\rho_1(m + m_1)}{m}$$

wird. Durch Einsetzen des ersten Werthes in die linken, des zweiten in die rechten Gleichungen (8) erhält man, wenn man noch mit Hilfe der Beziehungen $m_1 x_1 = -mx$ u. s. w. aus den ersten drei Gleichungen $x_1 y_1 z_1$, aus den drei letzten xyz eliminirt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m_1^3}{(m + m_1)^2} \frac{x}{\rho^3}, \qquad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m^3}{(m + m_1)^2} \frac{x_1}{\rho_1^3}$$

u. s. w.

Hiermit ist die Bewegung auf eine Centralbewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt zurückgeführt.

Man kann noch in anderer Weise verfahren, nämlich die relative Bewegung

des Punktes xyz in Bezug auf den Punkt $x_1 y_1 z_1$ bestimmen; man braucht zu diesem Zwecke nur die Differenzen der drei ersten und der drei letzten Gleichungen (8) zu bilden; man erhält dann, wenn man $x_1 y_1 z_1$ jetzt als Nullpunkt wählt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = (m + m_1)\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = (m + m_1)\frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = (m + m_1)\frac{z}{r^3}.$$

Man kann also die relative Bewegung des einen Punktes in Bezug auf den anderen als Centralbewegung um diesen betrachten, wenn man letzterem die Summe beider Massen zulegt.

Hier soll die letztere der beiden Darstellungsweisen benutzt werden. Die Sonne sei der Punkt $x_1 y_1 z_1$, also jetzt der Nullpunkt; dem anziehenden Charakter der Kraft entsprechend werde, wie früher, das negative Zeichen gewählt, die Anziehungskraft zweier Masseneinheiten in der Entfernungseinheit wie oben k genannt, und für $k\,(m + m_1)$ zur Abkürzung μ geschrieben; wenn die Bahnebene wieder xy Ebene ist, so kommen nur die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu\frac{y}{r^3}$$

in Betracht; sie ergeben durch zweierlei verschiedene Behandlung

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = c \tag{9}$$

und

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{\mu}{r} + C \tag{10}$$

(r und φ Polarcoordinaten, v Geschwindigkeit). Hieraus ergiebt sich

$$\varphi = -\,arc\,cos\,\frac{\mu r - c^2}{r\sqrt{\mu^2 + 2c^2 C}} + \varphi_0,$$

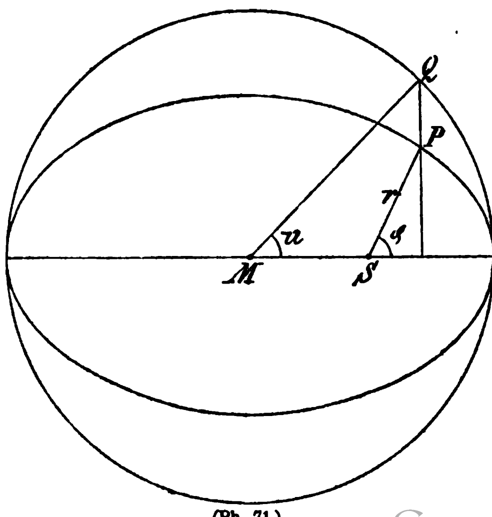
also, wenn durch Wahl des Systemes $\varphi_0 = \pi$ gemacht wird,

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2c^2 C}{\mu^2}}\,cos\,\varphi}.$$

Vergleicht man dies mit der Polargleichung eines Kegelschnittes

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\,cos\,\varphi} \tag{11}$$

(p Halbparameter, ε Excentricität), so sieht man, dass die Bahn eines dem Sonnensystem angehörigen Weltkörpers ein Kegelschnitt ist, in dessen einem Brennpunkt die Sonne steht; und zwar eine Ellipse, wenn $C < 0$, eine Parabel, wenn $C = 0$, eine Hyperbel, wenn $C > 0$ ist; der Fall $C < -\frac{\mu^2}{2c^2}$ ist ausgeschlossen; in dem hiernach auch noch sehr unwahrscheinlichen Falle $C = \frac{-\mu^2}{2c^2}$ wird die Bahn ein Kreis. Für die Constanten c und C ergeben sich die Ausdrücke



(Ph. 71.)

$$c = \sqrt{pk(m+m_1)}, \qquad C = \frac{k(m+m_1)(\varepsilon^2-1)}{p}.$$

Für die weitere Darstellung, soweit es sich um elliptische Bahnen handelt, ist es zweckmässig, an Stelle der sogen. wahren Anomalie die sogen. excentrische Anomalie u einzuführen; man erhält dieselbe, indem man im Endpunkte P (Fig. 71) des vom Brennpunkt S gezogenen Radius vector r eine Senkrechte zieht und deren Schnittpunkt Q mit dem über der grossen Axe $2a$ als Durchmesser geschlagenen Kreise mit dem Mittelpunkt O verbindet; es ist dann $u = \angle MOQ$. Die Gleichung (11) geht dann in

$$r = a(1 - \varepsilon \cos u)$$

über; und wenn man jetzt die Gleichung (9) nach Elimination von r integrirt und zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{k(m+m_1)}}{a^{3/2}} = n$$

setzt, so erhält man die sogen. Kepler'sche Gleichung

$$u - \varepsilon \sin u = nt.$$

Es sei bemerkt, dass der Specialfall $u = 2\pi$ zu der Umlaufszeit

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{k(m+m_1)}} \tag{12}$$

führt, so dass die Kepler'sche Gleichung die Form

$$u - \varepsilon \sin u = \frac{2\pi t}{T}$$

annimmt, in welcher sie zeigt, dass, wenn T beobachtet ist, A aus u, also, da

$$\cos u = \frac{\cos\varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

ist, t aus φ berechnet werden kann. Wichtiger ist es jedoch offenbar, umgekehrt φ aus t zu berechnen; durch Reihenentwickelung erhält man hierfür

$$u = nt + \varepsilon \sin nt + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2nt + \tfrac{1}{8}\varepsilon^3(3\sin 3nt - \sin nt) + \ldots,$$

wobei es, da ε meist klein ist, fast immer die drei, zuweilen sogar die zwei ersten Glieder zu nehmen genügt; im letzteren Falle folgt

$$\varphi = nt + 2\varepsilon \sin nt \tag{13}$$

und

$$r = a(1 - \varepsilon \cos nt). \tag{14}$$

Endlich erhält man aus Gleichung (12) für zwei verschiedene Himmelskörper:

$$T_1^2 : T_2^2 = \frac{a_1^3}{m+m_1} : \frac{a_2^3}{m+m_2}$$

(m Sonnenmasse, m_1 und m_2 Massen der beiden verglichenen Himmelskörper.) Hierin ist, da man näherungsweise m_1 und m_2 gegen m vernachlässigen kann, das dritte Kepler'sche Gesetz enthalten; dasselbe gilt also nicht, wie die beiden anderen, genau.

Für die parabolische Bahn findet sich

$$t = \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{k(m+m_1)}}\left(tg\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}tg^3\frac{\varphi}{2}\right),$$

und hieraus φ als Function von t. Für die hyperbolische Bahn wird u rein imaginär, also gleich iu_1, zwischen u_1 und φ besteht die Gleichung

$$\frac{e^{u_1} + e^{-u_1}}{2} = \frac{\cos\varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

und man findet, wenn a wieder die grosse Halbaxe ist,

$$\frac{\sqrt{k(m+m_1)}}{a^{3/2}}\, t = u_1 - \varepsilon\frac{e^{u_1} - e^{-u_1}}{2},$$

woraus u_1 durch ein Näherungsverfahren ermittelt werden kann. — Die Planeten und einige Kometen bewegen sich in Ellipsen; dagegen giebt es andere Kometen, welche aus grosser Ferne in das Sonnensystem gelangen, in diesem eine parabel- oder hyperbelähnliche Curve beschreiben und es dann wieder verlassen.

In vorstehendem ist das Problem nur insofern gelöst, als es in dem betreffenden Systeme einen Haupt- oder Centralkörper giebt, welcher eine so weit überwiegende Masse hat, dass seine eigenen Bewegungen in Folge der Anziehung der übrigen Körper des Systemes verschwindend klein und folglich die relativ zu ihm genommenen Bewegungen der letzteren nahezu deren wahre Bewegungen sind. Im allgemeinen ist dies nicht der Fall, und es liefern die Doppelsterne ein Beispiel dafür, dass es auch zwei Hauptkörper in einem System geben kann. Es muss dann auf einem der beiden oben angedeuteten Wege die absolute Bewegung beider Himmelskörper abgeleitet werden. Es würde zu weit führen, zu zeigen, dass und in wie weit es gelungen ist, auch hier die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie, also die Giltigkeit des NEWTON'schen Gesetzes nachzuweisen. Im Sonnensystem ist allerdings die Sonne bei weitem überwiegend, da ihre Masse selbst die Jupitermasse im Verhältniss von 1058 : 1 übertrifft; die Wirkung der Planeten auf die Sonne wird also sehr klein sein. Dagegen kommt hier, wenn ein gewisser Grad von Genauigkeit erreicht werden soll, ein Einfluss in Betracht, welcher sich stets zeigen muss, wenn das System nicht einen Hauptkörper und einen Nebenkörper, sondern der letzteren mehrere enthält In der durch die Anziehung von Seiten des Hauptkörpers bestimmten Bahn irgend eines der Nebenkörper werden dann durch die Anziehung von Seiten der übrigen Nebenkörper Störungen hervorgerufen werden, welche die sonst elliptische Bahn zu einer sehr verwickelten machen. Hiermit beschäftigt sich die der Astronomie angehörige Störungstheorie. Im allgemeinen sind die Störungen der grösseren Planeten nicht beträchtlich, sie können aber unter Umständen sehr gross werden, z. B. wenn die Umlaufszeiten zweier Planeten nahezu in einem einfach ganzzahligen Verhältniss stehen, wie bei Jupiter und Saturn (2 : 5). Auf die Bahn der Erde sind insbesondere Venus, Mars und Jupiter von Einfluss, auf den Uranus übt der Neptun eine störende Wirkung aus, welche gross genug war, um es LEVERRIER zu ermöglichen, aus ihr auf die Existenz, den Ort und die Bahn des Neptun theoretisch zu schliessen. Beträchtlicher sind die Störungen, welchen die kleinen Planeten in der Zone zwischen Mars und Jupiter theils von Seiten dieser, theils durch gegenseitigen Einfluss ausgesetzt sind; ihre Bahnen sind daher fortwährenden Aenderungen ausgesetzt, und unter Umständen können sie, wie man dies gegenwärtig im Hinblick auf die beiden neuentdeckten Marsmonde vermuthet hat, ihre Selbständigkeit einbüssen. Auch bei den Kometen sind die Störungen oft sehr beträchtlich, und es kann sich ereignen, dass ein von fern her in das Sonnensystem eingetretener Komet durch diese Einflüsse zu einer elliptischen Bahn, also zum Verbleiben im Sonnensystem gezwungen wird, oder dass der entgegengesetzte Fall eintritt. Was endlich die Trabanten der Planeten, also insbesondere den Mond der Erde betrifft, so lässt sich hier ohne Berücksichtigung beider in Betracht kommender Körper, Erde und Sonne, überhaupt nichts erreichen, weil beide Wirkungen von derselben Grössenordnung sind; die Sonne ist nämlich zwar 400 Mal so weit entfernt, dafür aber 320000 Mal so massig wie die Erde, so dass die Grösse m/r^2 sich für beide wie 1 : 2 verhält. Eine erste Annäherung für die Bewegung des Mondes relativ zur Erde erhält man, wenn man zu der Anziehung von Seiten der Erde die Differenz der Anziehungen hinzufügt, welche von der Sonne auf Mond und Erde ausgeübt werden.

Das allgemeine Problem der Anziehung von drei Körpern auf einander nach dem NEWTON'schen Gesetz oder, wie man kurz sagt, das Problem der drei Körper beruht auf den Gleichungen

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_2 \frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3} + m_3 \frac{x_3 - x_1}{r_{13}^3},$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_3 \frac{x_3 - x_2}{r_{23}^3} + m_1 \frac{x_1 - x_2}{r_{21}^3},$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = m_1 \frac{x_1 - x_3}{r_{31}^3} + m_2 \frac{x_2 - x_3}{r_{32}^3},$$

und 6 analogen für die beiden andern Coordinaten. Die Lösung dieses Problemes ist bisher nur in sehr unvollständigem Grade gelungen[1]).

Noch eine andere bisher gemachte Annahme, nämlich die, dass die Körper im Vergleich mit ihren gegenseitigen Entfernungen sehr klein seien, trifft nicht immer zu; so ist z. B. der Merkur nur 30 bis 40 Sonnendurchmesser von der Sonne, und der Mond nur etwa 30 Erddurchmesser von der Erde entfernt. Wenn man trotzdem selbst in diesen Fällen von der räumlichen Ausdehnung der anziehenden Körper absehen kann, so liegt das daran, dass diese Körper nahezu Kugeln sind und dass, wie in der Potentialtheorie gezeigt wird, eine Kugel auf einen äusseren Punkt so wirkt, als ob die ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Die Schwere als Specialfall der Gravitation. Wenn die irdische Schwere ein Specialfall der allgemeinen Gravitation ist, so müssen sich die Beschleunigungen, welche die Erde dem Monde einerseits und den irdischen Körpern auf ihrer Oberfläche andererseits in der Richtung nach ihrem Mittelpunkte hin ertheilt, umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Erdmittelpunkt verhalten. Ist nun R der mittlere Abstand des Mondes vom Erdmittelpunkt und T seine Umlaufszeit, so ist seine centripetale Beschleunigung

$$G = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 383360000}{(39343 \cdot 60)^2} = 0{\cdot}00270 \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}.$$

Es muss also die Beschleunigung g beim freien Fall an der Erdoberfläche, wenn r der Erdradius ist:

$$g = \frac{R^2}{r^2} G = \frac{(383360000)^2}{(6367000)^2} \cdot 0{\cdot}00270 = 9{\cdot}79$$

sein. In Wahrheit ist $g = 9{\cdot}81$; die Uebereinstimmung ist also bei der nur angenäherten Bedeutung der durchgeführten Rechnung eine vollständige.[2])

Da man für eine grosse Zahl anderer Himmelskörper den Radius und die Masse im Verhältniss zur Erdmasse kennt, so kann man nach dem NEWTON'schen Gesetz auch die Schwere auf ihrer Oberfläche berechnen. Auf der Sonne ist sie, also auch die Beschleunigung beim freien Fall und das Gewicht der Körper, 27 Mal, auf dem Jupiter 2—3 Mal so gross wie auf der Erde; dagegen ist sie auf dem Monde 6 mal so klein, so dass der Fallraum der ersten Sekunde nur 0·79 und die Länge des Sekundenpendels nur 0·158 m beträgt.

Messung der Schwere. Der wichtigste Apparat zur Messung der Schwere

[1]) LAGRANGE (Méc. anal.) u. LAPLACE (Méc. céleste) fassten dies Problem zuerst an; seitdem ist ein wesentlicher Fortschritt erst ganz neuerdings durch GYLDEN (Acta math. 1, pag. 77, 1883) gemacht worden.

Das Problem von n Körpern ist natürlich von seiner Lösung noch weiter entfernt.

[2]) Auch dieser Nachweis der Identität von Gravitation und Schwere ist schon von NEWTON (a. a. O.) gegeben worden.

und insbesondere ihrer Variationen auf der Erdoberfläche ist das Pendel. Indem hierüber auf das im Art. »Pendel« Gesagte verwiesen wird, genügt es hier daran zu erinnern, dass, wenn die dem Beobachtungspendel correspondirende Länge l ist, hieraus g durch Multiplication mit π^2 erhalten wird. Andere demselben Zwecke dienende Apparate sind folgende: 1. Die Schwungwaage von HENGLER[1]), im wesentlichen bestehend aus einer in sehr sinnreicher Weise bifilar befestigten Stange. 2. Die PERROT'sche Platte[2]), welche, am Ende einer Spirale aufgehängt und mit einem Gewicht belastet, bei der kleinsten Aenderung der Schwere eine Drehung um die Vertikalaxe erfährt. 3. Die Wasserwaage oder Libelle[3]) (sehr unzuverlässig). 4. Der von ZOELLNER[4]) als Horizontalpendel bezeichnete Apparat, der, weil mit Spiegelablesung versehen, eine grössere Genauigkeit gestattet. 5. Apparate, welche darauf beruhen, dass, wenn dem elastischen Druck einer Metallplatte oder eines Gasvolumens durch eine Quecksilbersäule das Gleichgewicht gehalten wird, dasselbe durch Schwankungen der Schwere gestört wird (Apparate von MASCART, ISSEL, Sir W. SIEMENS[5]) u. A.). 6. Der Apparat von DARWIN[6]). Mit einigen dieser Apparate hat man auch die Frage zu entscheiden versucht, ob die mit ihrer Stellung wechselnde Anziehung der Sonne und des Mondes, welche bekanntlich die Ebbe und Fluth des Meeres erzeugt, auch einen direkt messbaren Einfluss auf die Schwere, d. h. auf Fallgeschwindigkeit und Gewicht der Körper ausübe. Eine endgültige Beantwortung dieser Frage scheint jedoch noch auszustehen.[7])

Aenderung der Schwere mit der Höhe. Da die Schwere ein Specialfall der Gravitation ist, diese dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional wirkt und eine Kugel, wie es die Erde näherungsweise ist, auf einen äusseren Punkt so wirkt, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre, so muss die Schwere abnehmen, wenn man sich vom Niveau des Meeres aus erhebt. Ist g_0 die Schwere im Meeresniveau, g_h die in der Höhe h und R der Erdradius, so ist

$$g_h = g_0 \frac{(R+h)^2}{R^2},$$

oder, da h stets sehr klein gegen R ist (das höchste bis jetzt von Menschen erreichte h ist mit etwa 8 *km* noch immer 800mal so klein wie R), näherungsweise

$$g_h = g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R}\right).$$

Für je drei Kilometer Erhebung nimmt also die Schwere um ein Tausendstel ihres Werthes ab. Dieses theoretische Ergebniss wird durch die Erfahrung vollauf bestätigt, und man kann daher auch umgekehrt aus einem beobachteten Werthe g_h den Werth im Meeresspiegel nach der Formel

$$g_0 = g_h \left(1 + 2\frac{h}{R}\right)$$

---

1) HENGLER, DINGL. Polyt. J. 43, pag. 81 (1828).

2) PERROT, Compt. rend. 54, pag. 728.

3) PETERS, BULL. Ac. St. Pet. 3, pag. 212.

4) ZÖLLNER, POGG. Ann. 150, pag. 131.

5) MASCART, Compt. rend. 92, pag. 126 u. pag. 631 (1882). MAREK, Z. f. Instr. K. 4, pag. 391 (1884). ISSEL, BULL. Soc. imp. de Moscou 1882; 1, pag. 134. — C. W. SIEMENS, Compt. rend. 83, pag. 780 (1877).

6) G. H. und HOR. DARWIN, WIED. Ann. Bbl. 6, pag. 59 (1882). Rep. Brit. Ass. (1881).

7) Ueber die obigen und andere Methoden siehe auch v. OPPOLZER, Z. f. Instr. K. 4, pag. 303 u. 379 (1884).

berechnen. Man nennt diese Berechnung die Reduction der Schwere auf das Niveau des Meeres. In der obigen Form gilt sie jedoch nur für Punkte, welche, wie Thurmspitzen oder gar Luftballons, eine wirklich exponirte Lage haben; für die Gipfel von Bergen oder gar für Hochebenen trifft die Voraussetzung obiger Rechnung, dass die Erde wie eine Kugel wirke, nicht mehr zu; vielmehr kommt zu dieser Wirkung diejenige der über das Meeresniveau sich erhebenden Umgebung des betrachteten Punktes hinzu — eine Wirkung, welche wegen der Kleinheit des Abstandes der wirkenden Massen von wesentlichem Einfluss ist. Durch eine einfache Rechnung findet man:

$$g_h = g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R} + \frac{3}{2}\frac{d'}{d}\frac{h}{R}\right),$$

wo d' die mittlere Dichte der festen Erdmassen in der Oberflächenschicht der Erde, d die mittlere Erddichte ist. Da nun (s. w. u.) d etwa doppelt so gross wie d' ist, ergiebt sich

$$g_h = g_0 \left(1 - \frac{5}{4}\frac{h}{R}\right)$$

$$g_0 = g_h \left(1 + \frac{5}{4}\frac{h}{R}\right).$$

Die hierdurch dargestellte Abnahme der Schwere nach der Höhe ist wesentlich geringer als die obige.

Aenderung der Schwere mit der geographischen Breite. Diese Aenderung muss der Theorie nach eine doppelte sein; die Ursache der einen ist die Axendrehung der Erde, die der anderen ihre Abweichung von der Kugelgestalt.

Was zunächst den Einfluss der Axendrehung betrifft, so ist einleuchtend, dass die am Aequator experimentell bestimmte Schwere g_0 keine einfache Grösse, sondern die Differenz der wahren nach dem Erdmittelpunkt gerichteten Schwere G (wie sie an den Polen rein zur Erscheinung kommt) und der entgegengesetzt gerichteten Centrifugalkraft ist; es ist also am Aequator

$$g_0 = G - \frac{v^2}{r} = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 9{\cdot}831 - 0{\cdot}034 = 9{\cdot}797,$$

wo für G der Werth eingesetzt ist, welcher ohne Axendrehung stattfinden würde. Unter der geographischen Breite φ ist in dem abzuziehenden Gliede T zwar ebenfalls ein Tag, aber r nicht mehr, wie am Aequator, der Erdradius, sondern der Radius des betreffenden Parallelkreises, also, wenn r nach wie vor den Erdradius bezeichnet, durch $r\cos\varphi$ zu ersetzen. Abgesehen davon, dass hiernach unter der Breite φ die Centrifugalkraft geringer ist, wirkt sie dort auch nicht mehr, wie am Aequator, der Schwere direkt entgegen, sondern bildet mit der der Schwere entgegengesetzten Richtung den Winkel φ, so dass für die Schwächung der Schwere nur ihre in diese Richtung fallende, durch Multiplikation mit $\cos\varphi$ sich ergebende Componente in Betracht kommt; man hat also

$$g_\varphi = G - \frac{4\pi^2 r \cos^2\varphi}{T^2} = 9{\cdot}831 - 0{\cdot}034 \cos^2\varphi;$$

noch geeigneter, weil das Verhältniss von g und G zeigend, ist die Schreibweise

$$g_\varphi = G\left(1 - \frac{1}{290}\cos^2\varphi\right), \text{ also speciell } g_0 = G\left(1 - \frac{1}{290}\right).$$

Die hierin enthaltene Functionalbeziehung, nach welcher die Schwere mit der Breite sich ändern soll, nämlich das Quadrat des Cosinus derselben, wird durch die Beobachtungen bestätigt; dagegen ist der durch dieselben gelieferte

Zahlenfaktor grösser als der hier theoretisch abgeleitete; im Vergleich zur »idealen« Schwere G ist die unter der Breite φ beobachtete nicht um $\frac{1}{290} \cos^2\varphi$, sondern um $\frac{1}{191} \cos^2\varphi$ kleiner. Der Grund hiervon liegt in der Abplattung der Erde. Uebrigens ist zu beachten, dass die Centrifugalkraft nicht nur die Grösse, sondern — ausgenommen am Aequator — auch die Richtung der Schwere, also des Loths und des freien Falls (s. Art. »Fall und Wurf«) beeinflusst; durch eine der obigen ganz analoge Betrachtung findet man den Winkel, durch den diese Richtungsabweichung dargestellt wird:

$$\delta = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \frac{4\pi^2 r}{G T^2} = \frac{1}{580} \sin 2\varphi.$$

Unter 45° Breite würde also, die Erde als Kugel gedacht, das Loth um $\frac{1}{580} \cdot \frac{360°}{2\pi} = 0° \ 5' \ 56''$ von der nach dem Erdmittelpunkt gezogenen Graden abweichen und zwar auf der nördlichen Halbkugel nach Süden.

Wir kommen nun zu dem zweiten Einfluss. Die Erde ist nicht, wie bisher angenommen, eine Kugel, sondern sie weicht von ihr wenig, aber durchaus merklich ab, und zwar in der Weise, dass die Krümmung ihrer Oberfläche vom Aequator nach den Polen hin abnimmt, während sie längs dem Aequator so ziemlich constant ist. Aus diesem durch Gradmessungen erlangten Resultate ist zu schliessen, dass der Polardurchmesser $2b$ der Erde kleiner ist, als der Aequatorialdurchmesser $2a$, dass also die Erde, von Abweichungen höherer Ordnung abgesehen, die Gestalt eines Sphäroids, eines an den Polen ein wenig abgeplatteten Rotationsellipsoids hat. Nimmt man die von LISTING [1]) aus allen Gradmessungen sorgfältig berechneten Mittelwerthe und berücksichtigt noch die neuesten Messungen von CLARKE und A., so findet man

$$a = 6377{\cdot}4 \ km, \qquad b = 6355{\cdot}6 \ km$$

und die Excentricität (bei den neueren Gradmessungen meist aus den unter den beiden geocentrischen Breiten φ und ψ gemessenen Gradlängen L und l mittelst der BOHNENBERGER'schen Formel [2])

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{L^{2/3} - l^{2/3}}{L^{2/3} \sin^2\varphi - l^{2/3} \sin^2\varphi}}$$

ermittelt, aber auch indirekt aus a und b abzuleiten)

$$\varepsilon = \frac{1}{293} = 0{\cdot}00341.$$

In Folge dieser Abplattung muss nun die Schwere vom Aequator nach dem Pole hin zunehmen. Zur Ableitung des bezüglichen Gesetzes darf man nun aber nicht etwa die den verschiedenen Breiten entsprechenden Erdradien und von diesen die reciproken Quadrate nehmen, weil bei einem Sphäroid, so wenig es auch von der Kugel abweichen möge, die Masse nicht mehr als im Mittelpunkt vereinigt gedacht werden darf. Es muss vielmehr die Rechnung für das Sphäroid wirklich durchgeführt werden; hier genüge die Angabe des Resultats, dass wiederum die Grösse $\cos^2\varphi$ den Verlauf der Aenderungen bestimmt, und dass aus dem Zahlenwerthe von ε für den relativen Unterschied der Schwere am Aequator und am Pole der Zahlenwerth $\frac{1}{552}$ folgt.

---

[1]) LISTING, Neue Constanten des Erdkörpers, Gött. 1878.

[2]) BOHNENBERGER, Astronomie. Tüb. 1811, pag. 187.

Combinirt man jetzt beide Einflüsse, so erhält man

$$g_\varphi = G\left(1 - \frac{1}{290}\cos^2\varphi\right)\left(1 - \frac{1}{552}\cos^2\varphi\right) = G\left(1 - \frac{1}{191}\cos^2\varphi\right),$$

oder auch mit derselben Genauigkeit

$$g_\varphi = g_0\left(1 + \frac{1}{191}\sin^2\varphi\right),$$

in Uebereinstimmung mit der durch die Beobachtungen ermittelten Formel. Es ist ersichtlich, dass man nunmehr auch umgekehrt aus Pendelbeobachtungen die Abplattung der Erde berechnen kann; von CLAIRAUT[1]) ist hierfür die einfache Formel (c Centrifugalkraft am Aequator)

$$\varepsilon = \frac{5}{2}\frac{c}{g_0} - \frac{g_{90} - g_0}{g_0}$$

aufgestellt worden.

Die besten unter den überaus zahlreichen Bestimmungen der Länge des Sekundenpendels (also der Schwere) unter verschiedenen Breiten sind, auf den Meeresspiegel reducirt, von ALBRECHT[2]) in folgender Tabelle zusammengefasst worden.

Beobachter	Zahl der Messungen	Länge des Sekundenpendels l in Metern
SABINE	13	$0{\cdot}9909893 + 0{\cdot}0051341 \sin^2\varphi$
"	25	$0{\cdot}9912771 + 0{\cdot}0051422 \sin^2\varphi$
FOSTER	15	$0{\cdot}9910057 + 0{\cdot}0051495 \sin^2\varphi$
AIRY	49	$0{\cdot}9910170 + 0{\cdot}0050868 \sin^2\varphi$
BOWDITCH	52	$0{\cdot}9910002 + 0{\cdot}0051330 \sin^2\varphi$
BAILY	79	$0{\cdot}9910217 + 0{\cdot}0050987 \sin^2\varphi$
BORENIUS	47	$0{\cdot}9910250 + 0{\cdot}0051160 \sin^2\varphi$
POUILLET	44	$0{\cdot}9910256 + 0{\cdot}0050719 \sin^2\varphi$
PH. FISCHER	73	$0{\cdot}9910108 + 0{\cdot}0051049 \sin^2\varphi$
E. SCHMIDT	47	$0{\cdot}9909780 + 0{\cdot}0051536 \sin^2\varphi$

Mittelwerth: $l = 0{\cdot}99102 + 0{\cdot}00510 \sin^2\varphi$,

" $g_\varphi = 9{\cdot}7810 + 0{\cdot}0503 \sin^2\varphi$.

Man kann nun noch die Aenderungen der Schwere mit der Breite und mit der Höhe in eine einzige Formel vereinigen, und dabei diese, je nach der Wahl von G, g_0, g_{45} u. s. w. als Fundamentalgrösse, in verschiedenen Gestalten erhalten. Die von BROCH[3]) neuerdings vorgeschlagenen sind, wenn $c/g_0 = u$, $\frac{5}{2}u - \frac{1}{2}\varepsilon^2 = m$, $\frac{\frac{1}{2}m}{1 + \frac{1}{2}m} = m'$ gesetzt wird:

$$g_{\varphi,h} = g_0\ (1 + m\sin^2\varphi)\left(1 - \frac{5}{4}\frac{h}{r}\right)$$
$$= g_{45}(1 - m'\cos 2\varphi)\left(1 - \frac{5}{4}\frac{h}{r}\right),$$

also in Zahlen, wenn $m' = 0{\cdot}00259$ gesetzt wird:

$$\frac{g_{45,h}}{g_{45}} = (1 - 0{\cdot}00259\cos 2\varphi)\ (1 - 0{\cdot}000000196\,h).$$

Im Anschluss hieran folgt eine auf die wichtigsten Punkte Europas bezügliche Tabelle.

---

[1]) CLAIRAUT, Théorie de la fig. d. l. terre. Paris 1743.

[2]) ALBRECHT, in seiner Neubearbeitung von BREMIKER's sechsstelligen log.-trig. Tafeln, Berl. 1883, pag. 597.

[3]) BROCH, Trav. du Bur. int. des poids et mesures, I, A. 1 (1881). Eine ähnliche Formel giebt ganz neuerdings Defforges in Compt. rend. 106, pag. 126 (1887).

Tabelle der relativen Werthe der Schwerkraft, nach der Formel von BROCH berechnet.[1])

Ort	φ	h	$g_{\varphi, h} : g_{45}$
Aachen	50° 47′	160	1·000488
Berlin, Aichungsamt	52° 30′	40	1·0006625
Bern, Bur. des poids	46° 57′	543	1·0000697
Bonn	50° 44′	50	1·000505
Breslau	51° 7′	130	1·000523
Breteuil, Pavillon du Bur. int. (Paris)	48° 50′	67	1·0003322
Brüssel, Museum	50° 50′	65	1·0005110
Christiania, Observatorium	59° 55′	23	1·0012840
Constantinopel, Sophienmoschee	41° 0′	50	0·9996297
Erlangen	49° 36′	320	1·000474
Freiburg i. Baden	48° 0′	280	1·000216
Giessen	50° 36′	140	1·000476
Göttingen	51° 32′	130	1·000559
Haag	52° 5′	0	1·0006339
Halle	51° 30′	100	1·000563
Heidelberg	49° 24′	100	1·000376
Jena	50° 54′	160	1·000499
Kopenhagen	55° 41′	10	1·0009417
Leipzig	51° 20′	100	1·000548
London, Standard Office	51° 30′	6	1·0005815
Marburg	50° 49′	180	1·000487
München	48° 8′	525	1·0001798
Neapel, Observatorium	40° 52′	57	0·9996164
Prag	50° 5′	200	1·000380
Rom, Peterskirche	41° 54′	29	0·9997146
St. Petersburg, Phys. Observatorium	59° 50′	11	1·0012798
Stockholm, Akademie	59° 20′	20	1·0012385
Strassburg i. Els.	48° 35′	150	1·000294
Tübingen	48° 30′	320	1·000253
Wien, Polytechnikum	48° 12′	182	1·0002530
Würzburg	49° 48′	170	1·000399

Aenderung der Schwere nach der Tiefe. Geht man unter die Oberfläche der Erde hinab, so findet man, dass die Schwere zunimmt. Jedoch sind die Beobachtungen noch wenig zahlreich, und auch diese wenigen geben keine quantitativ übereinstimmenden Resultate. So fand v. STERNECK, dass die Schwingungszeit eines Pendels von 0·500855 auf der Erdoberfläche auf 0·500841 in 516 *m* Tiefe heruntergegangen war; dagegen war sie in 972 *m* Tiefe nicht, wie zu erwarten, noch kleiner geworden. Die Theorie dieser Verhältnisse ist nicht so einfach, wie es auf den ersten Blick scheinen möchte. Dass die Erde von der Kugelgestalt abweicht, braucht allerdings hier nicht berücksichtigt zu werden; wohl aber, dass diese Kugel nicht homogen ist, sondern (s. w. u.) von aussen nach innen an Dichte zunimmt, und zwar vermuthlich derart, dass auf jeder einzelnen Kugelfläche die Dichte die gleiche ist. Wäre die Erde homogen, so müsste die Schwere beim Eindringen in ihr Inneres abnehmen, da nach der Potentialtheorie die ausserhalb des betreffenden Punktes gelegene Kugelschale auf den Punkt gar nicht, die übrig bleibende Vollkugel aber schwächer anziehend

[1]) v. STERNECK, Mitth. d. k. k. mil.-geogr. Inst. Bd. 2 (Wien 1882). — Andre Messungen von AIRY s. w. u.

wirkt als die ganze Erde. Es ist dies letztere unmittelbar einleuchtend, weil bei der kleineren Kugel der Nenner des Ausdruckes m/r^2 nur in quadratischem, der Zähler aber in kubischem Verhältnisse kleiner ist als bei der grösseren. Diese Argumentation wird aber hinfällig, wenn die Dichte von aussen nach innen zunimmt. An ihre Stelle hat alsdann eine complicirtere Rechnung zu treten, welche u. A. von HELMERT[1]), unter allgemeineren Voraussetzungen aber kürzlich von WEIHRAUCH[2]) durchgeführt worden ist. Letzterer gelangt zu dem Satze: »Geht man innerhalb einer aus concentrischen, homogenen Kugelschalen gebildeten Kugel aus dem Centrumsabstand $a + da$ in den Abstand a, so nimmt die Schwere zu oder ab ($G_a \gtrless G_{a+da}$), je nachdem die Dichte der durchbrochenen Schicht kleiner oder grösser ist, als zwei drittel der mittleren Dichte der Kugel, zu welcher man gelangt ($\delta_a \lesseqgtr \frac{2}{3}\delta_a'$).« Hiernach muss die Schwere beim Eindringen ins Erdinnere anfangs zunehmen, wie es die Beobachtungen thatsächlich ergeben (so dass man schon hieraus einen Rückschluss auf die Zunahme der Erddichte nach innen zu machen könnte); später aber muss, von einer bestimmten Tiefe an, die Schwere wieder abnehmen und im Erdmittelpunkt null werden. In welcher Tiefe der Uebergang stattfindet, hängt von dem Gesetz ab, nach welchem die Dichte mit der Tiefe zunimmt; thut sie dies gleichförmig, so liegt diese Stelle in 0·186 Erdradius Tiefe, und der Maximalwerth von G ist $G_{max} = 1{\cdot}055g$; wächst dagegen die Dichte gleichförmig beschleunigt, so ist die kritische Stelle in 0·133 Erdradius Tiefe und $G_{max} = 1{\cdot}038g$.

Lokale Schwankungen der Schwere. Ausser den bisher betrachteten regelmässigen Aenderungen mit der Höhe über, der Tiefe unter der Erdoberfläche und der geographischen Breite weist die Schwere auch noch unregelmässige Schwankungen von vergleichsweise lokalem Charakter auf. So zur Seite mächtiger Bergmassen, wo die Richtung der Schwere, oder unterhalb solcher, wo die Grösse der Schwere beeinflusst wird, weil im ersten Falle eine seitliche, im zweiten Falle eine der Schwere entgegengesetzte Anziehung ins Spiel kommt. Bei verschiedenen Gebirgen, z. B. den Alpen, den schottischen Bergen, dem Kaukasus und dem Harz ist der erstere Einfluss zahlenmässig nachgewiesen worden; beim Harz wurde sogar ein ganzes System von Lothableitungen in zahlreichen, rings um den Harz und in demselben gruppirten Orten zusammengestellt.[3]) Eine umgekehrte Lothabweichung, d. h. eine scheinbare Abstossung wird zur Seite von tiefen Thaleinschnitten stattfinden, und entsprechend über solchen oder über vulkanischen hohlen Erdstrecken eine Schwächung der Schwere. Ein weiteres Moment ist die lokale Höhe des specifischen Gewichtes des Erdmasse: über erzreichen Gebieten muss die Schwere grösser, auf dem Meere muss sie kleiner ausfallen, als die allgemeinen Formeln es verlangen würden. In wie gesetzmässiger Weise das letztere zutrifft, ist aus dem Umstande zu ersehen, dass Sir W. SIEMENS hierauf einen Apparat zur Messung der Meerestiefe, das Bathometer, gegründet hat.[4])

[1]) HELMERT, Die Theorien d. höh. Geodaesie, Bd 2, pag. 493.

[2]) WEIHRAUCH, Rep. d. Phys. 22, pag. 396 (1886).

[3]) v. BAEYER, Astronom. Nachr. (2) Nr. 87.

[4]) Sir W. SIEMENS, Compt. rend. 83, pag. 780 (1877). Die Anziehung eines kleinen Erdabschnittes von der Tiefe h und der Dichte d ist

$$A_1 = 2\pi h d\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{h}{2R}}\right),$$

also für kleine h: $A_1 = 2\pi h d$;

andererseits ist die Anziehung A der ganzen Erde $A = \frac{4}{3}\pi R d$, also $A_1 : A = h : \frac{2}{3}R$. An der Oberfläche eines Meeres von der Tiefe h' vermindert sich die Anziehung im Verhältniss von

Endlich ist noch eine Erscheinung zu erwähnen, nach welcher die im Meeresniveau gemessene Schwere an der Küste eines grossen Continentes kleiner ist, als an derjenigen einer unter gleicher Breite gelegenen Insel, eine Erscheinung, aus welcher man den Schluss gezogen hat, dass das Meeresniveau nach den Continenten hin ansteigt.

Uebrigens ist es gelungen, sogar die Anziehung, welche von Menschenhand hergestellte Körper ausüben, zu messen, obgleich doch solche Körper nur eine sehr winzige Grösse im Vergleich zur Erde haben können. Dabei hat man verschiedene Wege eingeschlagen; theils nämlich hat man die in Rede stehende Anziehung mit der Schwere, d. h. der Anziehung der Erde, theils hat man sie mit einer anderen Wirkung, z. B. der Torsionskraft, verglichen. Es wird von diesen Methoden sofort die Rede sein; hier wurden sie nur angeführt, weil ihre Ergebnisse zur Vervollständigung des Satzes dienen, dass die Gravitation eine allgemeine Eigenschaft der Materie ist.

Masse und mittlere Dichte der Erde; Gravitationsconstante. Die bisherigen Betrachtungen haben zwei Punkte noch gänzlich unberührt gelassen, nämlich den Werth der Constanten k im NEWTON-schen Gesetz, d. h. der Gravitationsconstante, und den Werth der Erdmasse. Kennt man letzteren, so kann man aus der beobachteten Beschleunigung durch die Schwere an der Erdoberfläche die Gravitationsconstante offenbar ohne weiteres ableiten. Noch für einen anderen Zweck ist die Kenntniss der Erdmasse von grosser Wichtigkeit, nämlich für die Berechnung der Masse anderer Himmelskörper. Ist z. B. M die Sonnenmasse, m die Erdmasse, R der Sonnenabstand der Erde, r der Erdabstand des Mondes, T die Umlaufszeit der Erde um die Sonne, t die des Mondes um die Erde, so sind die Brüche R^3/T^2 und r^3/t^2 zwar nicht einander gleich, wie sie es nach dem dritten KEPLER'schen Gesetze sein müssten, wenn es sich beide Male um denselben Centralkörper oder wenigstens um solche von gleicher Masse handelte; sie werden sich aber wie diese Massen verhalten:

$$M:m = \frac{R^3}{T^2} : \frac{r^3}{t^2}.$$

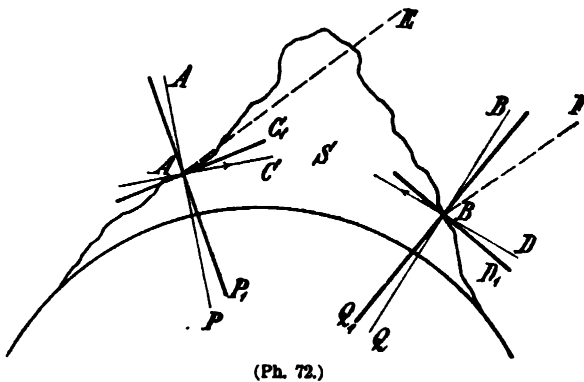
Hieraus kann man M bestimmen, wenn m bekannt ist. Aehnlich verhält es sich mit der Masse anderer Planeten. Nach alledem kann es nicht Wunder nehmen, wenn zur Bestimmung der Erdmasse zahlreiche Untersuchungen angestellt worden sind. Hier können dieselben nur in gedrängter Uebersicht angegeben werden. Je nach dem benutzten Princip resp. Messapparat, sind vier Klassen von Untersuchungen zu unterscheiden.

1. Methode der Lothabweichung. Zu beiden Seiten eines Berges nehmen die Lothe eine gegen die reguläre Richtung AP und BQ veränderte Richtung AP_1 und BQ_1 an, sodass, wenn die beiden Orte auf demselben Meridian liegen, der Winkel zwischen den Lothen nicht mehr gleich der Breitendifferenz, sondern grösser ist. Damit wird zugleich die Horizontale gegen den Berg hin gehoben, und folglich die Polhöhe in A verringert, (EAC_1 statt EAC), in B vergrössert (FBD_1 statt FBD). Misst man beide Polhöhen, so kann man also aus ihnen und der Breitendifferenz die Lothablenkung δ berechnen. Nun seien der Einfachheit halber die Punkte A und B in gleicher Höhe mit dem

---

$$\frac{2\pi h'(2{\cdot}763 - 1{\cdot}026)}{\frac{4}{3}\pi R \cdot 2{\cdot}763} = h' : 1{\cdot}06\, R.$$

Für den wirklichen Gebrauch des Bathomethers ist es jedoch besser, den Apparat mit Hilfe einiger Lothungen empirisch zu graduiren.



(Ph. 72.)

vermuthlichen Schwerpunkt des Berges S gewählt; (andernfalls ist in der Formel noch der Sinus eines Winkels hinzuzufügen). Das Loth nimmt dann unter der Wirkung der vertikalen Kraft M/R^2 (M Masse, R Radius der Erde) und der horizontalen Kraft m/r^2 (m Masse des Berges, r Abstand seines Schwerpunktes S vom Loth) eine gegen die Vertikale um den Winkel δ geneigte Lage an; es ist also

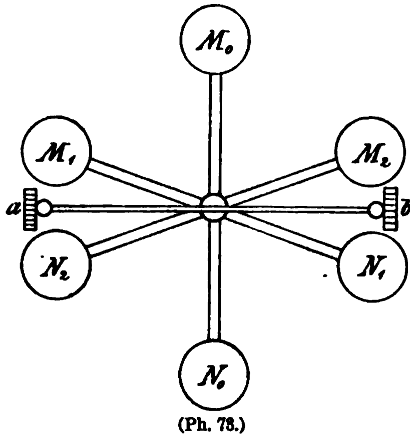
$$tg\,\delta = \frac{m/r^2}{M/R^2} = \frac{mR^2}{Mr^2},$$

und somit die mittlere Dichte der Erde

$$d = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{m}{Rr^2\,tg\,\delta}.$$

Maskelyne[1]), der diese Methode zuerst anwandte, erhielt ungefähr $d = 4{\cdot}8$; James, der sie viel später wiederholte, fand $d = 5{\cdot}32$.

2. Methode der Torsisonswaage. An einem sehr leichten, an einem feinen Draht horizontal aufgehängten Stabe sind die mit elfenbeinernen Skalen versehenen Kugeln a und b angebracht, sodass das Ganze in Folge der Torsionskraft des Fadens eine bestimmte Lage einnimmt, und in den Beobachtungsfernröhren grade die Nullstriche der Skalen in das Fadenkreuz fallen. Diese Lage bleibt auch noch unverändert, wenn ein mit zwei grossen Bleikugeln M und N je vom Gewicht P ausgestatteter Balken in die Lage $M_0\,N_0$ gebracht wird; wird er dagegen in eine der Lagen $M_1\,N_1$ oder $M_2\,N_2$ gebracht, so wird durch die Anziehung der Bleikugeln das Stäbchen $a\,b$ in dem einen oder andern Sinne so weit gedreht, bis die Torsionskraft des Drahtes der Anziehungskraft der Bleikugeln das Gleichgewicht hält. Nun ist



(Ph. 73.)

erstere, wenn die Drehung n Längeneinheiten auf der Skale betrug, die Schwingungsdauer von $a\,b$ gleich t und das Gewicht der Kugeln a und b je gleich p ist,

$$K = \frac{2\pi^2 pn}{gt^2};$$

also ist dies auch die Anziehung der Bleikugeln auf a und b, und zwar in einem bestimmten Abstande ihrer Mittelpunkte, nämlich $r-n$ (r Abstand der Mittelpunkte, bevor $a\,b$ angezogen wurde.) Es übt also einerseits die Bleikugel vom Gewichte P im Abstande $r-n$ die Anziehung K, andererseits die Erde im Abstande R (Erdradius) eine dem Gewichte des angezogenen Körpers, also hier p gleiche An-

[1]) Maskelyne und Hutton, Philos. Trans. 1775 u. 1778.

ziehung aus, es lässt sich also mittelst einer einfachen Proportion das Gewicht resp. die Masse der Erde, und hieraus ihre Dichte bestimmen, nämlich

$$d = \frac{3}{4}\frac{g}{\pi^3}\frac{Pt^2}{Rn(r-n)^2}.$$

CAVENDISH[1]), der Erfinder dieser Methode, fand $d = 5{\cdot}48$; später fanden bei sorgfältigerer Vermeidung der Versuchsstörungen und Fehlerquellen REICH[2]) 5·49 und 5·58, BAILY[3]) 5·67; endlich in neuester Zeit, mit Beobachtung aller Vorsichtsmassregeln, CORNU und BAILLE[4]) 5·56; im Mittel giebt also diese Methode etwa 5·58.

3. Methode der Pendelschwingugen. Es ist oben gezeigt worden, dass beim Herabgehen unter die Erdoberfläche die Schwere zunächst zunehmen muss, und dass die Art dieser Zunahme mit der mittleren Dichte der ausserhalb des betreffenden inneren Punktes gelegenen Kugelschale d' und des inneren Kugelkernes d in einer einfachen Beziehung steht. Bringt man demgemäss ein Pendel, das auf der Erdoberfläche eine bestimmte Schwingungsdauer T besitzt, an jenen unterirdischen Ort und bestimmt wieder die Schwingungsdauer t, so kann man, indem man d' nach Möglichkeit schätzt, d berechnen; dies ist aber, da die Tiefe h des unterirdischen Ortes stets sehr klein im Vergleich zum Erdradius R sein wird, die mittlere Dichte der Erde. Mit Hilfe der leicht abzuleitenden Formel

$$d = \frac{d' T^2[R^3 - (R-h)^3]}{(R-h)[t^2R^2 - T^2(R-h)^2]},$$

oder der angenäherten kürzeren

$$d = \frac{3d'}{2 - \frac{R}{h}\left(\frac{T^2 - t^2}{T^2}\right)}$$

fand AIRY[5]) $d = 6{\cdot}56$.

4. Pendelmethode von WILSING[6]). Dieselbe beruht auf der Anwendung eines sehr empfindlichen Differentialpendels, dessen Ruhelage mittelst Spiegelablesung bis auf 1″ bestimmt werden kann, und dessen Pendelkörpern die ablenkenden Massen einmal von der einen, das andere Mal von der anderen Seite genähert werden. Das Endresultat aus vielen Versuchen war

$$a = 5{\cdot}594 \pm 0{\cdot}032.$$

Die mittlere Erddichte liegt also hiernach jedenfalls zwischen 5·56 und 5·62, so dass das MASKELYNE'sche Resultat als zu klein, das AIRY'sche als zu gross auszuschliessen sein dürfte.

5. Methode der Wägung. Genauer als alle bisherigen Methoden ist ohne Zweifel die, bei welcher das unter veränderten Einwirkungen veränderte Gewicht eines Körpers mittelst der Waage bestimmt wird. JOLLY,[7]) der diese Methode zuerst anwandte, äquilibrirte eine und dieselbe Masse einmal durch Aufsetzen von Gewichtsstücken auf eine in gleicher Höhe befindliche Waagschale, ein anderesmal durch Aufsetzen von Gewichtsstücken auf eine 21 m tiefer befindliche mit jener oberen durch einen Draht verbundenen Waagschale. Die Differenz er-

---

1) CAVENDISH, Philos. Trans. 1798. Gilb. Ann. Bd. 2.

2) REICH, Versuche über die mittl. Dicht. d. Erde. Freiberg 1838.

3) BAILY, Mem. of the R. Astron. Soc. Lond. 14. (1843).

4) CORNU und BAILLE, Compt. R. 86, pag. 571, 699, 1001. (1878).

5) AIRY, Philos. Trans. 1856.

6) WILSING, Berl. Sitz. Ber. 1885, pag. 13. — Publ. d. Astrophys. Observ. Potsd. 1887.

7) v. JOLLY, Abh. k. bayr. Ak. 2. Kl. 13 u. 14, und WIED. Ann. 14, pag. 331 (1881).

gab die Abnahme der Schwere mit der Höhe. Er baute dann unterhalb der unteren Schale eine 5775 *kgr* schwere Bleikugel auf und bestimmte die entsprechende Differenz. Die Zunahme derselben ergab die Anziehung der Bleikugel auf die Gewichte in der unteren Schale, da bis zur oberen Schale, wie der Versuch ergab, die Bleikugel keine messbare Wirkung ausübte. JOLLY erhielt aus zahlreichen Versuchen

$$d = 5{\cdot}692 \pm 0{\cdot}068,$$

also einen Wert, der mit dem WILSING'schen zwar ungefähr (bis auf 2§) übereinstimmt, dessen Fehlergrenzen aber doch gänzlich ausserhalb der Fehlergrenzen jenes fallen.

Wesentlich verbessert wurde die Methode durch KÖNIG und RICHARZ.[1]) Die Waage ist hier direkt auf den Bleiklotz gestellt, sodass die Schalen unmittelbar über dessen Oberfläche schweben; unter jeder Schale ist der Bleiklotz vertikal durchbohrt, und vermöge zweier durch diese Löcher führenden Stangen sind an die oberen Schalen zwei andere so angehängt, dass sie dicht unter dem Bleiklotz schweben. Wägt man nun eine Masse m einmal in der Schale rechts oben durch Gewichte m_u in der Schale links unten, und sodann umgekehrt in der Schale rechts unten durch Gewichte m_o links oben, und nennt man die Schwere oben g_o, unten g_u, die Anziehung des Bleiklotzes am Orte der Schalen k', so hat man

$$m(g_o + k') = m_u(g_u - k'),$$
$$m(g_u - k') = m_o(g_o + k'),$$

und hieraus, wenn man $m_u - m_o = \delta$, $g_u - g_o = \gamma$ setzt, mit den erlaubten Vernachlässigungen

$$\delta = \frac{2m}{g_o}(2k' - \gamma).$$

Hierin bestimmt sich γ durch analoge Wägungen vor Aufbau des Bleiklotzes, m_u' und m_o', zu $\gamma = g_o(m_u' - m_o')/2m = \delta' g_o/2m$, und es wird

$$k' = \frac{g_o}{4m}\left(\delta + \delta'\right).$$

Bedenkt man nun, dass $k' = k\frac{\partial V}{\partial z}$ ist (V Potential des Bleiklotzes, k Gravitationsconstante), und dass sich $\frac{\partial V}{\partial z}$ berechnen lässt, so sieht man, dass man hier direkt k (indirekt also auch die mittlere Erddichte) findet. Dabei können, gegenüber JOLLY's Apparat, die Manipulationen und Wägungen unter weit sichererem Ausschluss von Luftzug- und Temperatureinflüssen ausgeführt werden, und die Genauigkeit ist mindestens die vierfache. Die Versuche werden in den Kasematten von Spandau angestellt, sind aber noch nicht zum Abschluss gebracht.

Fasst man alle diese Resultate zusammen, so findet man bis auf weiteres als wahrscheinlichsten Werth

$$d = 5{\cdot}64,$$

also viel grösser als die mittlere Dichte der uns zugänglichen Erdkruste (2·7). Es ist also zu schliessen, dass die Dichte der Erde nach innen zu beträchtlich zunehme, und dass sie im innersten Kern die Dichte der schwersten uns bekannten Körper erreiche oder überschreite.

Bei den Methoden, welche zunächst die Erddichte d ergeben, findet man die Gravitationskonstante k aus der Formel

---

[1]) KÖNIG und RICHARZ, Ber. d. Berl. Ak. 1884, pag. 1203, u. WIED. Ann. 24, pag. 664 (1885).

$$g = k\frac{M}{R^2}, \text{ also } k = \frac{3}{4}\,\frac{g}{R\pi d}.$$

Für $d = 5{\cdot}64$ wird $k = 0{\cdot}000000065$ (Einheiten: *cm*, *gr*, *sec*).[1])

Theorieen der Gravitation. Wenn man sich auf den Standpunkt stellt, dass die Naturforschung die Erscheinungen der Natur in einer Weise darzustellen habe, welche Vollkommenheit mit möglichster Einfachheit verbindet, dass aber die letzten Ursachen dieser Erscheinungen ausserhalb ihres Bereiches liegen, so muss man sich durch das NEWTON'sche Gesetz für völlig befriedigt erklären. Denn es ist keine Thatsache bekannt, welche ihm widerspricht, und eine weitere Vereinfachung desselben ist kaum denkbar. Naturforscher, welche nicht auf diesem Standpunkte stehen, haben jedoch an dem in dem NEWTON'schen Gesetze liegenden Fernwirkungscharakter der Gravitation Anstoss genommen und gemeint, einen Fortschritt zu machen, wenn sie diese Fernwirkung durch eine unmittelbar mechanische Wirkung dieser oder jener Art ersetzten. Dabei denken sich die Einen die Materie stetig und legen dem die Welt durchdringenden imponderablen Stoffe (Aether) eine ähnliche Eigenschaft bei. Die mechanische Wirkung, auf welche die Gravitation zurückgeführt wird, ist in diesem Falle von der Natur des hydrostatischen Druckes. Insbesondere kann man sich nach SIR W. THOMSON die Materie in Gestalt von Wirbelatomen vorstellen. Andere sehen zwar die Materie als relativ stetig an, geben aber ihren Theilchen eine mehr oder minder durchbrochene Gestalt, während der Aether in diskrete Theilchen aufgelöst wird. An die Stelle des Druckes des Aethers treten hier die Stösse der Aethertheilchen. Bei noch anderen besteht auch die Materie aus Molekeln. Die umgekehrte Proportionalität mit dem Quadrat der Entfernung ergiebt sich bei allen diesen Theorien auf ziemlich einfache Weise, was nicht zu verwundern ist, da diese Beziehung eine nahezu an sich einleuchtende und bei vielen anderen Naturerscheinungen wiederkehrende ist. Die Proportionalität mit der Masse macht schon mehr Schwierigkeiten. Denkt man z. B. an Aetherstösse, so sieht man leicht ein, dass zwei in einiger Entfernung von einander befindliche Körper auf den einander abgewandten Seiten mehr Stösse empfangen müssen, als an der Innenseite, wo jeder der beiden Körper dem andern gewissermassen als Schirm dient; aber dieser Ueberschuss, also auch die scheinbare Anziehung der beiden Körper, müsste, wenn die Aethertheilchen an den Körperoberflächen abprallen, zu diesen Oberflächen, nicht zu den Massen, in Beziehung stehen; und man ist daher genöthigt, anzunehmen, dass die überwiegende Mehrzahl der Aethertheilchen mehr oder minder tief in die Körper eindringt. Die Hauptsache aber ist, dass die meisten Theorieen den drückenden oder stossenden Theilen Eigenschaften, z. B. Elasticität beilegen; und es ist einleuchtend, dass damit complicirteres als die Gravitation selbst ins Spiel gezogen wird. Bei einigen Theorieen wird dieser Fehler vermieden, aber nur mit Hilfe verwickelter Vorstellungen oder schwerfälliger mathematischer Rechnungen. Man kann daher sagen, dass diese Untersuchungen vorläufig mehr der Naturphilosophie, als der Physik angehören, und dass sie für letztere nur insofern werthvoll sind, als sie die Perspektive auf eine Anzahl möglicher Weise vorhandener, aber sämmtlich noch nicht beobachteter Erscheinungen eröffnen. Dahin gehört z. B. die Einwirkung des Weltäthers auf die Bewegungen der Himmelskörper (mehrfache Vermuthungen, z. B. hinsichtlich

[1]) Ausführlicheres über die Gestalt der Erde, ihre mittlere Dichte, die Variationen der Schwere u. s. w., sowie eine reiche Literatur über diese Gegenstände findet man bei GÜNTHER, Lehrb. d. Geophysik, Stuttg. 1884, Bd 1, pag. 129—210.

des ENCKE'schen Kometen, haben sich bisher nicht bestätigt); die Frage, ob die Gravitation Zeit beanspruche; die Verschiedenheit der Schwere von Krystallen nach verschiedenen Richtungen; Beziehungen zwischen Wärme und Schwere, zwischen Elektricität und Schwere u. s. w.[1])

F. AUERBACH.

Aggregatzustände.

Der allgemeinen Mechanik steht die specielle Mechanik gegenüber. In jener werden die Körper als starr, d. h. als unveränderlich in Gestalt und Volumen betrachtet; in dieser handelt es sich grade um die Veränderungen der Gestalt und des Volumens, und die übrigen Veränderungen, d. h. die Gesammtbewegungen im Raume, kommen nur in so weit in Betracht, als sie mit ersteren zusammenhängen, resp. sie beeinflussen. In der speciellen Mechanik kann man nicht, wie in der allgemeinen, alle Körper gemeinschaftlich behandeln, weil die Gesetze der Erscheinungen ganz verschieden werden, je nach dem Verhalten, welches der Körper bei Gestalts- oder Volumenänderungen zeigt. Die Veränderlichkeit der Gestalt heisst Deformabilität, diejenige des Volumens Compressibilität bezw. Dilatabilität, je nachdem es sich um eine Verkleinerung oder Vergrösserung des Volumens handelt; dieselbe Bedeutung haben die Ausdrücke Zusammendrückbarkeit und Ausdehnbarkeit. Uebrigens ist diese Gegenüberstellung von Gestalts- und Volumenänderungen nicht so zu verstehen, als ob es sich um zwei stets getrennte Erscheinungen handelt; im Gegentheil, ein Vorgang wird im allgemeinen aus beiden sich zusammensetzen.[2]) Aber grade, weil dies letztere der Fall ist, ist für das allgemeine Verständniss und die mathematische Darstellung der Erscheinungen die Zerlegung in Gestalts- und Volumenänderung von Vortheil; und zwar von um so grösserem, als, wie gesagt, das verschiedenartige Verhalten der Körper den Vorgängen der einen und der

[1]) Die wichtigsten Theorieen der Gravitation sind die von: HUYGENS, Discours sur la cause de la pesanteur (1690), Neudruck, Lpz. 1887. — LESAGE, »Lucrèce Newtonien«, Mém. Ac. Roy. Berlin 1784, pag. 404. — ZÖLLNER, Wissensch. Abhandlungen, Bd. 1. und Prinz. e. elektrodyn. Theorie der Materie, Lpz. 1876. — SPILLER, d. Urkraft des Weltalls, Berlin 1876. — v. DELLINGSHAUSEN, Grundz. e. Vibrationstheorie d. Natur, Reval 1872. — SCHRAMM, d. allg. Bewegung d. Materie u. s. w. Wien 1872. — FRITSCH (im Anschluss an HUYGENS), Th. d. NEWTON'schen Gravitation, Progr. Realsch. Königsb. 1874 u. 1886. — SECCHI, d. Einheit d. Naturkräfte, deutsch v. SCHULZE, Leipz. 1876. — ISENKRAHE, d. Räthsel v. d. Schwerkraft, Braunschw. 1879. — RIEMANN, Werke hrg. v. WEBER, Leipz. 1876. — HELM, G. (im Anschluss an RIEMANN), Zeitschr. f. Math. u. Phys. 23, pag. 261 (1878). — S. TOLVER PRESTON, Wien. Ber. 87, pag. 795 (1883) u. Phil. Mag. (5) 15, pag. 391 (1881), sowie die daran anknüpfenden Discussionen von BROWNE, LODGE, GRAY, ALLEN u. s. w. im Phil. Mag. (5) in versch. Bdn. — JAROLIMEK, Wien, Berl. 88, pag. 897 (1883). — ODSTRCIL, Wien. Ber. 89, pag. 485 (1884). — Sir W. THOMSON, Trans. Roy. Soc. Edinburgh 1867 u. 1872. u. s. w. u. s. w.

[2]) Auch soll hiermit nicht gesagt sein, dass diese beiden Arten von Vorgängen stets durch zwei von einander unabhängige Constanten charakterisirt seien, was man, im Hinblick auf die beiden Elaticitätsconstanten isotroper Körper, im Augenblick vielleicht vermuten könnte. Die Zahl derselben ist vielmehr einerseits im allgemeinen grösser, andererseits kann sie sich auch ausnahmsweise auf eine herabmindern. Siehe z. B. SEYDLER, Unt. üb. versch. Formen d. Kraftgesetzes, Abh. böhm. Ak. (7) Bd. 1), pag. 27; ferner in englischen Lehrbüchern. Näheres im Art. »Elasticität«.

andern Art gegenüber zu einer einfachen und mit unseren natürlichen Vorstellungen übereinstimmenden Klassifikation dieser Körper führt. Es giebt nämlich

1. Feste Körper. Dieselben zeigen in keiner von beiden Hinsichten ein specielles Verhalten; sie beanspruchen nämlich endliche — und zwar meist erhebliche — Kräfte, sowohl um deformirt als auch um comprimirt zu werden. Aeusserlich macht sich dies dadurch geltend, dass sie eine selbständige Gestalt und ein selbständiges Volumen haben; man kann sie, von der notwendigen Handhabe oder Unterlage abgesehen, mit ringsum freier Oberfläche aufstellen und von Ort zu Ort schaffen. Die Theorie der Gestalts- und Volumenänderungen fester Köper ist naturgemäss verwickelt, weil für beide Elementarvorgänge endliche Constanten in die Rechnung eingehen, und erst eine Combination beider Constanten für irgend einen wirklichen Vorgang maassgebend wird.

2. Flüssigkeiten, genauer tropfbare Flüssigkeiten. Dieselben zeigen in Bezug auf jeden der beiden Elementarvorgänge ein spezielles Verhalten, und zwar in Bezug auf beide ein entgegengesetztes. Zu ihrer Deformation ist nämlich nur eine sehr kleine Kraft erforderlich, derart, dass eine selbständige Gestalt ihnen überhaupt nicht zukommt, ausgenommen unter besonders günstigen Umständen (z. B. Tropfen, Bläschen u. s. w.). Sie würden zerfliessen, wenn man ihnen nicht Gelegenheit gäbe, sich an einen festen Boden und ringsum an feste Seitenwände anzuschmiegen. Andererseits aber setzen sie der Aenderung ihres Volumens einen überaus grossen Widerstand entgegen, haben also ein selbständiges Volumen, und man darf demgemäss die Gefässe, in welchen man sie aufstellt oder transportirt, oben offen lassen, ohne Verlust an Substanz befürchten zu müssen — wohlverstanden, insoweit die Substanz Flüssigkeit bleibt. Mit diesen Eigenschaften hängt es auch zusammen, dass eine Flüssigkeit sich leichter als ein fester Körper zertheilen, die Theile aber auch wiederum leichter als beim festen Körper sich vereinigen lassen; es scheint sogar, dass, wenn feste Körper scheinbar sich vereinigen, dies stets so geschieht, dass die Grenzschichten vorübergehend flüssig werden (z. B. Regelation von Eisstücken, Löthung u. s. w.). Flüssigkeiten, welche die beiden Eigenschaften der leichten Deformabilität und der schweren Compressibilität in extremer Vollkommenheit besitzen, d. h. zu deren Deformation gar keine Kraft erforderlich und deren Compression überhaupt unmöglich ist, heissen ideale Flüssigkeiten — ideal, weil sie nur eine Abstraction von der Wirklichkeit sind. Die Theorie dieser idealen Flüssigkeiten ist einerseits verhältnismässig einfach, weil von den beiden in die Rechnung eingehenden Constanten die eine unendlich klein, die andere unendlich gross wird, beide also fortfallen und somit als einzige specifische Constante die auch schon in der Mechanik starrer Körper vorkommende Dichte übrig bleibt; andererseits aber sehr brauchbar, weil sie viele an wirklichen Flüssigkeiten beobachtete Erscheinungen mit genügender Vollkommenheit darstellt. (S. Art. »Hydrostatik«, »Hydrodynamik« u. s. w.). Bei einer weiteren Anzahl von Erscheinungen macht sich die Compressibilität immer noch nicht, wohl aber der Widerstand gegen Deformation, die sogen. Reibung oder Zähigkeit geltend; mans pricht in diesen Fällen von reibenden incompressiblen Flüssigkeiten, und ausser der Dichte tritt hier noch die Reibungsconstante in den Gleichungen auf (s. Art. »Reibung«). In einem dritten Capitel der Lehre von den Flüssigkeiten wird schliesslich die Compressibilität zum eignen Gegenstande der Untersuchung gemacht (s. Art. »Hydrostatik«).

3. Gase. Dieselben setzen wie die Flüssigkeiten deformierenden Eingriffen nur einen sehr geringen Widerstand entgegen; sie haben also wie jene keine selbständige Gestalt, und man muss sie in gleicher Weise in Gefässe einschliessen.

In Bezug auf Volumenänderungen verhalten sie sich aber ganz anders wie Flüssigkeiten, und zwar sehr eigenartig. Verkleinerungen des Volumens setzen sie einen mässigen Widerstand entgegen, also bei weitem keinen so grossen wie Flüssigkeiten. Dagegen setzen sie Vergrösserungen des Volumens nicht nur gar keinen Widerstand entgegen, sondern nehmen von selbst jeden ihnen dargebotenen Raum ein. Es kommt ihnen also auch selbständiges Volumen nicht zu, und man muss die Gefässe, in denen man sie auffangen oder fortschaffen will, nicht nur seitlich ringsum, sondern auch oben verschliessen. Den hiermit festgestellten Gegensatz zwischen festen, flüssigen und gasförmigen Körpern drückt man dadurch aus, dass man ersteren eine grosse, den zweiten eine mittlere, den letzten eine sehr kleine Cohäsion zuschreibt. Dass dieselbe auch den Gasen nicht völlig fehlt, hat die kinetische Gastheorie (s. d.) ergeben. Auch bei den Gasen vereinfacht man die Theorie durch die Betrachtung idealer Gase; aber dieser Ausdruck bezieht sich hier selbstverständlich nur auf den fehlenden Widerstand der Deformationen, d. h. auf die fehlende Reibung oder Zähigkeit; die Compressibilität ist auch bei ihnen eine endliche. Die Mechanik idealer Gase steht ihrer Complikation nach in der Mitte zwischen der Mechanik fester Körper und der Flüssigkeiten; ausser der Dichte kommt in ihr nur eine Constante vor, also eine weniger als bei den festen Körpern aber eine mehr als bei den Flüssigkeiten. Dagegen bringt hier der Umstand, dass bei den meisten Erscheinungen die Temperatur eine nicht ausser Acht zu lassende Rolle spielt, eine weitere Complication mit sich und hat zur Folge, dass diese Erscheinungen grossentheils in das Gebiet der Wärmelehre verwiesen werden müssen.

Die verschiedenen Aggregatzustände sind nicht scharf von einander geschieden, und überdies können die meisten Stoffe je nach den Umständen jedem derselben angehören (z. B. Eis, Wasser, Wasserdampf). Ob ein Körper flüssig oder fest sei, ob man ihn als sehr »weichen« festen Körper oder als sehr »zähe« Flüssigkeit zu bezeichnen habe, kann in Uebergangsstadien zweifelhaft werden (z. B. Butter, Syrup); und dasselbe gilt in bestimmtem Sinne von bestimmten Uebergangsstadien zwischen dem flüssigen und gasförmigen Zustande. Indessen gehören auch diese Erscheinungen, die Veränderungen des Aggregatzustandes (Schmelzen, Gefrieren, Verdampfung, Condensation), in Anbetracht der Rolle, welche dabei die Temperatur spielt, in die Wärmelehre. Dagegen ist hier auf die sogen. Halbflüssigkeiten hinzuweisen. Man versteht darunter eine Anhäufung gleichartiger fester Körper, z. B. einen Haufen Getreidekörner, eine Menge Sand, lockere Erde. Die Eigenschaften und das Verhalten der Halbflüssigkeiten, das viel des Interessanten und manche Analogie mit den Flüssigkeiten bietet, ist von verschiedenen Seiten behandelt worden.[1])

Es möge hier noch kurz die Bemerkung Platz finden, dass gelegentlich der Beobachtung bestimmter Erscheinungen auch wohl noch weitere Aggregatzustände aufgestellt worden sind. So hat man sich unter den sog. vier Elementen der alten Griechen jedenfalls vier Aggregatzustände zu denken, von denen die Erde den festen, das Wasser den flüssigen, die Luft den gasförmigen und das Feuer einen vierten noch feineren Zustand darstellt. Ferner hat das LEIDENFROST'sche Phänomen einige Physiker veranlasst, den »sphäroidalen« Zustand als vierten Aggregatzustand einzuführen, ohne dass jedoch hierzu genügender Grund vorhanden wäre. Endlich hat neuerdings CROOKES bei Gelegenheit seiner Versuche über dynamische und elektrische Erscheinungen in sehr verdünnten

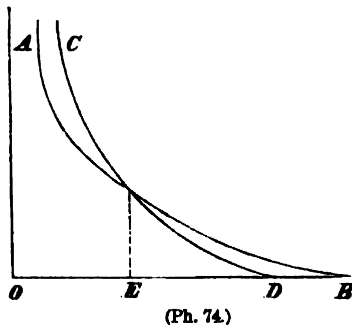
[1]) Siehe z. B. RESAL, Phys. Mathém. Paris 1884, pag. 359.

resp. ganz luftleeren Räumen »die strahlende Materie« als vierten Aggregatzustand bezeichnet, ist aber hiermit gleichfalls nicht durchgedrungen.

Um sich von der Verschiedenheit der drei Aggregatzustände eine in geometrischer und analytischer Hinsicht bestimmtere Vorstellung zu machen, hat man von einer der beiden Hypothesen über die Natur der Materie auszugehen, also entweder von der Stetigkeitshypothese oder von der Molekularhypothese. Im ersteren Falle handelt es sich um die Einführung der den Volumen- und Gestaltsänderungen entsprechenden, im Innern und an der Oberfläche der Körper anzunehmenden Druckkräfte, welche zu den in der Mechanik der starren Körper ausschliesslich vorkommenden äusseren Kräften hinzutreten und für jeden Aggregatzustand ein verschiedenes Verhalten zeigen. Denkt man sich nämlich im Innern des Körpers eine beliebige kleine Ebene, so wird dieselbe von der einen nach der andern Seite hin einen Druck erfahren, und dieser Druck wird im allgemeinen schief gegen die kleine Fläche wirken. Ferner wird dieser Druck selbst für die nämliche Stelle im Innern des Körpers ein verschiedener sein, je nach der Richtung der kleinen Ebene, welche man daselbst in's Auge fasst, und zwar ein verschiedener sowohl der Grösse nach als auch hinsichtlich seiner Neigung gegen die betreffende Fläche. Es lässt sich aber zeigen (s. Art. »Elasticität«, Math. Theorie), dass durch jeden Punkt im Innern des Körpers drei auf einander senkrechte Ebenen sich legen lassen, die die Eigenschaft haben, dass die auf sie wirkenden Drucke auf ihnen senkrecht stehen; diese drei Drucke heissen die Hauptdrucke und ihre Richtungen die Hauptdruckaxen. So weit verhalten sich alle Körper ganz gleich, z. B. ein Steinsalzkrystall ebenso wie ein Wassertropfen oder eine Luftblase. Während aber bei den festen Körpern die Drucke sehr beträchtlich verschieden sind, weichen sie bei den Flüssigkeiten und Gasen nur wenig von einander ab, und diese geringe Abweichung ist eine Folge ihrer Zähigkeit oder inneren Reibung; sieht man von dieser ab, so werden die drei Hauptdrucke und damit überhaupt die Drucke in allen Richtungen einander gleich und zugleich nehmen sie sämmtlich die auf den Flächen, auf die sie wirken, senkrechte Richtung an. Denkt man sich die sämtlichen in einem inneren Punkte je nach der Richtung der betreffenden Fläche wirkenden Drucke der Richtung und Grösse nach durch gerade Linien, die von diesem Punkte ausgehen, dargestellt und ihre Endpunkte zu einer geschlossenen Fläche vereinigt, so giebt die am Ende irgend eines Radius an die Fläche gelegte Tangentialebene die Richtung der Fläche an, auf welche dieser Druck wirkt. Bei festen Körpern ist jene geschlossene Fläche ein Ellipsoid und dessen drei Axen die Hauptdruckaxen, bei idealen Flüssigkeiten und Gasen ist sie eine Kugel, und jeder Radius derselben ist der Repräsentant des Druckes, der hier in allen Richtungen senkrecht und in gleicher Grösse wirkt. Die mathematische Ausführung dieser Betrachtungen sowie die durch die Constanz oder Veränderlichkeit der Dichte sich ergebende Unterscheidung zwischen Flüssigkeiten und Gasen sehe man weiter unten.

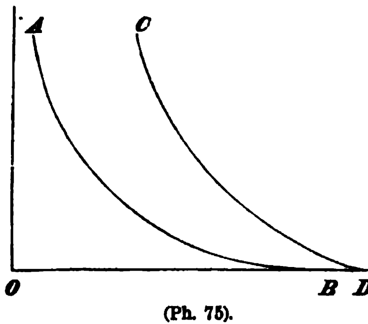
Legt man andererseits die Molekularhypothese zu Grunde, nimmt man also an, dass die Materie aus gesonderten Molekeln bestehe, so muss man zum Verständniss ihres Verhaltens Molekularkräfte einführen. Diese Kräfte müssen zunächst die Eigenschaft haben, mit wachsender Entfernung sehr rach abzunehmen. Ferner muss unter ihnen einerseits eine anziehende Kraft, andererseits eine abstossende Kraft sich befinden, da die Körper sowohl einer Ausdehnung, als auch einer Zusammendrückung Widerstand entgegensetzen. Im natürlichen Zustande der Körper halten diese beiden Kräfte sich gerade das Gleichgewicht, dagegen überwiegt, wenn zwei benachbarte Molekeln von einander entfernt werden, die An-

ziehung, wenn sie einander genähert werden, die Abstossung. Hieraus folgt, dass die Abstossung mit wachsender Entfernung rascher abnimmt als die Anziehung.



(Ph. 74.)

In Fig. 74 sind demgemäss die beiden Kräfte durch die Kurven *AB* (Anziehung) und *CD* Abstossung dargestellt, mit der Entfernung zweier Theilchen als Abscisse. *OE* ist der natürliche Abstand der Theilchen, hier sind die beiden Kräfte einander gleich; links hiervon liegt die Kurve der Abstossung, rechts die der Anziehung höher; haben endlich die Theilchen den Abstand *OB* erreicht, so sind die Molekularkräfte ganz ausser Spiel. Die quantitativen Verhältnisse der Fig. 74 entsprechen denjenigen, wie sie in einem festen Körper stattfinden. Dagegen entspricht die Fig. 75 den Verhältnissen in Gasen. Die Anziehungskurve *AB* ist dieselbe geblieben, aber die Abstossungskurve *CD* ist nach rechts verschoben und zwar so weit, dass die beiden Kurven sich nicht mehr schneiden. Es überwiegt also stets die Abstossung, ein natürlicher Gleichgewichtszustand existirt nicht, sondern es wird jeder dargebotene Raum vollständig erfüllt. In der Mitte zwischen festen Körpern und Gasen stehen die Flüssigkeiten, wobei freilich das eigenthümliche Verhalten derselben, nämlich die leichte Verschiebbarkeit aber schwere Näherbarkeit der Theilchen (leichte Gestalts-, aber schwere Volumenveränderlichkeit) nicht zur Darstellung gelangt; hierzu bedürfte es verwickelterer Vorstellungen über die Molekularkräfte. Dagegen ist der Uebergang aus einem Aggregatzustande in den andern leicht zu verstehen, wenn angenommen wird, dass durch Erwärmung die Anziehungscurve unbeeinflusst bleibt, die Abstossungscurve hingegen nach rechts gerückt wird.



(Ph. 75).

Die Molekularhypothese hat den Vorzug, die physikalischen Erscheinungen mit den chemischen auf gleiche Grundlage zu stellen. Für das Verständniss der meisten physikalischen Erscheinungen an sich ist dagegen die Stetigkeitshypothese ebenso geeignet, und zur mathematischen Beschreibung derselben ist sie ihrer grösseren Einfachheit und strengeren Durchführbarkeit halber vorzuziehen.

F. Auerbach.

Elasticität im Allgemeinen.

Grundbegriffe.

Begriff der Elasticität. Elasticität, im allgemeinsten Sinne des Wortes, bezeichnet den Widerstand irgend eines Körpers gegen Veränderungen der Lage seiner Theile gegen einander. Es kann dieser Körper fest, flüssig oder gasförmig sein; es können andererseits diese Veränderungen vorübergehender oder dauernder Natur sein; und endlich können dies theils Veränderungen seines Volumens,

theils Veränderungen seiner Gestalt sein; unter Gestalt ist hierbei und in allem folgenden stets nicht blos die äussere Gestalt des ganzen Körpers, sondern auch die Gestalt seiner einzelnen Theile verstanden, z. B. der unendlich kleinen Parallelepipeda, in die man sich ihn bei Anwendung rechtwinkliger Coordinaten zerlegt denken kann; ein Körper kann daher in diesem Sinne seine Gestalt ändern, während die äussere Gestalt, d. h. die Begrenzung, dieselbe beibt. Es ist aber (s. Art. »Aggregatzustände«) bereits darauf hingewiesen worden, dass Flüssigkeiten und Gase einen Widerstand gegen Gestaltsänderungen gar nicht oder nur in geringem Grade besitzen, sodass bei ihnen von einer natürlichen Gestalt meist überhaupt nicht die Rede sein kann. Es kommt daher bei ihnen nur die Volumenelasticität in Betracht, die Erscheinungen sind wenig mannigfaltig und die bezüglichen Untersuchungen gestalten sich demgemäss verhältnismässig einfach.

Anders bei den festen Körpern. Hier ist zwar sowohl der Widerstand gegen Volumenänderungen als auch der Widerstand gegen Gestaltsänderungen im Allgemeinen sehr beträchtlich, aber beide sind von derselben Grössenordnung; und da bei den meisten Erscheinungen beide Aenderungen zugleich auftreten, so ergiebt sich eine grosse Mannigfaltigkeit der Vorgänge und eine grosse Komplikation der betreffenden Untersuchungen. Noch in einer etwas anderen Weise kann man zu derselben Einsicht gelangen. Bei Flüssigkeiten und Gasen pflanzt sich ein in irgend einer Richtung ausgeübter Druck (s. o. pag. 213) gleichmässig in allen Richtungen fort, so dass die Dimensionen des Körpers bei der Untersuchung nicht einzeln in Betracht kommen. Bei festen Körpern ist dies nicht der Fall, das Verhalten des Körpers in jeder seiner Dimensionen wird zwar durch die Vorgänge in den andern Dimensionen mit beinflusst, bleibt aber doch noch selbständig genug, um zu einem für jede Dimension wesentlich andern Ergebnisse zu führen.

Jeder feste Körper hat einen natürlichen Zustand, in welchem er sich befindet, so lange er keinem Zwange unterworfen ist und sich auch nicht mehr unter den Nachwirkungen eines solchen Zwanges befindet. Eine Violinensaite z. B., wie man sie beim Händler kauft, befindet sich im natürlichen, auf der Violine dagegen, gleichviel ob in Ruhe oder in Schwingungen, im Zwangszustande. Eine Glocke andererseits befindet sich, so lange sie in Ruhe ist, im natürlichen Zustande; im Momente des Anschlags geräth sie in einen Zwangszustand, und unter den Nachwirkungen desselben bleibt sie bis zur Beendigung ihrer Schwingungen. Unterwirft man einen Körper einem Zwang, z. B. indem man Gewichte auf ihn wirken lässt, so verändert er sich. Dass er dies mit Widerstreben thut, geht einmal schon aus dem Missverhältniss zwischen der erzielten Veränderung und der angewandten Kraft hervor, in strengerer Weise aber daraus, dass der Körper in vielen Fällen wieder in den natürlichen Zustand zurückkehrt, sobald er von dem Zwange befreit wird, und dass man, um den veränderten Zustand aufrecht zu erhalten, den Zwang dauernd bestehen, die Kraft dauernd wirken lassen muss. Es ist also unter dem ausgeübten Zwange ein Gleichgewichtszustand eingetreten: die eine der beiden Kräfte, welche sich das Gleichgewicht halten, ist die äusserlich angewandte, die andere ist die im Innern des Körpers durch die Veränderung wachgerufene Kraft. Diese Kraft ist, wenn zunächst nur qualitativ, nicht quantitativ definirt wird, die Elasticität des Körpers. Man kann also einerseits sagen: Elasticität ist die in einem Körper durch einen Zwang wachgerufene innere Kraft. Man kann aber auch, indem man statt der inneren die ihr gleiche äussere Kraft einführt, sagen: Elasticität ist die äussere Kraft, welche erforderlich ist, um einen Körper in irgend einem Zwangs-

zustande zu erhalten. Beide Definitionen sind durchaus gleichwerthig und übereinstimmend.

Es muss hier die Bemerkung eingeschaltet werden, dass in Bezug auf die Definition des Elasticitätsbegriffes nicht nur ein Gegensatz zwischen dem allgemeinen Sprachgebrauch und der Physik besteht, sondern auch in wissenschaftlichen Lehrbüchern sich Verschiedenheiten und innere Widersprüche finden. Es wird sich später zeigen, dass das, was im Sprachgebrauche Elasticität heisst, gar nicht das Verhalten eines Körpers unter einem Zwange betrifft, auch nicht sein Verhalten nach Authören des Zwanges, sondern eine Beziehung zwischen dem Verhalten während des Zwanges und dem Verhalten nach dem Aufhören desselben. Das ist also ein ganz komplicirter Begriff, der seine volksthümliche Existenz lediglich seiner praktischen Wichtigkeit verdankt. Für die wissenschaftliche Definition ist hingegen die Einfachheit und elementare Natur des grundlegenden Begriffes maassgebend, und dieser entspricht die obige Definition, d. h. die Beschränkung des Begriffs der »Elasticität« auf das Verhalten des Körpers während des Zwangszustandes. Auch in Bezug auf einige der noch folgenden Begriffe wäre zu wünschen, dass eine Einheitlichkeit der Definition, mindestens in deutschen Schriften, herbeigeführt würde, was gegenwärtig (s. w. u.) durchaus noch nicht der Fall ist.

Elastische Vollkommenheit. Es frägt sich zunächst, ob die Elasticität eine dauernde und unveränderliche Eigenschaft eines Körpers sei. Es wäre hierzu erforderlich, dass immer dieselbe Kraft nothwendig wäre, um den Körper in dem gleichen Zwangszustande zu erhalten. Dies ist thatsächlich nur in gewissen Fällen richtig. Für kleine Kräfte resp. Veränderungen ist es fast stets der Fall, für grössere, eine gewisse Grenze überschreitende dagegen nicht. Vielmehr bringt alsdann dieselbe Kraft, wenn sie eine zeitlang wirkt, einen mit der Zeit wachsenden Zwang zu Stande, sie ruft, je länger sie ausgeübt wird, eine desto grössere Veränderung hervor. Oder umgekehrt: um den von der Kraft in der ersten Zeit ihres Wirkens erzeugten Zwangszustand aufrecht zu erhalten, genügt es, mit der Zeit immer kleinere Kräfte wirken zu lassen. Man kann sich zwei verschiedenartige Ursachen dieser Erscheinung vorstellen, die dem ersten Anscheine nach nichts mit einander zu thun haben, thatsächlich aber doch in nahem Zusammenhange mit einander stehen. Erstens nämlich kann die Elasticität des Körpers gelitten haben, die Dauer des Zwanges hat ihn, wie man bei einem Menschen zu sagen pflegt und auch bei einem leblosen Körper sagen kann, mürbe gemacht. Zweitens kann, unbeschadet seiner Elasticität, sein natürlicher Zustand ein anderer geworden sein, derselbe kann sich ein wenig in dem Sinne des durch die Kraft geschaffenen Zwangszustandes verschoben haben; da man dies während des Versuches noch nicht weiss, sondern die Veränderung nach wie vor von dem ursprünglichen natürlichen Zustande als Nullpunkt ausgehend berechnet, wird man den Eindruck gewinnen, als ob die Veränderung wüchse, während in Wahrheit nur Zwangszustand und natürlicher Zustand sich gleichmässig verschieben, ihre Differenz, die Veränderung, also die gleiche bleibt. Nach Beendigung des Versuches, also z. B. nach Abnahme des Gewichtes, kann man constatieren, ob der natürliche Zustand, in den der Körper zurückkehrt, derselbe ist, wie der ursprüngliche, ob also die eine oder die andere Ursache die thatsächliche gewesen ist, oder ob etwa beide zusammengewirkt haben. Hat nämlich nur die letztere gewirkt, ist also die Elasticität dieselbe geblieben, aber der natürliche Zustand ein anderer geworden, und haben die Messungen für den ursprünglichen natürlichen Zustand den Werth n, für den Zwangszustand zu Anfang den Werth z, für den Zwangszustand am

Schluss den Werth s' und für den natürlichen Zustand am Schluss den Werth n' ergeben, so muss $s - n = s' - n'$ sein. Ist dies nicht der Fall, so ist auch die Elasticität eine andere geworden. Die Erfahrung hat gelehrt, dass zwar meist beide Einflüsse zusammenwirken, dass aber doch der zweite, d. h. die Veränderung des natürlichen Zustandes, gewöhnlich weit eher, d. h. bei kleineren Kräften und bei kürzerer Dauer des Zwanges, von Bedeutung wird, als der erstere, dass also, auch wenn n' von n und s' von s erheblich abweicht, doch die obige Gleichung noch besteht. Im übrigen sieht man, dass es sich hier um eine verwickelte Erscheinung handelt, weil zwei verschiedene unabhängige Variable: Grösse und Dauer des Zwanges, in Betracht kommen. Ein grosser Zwang wird schon nach kurzer Dauer den natürlichen Zustand verschieben; andererseits scheint es, dass auch der kleinste Zwang dies thut, wenn er nur eine ausreichende Zeit hindurch andauert;[1]) und ähnlich verhält es sich mit dem Einflusse auf die Elasticität. Die Eigenschaft eines Körpers, innerhalb eines gewissen Bereiches der Einwirkung seine Elasticität und seinen natürlichen Zustand, unbeirrt durch vorübergehende Zwangszustände, beizubehalten, wird am passendsten seine »elastische Vollkommenheit« genannt.

Elasticitätsgrenze. Aus dem Gesagten geht hervor, dass es nicht möglich ist, für den Bereich, innerhalb dessen ein Körper elastisch vollkommen ist, eine bestimmte Grenze, etwa ein bestimmtes Grenzgewicht anzugeben; denn je nach der Wirkungsdauer wird dasselbe ein anderes sein. Auch ist zu beachten, dass es sich hier um die Feststellung der Thatsache handelt, dass der Körper genau in seinen ursprünglichen Zustand wieder zurückkehrt, bei einem um eine Spur grösseren Zwange dies aber nicht mehr thut; und diese Feststellung wird wesentlich von der Genauigkeit der Apparate abhängen: an einem feinen Apparate wird man eine dauernde Veränderung schon durch die Wirkung eines Gewichtes constatiren, für welches dies bei einem weniger genauen Apparate noch nicht möglich ist. Wenn man trotz dieser beiden Umstände Zahlenwerthe für jene Grenze erlangen will, — und das ist für praktische Zwecke von grosser Wichtigkeit — so bedarf man hierzu einer gewissen Uebereinkunft, indem man etwa festsetzt: 1. die Dauer der Wirkung soll eine mässige sein (nicht gar zu kurz, aber auch z. B. nicht tagelang); 2. Aenderungen des natürlichen Zustandes, welche einen gewissen Betrag nicht überschreiten, sollen unberücksichtigt bleiben. Auf diese Weise gewonnene Zahlen nennt man Werthe der »Elasticitätsgrenze;« es ist aber einleuchtend, dass es sich hier stets nur um ungefähre Angaben handeln kann.[2])

Im Vorstehenden wurde die Grenze des Bereiches der elastischen Vollkommenheit durch den Grenzzwang charakterisirt. Man kann sie auch noch anders, nämlich durch die temporäre Grenzveränderung charakterisiren, d. h. durch diejenige unter dem Zwange stattfindende Veränderung, welche nach Aufhebung des Zwanges eben noch zum ursprünglichen natürlichen Zustande zurückführt. Es lässt sich leicht einsehen, dass das, was im allgemeinen Sprachgebrauche Elasticität genannt wird, weder mit dem wissenschaftlichen Elasticitätsbegriff, noch mit dem Begriff der Elasticitätsgrenze (Grenzzwang), wohl

[1]) In dieser Hinsicht stellt seit einigen Jahren BOTTOMLEY in Glasgow »säculare« Beobachtungen an Platin-, Gold-, Silber- und andern Drähten an; die vorläufigen Ergebnisse derselben sehe man in den Reports of the Brit. Assoc. 1881—1887.

[2]) Für Dehnungen gilt eine solche von 0·5 *mm* auf 1 *m* ursprüngliche Länge als äusserste noch zu berücksichtigende. Für Biegungen, Drillungen, Scherungen u. s. w. (siehe unten) sind die Angaben verschieden.

aber mit dem der Grenzveränderung sich deckt. Wenn man z. B. einen Kautschukstreifen als sehr elastisch bezeichnet, so will man damit sagen, dass derselbe auch nach sehr beträchtlicher Verlängerung noch in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt; weder ist bei ihm die zur Erzielung einer bestimmten Verlängerung erforderliche Kraft beträchtlich (er ist also im wissenschaftlichen Sinne sehr wenig elastisch), noch ist die Grenzkraft, welche man ihm zumuten darf, ohne eine dauernde Aenderung befürchten zu müssen, beträchtlich (seine Elasticitätsgrenze ist also ebenfalls klein); wohl aber ist die Grenzverlängerung beträchtlich, die man ihm zumuthen darf (seine Elasticität im populären Sinne ist gross.[1])

HOOKE'sches Gesetz. Im Bereiche der elastischen Vollkommenheit entspricht, wie wir sahen, derselben Kraft stets dieselbe Veränderung. Es frägt sich nun, welche Veränderungen verschiedenen äusseren Kräften entsprechen, oder, in umgekehrter Causalbeziehung ausgedrückt, welche inneren Kräfte verschiedenen Veränderungen entsprechen. Dieses Gesetz ist schon von HOOKE, und zwar in der Form »*Ut tensio, sic vis*« ausgesprochen worden[2]; in die heutige Redeweise übersetzt lautet es: Zwischen Zwang und Veränderung, zwischen Veränderung und elastischer Kraft besteht Proportionalität. Schon aus dem Umstande, dass man es hier meist mit kleinen Veränderungen zu thun hat, könnte man nach dem Princip, dass kleine Wirkungen sich einfach addiren, auf jene Proportionalität schliessen, und die Erfahrung bestätigt sie durchaus, vielleicht mit Ausnahme einiger in elastischer Hinsicht anomaler Stoffe (z. B. Kautschuk). Jenseits der Elasticitätsgrenze hat das Gesetz ohne nähere Erläuterung freilich keinen Sinn mehr, weil man nicht weiss, ob man unter der Veränderung, auf die sich das Gesetz bezieht, die Differenz des Zwangszustandes gegen den anfänglichen oder gegen den schliesslichen natürlichen Zustand verstehen soll, also $z - n$ oder $z - n'$, wo der Einfachheit halber angenommen ist, dass die Kraft R nicht so lange wirkt, dass z merklich wüchse. Wirkt nun in einem andern Falle die Kraft $2R$, so kann jetzt entweder $z - n$ oder $z - n'$ doppelt so gross sein, wie vorhin; beides zugleich könnte nur dann der Fall sein, wenn auch $n' - n$ jetzt doppelt so gross wäre wie vorhin, wenn also die dauernde Veränderung des natürlichen Zustands der Kraft proportional wäre. Das ist aber sicherlich nicht der Fall, weil die die dauernde Veränderung als Function der Kraft darstellende Linie AB (Fig. 76, in welcher OD die vorübergehende Veränderung während der Kraftwirkung ist), selbst wenn man sie als gradlinig

(Ph. 76.)

[1]) Hiermit sind die drei Begriffe »Elasticität,« »elastische Vollkommenheit« und »populäre Elasticität« scharf auseinander gehalten. Der letzte ist, wie man leicht einsieht, der Quotient des zweiten durch den ersten.

[2]) HOOKE, A Description of helioscopes, Lond. 1675. — Lectures de potentia restitutiva, Lond. 1678.

annimmt, nicht durch den Anfangspunkt der Coordinaten, O, hindurchgeht (was zur Proportionalität erforderlich wäre), sondern erst bei der Grenzkraft $R = R_0$ beginnt. Dagegen kann nur das Experiment darüber entscheiden, ob $z - n$ oder $z - n'$, oder ob vielleicht $z - \frac{1}{2}(n + n')$ proportional mit R ist, ob also DG oder DE oder endlich DF die Fortsetzung von OD ist, (wo $EG = CH$, $EF = \frac{1}{2}CH$ gemacht ist). Die Versuche geben hierauf keine einheitliche Antwort; doch kommt man der Proportionalität meist am nächsten, wenn man die letzte Formel wählt, also das arithmetische Mittel aus dem ursprünglichen und dem schliesslichen Zustand in die Rechnung einführt.

Elasticitätsmodul. Auf Grund des Proportionalitätsgesetzes kann man die Elasticität eines Körpers ihrem Grade nach durch eine Constante messend ausdrücken. Dabei kann man wieder verschieden verfahren, je nachdem man die im Innern wachgerufene Kraft, also die Elasticität selbst, ins Auge fasst oder die ihr gleiche, äusserlich aufgewendete Kraft. Im ersteren Falle hat man den Quotienten jener Kraft durch die Veränderung, welche sie wachgerufen hat, zu bilden; er heisst Elasticitätsmodul. Im andern Falle dividirt man die Veränderung durch die äussere Kraft, welche sie erzeugt hat; dies ist der Elasticitätscoëfficient.[1]) Der Modul ist eine meist sehr grosse, der Coëfficient eine meist sehr kleine Zahl. Es soll im Folgenden in der Regel der Modul benutzt werden, der dem Coëfficienten gegenüber praktische Vorzüge besitzt. Der Modul ist innerhalb der Giltigkeit des HOOKE'schen Gesetzes eine Constante; für einige elastisch anomale Stoffe, für welche jenes Gesetz nur innerhalb enger Grenzen gilt, ist aber natürlich auch der Bereich der Constanz des Moduls nur ein kleiner, und es kann hier der Werth desselben sogar sehr beträchtlich variiren.

Die bisher angestellten Betrachtungen und die gewonnenen Ergebnisse gelten in dieser Einfachheit jedoch nur für Körper von einer in doppeltem Sinne idealen Beschaffenheit, nämlich für homogene und isotrope Körper, d. h. für solche, welche 1) an einer Stelle so beschaffen sind wie an jeder anderen und 2) von jeder Stelle aus in einer Richtung sich ebenso verhalten wie in jeder andern. Mit Vollkommenheit besitzt kein Körper diese Eigenschaften; Homogenität stets nur bis zu einer gewissen Grenze der Kleinheit der Theile, in welche man sich ihn zerlegt denkt, da sich weiterhin die molekulare Structur geltend macht; Isotropie schon deshalb nicht, weil die Lage und das Vorkommen (bei Rohstoffen) sowie die Herstellungsart (bei bearbeiteten Stoffen) fast stets eine oder einige Richtungen vor den übrigen begünstigen. Man kann aber trotzdem eine grosse Zahl von Stoffen als nahezu isotrop bezeichnen und demgemäss behandeln, gegenüber andern, wie den Krystallen und zahlreichen organischen Stoffen, welche auch nicht annähernd isotrop sind, und welche man demgemäss anisotrop, heterotrop oder aeolotrop nennt. Solche Körper haben in verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität, verschiedene Moduln, verschiedene Elasticitätsgrenzen. Ihre Theorie lässt sich nur mathematisch behandeln; in dieser Uebersicht ist daher auch im folgenden stets an isotrope Körper gedacht.

Volumenelasticität und Gestaltselasticität. Bisher ist von Elasticität schlechthin, also auch vom Elasticitätsmodul schlechthin die Rede gewesen. Das sind nun aber, wie wir wissen, nicht individuelle Begriffe, sondern Begriffs-

---

[1]) In einigen Schriften, namentlich Lehrbüchern, werden die Begriffe Elasticitätsmodul und Elasticitätscoefficient bedauerlicher Weise in gleicher Bedeutung gebraucht.

kategorieen. Es giebt sehr verschiedenartige Veränderungen, welche ein Körper erfahren kann; und eine jede derselben giebt zur Definition einer Art von Elasticität, also auch zur Definition eines Moduls Anlass. Unter diesen mannigfaltigen Veränderungen sind nun zwei, wie wir sahen, von principiell hervorragender Bedeutung: die reine Volumenänderung (ohne Gestaltsänderung) und die reine Gestaltsänderung (ohne Volumenänderung). Erstere soll in Folgendem stets als Compression (mit positivem oder negativem Vorzeichen, also auch die Dilatation enthaltend), letztere als Deformation bezeichnet werden. Entsprechend ist dann, je nachdem es sich um Widerstand gegen Compression oder gegen Deformation handelt, zwischen Volumenelasticität (oder Compressionselasticität) und Gestaltselasticität[1]) (oder Deformationselasticität) zu unterscheiden. Jeder dieser beiden Begriffe ist mit einem gewissen populären Begriffe verwandt, aber nicht identisch. Die Volumenelasticität mit der Härte, die Gestaltselasticität mit der Steifigkeit. Jede der beiden Elasticitäten wird in einem besonderen Modul ihr Maass finden. Statt der Moduln führt man, wie beiläufig nochmals bemerkt werden möge, zuweilen auch die reciproken Grössen ein, namentlich bei der Volumenelasticität; die betreffende Grösse heisst dann Compressionscoefficient oder Compressibilität. Ein Fall, in welchem man diese letztere Grösse dem Modul vorzieht, ist der, wo es sich um die Vergleichung fester Körper mit Flüssigkeiten handelt; man muss dann aber in jedem Falle darauf achten, ob man es mit der linearen Compressibilität, die auf der Längenänderung der linearen Dimensionen beruht, oder mit der bei kleinen Aenderungen dreimal so grossen kubischen Compressibilität zu thun hat (s. Art. »Zug und Druck«). Von diesen Ausnahmefällen abgesehen wird hier stets der Modul benutzt werden.

1. Der Volumenmodul oder Compressionsmodul ist das Verhältniss der in dem Körper wachgerufenen Volumenelasticität zu der Volumenänderung, durch welche dieselbe wachgerufen worden ist; oder auch: das Verhältniss der comprimirenden Kraft zu der dadurch hervorgebrachten Compression. Um diesen Modul zu ermitteln, muss man Versuche anstellen, bei welchen der untersuchte Körper und jeder seiner Theile sich selbst ähnlich bleibt, also nur sein Volumen ändert, derart, dass alle Winkel ungeändert bleiben und alle Längen sich so ändern, dass aus der Länge 1 die Länge $1-\varepsilon$ wird, wo ε stets ein kleiner Bruch ist; aus dem Volumen 1 wird dann also das Volumen $(1-\varepsilon)^3$, also für kleine ε mit Vernachlässigung seiner höheren Potenzen das Volumen $1-3\varepsilon$; die Compression ist also 3ε. Zu diesem Zwecke muss man auf die ganze Oberfläche einen gleichmässigen Druck p ausüben, und man findet somit den Volumenmodul

$$k_1 = \frac{p}{3\varepsilon}. \tag{1}$$

Der Vorgang, welcher bei der gleichförmigen Compression stattfindet, ist nun aber ein zusammengesetzter, und es ist nothwendig, dies auch in der Formel (1) zum Ausdruck zu bringen. Am einfachsten gestaltet sich die Analyse, wenn der Körper die Form eines Würfels von der Kantenlänge 1 hat. Der Druck

[1]) In englischen Schriften (z. B. THOMSON, Elasticity, TAIT, Properties of matter, THOMS. u. TAIT, Nat. Philos.) wird die Gestaltselasticität »Starrheit« *(rigidity)*, im Gegensatz zur Volumenelasticität, genannt, wofür nur ausnahmsweise das Wort Steifheit *(stiffness)* eintritt. In der deutschen Literatur bedeutet aber Starrheit die Unzugänglichkeit eines Körpers gegen jede Art von innerer Veränderung, gleichviel ob Compression oder Deformation. Die Uebertragung des englischen Ausdrucks ist also möglichst zu vermeiden.

auf das erste Paar gegenüberliegender Seitenflächen verkürzt die auf ihnen senkrechte Dimension des Würfels um α, so dass dieselbe $1-\alpha$ wird; aber erfahrungsgemäss fügt sich die Materie dem in einer Richtung ausgeübten Zwange nur zum Theil, während sie ihn zum andern Theil durch Ausbreitung in den Querdimensionen ausgleicht; durch den Druck auf das erste Paar Gegenflächen wird also nicht nur die auf diesen senkrechte Dimension in $1-\alpha$, sondern es wird auch jede der beiden anderen in $1+\beta$ verwandelt. Nimmt man jetzt die Drucke auf alle drei Paar Gegenflächen gemeinsam in Betracht, so sieht man ein, dass jede Dimension einmal um α verkürzt, aber zweimal um β verlängert wird; der Würfel bleibt also Würfel, aber aus der Kante 1 wird die Kante $1-\alpha+2\beta$, oder auch $1-(\alpha-2\beta)$. Hieraus folgt:

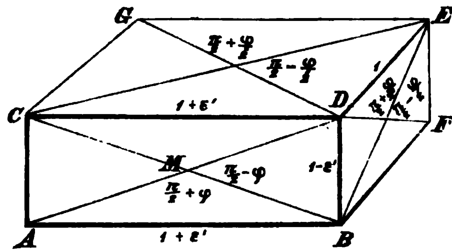
$$\varepsilon = \alpha - 2\beta \tag{2}$$

und somit nach (1)

$$k_1 = \frac{p}{3(\alpha - 2\beta)}. \tag{3}$$

2. Der Gestaltsmodul oder Deformationsmodul ist das Verhältniss der in einem Körper wachgerufenen Gestaltselasticität zu der Deformation, welche dieselbe wachgerufen hat; oder auch das Verhältniss der deformirenden Kraft zu der durch sie erzeugten Deformation. Um ihn zu ermitteln, muss man eine Anordnung treffen, bei welcher das Volumen des Körpers und jedes seiner Theile dasselbe bleibt und nur seine Gestalt und die seiner Theile sich ändert. Das geschieht (wenn dem Körper wieder Würfelgestalt gegeben wird) dadurch, dass man auf das erste Paar Gegenflächen den Druck p, auf das zweite Paar den Zug $-p$, auf das dritte Paar aber gar nichts wirken lässt. Es wird dann aus der ersten Dimension $1-\varepsilon'$, aus der zweiten $1+\varepsilon'$, während die dritte 1 bleibt; das Volumen 1 hat sich dann in $(1-\varepsilon')(1+\varepsilon') = 1-\varepsilon'^2$ verwandelt, ist also, da ε'^2 vernachlässigt werden kann, dasselbe geblieben. Auch hier ist es nicht schwer, die Grösse ε' auf α und β zurückzuführen. In Folge des Druckes in der ersten Richtung verwandeln sich nämlich die Kanten in $1-\alpha$, $1+\beta$, $1+\beta$; in Folge des Zuges in der zweiten Richtung wird dann hieraus resp. $1-\alpha-\beta$, $1+\beta+\alpha$, $1+\beta-\beta$ oder anders geschrieben: $1-(\alpha+\beta)$, $1+(\alpha+\beta)$, 1. Es ist also

$$\varepsilon' = \alpha + \beta. \tag{4}$$



(Ph. 77.)

Es fragt sich nun, was man als Maass der Gestaltsänderung, die der Würfel erfahren hat, betrachten soll. Nun ist klar, dass das Charakteristische für Gestaltsänderungen die Aenderung ist, welche alle Winkel zwischen irgend welchen im Körper vorkommenden Linien (ausgenommen die in der Richtung der Kanten verlaufenden) erfahren haben; denn die Winkel bleiben bei einer reinen Compression ungeändert. Zieht man etwa auf jeder Würfelseite das Diagonalenkreuz, so werden bei der Deformation des Würfels in ein Parallelepipedon die vier rechten Winkel jedes Diagonalenkreuzes in zwei spitze und zwei stumpfe sich verwandeln. Betrachtet man die am meisten deformirte Seitenfläche, also das Rechteck $ABCD$ (Fig. 73) mit den Seiten $1-\varepsilon'$ und $1+\varepsilon'$ und nennt man die Winkeländerung φ, so dass $\angle BMD = \frac{\pi}{2} - \varphi$ nnd $\angle AMB = \frac{\pi}{2} + \varphi$ und folglich $\angle BAD = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ wird, so hat man

$$\frac{1-\varepsilon'}{1+\varepsilon'} = tang\ \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{1 - tang\frac{\varphi}{2}}{1 + tang\frac{\varphi}{2}},$$

also

$$\varepsilon' = \alpha + \beta = \frac{\varphi}{2}.$$

Definirt man nun den Gestaltsmodul durch die Gleichung

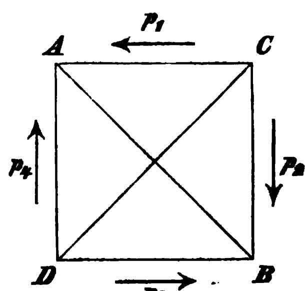
$$k_2 = \frac{p}{\varphi} \tag{5}$$

d. h. als Quotienten der Kraft durch die Aenderung des rechten Winkels zwischen Linien, die in der Ebene von Druck und Zug verlaufen, so findet man

$$k_2 = \frac{p}{2(\alpha+\beta)}. \tag{6}$$

Es möge bemerkt werden, dass in den beiden anderen Rechtecken *BDEF* und *CDEG* die Winkeländerung kleiner ist und speciell bei kleinen Gestaltsänderungen nur $\frac{\varphi}{2}$ beträgt, weil hier die eine Rechtecksseite ungeändert geblieben und nur die andere verkürzt resp. verlängert ist.

Man kann bei Untersuchung der Gestaltselasticität auch noch etwas anders verfahren, nämlich indem man die Deformation ermittelt, welche in einem Würfel gleiche tangential wirkende Kräfte von der Anordnung der Kräfte p in Fig. 78 hervorbringen. Zieht man nun wieder das Diagonalenkreuz und combinirt in Gedanken einmal p_1 mit p_2 und p_3 mit p_4, das andere Mal p_1 mit p_3 und p_2 mit p_4, so sieht man, dass die eine Diagonale *AB* einen Druck, die andere *CD* einen Zug erfährt, und die Grösse dieser Wirkung ist nach dem Parallelogramm der Kräfte jedesmal $p\cdot\sqrt{2}$, also, da auch die Länge der Diagonalen im Verhältniss von $\sqrt{2}$ grösser ist als die der Kanten, für die Längeneinheit oder, da ja die Figur nur einen Querschnitt des Würfels darstellt, für die Flächeneinheit gerade gleich p. Man gelangt also von diesem Ausgangspunkte im wesentlichen zu demselben Ergebnisse wie bei dem erstgewählten, nämlich zu einer Verkürzung in einer, zu einer gleichen Verlängerung in der zweiten Dimension, während die dritte unverändert bleibt.



(Ph. 78.)

Noch bei weitem einfacher als die beiden betrachteten ist freilich die folgende Gestaltsänderung, welche man eine einfache Schiebung oder Scherung[1]) nennt. Dieselbe besteht darin, dass eine Ebene im Körper fest bleibt, jede dieser parallele Ebene aber in einer bestimmten, für alle gleichen Richtung sich in sich selbst um ein ihrem Abstande von der festen Ebene proportionales Stück verschiebt; jede auf dieser Schaar von Ebenen ursprünglich senkrechte gerade Linie bleibt gerade, neigt sich aber um einen bestimmten Winkel. Die Grösse der Schiebung kann man dann entweder durch diesen Winkel φ messen oder durch die Grösse der Verschiebung v, welche die Punkte der von der festen Ebene um die Einheit abstehende Parallelebene erfahren, d. i. durch die

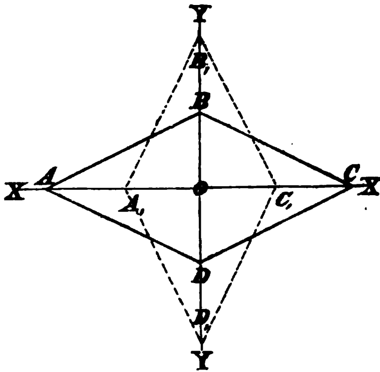
[1]) Der Ausdruck Scherung ist vorzuziehen, weil der Ausdruck Schiebung zu Verwechselungen mit dem Begriffe »Verschiebung« Anlass geben kann. Näheres über diesen Vorgang bei Thoms. u. Tait, Theor. Phys. 1, pag. 118.

Tangente jenes Winkels. Die Drehung φ', welche eine gegen die Normale um den Winkel ψ geneigte Gerade erfährt, ist

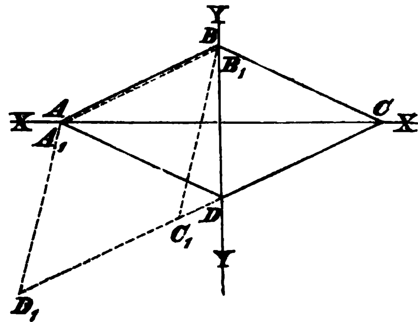
$$\varphi' = arc\ tg \left(\frac{\varepsilon \cos^2 \psi}{1 \pm \varepsilon \sin\psi \cos\psi} \right),$$

wo das + oder — Zeichen gilt, je nachdem die Gerade bei ihrer Drehung die senkrechte Lage nicht passirt oder passirt. Ausserdem ändert sich auch die Länge aller Geraden, auch der ursprünglich senkrechten; ungeändert bleibt nur die Länge derjenigen Geraden, welche vor und nach der Drehung beiderseits gleiche Winkel mit der Normalen bilden.

Es lässt sich nun zeigen, dass die oben betrachtete reine Deformation durch Druck und darauf senkrechten Zug sich auf eine einfache Scherung zurückführen lässt. In Fig. 79 sei A irgend ein Punkt des Körpers, welcher auf der Ver-



(Ph. 79.)



(Ph. 80.)

kürzungsaxe XX liegt, sodass er nach der Verkürzung nach A_1 fällt; B sei ein auf der Verlängerungsaxe YY anfänglich derartig gelegener Punkt, dass $OB = OA_1$ ist; dann wird, wenn B_1 der neue Ort von B ist, auch $OB_1 = OA$ und folglich $AB = A_1B_1$ sein. Durch Wiederholung dieser Betrachtung für die Punkte C und D findet man, dass der Rhombus $ABCD$ sich in den congruenten Rhombus $A_1 B_1 C_1 D_1$ verwandelt. Verschiebt und dreht man nun den Körper, indem man ihn als starr betrachtet, also ohne elastische Aenderungen, so, dass sich A_1B_1 mit AB deckt (Fig. 80), wozu bei der Geringfügigkeit der stattgehabten Deformation auch nur eine sehr kleine Verschiebung und Drehung erforderlich sein wird, so fällt gleichzeitig C_1D_1 in die Verlängerung von CD, und man sieht, dass es sich um eine einfache Scherung handelt. Alles was an der durch Druck und darauf senkrechten Zug erzeugten reinen Deformation von elastischem Charakter ist, kommt also auf eine einfache Scherung hinaus.

Praktische Moduln. Die beiden eingeführten Elasticitätsarten und die sie messenden Moduln sind von principieller Bedeutung und Einfachheit und können daher als Hauptmoduln bezeichnet werden. Was bei den Vorgängen, deren Maass sie sind, einfach ist, ist jedoch nur das Endergebniss (nämlich die reine Volumenänderung resp. die reine Gestaltsänderung), nicht aber die Anordnung, welche man zu treffen hat, um jene Ergebnisse zu erzielen. Erfordert doch der eine Fall drei auf einander senkrechte Drucke oder Züge, der andere einen Druck und einen darauf senkrechten Zug. Praktisch einfacher sind offenbar Veränderungen, welche man mit einer einzigen Kraft erzeugen kann. Eine weitere Vereinfachung entsteht dadurch, dass man dem Körper eine beträchtliche Ausdehnung nicht in allen drei, sondern nur in zwei Dimensionen oder

gar nur in einer giebt, so dass er den Charakter einer Fläche (Platte, Membran) oder einer Linie (Stab, Draht, Faden) erhält. Die praktisch einfachen Veränderungen derartig einfacher Körper werden ebenfalls in Moduln ihr Maass finden, und diese Moduln kann man, im Gegensatze zu den Hauptmoduln, praktische Moduln nennen. Da den bezüglichen Erscheinungen weiter unten besondere Artikel gewidmet sind, genügt hier eine kurze Anführung.

1) Längsdehnung (oder Längscontraction) eines Stabes oder Drahtes durch Zug (oder Druck). Der Modul derselben ist der Dehnungsmodul oder Modul der Längscontraction; in Deutschland wird er vielfach kurzweg Elasticitätsmodul, in England YOUNG's Modul genannt. Zu der oben vorkommenden Grösse α steht er, wie unmittelbar einleuchtet, in der einfachen Beziehung

$$E = \frac{p}{\alpha}. \tag{7}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3) und (6) lässt sich nun α, und ebenso β, durch die Hauptmoduln k_1 und k_2 ausdrücken:

$$\alpha = p\,\frac{3k_1 + k_2}{9k_1\,k_2}, \qquad \beta = p\,\frac{3k_1 - 2k_2}{18k_1\,k_2}; \tag{8}$$

und folglich wird

$$E = \frac{9k_1\,k_2}{3k_1 + k_2}. \tag{9}$$

Man nennt beim Zuge α die Längsdehnung der Längeneinheit, β die Quercontraction der Einheit der linearen Querdimensionen; beim Druck α die Längscontraction der Längeneinheit, β die Dehnung der Einheit der linearen Querdimensionen. Die Aenderung des Querschnittes selbst ist, da sie stets nur klein ist, offenbar 2β. Das Verhältniss $\beta:\alpha$ wird gewöhnlich mit μ bezeichnet und heisst das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation oder auch kurz Elasticitätszahl. Nicht nur E, sondern auch μ hat für die verschiedenen Stoffe verschiedene Werthe. Aus den Gleichungen (8) findet man

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3k_1 - 2k_2}{2(3k_1 + k_2)} = \frac{3 - 2\varkappa}{2(3 + \varkappa)}, \tag{10}$$

wo $\varkappa$ das Verhältniss des Gestaltsmoduls zum Volumenmodul ist. Von diesem Verhältniss und nur von diesem hängt also die Elasticitätszahl eines Stoffes ab; und zwar ist μ desto grösser, je kleiner $\varkappa$ ist. Für $\varkappa = \infty$ wird $\mu = -1$, für $\varkappa = 0$ wird $\mu = +\frac{1}{2}$. Im Princip kann also μ alle zwischen -1 und $+\frac{1}{2}$ gelegenen Werthe annehmen. Ersterer Grenzwerth findet bei Stoffen statt, deren Gehaltselasticität sehr gross gegen die Volumelasticität ist; letzterer im umgekehrten Falle. In Wahrheit kommen, wie es scheint, nur positive Werthe von μ vor, und sie liegen meist über 0·2. (Weiteres im Art. »Zug und Druck«).

Führt man die Elasticitätszahl μ in die Gleichungen (3) und (6) ein, schafft dadurch β weg und ersetzt p/α nach Gleichung (7) durch E, so erhält man

$$k_1 = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}, \qquad k_2 = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \tag{11}$$

In dem betrachteten Falle wirkt die Kraft nur in einer Richtung, der Erfolg ist aber ein allseitiger. Man kann auch umgekehrt fragen: Welche Kräfte müssen wirken, damit der Erfolg eine reine Längsdehnung sei? Eine den obigen analoge Betrachtung ergiebt als erforderlichen Längszug, wenn ε die gewünschte Längsdehnung ist, $(k_1 + \frac{4}{3}k_2)\,\varepsilon$, ausserdem aber den Querzug $(k_1 - \frac{2}{3}k_2)\,\varepsilon$. Der Modul der reinen Längsdehnung ist also gleich $k_1 + \frac{4}{3}k_2$.

2) Torsion oder Drillung eines Drahtes oder Stabes, erzeugt, bei Festhaltung des einen Endes, durch Anwendung eines Kräftepaares auf den andern

Endquerschnitt. Die Erscheinung ist sehr einfach, wenn der Körper cylindrisch geformt ist; es findet dann nur Gestaltsänderung (im obigen Sinne, d. h. keine Volumenänderung) statt, und man findet gemäss der zweiten Gleichung (11) als Torsionsmodul, ausgedrückt durch den Dehnungsmodul resp. den Gestaltsmodul:

$$T = \frac{E}{2(1+\mu)} = k_2.$$

Für andre Körpergestalten ist dagegen das Torsionsproblem sehr verwickelt. (Weiteres im Art. »Biegung und Torsion«).

3) Biegung eines Drahtes, eines Stabes, einer Platte oder einer Membran. Diese Erscheinung ist am complicirtesten, weil hier Längsdilatationen und Längscontractionen, also auch Quercontractionen und Querdilatationen, gemeinsam auftreten, die geraden Oberflächenlinien in gekrümmte sich verwandeln u. s. w. (S. Art. »Biegung und Torsion«).

Besondere Erscheinungen bieten Körper von besonderer Form dar, z. B Spiralen, geschlossene Bänder, Ketten u. s. w. Das elastische Verhalten solcher Körper ist namentlich für die Technik von hervorragender Bedeutung.

Elasticität der Krystalle. Dieselbe lässt sich nur auf Grund der mathematischen Behandlung (s. w. u.) untersuchen. Hier sei nur folgendes bemerkt. Während ein isotroper Körper nur zwei Hauptmoduln hat, nämlich einen Volumenmodul und einen Gestaltsmodul, hat ein anisotroper Körper deren mehr; und zwar hat ein Krystall des regulären Systemes 3 Hauptmoduln (1 für das Volumen, 2 für die Gestalt); ein gezogener Draht hat ebenfalls 3 (aber 2 für das Volumen, 1 für die Gestalt); ein Krystall des sexagonalen Systems, z. B. Kalkspath, hat 4 (2 für das Volumen, 2 für die Gestalt); noch allgemeinere Körper endlich haben 6 Hauptmoduln (je 3 für Volumen und Gestalt).

Elasticitätsconstanten. Mit den Moduln nicht zu verwechseln sind die Elasticitätsconstanten, welche ebenfalls zur Bestimmung des elastischen Verhaltens der Körper benutzt werden können. Dieselben treten in den Gleichungen der Elasticitätstheorie als Coefficienten auf, und zwar als die Coefficienten der Druckkräfte resp. des sogen. Potentials der elastischen Kräfte; da dasselbe eine quadratische Funktion von 6 Grössen ist, ist die Zahl der Constanten im allgemeinen 21; es tritt aber auch hier unter bestimmten Verhältnissen eine Verringerung dieser Zahl ein, und man kann hierfür folgende Tabelle aufstellen, in welche der Vollständigkeit halber auch die Flüssigkeiten und Gase aufgenommen sind, und in welcher berücksichtigt ist, dass die elastischen Kräfte ein Potential (s. u. pag. 233) haben; andernfalls werden die Zahlen grösser, z. B. für den allgemeinsten Fall 36 statt 21. Man sehe hierüber und über die Constantenzahl überhaupt de St. Venant, Compt. rend. 86, pag. 781 (1878).

Fester Körper ohne specielle Eigenschaften	21
Fester Körper mit einer Symmetrieebene	13
„ „ „ 2 oder 3 senkrechten Symmetrieebenen	9
„ „ „ Symmetrieebenen und 2 äquivalenten Axen	6
„ „ „ „ „ „ 3 „ „	3
Isotroper fester Körper	2
Gas mit innerer Reibung	2
Ideales Gas	1
Flüssigkeit mit innerer Reibung	1
Ideale Flüssigkeit	0

Gleichgewicht und Bewegung elastischer Körper. Wie die Mechanik starrer Körper, so zerfällt auch die Mechanik elastischer Körper in eine Statik

und eine Dynamik. Unter den Bewegungen elastischer Körper sind drei Klassen von besonderer Wichtigkeit; nämlich die elastischen Schwingungen, welche jedoch ihrer physikalischen Natur nach, weil sie nämlich meist Schall erregen, am zweckmässigsten in der Akustik behandelt werden (resp., soweit es Aetherschwingungen sind, in der Optik), und welche daher hier nur, insoweit es die Methode erfordert, berührt werden; der elastische Stoss (s. d.) und die elastische Nachwirkung (s. d.)

Mit der Elasticität verwandte Erscheinungen. Es giebt eine ganze Reihe von Begriffen resp. Erscheinungen, welche mit dem Begriffe resp. der Erscheinung der Elasticität mehr oder weniger nahe verwandt sind, und von denen im Vorstehenden schon beiläufig die Rede war. Es sind das die Begriffe: Elastische Vollkommenheit, Elasticitätsgrenze, Festigkeit (absolute und relative), Geschmeidigkeit, Ductilität, Steifigkeit, Sprödigkeit und Härte. Ihnen ist weiter unten eine besondere Betrachtung gewidmet.

Beziehungen zur Wärme. Dieselben sind sehr mannigfacher Natur. Insbesondere ist auf folgende drei Klassen von Erscheinungen hinzuweisen:

1) Temperatur-Aenderungen mit der Zeit und Temperatur-Verschiedenheiten von Ort zu Ort sind Ursachen innerer Veränderungen, die ganz analog den durch mechanische Kräfte erzeugten elastischen Veränderungen sind, und die, wie diese in der Elasticität, im »thermischen Druck« ihren Ausdruck finden. Es kann jedoch hier nicht näher darauf eingegangen werden.[1])

2) Die elastischen Erscheinungen gestalten sich, wenn auch meist nicht in erheblichem Grade, verschieden, je nachdem die Temperatur constant bleibt oder die gesammte vorhandene Wärme constant bleibt, je nachdem also (s. Mechan. Wärmetheorie) der Process isothermisch oder adiabatisch verläuft. Es hängt dies damit zusammen, dass die elastischen Vorgänge Erwärmung oder Abkühlung erzeugen. Man hat es also hier mit der der obigen entgegengesetzten Klasse von Einflüssen zu thun.[2])

3) Die Constanten der Elasticitätslehre (Moduln, Constanten, Grenzen, Festigkeit u. s. w.) hängen von der Temperatur ab. Diese Abhängigkeit ist an den betreffenden Stellen (s. w. u.) mit angegeben.

Mathematische Theorie.[3])

System der Dilatationen. Eine unendlich kleine lineare Veränderung eines Körpers ist, wenn die Coordinaten eines seiner Punkte ursprünglich $\xi\,\eta\,\zeta$, nachher aber $\xi''\,\eta''\,\zeta''$ sind, durch die linearen Gleichungen

---

[1]) DUHAMEL, Mém prés. à l'Ac. de Paris 5, pag. 440 (1838). — F. NEUMANN, Abh. Berl. Ak. 1841 und Vorl. üb. Elast., hrsg. v. O. E. MEYER, p. 107. — C. W. BORCHARDT, Berl. Mon. B. 1873, pag. 9.

[2]) MAXWELL, Th. d. Wärme, übers. v. AUERBACH, Breslau 1877; p. 174. — W. VOIGT, WIED. Ann. 36, p. 743 (1889).

[3]) Die allgemeine mathematische Theorie der Elasticität kann hier nur in ihren Hauptzügen wiedergegeben werden. Näheres sehe man in den folgenden Lehrbüchern:

LAMÉ, Leçons sur la théorie de l'élasticité etc. Paris 1852. II. Aufl. 1866.

CLEBSCH, Theorie d. Elast. fester Körper. Lpz. 1862.

BEER, Einl. in d. Theorie d. Elast. u. Capillarität. Lpz. 1869.

W. THOMSON, Elasticity. Encycl. Brit. 9. ed. vol. 7. Sep. Abdr. »Elasticity and Heat«. Edinb. 1880.

KIRCHHOFF, Vorl. üb. math. Phys. Mechanik. Lpz. 1876.

H. KLEIN, Th. d. Elasticität, Akust. u. Optik. Lpz. 1877.

WEYRAUCH, Th. elast. Körper. Lpz. 1884.

F. NEUMANN, Vorl. üb. d. Th. d. Elasticität, hrsg. v. O. E. MEYER. Lpz. 1885.

$$\begin{aligned} \xi'' &= a_1 + a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\ \eta'' &= a_2 + a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\ \zeta'' &= a_3 + a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta \end{aligned} \tag{1}$$

bestimmt, denen die durch Auflösung nach $\xi\,\eta\,\zeta$ sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= b_{11}(\xi'' - a_1) + b_{21}(\eta'' - a_2) + b_{31}(\zeta'' - a_3) \\ \eta &= b_{12}(\xi'' - a_1) + b_{22}(\eta'' - a_2) + b_{32}(\zeta'' - a_3) \\ \zeta &= b_{13}(\xi'' - a_1) + b_{23}(\eta'' - a_2) + b_{33}(\zeta'' - a_3) \end{aligned} \tag{2}$$

entsprechen. Punkte des Körpers, welche ursprünglich in einer Ebene lagen, thun dies auch nachher noch; gerade Linien sind gerade, parallele sind parallel geblieben. Ferner lehrt ein Blick auf die Gleichungen (1), dass die Veränderung aus zwei Theilen besteht, deren erster in einer Zunahme der Coordinaten um die Grössen a_1, a_2, a_3, also in einer einfachen Verschiebung ohne Drehung besteht, wobei sich der Körper wie starr verhält. Für die Elasticitätstheorie kommt diese Verschiebung nicht in Betracht, und man kann daher die Gleichungen (1) durch die einfacheren

$$\begin{aligned} \xi' &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\ \eta' &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\ \zeta' &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta \end{aligned} \tag{3}$$

ersetzen. Aus denselben lassen sich folgende Sätze ableiten:

1) Eine vom Coordinatenanfangspunkt ausgehende Gerade von der Länge r und den Richtungscosinus $\alpha\,\beta\,\gamma$ hat nachher die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} r'\alpha' &= r(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma) \\ r'\beta' &= r(a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma) \\ r'\gamma' &= r(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma) \\ \alpha'^2 &+ \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \end{aligned} \tag{4}$$

sich ergebende Länge r' und Cosinus $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$. Die Grösse

$$\frac{r' - r}{r}$$

heisst ihre Dilatation. Parallele Linien erfahren gleiche Dilatation und gleiche Richtungsänderungen.

2) Für eine Dreiecksebene mit einer Ecke im Anfangspunkt und der Fläche s ergiebt sich analog, wenn D die Determinante der Grössen a_{11} u. s. w. ist:

$$\begin{aligned} s'\alpha' &= sD(b_{11}\alpha + b_{12}\beta + b_{13}\gamma) \\ s'\beta' &= sD(b_{21}\alpha + b_{22}\beta + b_{23}\gamma) \\ s'\gamma' &= sD(b_{31}\alpha + b_{32}\beta + b_{33}\gamma). \end{aligned} \tag{5}$$

Auch hier heisst wieder

$$\frac{s' - s}{s}$$

die Dilatation der Fläche. Vom Dreieck kann man durch Zerlegung und Zusammensetzung ohne weiteres zu denselben Resultaten auch für andere Flächen gelangen.

3) Ein senkrechter Cylinder von der Grundfläche s, der Höhe r und den Richtungscosinus $\alpha\,\beta\,\gamma$ dieser Höhe verwandelt sich in einen schiefen Cylinder mit der Basis s', der Axe r' und den Cosinus $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ für die Höhe, $\alpha''\,\beta''\,\gamma''$ für die Axe; und zwar sind $s'\,\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ durch die Gleichungen (5), $r'\,\alpha''\,\beta''\,\gamma''$ durch die Gleichungen (4), wenn darin $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ durch $\alpha''\,\beta''\,\gamma''$ ersetzt werden, bestimmt. Das Volumen vorher und nachher ist

---

RESAL, Phys. Mathém. Par. 1884, pag. 273.

RAUSENBERGER, Lehrb. d. Analyt. Mech. Lpz. 1888. Bd. II, pag. 104.

$$v = rs,$$
$$v' = r's'(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma''),$$

und hieraus findet man

$$\frac{v' - v}{v} = D - 1. \tag{6}$$

Diese Grösse heisst die räumliche Dilatation und zwar wiederum nicht bloss für cylindrische, sondern für beliebige Theile des Körpers.

4) Es lässt sich ferner zeigen, dass man die durch die Gleichungen (3) dargestellte Veränderung des Körpers noch weiter zerlegen kann, nämlich in eine Drehung des dabei sich wie starr verhaltenden Körpers um den Anfangspunkt und in eine Dilatation nach drei bestimmten, auf einander senkrechten Richtungen xyz gemäss den Gleichungen

$$x' = \mu_1 x, \qquad y' = \mu_2 y, \qquad z' = \mu_3 z.$$

Die auf einer der Axen gelegenen Körpertheilchen bleiben also auf ihr; die in diesen Richtungen stattfindenden Dilatationen, also die Grössen

$$\frac{x' - x}{x} = \mu_1 - 1 = \lambda_1, \quad \frac{y' - y}{y} = \mu_2 - 1 = \lambda_2, \quad \frac{z' - z}{z} = \mu_3 - 1 = \lambda_3 \tag{7}$$

heissen die Hauptdilatationen, die betreffenden Axen Hauptdilatationsaxen. Punkte, die ursprünglich auf einer Kugelfläche sich befanden, liegen nachher auf einem Ellipsoid, die Halbaxen desselben fallen in die Richtungen der xyz und haben die Längen μ_1, μ_2, μ_3. Stellt man die Gleichung dieses Ellipsoids auf, bezogen auf das System der $\xi\eta\zeta$, so findet man ohne principielle Schwierigkeit die Componenten der Drehung, die Werthe der Hauptdilatationen und die Richtungen der Hauptdilatationsaxen. Für unendlich kleine Veränderungen kann man diese Rechnung leicht ausführen, und man findet dann als Drehungscomponenten

$$\frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \quad \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \quad \frac{a_{21} - a_{12}}{2}, \tag{8}$$

als Hauptdilationen die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 - \lambda, & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}), & \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}) \\ \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}), & a_{22} - 1 - \lambda, & \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32}) \\ \frac{1}{2}(a_{31} + a_{13}), & \frac{1}{2}(a_{32} + a_{23}), & a_{33} - 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

als Richtungscosinus $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ der x-Axe die Wurzeln der Gleichungen

$$\begin{aligned} (a_{11} - 1 - \lambda_1)\alpha_1 + \tfrac{1}{2}(a_{12} + a_{21})\beta_1 + \tfrac{1}{2}(a_{13} + a_{31})\gamma_1 &= 0, \\ \tfrac{1}{2}(a_{21} + a_{12})\alpha_1 + (a_{22} - 1 - \lambda_1)\beta_1 + \tfrac{1}{2}(a_{23} + a_{32})\gamma_1 &= 0, \\ \tfrac{1}{2}(a_{31} + a_{13})\alpha_1 + \tfrac{1}{2}(a_{32} + a_{23})\beta_1 + (a_{33} - 1 - \lambda_1)\gamma_1 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

und die Richtungscosinus α_2, β_2, γ_2, der y-Axe und α_3, β_3, γ_3, der z-Axe aus zwei entsprechenden Gleichungssystemen. Endlich ist die räumliche Dilatation

$$\mu_1\mu_2\mu_3 - 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3. \tag{11}$$

Nennt man jetzt uvw die Componenten der Verrückung, die der Punkt xyz bei der stattfindenden Veränderung erfährt, so hat man in den obigen Formeln

$$\begin{aligned} a_{11} - 1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & a_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y}, & a_{13} &= \frac{\partial u}{\partial z}, \\ a_{21} &= \frac{\partial v}{\partial x}, & a_{22} - 1 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & a_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z}, \\ a_{31} &= \frac{\partial w}{\partial x}, & a_{32} &= \frac{\partial w}{\partial y}, & a_{33} - 1 &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \tag{12}$$

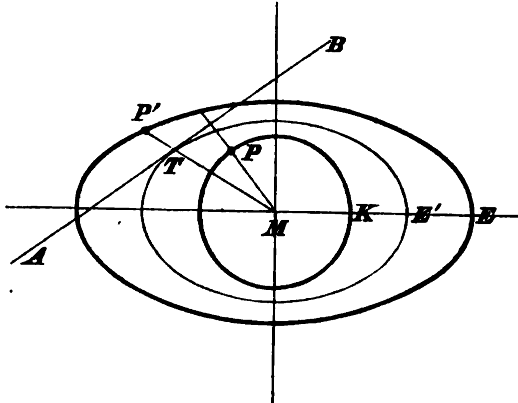
zu setzen; die Drehungscomponenten sind dann

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{13}$$

und die räumliche Dilatation ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{14}$$

In den angeführten Ergebnissen liegt folgender fundamentale und merkwürdige Satz: In jedem Punkte giebt es, wie auch das System der Verrückungen beschaffen sein mag, stets drei auf einander senkrechte Richtungen, in welchen die Verrückungen Maxima und Minima sind, auf welchen vor und nach der Veränderung dieselben Theilchen liegen, und um welche herum die Verrückungen derart symmetrisch angeordnet sind, wie ein Ellipsoid um seine drei Axen. Dieses Ellipsoid heisst das Dilatationsellipsoid. Sind zwei Hauptdilatationen einander gleich, so geht es in ein Rotationsellipsoid, bei Gleichheit aller Hauptdilatationen in eine Kugel über, und es bleibt dann nur noch eine resp. gar keine ausgezeichnete Richtung mehr übrig.



(Ph. 81.)

Um für einen Punkt, dessen ursprünglicher Ort P auf der Kugelfläche K (Fig. 81) gegeben ist, den Ort auf dem Dilatationsellipsoid nach der Verrückung construktiv zu finden, führt man ausser diesem Ellipsoid E

$$\left(\frac{x}{1+\frac{\partial u}{\partial x}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+\frac{\partial v}{\partial y}}\right)^2 + \left(\frac{z}{1+\frac{\partial w}{\partial z}}\right)^2 = C^2 \tag{15}$$

noch das Hilfsellipsoid E'

$$\frac{x^2}{1+\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{y^2}{1+\frac{\partial v}{\partial y}} + \frac{z^2}{1+\frac{\partial w}{\partial z}} = C^2 \tag{15a}$$

ein, construirt beide Flächen, legt an E' diejenige Tangentialebene AB, welche auf der Verlängerung von MP senkrecht steht, verbindet M mit dem Berührungspunkte T und verlängert MT bis zum Schnittpunkt P' mit E; es ist dann P' der gesuchte Ort. Umgekehrt findet man zu P' das zugehörige P.

System der Druckkräfte. Zur Darstellung der Erscheinungen bei einem elastischen Körper ist es zweckmässig (s. Art. »Aggregatzustände«) ausser den Kräften, welche auf die Massentheile wirken und deren Componenten XYZ sind, noch andere Kräfte einzuführen, die Druckkräfte oder Drucke, welche auf die Oberflächentheile des Körpers einseitig, ebenso aber auch auf jede Fläche in seinem Innern von beiden Seiten wirken. Wird alsdann die Dichte im Punkte xyz mit ρ, das Raumelement mit $d\tau$, ein Oberflächenelement mit ds, dessen Normale nach innen mit n und die Componenten des auf dasselbe wirkenden Druckes mit X_n, Y_n, Z_n bezeichnet, so hat man (s. Art. »Dynamik«, pag. 67) die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \int\rho\frac{d^2x}{dt^2}d\tau &= \int\rho X\,d\tau + \int X_n\,ds, \\ \int\rho\frac{d^2y}{dt^2}d\tau &= \int\rho Y\,d\tau + \int Y_n\,ds, \\ \int\rho\frac{d^2z}{dt^2}d\tau &= \int\rho Z\,d\tau + \int Z_n\,ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Die Drucke X_n Y_n Z_n lassen sich zurückführen auf die Drucke, welche auf drei Flächenelemente wirken, die durch denselben Punkt wie ds gehen, deren Normalen aber resp. die x, y und z-Axe sind; nennt man diese Drucke X_x Y_x Z_x; X_y Y_y Z_y; X_z Y_z Z_z, so dass also der grosse Buchstabe die Richtung der Druckcomponente, der Index die Richtung der Flächennormale angiebt, so findet man

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz). \end{aligned} \tag{17}$$

Die 9 Grössen X_x u. s. w. heissen die Druckcomponenten; sie stellen übrigens nur 6 verschiedene Grössen dar, da, wie sich leicht ergiebt,

$$Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z, \qquad X_y = Y_x \tag{18}$$

ist. Verwandelt man in den Gleichungen (16) nach bekannter Methode die Oberflächenintegrale in Raumintegrale, führt die Druckcomponenten ein, erwägt, dass die Gleichungen dann nicht nur für den ganzen Körper, sondern auch für jedes Element $d\tau$ gelten müssen, und ändert links die Bezeichnung in der Weise, dass jetzt xyz die Anfangscoordinaten eines Punktes, uvw seine Verrückungscomponenten zur Zeit t sind, so findet man als Differentialgleichungen der Bewegung

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} &= \rho X - \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{d^2 v}{dt^2} &= \rho Y - \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{d^2 w}{dt^2} &= \rho Z - \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \tag{19}$$

und speciell als Differentialgleichungen des Gleichgewichts

$$\rho X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \qquad \rho Y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}$$
$$\rho Z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \tag{19a}$$

Im allgemeinen ist der Druck, den ein Flächenelement erfährt, schief gegen dasselbe gerichtet; es gehen aber durch jeden Punkt drei auf einander senkrechte Flächenelemente, welche senkrechte Drucke erfahren. Diese Drucke heissen Hauptdrucke und ihre Richtungen Hauptdruckaxen. Man kann sie ganz analog wie die Hauptdilatationen bestimmen, wenn man, wie dort das Dilatationsellipsoid, so hier das Druckellipsoid einführt. Dasselbe wird jedoch hier verschiedenartig gewählt. Die Einen nennen so das Ellipsoid

$$X_x \xi^2 + Y_y \eta^2 + Z_z \zeta^2 + 2 Y_z \eta\zeta + 2 Z_x \zeta\xi + 2 X_y \xi\eta = 1 \tag{20}$$

oder in Polarcoordinaten

$$\frac{1}{r^2} = X_x \alpha^2 + Y_y \beta^2 + Z_z \gamma^2 + 2 Y_z \beta\gamma + 2 Z_x \gamma\alpha + 2 X_y \alpha\beta. \tag{20a}$$

Die Halbaxen und somit die Hauptdrucke findet man dann der Grösse und Richtung nach durch die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} X_x - \varepsilon & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - \varepsilon & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} (X_x - \varepsilon)\alpha + X_y \beta + X_z \gamma &= 0, \\ Y_x \alpha + (Y_y - \varepsilon)\beta + Y_z \gamma &= 0, \\ Z_x \alpha + Z_y \beta + (Z_z - \varepsilon)\gamma &= 0. \end{aligned} \tag{21a}$$

Jedoch sind die drei Wurzeln ε_1 ε_2 ε_3 der ersten dieser Gleichungen nicht die Halbaxen, sondern deren reciproke Quadrate; die Hauptdrucke ε_1 ε_2 ε_3 werden

also bei diesem Druckellipsoid durch die reciproken Quadrate der Halbaxen dargestellt. Legt man die Coordinatenaxen in die Hauptdruckaxen, so wird die Gleichung des Druckellipsoids einfacher

$$X_x\xi^2 + Y_y\eta^2 + Z_z\zeta^2 = 1. \tag{22}$$

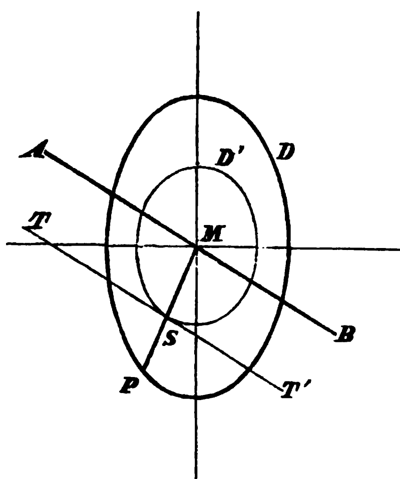
Andere führen dagegen als Druckellipsoid dasjenige ein, dessen Halbaxen unmittelbar die Hauptdrucke darstellen, dessen Gleichung also in Bezug auf die Hauptdruckaxen als Coordinatenaxen

$$\frac{\xi^2}{X_x^2} + \frac{\eta^2}{Y_y^2} + \frac{\zeta^2}{Z_z^2} = 1 \tag{23}$$

lautet. Man kann dann wiederum die zu einem gegebenen Druck gehörige Druckebene constructiv finden, wenn man die Hilfsfläche

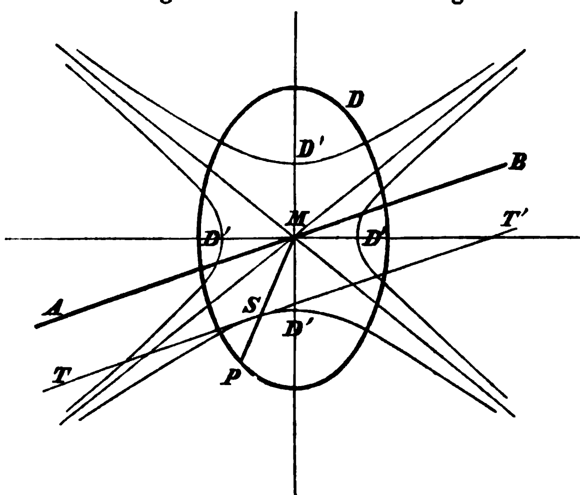
$$\frac{\xi^2}{X_x} + \frac{\eta^2}{Y_y} + \frac{\zeta^2}{Z_z} = 1 \tag{23a}$$

benutzt. Ist dann nämlich MP der einen Druck der Richtung und Grösse nach darstellende Radius des Druck-Ellipsoids D und legt man durch seinen Schnittpunkt S mit der Hilfsfläche D' an diese die Tangentialebene TT', so ist die durch M zu TT' gelegte Parallelebene AB die Druckebene. Die Hilfsfläche kann, wie in Fig. 82, ein Ellipsoid sein, sie kann aber auch, wie in Fig. 83, aus zwei Hyperboloiden, einem einschaligen und einem zweischaligen bestehen.



(Ph. 82.)

Ersteres ist der Fall, wenn die drei Hauptdrucke das gleiche, letzteres, wenn sie verschiedene Vorzeichen haben. Im zweiten Falle giebt es ein System von Ebenen (nämlich die Tangentialebene des gemeinsamen Asymptotenkegels der beiden Hyperboloide), für welche die auf sie wirkenden Drucke in ihnen selbst liegen, welche also nur einen seitlichen Zug erfahren. Ist von den drei Hauptdrucken der eine gleich null, so werden die Drucke dargestellt durch die Radien eines Systems von ähnlichen concentrischen Ellipsen, deren Axen proportional sind dem Sinus des Winkels zwischen der Normale der betreffenden Druckebene und der druckfreien Axe. Sind endlich zwei Hauptdrucke gleich null, so ist der Druck proportional dem Cosinus des Winkels, welchen die Normale der Druckebene mit der Axe, in welcher Druck stattfindet, bildet.



(Ph. 83.)

Bezieht man sich wieder auf ein beliebiges Coordinatensystem, nennt die Hauptdrucke $p_1\,p_2\,p_3$ und ihre Richtungscosinus $\alpha\beta\gamma$ mit den Indices 1, 2, 3, so ergeben sich folgende Ausdrücke der Druckcomponenten:

$$
\begin{aligned}
X_x &= p_1 \alpha_1^2 + p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^2 \\
Y_y &= p_1 \beta_1^2 + p_2 \beta_2^2 + p_3 \beta_3^2 \\
Z_z &= p_1 \gamma_1^2 + p_2 \gamma_2^2 + p_3 \gamma_3^2 \\
Y_z = Z_y &= p_1 \beta_1 \gamma_1 + p_2 \beta_2 \gamma_2 + p_3 \beta_3 \gamma_3 \\
Z_x = X_z &= p_1 \gamma_1 \alpha_1 + p_2 \gamma_2 \alpha_2 + p_3 \gamma_3 \alpha_3 \\
X_y = Y_y &= p_1 \alpha_1 \beta_1 + p_2 \alpha_2 \beta_2 + p_3 \alpha_3 \beta_3 .
\end{aligned} \qquad (24)
$$

Elasticitätsgleichungen. Bei isotropen Körpern, also bei Körpern, die sich nach allen Richtungen gleich verhalten, fallen, weil kein Gegengrund vorhanden ist, die Hauptdrucke in die Richtungen der Hauptdilatationen und sind lineare homogene Funktionen derselben; es ist ferner einleuchtend, dass in dem Ausdruck für jeden der Hauptdrucke die entsprechende Dilatation einen, die beiden andern Dilatationen einen gemeinsamen zweiten Coefficienten haben werden; da schliesslich klar ist, dass die wachgerufenen inneren Drucke den Dilatationen, die sie wachgerufen haben, entgegengesetzt sind, so erhält man die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
p_1 &= -A\lambda_1 - B(\lambda_2 + \lambda_3) \\
p_2 &= -A\lambda_2 - B(\lambda_3 + \lambda_1) \\
p_3 &= -A\lambda_3 - B(\lambda_1 + \lambda_2).
\end{aligned} \qquad (25)
$$

A und B stellen die eine Form der sogen. Elasticitätsconstanten für isotrope Körper dar. Zu einer andern, zweckmässigeren Form K und L (bei Kirchhoff K und θ) gelangt man durch die Substitution

$$A = 2K(1 + L) \qquad B = 2KL. \qquad (26)$$

Bei einer dritten (historisch ältesten) Bezeichnungsweise wird von jedem der beiden obigen Zeichensysteme das eine Zeichen gewählt, nämlich

$$\nu = K \qquad \lambda = B;$$

es sind das die sogen. Lamé'schen Elasticitätsconstanten. Hier sollen stets K, L benutzt werden; (s. jedoch die Tabelle pag. 236).

Die obigen Ausdrücke werden dann, wenn die räumliche Dilatation $\Delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ [Gleichungen (11) und (14)] eingeführt wird:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= -2K(\lambda_1 + L\Delta) \\
p_2 &= -2K(\lambda_2 + L\Delta) \\
p_3 &= -2K(\lambda_3 + L\Delta).
\end{aligned} \qquad (27)
$$

Hierdurch werden die Druckcomponenten

$$
\begin{aligned}
X_x &= -2K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + L\Delta\right) & Y_z = Z_y &= -K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
Y_y &= -2K\left(\frac{\partial v}{\partial y} + L\Delta\right) & Z_x = X_z &= -K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
Z_z &= -2K\left(\frac{\partial w}{\partial z} + L\Delta\right) & X_y = Y_x &= -K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned} \qquad (28)
$$

Setzt man diese Werthe in die Elasticitätsgleichungen (19) ein, so erhält man dieselben in folgender endgiltiger Gestalt:

$$
\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \rho X + K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + K\left(1 + 2L\right)\frac{\partial \Delta}{\partial x} \\
\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \rho Y + K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + K\left(1 + 2L\right)\frac{\partial \Delta}{\partial y} \\
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \rho Z + K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + K\left(1 + 2L\right)\frac{\partial \Delta}{\partial z}
\end{aligned} \qquad (29)
$$

und speciell für das Gleichgewicht in der Gestalt

$$\rho X + K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + K\left(1 + 2L\right)\frac{\partial \Delta}{x} \qquad (29a)$$

u. s. w. u. s. w.

Man kann diese Gleichungen als die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen (s. Art. »Dynamik«, pag. 67) eines elastischen Körpers bezeichnen und ihnen (analog wie dort pag. 68—69) das mit ihnen gleich bedeutende D'ALEMBERT'sche und HAMILTON'sche Princip an die Seite stellen. Sind dabei jetzt wieder xyz die Coordinaten zur Zeit t und δ_x, δ_y, δ_z die Componenten einer unendlich kleinen Verrückung, bezeichnet man die Arbeit, welche die Kräfte resp. die Drucke bei der gedachten Verrückung leisten, mit A resp. B, d. h. setzt man

$$\begin{aligned} A &= \int \rho\, d\tau (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z), \\ B &= \int ds (X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z), \end{aligned} \tag{30}$$

bezeichnet man ferner die kinetische Energie mit T, also

$$T = \frac{1}{2}\int \rho\, d\tau \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right], \tag{31}$$

und setzt man endlich noch zur Abkürzung

$$\begin{aligned} F = \int d\tau \Big[& X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + Y_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ & + Y_z \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) + Z_x \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right) + X_y \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)\Big], \end{aligned} \tag{32}$$

so erhält man in der Gleichung

$$\int \rho\, d\tau \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\delta z\right) - A - B - F = 0, \tag{33}$$

das D'ALEMBERT'sche Princip, in der für den Fall des Gleichgewichts hieraus sich ergebenden speciellen Gleichung

$$A + B + F = 0 \tag{34}$$

das Princip der virtuellen Verrückungen, und in der Gleichung

$$\int_{t_0}^{t_1} dt (\delta T + A + B + F) = 0, \tag{35}$$

in welcher t_0 und t_1 so gewählt sind, dass für sie alle δ_x, δ_y, δ_z verschwinden, das HAMILTON'sche Princip. Wie man sieht, muss man, um eines dieser Principe auf elastische Körper anzuwenden, zu der Arbeit der äusseren Kräfte und zur Arbeit der Oberflächendrucke noch die Grösse F hinzufügen. Man kann sich dieselbe hiernach ebenfalls als die Arbeit gewisser Kräfte vorstellen, und diese Kräfte sind die elastischen Kräfte. Man kann diese Grösse F leicht auf die Form

$$F = \delta \int f\, d\tau$$

bringen, wo

$$f = -K(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + L\Delta^2) \tag{36}$$

ist. Die Grösse, deren Aenderung die Arbeit angiebt, heisst aber das Potential; die elastischen Kräfte haben also ein Potential, und dieses Potential der elastischen Kräfte ist

$$P = \int f\, d\tau. \tag{37}$$

Man kann im Zusammenhange hiermit die Druckcomponenten darstellen als die Differentialquotienten von f nach den Grössen, welche in Gleichung (32) ihre Faktoren sind.

Grenzbedingungen. Bedenkt man, dass ein Punkt, der ursprünglich der Mittelpunkt einer kleinen Kugel war, nach der Veränderung Mittelpunkt eines aus denselben Theilchen gebildeten Ellipsoides ist, so sieht man ein, dass ein Punkt, der einmal nicht in der Oberfläche liegt, niemals in ihr liegt, dass also die Oberfläche stets aus denselben materiellen Punkten besteht. Ist $\varphi\ (x, y, z, t)$

= 0 die Gleichung der Oberfläche, und sind $u'v'w'$ die Componenten der Geschwindigkeit, so ist die gefundene Grenzbedingung durch die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{38}$$

ausgesprochen. Man kann dieselbe aber noch auf eine andere Form bringen, wenn man erwägt, dass der Körper in seiner Oberfläche im allgemeinen an einen andern bewegten oder elastischen Körper grenzt. Sind dann $u'_1\ v'_1\ w'_1$ und $u'_2\ v'_2\ w'_2$ die Geschwindigkeitscomponenten für die beiden Körper und n die in $x\ y\ z$ auf der Grenzfläche errichtete Normale, so wird

$$u_1' \cos(nx) + v_1' \cos(ny) + w_1' \cos(nz) = u_2' \cos(nx) + v_2' \cos(ny) + w_2' \cos(nz), \tag{39}$$

d. h. die Componente der Geschwindigkeit senkrecht zur Grenzfläche hat in beiden Körpern denselben Werth. Dagegen können die hierauf senkrechten Geschwindigkeitscomponenten an der Grenzfläche Sprünge erleiden. Ganz analog verhält es sich mit den Drucken; es können nämlich die Druckcomponenten an der Grenzfläche unstetig sein, es müssen aber die Normalcomponenten X_n, Y_n, Z_n stetig sein. Grenzt der elastische Körper an einen andern, dessen Elasticitätsverhältnisse nicht in Betracht kommen, und sind $X\,Y\,Z$ die auf ein Oberflächenelement, dessen Normale die Richtung n hat, wirkenden Kraftcomponenten, so müssen für den Fall des Gleichgewichts die Gleichungen

$$\begin{aligned} X + X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) &= 0 \\ Y + Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) &= 0 \\ Z + Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz) &= 0 \end{aligned} \tag{40}$$

erfüllt werden.

Eindeutigkeit der Lösung. KIRCHHOFF[1]) hat gezeigt, dass die gegebene Lösung, also die Werthe uvw, die relativen Verrückungen der Theile eindeutig bestimmen, d. h. dass jedes andere Werthsystem $u_1\ v_1\ w_1$ sich von $u\ v\ w$ nur durch Glieder unterscheidet, welche Bewegungen des Körpers als starren Ganzen darstellen. Für den Fall des Gleichgewichts ist diese eindeutige Lösung in den Gleichungen (19a) und (28), wofür auch die Gleichungen (29a) eintreten können, und in den Grenzbedingungen (40) enthalten. Für den Fall der Bewegung ist sie enthalten in den Gleichungen (19) und (28), oder auch (29), in den Grenzbedingungen (38), (39) und (40) für die Oberfläche und in den zeitlichen Genzbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} u &= f_1(xyz), & v &= f_2(xyz), & w &= f_3(xyz) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= F_1(xyz), & \frac{\partial v}{\partial t} &= F_2(xyz), & \frac{\partial w}{\partial t} &= F_3(xyz) \end{aligned}\right\} \text{für } t = 0. \tag{41}$$

Der Beweis der Eindeutigkeit lässt sich auch auf heterotrope Körper ausdehnen, falls deren Heterotropie, wie es bei den in der Natur vorkommenden oder künstlich herstellbaren heterotropen Körpern der Fall ist, nur mässig ist.

Molekulartheorie. Die Stetigkeitstheorie, deren Grundlagen in obigem angegeben sind, ist in der Elasticitätslehre gegenwärtig die vorherrschende. Es ist indessen wenigstens in Kürze auch der Molekulartheorie zu gedenken. Die Elasticitätsgleichungen wurden auf dieser Grundlage zuerst von NAVIER[2]) entwickelt. Seine Hypothese bezieht sich auf homogene isotrope Medien und besteht darin, dass die Wirkung, welche zwei Theilchen nach der Verrückung auf einander ausüben, in die Richtung ihrer Verbindungslinie fällt und proportional

[1]) KIRCHHOFF, CRELLE's J. 56, pag. 291 (1858). Ges. Abhdlgn. pag. 285. — Ferner NEUMANN, Vorl. üb. d. Th. d. Elast., hg. v. O. E. MEYER, pag. 121. — WESENDONCK, WIED. Ann. 35, pag. 121 (1888).

[2]) NAVIER, Mém. de l'Acad. de Paris 7, pag. 375 (1824).

ist der durch die Verrückung hervorgebrachten Vergrösserung der Entfernung, im übrigen aber von dieser Entfernung selbst noch in irgend einer Weise abhänge. Die Bewegungsgleichungen, welche sich ergeben, unterscheiden sich von den Gleichungen (29) nur dadurch, dass die beiden Elasticitätsconstanten den Factor ρ (Dichte) enthalten, und dass die zweite Elasticitätsconstante $L = \frac{1}{2}$ wird. Die NAVIER'sche Theorie bietet also den Vortheil, dass sie nur zu einer einzigen für die verschiedenen Stoffe verschiedenen und charakteristischen Elasticitätsconstanten führt. Dies ist ihr aber nur möglich geworden durch eine zu specielle Annahme, und hierin liegt andererseits der Mangel der Theorie. Diese Annahme ist die, dass zwei Theilchen keine Wirkung auf einander ausüben, wenn ihre Entfernung sich nicht ändert. Es wird damit, wie man leicht einsieht, eine gewisse Klasse reiner Gestaltsänderungen (s. »Elasticität, Grundbegriffe«), die ebenfalls Elasticität wachrufen, ignorirt. Dazu kommt noch, dass die Theorie nicht zur Kenntniss der Druckcomponenten führt, sondern direkt die Gleichungen liefert; für die letzte Grenzbedingung (40) muss man aber jene kennen.

Die POISSON'sche Molekulartheorie[1]) ist wenigstens von dem zweiten Mangel frei; und zwar liefert sie Ausdrücke für die Druckcomponenten, welche auch für heterotrope Körper gelten, welche aber freilich die unbekannte Function der Entfernung zweier Theilchen enthalten, durch welche die Anziehung derselben auf einander — und zwar hier im natürlichen wie im Zwangszustande — dargestellt wird. Für unkrystallinische Körper fällt aber diese Function wegen der radialen Symmetrie heraus, und so gelangt man für solche zu Ausdrücken, die mit den Ausdrücken (28) identisch werden, wenn man $L = \frac{1}{2}$ setzt. Das Ergebniss ist also dasselbe wie bei NAVIER. Hier zeigt sich aber noch deutlicher als dort der principielle Mangel dieser Theorien. Eine einfache Betrachtung zeigt nämlich, dass die einzige in den POISSON'schen Ausdrücken für die Druckcomponenten vorkommende Constante der fünfte Theil des Volumenmoduls k_1 (s. o. pag. 220) ist. Die Theorie wird also der Thatsache, dass die verschiedenen Stoffe auch eine verschiedene Gestaltselasticität haben, nicht gerecht. Am auffälligsten zeigt sich dies darin, dass nach dieser Theorie das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation beim Zuge länglicher Körper (s. Art. »Zug und Druck«) für alle Körper gleich $\frac{1}{4}$ sein müsste, während es thatsächlich nicht unbeträchtlich variabel ist.

Diese Bedenken haben schon POISSON[2]) selbst in seiner letzten, unvollendeten Arbeit, und neuerdings in strengerer und vollständigerer Weise VOIGT[3]) veranlasst, die Molekulartheorie zu modificiren. Es ist nämlich eine ganz specielle Annahme, dass die Molekeln nach allen Richtungen mit gleicher Stärke wirken sollen, und es würde hiernach z. B. der regelmässige Aufbau der Krystalle ein Räthsel bleiben. Die neue Theorie nimmt daher Polarität der Molekeln resp. ihrer Wirkungen an, charakterisirt also die Theilchen eines elastischen Körpers nicht bloss durch die Coordinaten ihrer Schwerpunkte, sondern auch die Richtungen der Axen ihrer Polarität. Die Polarität der Molekeln bleibt auch bestehen, wenn die Anwendung auf isotrope Körper gemacht wird, da deren Isotropie wahrscheinlich nur eine grob-durchschnittliche ist, sich aber nicht auf die kleinsten Theile erstreckt. Es

---

[1]) POISSON, Mém. de l'Ac. de Paris 8, pag. 357 (1828). Bald darauf entwickelte CAUCHY ähnliche Betrachtungen in Exercices de math. 3, pag. 188 (1828) u. 4, pag. 129 (1829).

[2]) POISSON, Mém. de l'Ac. Paris 18, pag. 3 (1842).

[3]) VOIGT, Theor. Studien üb. d. Elast.-Verhältnisse d. Krystalle, Abh. Gött. Ak. 34, pag. 1 (1887).

bleiben dann für solche Körper zwei selbständige Constanten übrig, die Theorie also mit der Erfahrung im Einklange; und wenn letztere für einen bestimmten Körper wirklich zu den Beziehungen der älteren Theorie führt, so ist dies eine specielle Eigenthümlichkeit des betreffenden Stoffes, die darin besteht, dass die Molekeln desselben keine oder keine merkliche Polarität besitzen.

Zusammenstellung der zwischen den verschiedenen Constanten der Elasticitätslehre bestehenden Beziehungen. Es bedeuten: ν und λ die LAMÉ'schen Elasticitätsconstanten (pag. 232), A und B die durch die Gleichungen (25) (pag. 232) eingeführten, endlich K und L die KIRCHHOFF'schen Elasticitätsconstanten [pag. 232, Gleichung (26)]. Ferner sind k_1 und k_2 die beiden Hauptmoduln (pag. 220 und 222), D die Compressibilität (pag. 220), E der Dehnungsmodul (pag. 224), μ die Elasticitätszahl (pag. 224), und $\varkappa$ das Verhältniss des Gestaltsmoduls zum Volumenmodul ($k_2 : k_1$, pag. 224).

1) $A = \lambda + 2\nu, \qquad B = \lambda.$

2) $\nu = \frac{A - B}{2}, \qquad \lambda = B.$

3) $K = \nu, \qquad L = \frac{\lambda}{2\nu}.$

4) $\nu = K, \qquad \lambda = 2KL.$

5) $K = \frac{A - B}{2}, \qquad L = \frac{B}{A - B}.$

6) $A = 2K(1 + L), \qquad B = 2KL.$

7) $k_1 = \frac{1}{3}(2\nu + 3\lambda) = \frac{2}{3}K(1 + 3L), \qquad k_2 = K = \nu.$

8) $\varkappa = \frac{3\nu}{2\nu + 3\lambda} = \frac{3}{2(1 + 3L)}.$

9) $D = \frac{3}{2\nu + 3\lambda} = \frac{3}{2K(1 + 3L)} = \frac{1}{k_1}.$

10) $K = k_2, \qquad L = \frac{3k_1 - 2k_2}{6k_2}.$

11) $\nu = k_2, \qquad \lambda = \frac{3k \;\; - 2k_2}{3}.$

12) $E = \nu\frac{2\nu + 3\lambda}{\nu + \lambda} = 2K\frac{1 + 3L}{1 + 2L} = \frac{9k_1 k_2}{3k_1 + k_2}.$

13) $\mu = \frac{\lambda}{2(\nu + \lambda)} = \frac{L}{1 + 2L} = \frac{3k_1 - 2k_2}{2(3k_1 + k_2)} = \frac{3 - 2\varkappa}{2(3 + \varkappa)}.$

14) In der POISSON'schen Theorie wird:

$$\nu = \lambda, \quad A = 3B, \quad L = \frac{1}{2}, \quad k_1 = \frac{5}{3}\lambda, \quad k_2 = \lambda, \quad \varkappa = \frac{3}{5},$$

$$E = \frac{5}{2}\lambda, \quad \mu = \frac{1}{4}.$$

F. AUERBACH.

Zug und Druck.

Die einfachste Einwirkung auf homogene, isotrope, elastische Körper ist diejenige durch Zug oder Druck, d. h. durch eine Kraft, die auf dem Oberflächentheil, an welchem sie angreift, senkrecht steht und entweder nach aussen (Zug) oder nach innen (Druck) gerichtet ist; das Hauptergebniss dieser Einwirkung ist im ersten Falle Dilatation, im zweiten Falle Compression. Von besonderer Einfachheit werden die Vorgänge, wenn der betreffende Körper in zwei Richtungen oder in einer Richtung nur eine geringe Ausdehnung besitzt, wenn er also von linienhaftem oder von flächenhaftem Charakter ist. An derartige Körper knüpfen daher die meisten theoretischen und experimentellen Untersuchungen über Zug und Druck an. Eine Unterscheidung kann man dabei noch machen, je nachdem bei linienhaften Körpern der Querschnitt sehr klein oder nur klein ist, je nachdem es sich also um einen Draht (Faden, Saite u. s. w.) oder um einen Stab (Säule, Balken u. s. w) handelt. Drähte (und Schläuche) eignen sich vorzugsweise zu Zugversuchen, Stäbe vorzugsweise zu Druckversuchen; eine Mittelstellung nehmen Röhren ein.

Längszug und Längsdehnung linienhafter Körper. Hiermit haben sich zahlreiche Experimentatoren beschäftigt, und zwar zum Theil schon in älterer Zeit.[1]) Der Draht oder Faden wird mit seinem oberen Ende mit Hilfe eines an einem festen Pfeiler angebrachten Armes zwischen zwei Backen festgeschraubt. Das untere Ende wird auf irgend eine Weise so armirt, dass man mit Bequemlichkeit Gewichte anhängen und abnehmen kann. Die Länge l und der Querschnitt q des Fadens werden gemessen, entweder direkt mit Maassstab resp. Dickenmesser, oder erstere mit Kathetometer, letzterer durch Berechnung aus Länge, Gewicht und specifischem Gewicht, was meistens (aber nicht immer) zu genaueren Werthen führt. Die durch das Anhängen von Gewichten p bewirkte Verlängerung v wird dann kathetometrisch gemessen und schliesslich nach Wiederabnahme der Gewichte constatirt, ob eine und eventuell welche bleibende Verlängerung eingetreten ist. Zu beachten ist dabei noch folgendes. Der oben eingeklemmte Draht muss erst durch Anhängung eines gewissen Gewichtes gerade gestreckt, und es kann dann erst l gemessen werden; das bezügliche Gewicht bleibt für p unberücksichtigt. Die Gewichte p müssen allmählich und behutsam aufgesetzt und abgenommen werden. Endlich ist während des Versuchs die Temperatur zu bestimmen.[2])

Die Ergebnisse lassen sich in folgenden Satz zusammenfassen: Die Verlängerung ist für gleich lange Strecken desselben Drahtes gleich gross, für verschiedene Drähte der Länge proportional, sie ist ferner direct proportional dem ziehenden Gewicht, umgekehrt proportional dem Querschnitt, und bei Gleichheit

---

[1]) HOOKE, Philos. Tracts and collections. Lond. 1679. — s'GRAVESANDE, Physices elementa math., experimentis confirmata, Leyden 1721. Vol. 1, pag. 375. — YOUNG, Course of lectures on nat. philos. Lond. 1807. — WERTHEIM, Ann. chim. phys. (3) 12, pag. 385 (1844) u. POGG. Ann. Erg. Bd. 2.

[2]) Einen Demonstrationsapparat hat neuerdings PIERRE construirt: WIED. Ann. 22, pag. 141 (1884); Abbildungen auf Taf. 1, Fig. 8—10. — Eine ganze Reihe von Studien-Apparaten, von THOMASSET herrührend, hat PERARD beschrieben in Revue des mines 1879.

aller dieser Faktoren verschieden für verschiedene Stoffe. Der zweite und vierte Theil dieses Satzes lässt sich bei gewissen Voraussetzungen auch schon a priori einsehen; der dritte Theil, bei welchem dies nur für ganz kleine Gewichte möglich ist, erweitert diese Einsicht durch die Erfahrung auch für grössere Kräfte, jedoch auch nur bis zu einer gewissen Grenze, welche mit derjenigen nahezu übereinstimmt, bei welcher zuerst eine bleibende Verlängerung sich zeigt, d. h. mit der Elasticitätsgrenze (pag. 217). Nach Uebereinkunft bezeichnet man als Elasticitätsgrenze bei der Dehnung das Gewicht, welches einem Draht von 1 *m* Länge und 1 *qmm* Querschnitt eine bleibende Dehnung von 0·5 *mm* ertheilt. Der Bereich bis zur Grenze heisst der Bereich der elastischen Vollkommenheit (pag. 216).

Hiernach ist bis zu dieser Grenze

$$v = \varepsilon \frac{pl}{q},$$

wobei nach Uebereinkunft p in Kilos, l in Metern, q in *qmm* gemessen wird. Die Grösse p ist dabei, da Gleichgewicht besteht, gleichzeitig die im Innern des Drahtes wachgerufene Elasticität, durch Auflösung erhält man für sie den Ausdruck

$$p = \frac{1}{\varepsilon} \frac{vq}{l} = E \frac{vq}{l}.$$

ε ist die in einem Drahte von 1 *qmm* Querschnitt durch 1 *k* erzeugte Verlängerung eines Meters, also der Dehnungscoefficient; E ist das Gewicht, welches erforderlich ist, um einen Draht von 1 *qmm* Querschnitt um seine eigene Länge zu dehnen, also der Dehnungsmodul (pag. 224); da jedoch so grosse Dehnungen nur ausnahmsweise vorkommen und dann ausserhalb des Giltigkeitsbereiches obiger Formeln liegen, so sagt man besser: E ist das 1000 fache des Gewichts, welches erforderlich ist, um einen Draht von 1 *qmm* Querschnitt und 1 *m* Länge um 1 *mm* zu dehnen. In manchen Fällen ist es noch zweckmässiger den Modul zu definiren[1]) als die Länge desjenigen Drahtes von gleichem Stoff und Querschnitt, welcher, an den untersuchten angehängt, diesen durch sein Gewicht um sich selbst verlängert. Man kann diese Grösse »Modullänge« (englisch »length of modulus«) nennen, und man sieht unmittelbar ein, dass dieselbe aus dem Modul durch Division mit dem Gewichte des Stoffes hervorgeht.

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der wichtigsten und zuverlässigsten für den Modul E und die Elasticitätsgrenze G gefundenen Werthe; von ersterem sind übrigens auch solche gleich hier mit aufgenommen, welche nicht durch Zug, sondern auf indirektem Wege (s. w. u.) gefunden sind. Die Grösse G ist für die Technik besonders wichtig, weil sie den zulässigen Druck resp. die zulässige Belastung angiebt, welche, was doch für die dauernde Function des betreffenden Drahtes, Balkens u. s. w. unerlässlich ist, den natürlichen Zustand noch unverändert lässt; man bezeichnet daher in der Technik häufig G als die Tragfähigkeit. Für einige Stoffe ist auch noch die bei der Elasticitätsgrenze auftretende temporäre Verlängerung der Längeneinheit V, also diejenige Verlängerung, welche nach Abnahme des Gewichtes eben noch vollständig verschwindet, angegeben; dieselbe ist offenbar $V = G/E$.

---

[1]) KOHLRAUSCH, Leitf. d. prakt. Physik, 5. Aufl., pag. 101 (1884).

Dehnungsmodul, Dehnungsgrenze und Grenzdehnung von Metallen.

Stoff	Modul E	Grenze G	V	Autor z. Thl. nur für E
Bessemerstahl	21136	38	—	PSCHEIDL [1])
Puddelstahl	21112	—	—	„
Eisen, gezogen	20869	32	0·00150	WERTHEIM [2])
„ „	20500	—	—	BAUMEISTER [3])
Gussstahl, gezogen . . .	19549	36	—	WERTHEIM [2])
Stahldraht, gezogen . . .	18809	43	0·0025	„
Gusseisen	11713	12	0·0012	PSCHEIDL [1])
Platin, gezogen	17044	26	0·0015	WERTHEIM [2])
Kupfer, gezogen	12449	12	0·0009	„
Neusilber	12094	—	—	PSCHEIDL [1])
Palladium	11759	27	0·0023	WERTHEIM [2])
Bronce	9194	25	0·0028	PSCHEIDL [1])
Zink, gezogen	8734	16	0·0018	WERTHEIM [2])
Messing, gezogen	8543	24	0·0029	„
„ „	9930	—	—	BAUMEISTER [3])
Gold, gezogen	8131	27	0·0034	WERTHEIM [2])
Silber, gezogen	7357	29	0·0040	„
Zinn	4170	4	0·0010	„
Blei, gezogen	1803	0·3	0·00013	„

Wie man sieht, sind Stahl und Eisen am stärksten, Blei und Zinn am schwächsten elastisch, während die in anderen physikalischen Hinsichten besonders ausgezeichneten Metalle Gold, Silber, Kupfer hier eine Mittelstellung einnehmen. Ergänzend ist noch zu bemerken, dass durch Anlassen E stets herabgemindert wird; so gelten nach WERTHEIM z. B. folgende Zahlen:

Metall	gez.	angel.	Metall	gez.	angel.
Eisen	20869	20794	Palladium.	11759	9789
Stahldraht	18809	17278	Silber	7357	7141
Platin	17044	15518	Gold	8131	5585
Kupfer	12449	10519	Blei	1803	1727

Am kleinsten ist also der Unterschied bei Eisen, am grössten bei Gold.

Die Elasticitätsmoduln von Legirungen hat KIEWIET [4]) bestimmt, ohne jedoch eine einfache Beziehung zur Zusammensetzung feststellen zu können.

---

1) PSCHEIDL, Wien. Ber. 79, pag. 114 (1879).
2) WERTHEIM, Ann. Ch. Phys. (3) 12, pag. 385 (1844).
3) BAUMEISTER, WIED. Ann. 18, pag. 578 (1883).
4) KIEWIET, Göttinger In.-Diss. Lpz. 1886.

Dehnungsmodul von Steinen, Gläsern u. s. w.

Schiefer . . .	9000 bis 11000	Kohle[3]) . . .	1506 bis 2548
Marmor . . .	2600	Fensterglas[4]) .	7917
Kalkstein . .	1890	Böhmisches Glas[5])	7550
Knochen . .	1635	Belg. Glas[5]) . .	7493
Sandstein . .	630	Fürther Glas[5]) .	7427
Fischbein . .	600	Spiegelglas[4]) . .	7015
Eis (ältere Zahlen)	520 bis 580	Spiegelglas[5]) . .	6920
„ nach Reusch[1])	236	Krystallglas[4]) .	6890
„ „ Koch[2])	642 bis 696	„ bleihaltig[4])	5477
„ „ Trowbridge[2])	670	Glasröhren[6]) . .	6277 bis 7023
Gyps	360		

Was die Hölzer betrifft, so gehören dieselben eigentlich nicht hierher, weil sie nicht isotrop sind; der Uebersichtlichkeit halber mögen aber die für sie von Wertheim und Chevandier[7]) gefundenen Zahlen hier ebenfalls zusammengestellt werden; sie sind für Hölzer mit 20% Feuchtigkeit giltig.

Dehnungsmodul von Hölzern.

Holzart	axial	radial	tangential
Pappel	517	73	39
Fichte	564	98	29
Eiche	921	189	130
Buche	980	270	159
Birke	997	81	155
Ahorn	1021	157	73
Erle	1108	98	59
Tanne	1113	95	34
Esche	1121	111	102
Ulme	1165	123	63
Akazie	1262	—	—

Wie zu erwarten, ist die Elasticität in der Axenrichtung bei weitem am grössten; ausserdem ist sie in der Tangentialrichtung meist kleiner als in der Radialrichtung; das Verhältniss der drei Moduln ist aber für die verschiedenen Hölzer sehr verschieden. Austrocknung erhöht die Elasticität und zwar für 1% Feuchtigkeitsverlust etwa um ½—1%. Neuerdings hat Bauschinger[8]) für zahlreiche Holz- und Steinarten E bestimmt.

Besondere Eigenthümlichkeiten in Bezug auf Zug und Druck bieten zusammengesetzte Körper dar, z. B. Ketten, Netze und Gewebe[9]); es kann jedoch hier nicht darauf eingegangen werden.

Elastisch abnorme Stoffe. Einige Stoffe verhalten sich, wie schon oben pag. 218 bemerkt wurde, in elastischer Hinsicht anomal, insofern sie schon durch kleine Kräfte stark gedehnt werden und schon durch die Einwirkung einer ver-

1) Reusch, Pogg. Ann. 121, pag. 573 (1864).
2) Koch, Wied. Ann. 25, pag. 438 (1885). Trowbridge, Sill. J. (3) 29, pag. 349 (1885).
3) Beetz, Wied. Ann. 12, pag. 15 (1881).
4) Wertheim u. Chevandier, Compt. rend. 20, pag. 1637 (1845).
5) Pscheidl, Wien. Ber. 79. pag. 114 u. 86, pag. 115 (1877 u. 1882).
6) Cantone, Rendic. Accad. Lincei 4, pag. 220 u. 292 (1888).
7) Wertheim u. Chevandier, Compt. rend. 23 (1846).
8) Bauschinger, Mitth. a. d. Mech.-T. Lab. d. Techn. H. zu München 1883—1888.
9) Tresca, Compt. rend. 95, pag. 1215 (1882).

hältnissmässig kleinen Kraft eine bleibende Dehnung erfahren. Der Dehnungsmodul E ist also bei ihnen sehr klein, das Grenzgewicht G ist ebenfalls sehr klein, aber bei weitem nicht in demselben Maasse; das Verhältniss beider, $G/E = V$, d. h. die Grenzdehnung, die nach den obigen Tabellen bei den Metallen sehr klein ist, fällt also hier sehr beträchtlich aus. Dieser grosse Werth von V ist es, welcher den in Rede stehenden Stoffen im Sprachgebrauch eine sehr grosse Elasticität[1]) beigelegt hat (s. ob. pag. 217 u. f.).

Am sorgfältigsten ist in dieser Hinsicht Kautschuk untersucht worden. Erleichtert wird die Untersuchung durch die Grösse der eintretenden Verlängerungen, erschwert durch den Umstand, dass kaum zwei Kautschukfäden sich gleich verhalten, sowie durch den zweiten, dass der Bereich der elastischen Vollkommenheit, also auch der der Existenz eines constanten Moduls E ein sehr beschränkter ist. Die constantesten und exaktesten Versuche rühren von VILLARI[2]) und von RÖNTGEN[3]) her. VILLARI ging in der Dehnung sehr weit, nämlich bis zum vier- bis siebenfachen der ursprünglichen Länge. Er fand, dass drei verschiedene Moduln zu unterscheiden sind. 1) Ein kleiner und ziemlich constanter Modul $E = 0{\cdot}07 - 0{\cdot}10$, giltig für Kräfte bis etwa zur Verdoppelung der Länge; 2) ein Uebergangsmodul, zunehmend von $0{\cdot}1 - 300$; 3) ein grosser und ziemlich constanter Modul $E = 300 - 350$, giltig etwa vom Vierfachen der ursprünglichen Länge an. Im Gegensatz zu VILLARI beschränkte sich RÖNTGEN absichtlich auf kleine Dehnungen, indem er einmal überhaupt nur bis zu einer Verlängerung um ein Drittel der ursprünglichen Länge ging, überdies aber E stets als das Verhältniss eines kleinen Gewichtszuwachses zu dem erzeugten Verlängerungszuwachse auffasste, wobei letzterer immer nur 2—5$\frac{0}{0}$ der ursprünglichen Länge betrug. Es fanden sich für E Werthe zwischen 0·076 und 0·128, und als Mittelwerth $E = 0{\cdot}103$, also etwas weniger als bei VILLARI. Noch etwas weniger, nämlich $E = 0{\cdot}068$, fand KURZ.[4])

Einfluss der Temperatur. Dass bei steigender Temperatur die Elasticität abnimmt, lehrt schon die tägliche Erfahrung in vielen Fällen. Ueber die exacten Messungen geben folgende Tabellen Aufschluss; die Zahlen der ersten rühren von WERTHEIM,[5]) die der zweiten von PISATI,[6]) die der dritten von KATZENELSOHN[7]) her.

Dehnungsmodul.

Metall (angelassen)	Dehnungsmodul 15° C.	100° C.	200° C.
Blei	1727	1630	—
Gold	5584	5408	5482
Silber	7140	7274	6374
Kupfer	10519	9827	7862
Platin	15518	14178	12964
Eisen	20794	21877	17700
Gussstahl	19561	19014	17926
Engl. Stahl	17278	21292	19278

1) F. AUERBACH, Jahresb. B. d. schles. Ges. 1887, pag. 132.
2) VILLARI, POGG. Ann. 143, pag. 88 (1871).
3) RÖNTGEN, POGG. Ann. 159, pag. 601 (1876).
4) KURZ, Rep. d. Physik 22, pag. 511 (1887).
5) WERTHEIM, Ann. Chim. Phys. (3) 12, pag. 385 (1844).
6) PISATI, Gaz. chim. it. 7. pag. 1.
7) KATZENELSOHN, Berl. In.-Diss. 1887.

Metall	Dehnungsmodul						
	20°	50°	100°	150°	200°	250°	300°
Eisen	21441	21364	21212	20895	20458	19871	19175
Stahl	18481	18416	18232	18052	17820	17593	17372

Metall	E	Abnahme in $\frac{0}{0}$ zw. 0° u. 100°	Metall	E	Abnahme in $\frac{0}{0}$ zw. 0° u. 100°
Platin	17187	0·89	Messing . . .	8944	4·21
Eisen	19024	2·33	Silber	7010	3·97
Gold	9800	2·92	Aluminium . .	7540	19·5
Neusilber . . .	11449	3·43			

Hiernach nimmt der Dehnungsmodul mit steigender Temperatur bei allen Metallen ab; die einzige bei WERTHEIM sich findende Ausnahme hat sich neuerdings nicht bestätigt. KIEWIET[1]) fand für Legirungen $E = E_0(1 - \alpha t)$ und hierin für α Werthe zwischen 0·00028 und 0·00378; für Glas $E = 7691(1 - 0{\cdot}000321\,t)$, also in beiden Fällen lineare Abnahme mit der Temperatur. Was den Kautschuk betrifft, so lässt sich schon aus der mechanischen Wärmetheorie schliessen, dass er sich auch hinsichtlich des Temperatureinflusses abnorm verhalten werde. Der thermische Ausdehnungscoefficient des Kautschuks nimmt nämlich nach JOULE mit wachsender Spannung ab und hieraus folgt — allerding unter einer gewissen Voraussetzung — dass E mit wachsender Temperatur zunehmen muss. Eine direkte Bestätigung hierfür liegt nicht vor, wohl aber eine indirekte, insofern eine mit E verwandte Grösse, der Torsionsmodul, mit der Temperatur wächst (s. w. u.).[2])

Einfluss der Zeit und der Wiederholung der Versuche. Wie schon in der allgemeinen Uebersicht erwähnt wurde, hat selbst im Bereiche der elastischen Vollkommenheit die Zeit einen Einfluss auf die Grösse der temporären und der bleibenden Dehnung. Dieser Einfluss wird als elastische Nachwirkung bezeichnet (s. das.) Hiermit hängt es ferner zusammen, dass, wenn man einen Draht wiederholt dehnt und dazwischen stets wieder in den natürlichen Zustand zurückführt, man verschiedene Werthe von E erhält. MILLER[3]) unterscheidet sogar ganz bestimmt zwischen dem »primären« und dem »sekundären« Modul E_s, welcher letztere nach 4—5facher Dehnung und Verkürzung eintritt und sich weit gesetzmässiger verhält als der primäre; so ist z. B. allgemein seine Abhängigkeit von der Temperatur, allerdings erst nach mehrstündiger Erwärmung und Abkühlung, durch die Formel

$$E_s = (E_s)_0(1 - \gamma t)$$

bestimmt, d. h. seine Abnahme ist mit der Temperatur proportional. Einige von v. MILLER gefundene Zahlenwerthe sind folgende.

Metall	$(E)_0$	γ	Metall	$(E)_0$	γ
Platin . . .	19668	0·000364	Zink . . .	10551	0·00330
Eisen . . .	18813	376	Blei . . .	2553	470
Silber . . .	7359	778	Messing . .	10670	047
Kupfer . . .	13035	998	Neusilber . .	13945	065

1) KIEWEIT, a. a. O.

2) GRAETZ, WIED. Ann. 28, pag. 354 (1886). Frühere Abhandlungen hierüber, die sich aber auf den adiabatischen Modul beziehen, von SCHMULEWITSCH, POGG. Ann. 144, pag. 280 (1871) und EXNER, Wien. Ber. 69, pag. 102 (1874).

3) MILLER, Münch. Ber. 1882, pag. 377; 1885, pag. 9; namentlich aber 1886, pag. 707.

Die Reihenfolge nach den Werthen von γ erweist sich als identisch mit derjenigen nach den Werthen des thermischen Ausdehnungscoefficienten.

Einfluss des Eigengewichtes. Streng genommen wirkt ausser dem ziehenden oder drückenden Gewichte stets noch in gleichem Sinne das Eigengewicht des Körpers, und nicht selten wird dieser Einfluss so gross, dass er nicht mehr vernachlässigt werden darf. Die Verlängerung oder Verkürzung ist dann nicht mehr für gleiche Strecken dieselbe, nämlich für die Längeneinheit nicht mehr $\varepsilon P/q$, sondern

$$(v) = \frac{\varepsilon P}{q} + \frac{1}{q}\int_z^l s q\, dz = \frac{\varepsilon P}{q} + s(l - z),$$

wo z der Abstand der möglichst klein gewählten Einheitsstrecke (z. B. 1 *mm*) vom festen Ende und s das specifische Gewicht ist; und folglich wird durch Integration die Verlängerung resp. Verkürzung des ganzen Stabes, wenn noch der Modul E an Stelle von $1/\varepsilon$ eingeführt wird und p das Gewicht des Stabes ist,

$$v = \frac{Pl}{Eq} + \frac{Gl^2}{2E} = \frac{l}{Eq}\left(P + \frac{1}{2}p\right).$$

Wie man sieht, kommt zu dem Gewichte P noch das halbe Eigengewicht des Stabes hinzu. Es kann auch der Fall vorkommen, dass das Eigengewicht dem Belastungsgewicht entgegenwirkt, nämlich wenn ein Zug von oben oder ein Druck von unten ausgeübt wird; man hat dann oben — statt + zu schreiben und findet dann als Specialfall, dass der Stab seine natürliche Länge beibehält, wenn die Belastung gerade gleich dem halben Eigengewicht ist.

Da hiernach die Spannung in verschiedenen Querschnitten eines Stabes verschieden ist, so entsteht die Frage, wie man bei einem Stabe die Querschnittsgrössen der Länge nach variiren lassen muss, damit die Spannung überall dieselbe T sei. Die Antwort liegt in der Formel

$$q = \frac{P}{T} \cdot e^{\frac{s}{T}(l-z)},$$

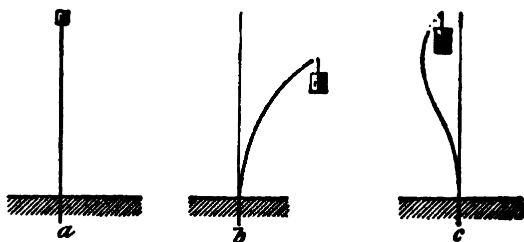
d. h. bei arithmetischem Fortschreiten vom freiem Ende müssen die Querschnitte geometrisch zunehmen.[1])

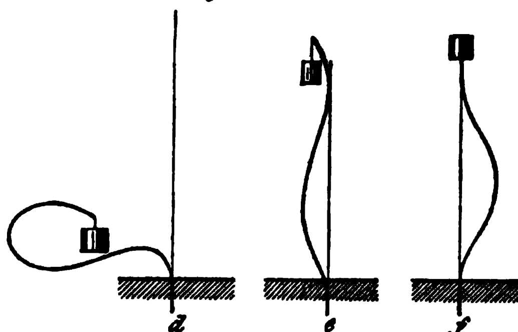
Biegung durch Druck. Wenn ein unten fest eingelassener Stab am oberen Ende belastet wird, so kann principiell nur eine Längscompression resultiren. Thatsächlich aber kann unter gewissen Umständen der Stab auch gebogen werden, wie man aus alltäglichen Wahrnehmungen weiss, und diese Erscheinung ist für die Praxis sogar überaus wichtig. Dass unter der Wirkung einer Belastung die vertikale, geradlinige Gestalt eines Stabes eine Gleichgewichtslage desselben ist, ist einleuchtend, weil kein Grund zu einer Abweichung nach irgend einer Seite hin vorhanden ist; aber es kann dieses Gleichgewicht je nach den Umständen stabil oder labil sein; und im letzteren Falle wird die leiseste zufällige Ablenkung oder Erschütterung genügen, um den Stab jene Lage für immer aufgeben und eine neue Gleichgewichtslage annehmen zu lassen, welche nunmehr die stabile ist. Dem Resultate nach gehört die Erscheinung nicht hierher, sondern in die Lehre von der Biegung; die erzeugende Anordnung ist aber ein axialer Druck, und desshalb sollen die wichtigsten Ergebnisse der Theorie, die namentlich von SAALSCHÜTZ[2]) ausgeführt worden ist, hier angegeben werden. Wird der Querschnitt des Stabes beliebig angenommen und mit W sein Trägheitsmoment

1) CLEBSCH, Th. d. Elast. fester Körper, Leipz. 1862, pag. 356.

2) SAALSCHÜTZ, Der belastete Stab. Leipz. 1880.

für die durch den Schwerpunkt gehende, zur Biegungsebene senkrecht vorausgesetzte Hauptaxe bezeichnet, so ergiebt sich: Für P (Belastung) $< \frac{\pi^2 WE}{4l^2}$ ist die vertikale Lage (Fig. 84*a*) die einzige stabile Gleichgewichtslage, der Stab kehrt nach zufälligen Abweichungen wieder in dieselbe zurück. Der Maximalwerth von P, bei welchem dies noch eintritt, heisse P_0. Für $P > \frac{\pi^2 WE}{4l^2}$, also $P > P_0$ ist die vertikale Lage labil, dafür aber die Lage (Fig. 84*b*) stabil. Ist $P > 9P_0$, so giebt es noch eine zweite stabile Gleichgewichtslage von der Form der Fig. 84*c*. Für $P > 25P_0$ giebt es noch eine dritte (Fig. 84*d*) u. s. w. Dagegen ist eine Lage von der Form Fig. 84*e* keine Gleichgewichtslage, wohl aber giebt es zwischen den oben angeführten noch weitere, falls das obere Ende des Stabes dem Zwange unterworfen ist, in der ursprünglichen Axe zu bleiben; für $P > 16P_0$ z. B. die Form Fig. 84*f*. Am wichtigsten ist der erste, durch Fig. 84*b* dargestellte Fall. In demselben bestehen folgende Beziehungen zwischen der Belastung, der Neigung des an das freie Ende grenzenden Stabelementes α und dem Krümmungsradius ρ_0 an der Wurzel:





(Ph. 84.)

$P/P_0 =$	1·015	1·064	1·152	1·293	1·518	1·884	2·541	4·029	9·116
$\alpha =$	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	176°
$\rho_0/l =$	1·819	0·902	0·593	0·435	0·337	0·268	0·212	0·161	0·105

Für diese Fälle sind in Fig. 85 die Formen des Stabes dargestellt, in Fig 86 in analoger Weise für einige der Fig. 84*c* entsprechende Fälle.

Quercontraction und Volumenänderung. Dass Zug und Druck nicht nur die Länge sondern auch den Querschnitt der Körper, auf die sie wirken, ändern, lässt sich in manchen Fällen schon mit dem blossen Auge wahrnehmen. Die exakte Messung der Queränderung ist hingegen mit grossen Schwierigkeiten verknüpft, und erst in neuester Zeit, namentlich von Bauschinger,[1] zu einem befriedigenden Grade von Genauigkeit geführt worden. Derselbe bedient sich dabei im wesentlichen zweier sehr feiner Fühlhebel, die so combinirt sind, dass man Längen- und Querschnittsänderung gleichzeitig, und zwar mit Spiegel und Fernrohr ablesen kann; es lässt sich auf diese Weise 1/5000 *mm* noch mit Sicherheit messen. Eine andere Methode wandte Cagnard-Latour[2] an, indem er den Stab oder Draht mit einer engen Wasserröhre umgab, oben nicht fest, sondern an einem Waagebalken aufhing und, bei festem unterem Ende, durch Anbringung von Gewichten an dem andern Waagebalken dehnte; durch die Dehnung änderte sich auch der Querschnitt und somit der Wasserspiegel, sodass,

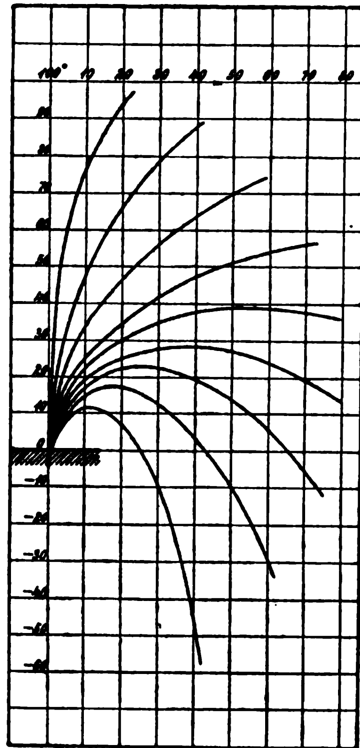
[1]) Bauschinger, Civil-Ingenieur 25, pag. 44 u. 82 (1879).

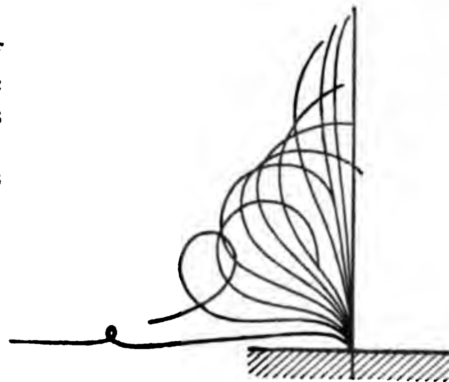
[2]) Cagnard-Latour, Ann. Ch. Phys. 36, pag. 384 (1827). Pogg. Ann. 12, pag. 516.

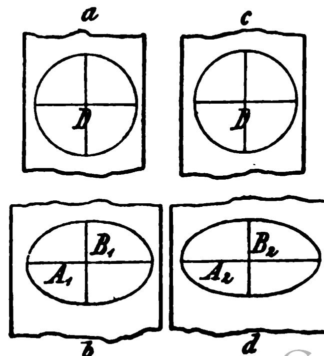
wenn letzterer beobachtet wurde, die Querschnittsänderung berechnet werden konnte. Man sieht leicht ein, dass diese Methode — auch abgesehen von sekundären Uebelständen, z. B. dem Anhaften von Wasser an dem herausgezogenen Drahtstück — keine grosse Genauigkeit zulässt. Aehnlich, aber doch etwas günstiger ist die Versuchsanordnung, deren sich WERTHEIM[1]) bediente. Er nahm nämlich an Stelle der Stäbe Röhren, füllte dieselben mit Wasser, maass die Längenänderung direkt an der Röhre, ausserdem aber durch Beobachtung des Wasserniveaus die Aenderung des Hohlraums. Letztere setzt sich aus der Längen- und der Querschnittsänderung zusammen, und da erstere direkt gemessen war, lässt sich letztere ableiten. Noch andere Methoden beruhen auf Versuchen über kubische Compression, über Biegungs- und Torsionselasticität und werden weiter unten an den entsprechenden Stellen angeführt werden. Endlich ist wiederum einer besonderen Methode für stark dehnbare Stoffe wie Kautschuk zu gedenken, welche von RÖNTGEN[2]) herrührt. Auf einem quadratischen Stab von 30 *mm* Dicke und 1500 *mm* Länge wurde, als er durch das Gewicht P_1 gedehnt war, mit dem Rande einer Röhre ein Kreis vom Durchmesser D geprägt (Fig. 87 *a*); nach Entfernung von P_1 verwandelte sich der Kreis in die Ellipse $A_1 B_1$ (Fig. 87 *b*). Bei einem um die kleine Grösse p grösseren Gewicht P_2 wurde ebenso aus dem Kreise (Fig. 87 *c*) die Ellipse $A_2 B_2$ (Fig. 87 *d*). Es ergiebt sich dann μ aus der Gleichung

$$\mu = \frac{A_2 - A_1}{B_1 - B_2} \cdot \frac{B_1 + B_2}{A_1 + A_2}.$$

Man kann natürlich schon aus e i n e m Versuche μ berechnen, hat aber so den Vortheil, den Werth von μ, welcher k l e i n e n Aenderungen entspricht, zu erhalten.


(Ph. 85.)


(Ph. 86.)



(Ph. 87.)

[1]) WERTHEIM, Ann. Ch. Phys. (3) 23, pag. 52 (1849); Pogg. Ann. 78, pag. 381 (1849).

[2]) RÖNTGEN, Pogg. Ann. 159, pag. 601 (1876).

Das Ergebniss aller dieser Messungen ist im Wesentlichen folgendes: 1) Der Längendehnung entspricht stets eine Quercontraktion, der Längscontraktion eine Querdilatation; mit andern Worten: Zug erzeugt stets Quercontraktion, Druck stets Querdilatation. Die Elasticitätszahl μ, definirt als das Verhältniss der Quercontraktion zur Längsdilatation, ist also stets positiv, weil Zähler und Nenner stets dasselbe Zeichen haben.

2) Die relative Aenderung des Querschnitts ist (abgesehen von gewissen anomalen Fällen) kleiner als die relative Längenänderung; mit anderen Worten: Zug erzeugt stets Volumenzunahme, Druck stets Volumenabnahme. Für μ folgt hieraus, dass es stets $< \frac{1}{2}$ sein muss. Ausnahmen hat BAUSCHINGER[1] bei kolossalen Drucken für Eisen und Stahl constatirt. Beim Druck trat ein Minimum des Volumens für Gusseisen bei 2900 Atmosphären, für Schmiedeeisen bei 2200 Atmosphären ein: für Schmiedeeisen nahm alsdann das Volumen bis über den ursprünglichen Werth zu (bis zu 2300 Atmosphären um 0·001628), dann wieder ab, erreichte bei 2437 Athmosphären wieder den ursprünglichen Werth und nahm dann weiter ab. Beim Zug zeigte Gusseisen kein Maximum, wohl aber Schmiedeeisen und Bessemerstahl; bis über die Elasticitätsgrenze hinaus wuchs bei letzterem das Volumen (bis 3093 Atmosphären um 0·001114); dann erfolgte plötzlich ein Umschlag zur Volumenverminderung um 0·001813.

3) Was die gefundenen Zahlenwerthe betrifft, so besteht, wenn ε die relative Längsdehnung ist, zwischen der relativen Volumenänderung v und μ die Beziehung

$$v = (1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)^2 - 1.$$

Für kleinere Veränderungen ergiebt dies

$$v = \varepsilon(1 - 2\mu) \qquad \mu = \frac{1}{2} - \frac{v}{2\varepsilon}.$$

Für den Grenzfall, in welchem das Volumen constant bleibt, wird also $\mu = \frac{1}{2}$. Das gilt aber nicht mehr[2]) für endliche Aenderungen; vielmehr bedeutet dann Constanz des Volumens, je nach der Grösse von ε, verschiedene Werthe von μ; es wird nämlich

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right),$$

also beispielsweise für

ε = 0·001	0·03	0·5	1	2	3	4
μ = 0·4996	0·489	0·367	0·293	0·211	0·167	0·112.

Bei kleinen Veränderungen haben die Versuche für denselben Stoff stets ziemlich dasselbe μ ergeben, unabhängig von Dimensionen und Gewichten. Für starke Veränderungen nimmt dagegen meist, wie es scheint, μ ab, v zu, wenn ε zunimmt.

Zahlenwerthe für μ.

Stoff	Beobachter	μ (Grenzen)	μ (Mittel)	
Stahl, federhart . .	KIRCHHOFF[3])	0·293—0·295	0·294	0·295
„ „ . .	OKATOW[4])	0·275—0·328	0·294	
„ „ . .	SCHNEEBELI[5])	0·266—0·303	0·296	

1) BAUSCHINGER, Civil-Ingenieur 25, pag. 44 u. 82 (1879).
2) RÖNTGEN, a. a. O.
3) KIRCHHOFF, Pogg. Ann. 108, pag. 369 (1859).
4) OKATOW, Pogg. Ann. 119, pag. 11 (1863).
5) SCHNEEBELI, Pogg. Ann. 140, pag. 589 (1870).

Stoff	Beobachter	μ (Grenzen)	μ (Mittel)	
Stahl, weich . . .	OKATOW	—	0·304	0·300
„ „ . . .	GÖTZ und KURZ[1])	—	0·333	
„ „ . . .	SCHNEEBELI	—	0·306	
„ „ . . .	MALLOCK[2])	—	0·253	
Eisen	LITTMANN[3])	0·214—0·268	0·243	0·278
„	BAUMEISTER[4])	0·25—0·42	0·304	
„	EVERETT[5])	—	0·310	
„	MALLOCK	—	0·253	
Messing	KIRCHHOFF	—	0·387	0·357
„	EVERETT	—	0·469	
„	BAUMEISTER	0·34—0·50	0·420	
„	MALLOCK	—	0·325	
„	WERTHEIM[6])	—	0·315	
„	LITTMANN	—	0·226	
Kupfer	MALLOCK	—	0·348	0·299
„ galv. ndrgschl.	VOIGT[7])	—	0·250	
Blei	MALLOCK	—	0·375	0·375
Zink	MALLOCK	0·18—0·23	0·205	0·205
Glas	CORNU[8])	0·224—0·258	0·240	0·238
„	EVERETT	—	0·229	
„	CANTONE[9])	0·246—0·264	0·255	
„	VOIGT[10])	0·208—0·213	0·210	
Ebonit	MALLOCK	—	—	0·389
Elfenbein	MALLOCK	—	—	0·50?
Stuck	MALLOCK	—	—	0·181
Paraffin	MALLOCK	—	—	0·50
Kautschuk, für kleine Aenderungen	RÖNTGEN[11])	0·37—0·64	0·460	0·480
„ „	AMAGAT[12])	—	0·500	

[1]) GOETZ u. KURZ, Rep. d. Phys. 22, pag. 511 (1886).
[2]) MALLOCK, Proc. R. Soc. 29, pag. 157 (1879).
[3]) LITTMANN, Breslauer Dissert. 1885.
[4]) BAUMEISTER, WIED. Ann. 18, pag. 578 (1883).
[5]) EVERETT, Phil. Trans. 1867, pag. 139; Proc. R. Soc. 15, pag. 356; 16, pag. 248.
[6]) WERTHEIM, Ann. chim. phys. (3) 23, pag. 52 (1849).
[7]) VOIGT, Berl. Ber. 1883, pag. 961 u. 1884, pag. 1004.
[8]) CORNU, Compt. R. 69, pag. 333 (1869).
[9]) CANTONE, Rendic. Accad. Lincei 4, pag. 220 u. 292 (1888).
[10]) VOIGT, WIED. Ann. 15, pag. 497 (1882).
[11]) RÖNTGEN, a. a. O. — Für grössere Aenderungen (s. oben) fand VILLARI (a. a. O.) $\mu = 0·33$ u. noch kleiner, NACCARI u. BELLATI, N. Cim. (3) 2, pag. 217 (1877) $\mu = 0·41$; 0·31; 0·38; 0·36. —
[12]) AMAGAT, Compt. R. 99, pag. 130 (1884).

Stoffe	Beobachter	μ (Grenzen)	μ (Mittel)
Gallerte aus Leim .	Maurer[1])	—	0·500 } 0·500
Kork	Mallock	—	— } 0·00

Neuerdings hat Katzenelsohn[2]) folgende Werthe von μ und δ (Aenderung von μ in Procenten zwischen 0° und 100°) gefunden:

Metall	μ	δ	Metall	μ	δ
Platin	0·16	5·5	Messing . . .	0·42	3·9
Eisen	0·27	3·7	Silber	0·37	12·2
Gold	0·17	2·5	Aluminium . .	0·13	15·7
Neusilber . . .	0·33	3·4			

Es unterliegt, wie ein Blick auf diese Zahlen zeigt, keinem Zweifel, dass für die Stoffe, wie sie sich dem Experimentator wirklich darbieten, die Elasticitätszahl μ sehr verschiedene Werthe besitzt. Man kann aber dieses Ergebniss verschieden auffassen. Erkennt man nämlich die Poisson'sche Molekulartheorie an (s. o. pag. 235), wonach $\mu = \frac{1}{4}$ sein müsste, so muss man die Abweichungen obiger Zahlen von diesem Werthe für Folgen mangelnder Isotropie und Homogenität der Stoffe erklären, bei Kautschuk, Gallerte und ähnlichen Stoffen aber, wo die Abweichung gar zu gross ist, darauf hinweisen, dass diese Stoffe eben nicht mehr völlig festen Charakters sind, sondern schon mehr sich wie Flüssigkeiten verhalten, für welche das Volumen constant, also (für kleine Aenderungen) $\mu = \frac{1}{2}$ ist. Immerhin wäre es doch sehr merkwürdig, wenn Flüssigkeiten und feste Körper derartig schroff von einander geschieden wären, dass für erstere einschliesslich Kautschuk u. s. w. $\mu = \frac{1}{2}$, für letztere $\mu = \frac{1}{4}$ wäre, oder mit anderen Worten, dass das Verhältniss $\varkappa$ der Gestaltselasticität k_2 zur Volumenelasticität k_1 (s. o. pag. 224) für Flüssigkeiten gleich null, für feste Körper aber genau gleich $\frac{3}{5}$ wäre, wie die Gleichungen

$$\mu = \frac{3 - 2\varkappa}{2(3 + \varkappa)}, \qquad \varkappa = \frac{3(1 - 2\mu)}{2(1 + \mu)}$$

erfordern würden. Ferner hat Voigt gerade für das von ihm untersuchte Glas, welches den besonders kleinen Werth 0·21 ergeben hat, den Nachweis der Isotropie und Homogenität geliefert. Der in Rede stehende Standpunkt ist daher kaum noch zu halten. Stellt man sich dagegen auf den Standpunkt der Stetigkeitstheorie oder auf den der Voigt'schen Molekulartheorie, so erhält μ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\varkappa$ die Bedeutung einer für jeden Stoff andern specifischen Constanten, und die Beziehung zwischen μ und $\varkappa$ ist durch die obigen Gleichungen (für kleine Zustandsänderungen) geregelt. Als definitive Werthe dieser Constanten können freilich die Zahlen der obigen Tabelle nur zum Theil gelten; sie enthält aber doch schon einige interessante Hinweise, insofern μ am grössten ist für Gallerte und Kautschuk und nächstdem für Blei, am kleinsten aber (von dem noch nicht sehr zuverlässigen Zinkwerthe abgesehen) für Aluminium, Platin, Gold und Glas. Mit steigender Temperatur wächst μ, d. h. die Quercontraction nimmt schneller zu als die Längsdilatation.

---

[1]) Maurer, Heidelberger In.-Diss. Lpz. 1886.

[2]) Katzenelsohn, Berl. In.-Diss. 1887. Die Werthe von δ sind z. Th. von mir berechnet, da die des Verf. fehlerhaft sind.

Längsschwingungen. Dieselben werden hier, indem im übrigen auf die Akustik verwiesen wird, nur erwähnt, insofern sie eine dynamische Methode zur Bestimmung von E u. s. w. liefern. Ist n die aus der Höhe des Tones ermittelte Zahl der Längsschwingungen pro Sekunde, l und s Länge und specifisches Gewicht des Drahtes, so ist

$$E = \frac{4 n^2 l^2 s}{9810}.$$

Die so bestimmten Werthe von E fallen meist etwas grösser aus als die statisch ermittelten.

Kubische Compression. Verwickelter als bei linearen Körpern sind die Gesetze von Zug und Druck bei flächenhaften oder körperlichen. Es ist aber doch für einige wichtige Fälle die Theorie entwickelt und mit dem Experiment combinirt worden. Hier muss es genügen, zwei dieser Fälle anzuführen, den des **Kreiscylinders** und den der **Kugel**.[1])

Der **Cylinder** sei, der Allgemeinheit wegen, **hohl**, der innere und äussere Radius r und R, der Zug von innen resp. aussen p resp. P; endlich wirke auf die beiden ringförmigen Endflächen der Zug Π. Setzt man alsdann, unter x die Axenrichtung verstanden,

$$\sqrt{y^2 + z^2} = s, \quad u = u, \quad v = \rho y, \quad w = \rho z,$$

so nehmen die Elasticitätsgleichungen (pag. 232) die Form

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 \rho}{ds^2} + \frac{3}{s}\frac{d\rho}{ds} = 0$$

an, und folglich sind die Lösungen

$$u = \gamma x, \quad \rho = \alpha + \frac{\beta}{s^2},$$

wobei sich für die Constanten $\alpha\,\beta\,\gamma$ aus den Grenzbedingungen (pag. 234), unter Benutzung der LAMÉ'schen Form der Elasticitätsconstanten ν und λ (pag. 232) die Werthe

$$\alpha = \frac{1}{2\nu}\,\frac{2\nu+\lambda}{2\nu+3\lambda}\left(\frac{PR^2 - pr^2}{R^2 - r^2} - \frac{\lambda}{2\nu+\lambda}\,\Pi\right),$$

$$\beta = \frac{1}{2\nu}(P-p)\frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2},$$

$$\gamma = \frac{1}{\nu}\,\frac{\nu+\lambda}{2\nu+3\lambda}\left(\Pi - \frac{\lambda}{\nu+\lambda}\,\frac{PR^2 - pr^2}{R^2 - r^2}\right)$$

ergeben. Damit sind $u\,v\,w$ bestimmt, und ferner wird die räumliche Dilatation

$$D = \frac{du}{dx} + 2\rho + s\frac{d\rho}{ds} = 2\alpha + \gamma = \frac{1}{2\nu+3\lambda}\left(\Pi + 2\,\frac{PR^2 - pr^2}{R^2 - r^2}\right). \tag{1}$$

Bei der Anwendung dieser Formeln können theilweise Specialisirungen vorgenommen werden. Handelt es sich z. B. um Dehnungsversuche an Röhren (pag. 245), so wird $P = 0$ und $p = 0$, folglich die relative Längsdehnung γ und die räumliche Dilatation D, die hier gleichzeitig auch die des inneren Hohlraumes ist:

$$\gamma = \frac{\nu+\lambda}{\nu}\,\frac{\Pi}{2\nu+3\lambda}, \quad D = \frac{\Pi}{2\nu+3\lambda}, \tag{2}$$

woraus nach Beobachtung von γ, D und Π sich ν und λ berechnen lassen. Ein zweiter Specialfall ist der, wo $P = 0$ und Π dadurch bestimmt ist, dass der Cylinder beiderseits durch unelastische Endplatten geschlossen ist, die dadurch, dass der innere Druck p (in den obigen Formeln $-p$) auf sie mitwirkt, auf die

[1]) F. NEUMANN, Vorl. über Elasticität, hrsg. v. O. E. MEYER, pag. 138 ff.

Mantelfläche einen Zug Π nach der Gleichung $\pi(R^2 - r^2)\Pi = \pi r^2 p$ ausüben. Man hat also hier den Fall eines geschlossenen Hohlcylinders unter inneren Druck und findet

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{2\nu + 3\lambda} \frac{r^2}{R^2 - r^2} p, \quad \beta = \frac{1}{2\nu} \frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2} p,$$
$$D = 2\left(\alpha + \frac{\beta}{s^2}\right) + \gamma = \left(\frac{3}{2\nu + 3\lambda} + \frac{1}{\nu} \frac{R^2}{r^2}\right) \frac{r^2}{R^2 - r^2} p. \tag{3}$$

Von andern Specialfällen wird bald die Rede sein.[1]

Für eine Hohlkugel ergeben sich die Formeln ganz ähnlich. Man hat hier

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u = \rho x, \quad v = \rho y, \quad w = \rho z,$$

die einzige Differentialgleichung lautet

$$\frac{d^2 \rho}{ds^2} + \frac{4}{s} \frac{d\rho}{ds} = 0,$$

und die Lösung ist

$$\rho = A + \frac{B}{s^3},$$

wo

$$A = \frac{1}{2\nu + 3\lambda} \frac{PR^3 - pr^3}{R^3 - r^3}, \qquad B = \frac{P - p}{4\nu} \frac{R^3 r^3}{R^3 - r^3};$$

endlich wird

$$D = \frac{3}{2\nu + 3\lambda} \frac{PR^3 - pr^3}{R^3 - r^3}. \tag{4}$$

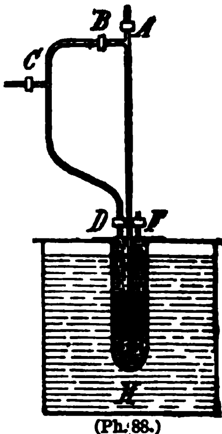
Die cubische Compressibilität C (in der Tabelle pag. 236 mit D bezeichnet), d. h. das Verhältniss der Volumänderung zu dem allseitigen Druck, der sie erzeugt, sowie der mit C reciproke Volumenmodul k_1, (s. o. pag. 220) ergiebt sich hiernach folgendermaassen für den Cylinder:

$$C = \frac{3}{2\nu + 3\lambda} = \frac{3D}{\Pi + 2\frac{PR^2 - pr^2}{R^2 - r^2}}, \quad k_1 = \frac{1}{C} = \frac{\Pi + 2\frac{PR^2 - pr^2}{R^2 - r^2}}{3D}, \tag{5}$$

für die Kugel

$$C = \frac{3}{2\nu + 3\lambda} = D\frac{R^3 - r^3}{PR^3 - pr^3}, \quad k_1 = \frac{1}{C} = \frac{1}{D} \frac{PR^3 - pr^3}{R^3 - r^3}. \tag{6}$$

Zur Bestimmung von C und k_1 sind Vollkörper aus experimentellen Gründen wenig geeignet, und man bedient sich daher hierzu gewöhnlich hohler Körper, insbesondere hohler Cylinder und hohler Kugeln, oder einer Combination beider, nämlich hohler Cylinder mit zwei halbkugeligen Enden. Regnault[2]) benutzte demgemäss den durch die Fig. 88 schematisch dargestellten Apparat. G ist das Gefäss aus dem zu untersuchenden Material; es ist oben mit einer langen Capillare versehen, bis zu einem bestimmten Punkte derselben mit Wasser gefüllt und in einem ebenfalls mit Wasser gefüllten Behälter befindlich, den wiederum ein grösserer, lediglich der Constanz der Temperatur dienender Behälter umgiebt. Bei geschlossenem Hahn B lässt man aus einem Reservoir comprimirte Luft auf dem Wege CD auf das Wasser wirken; das Gefäss und somit auch sein Hohlraum ver-



(Ph. 88.)

[1]) Amagat, Compt. R. 106, pag. 479 (1888) hat für die Compression von Hohlcylindern neuerdings einige interessante Sätze abgeleitet und experimentell bestätigt.

[2]) Regnault, Mém. de l'Acad. T. 21 (1847).

kleinert sich dann um einen Betrag, den man berechnen kann, wenn man das Ansteigen des Wassers in der Capillare misst. Mit Benutzung der Formeln (5) und (6) resp. geeigneter Combinationen derselben erhält man dann C und k_1. Auf diese Weise erhielt REGNAULT folgende Werthe (in Kilos pro qmm):

	C	k_1
Kupfer	0·00012675	7890
Messing	0·0001106	9280
Glas	0·0001725	5800

Hieran anschliessend seien noch einige neuere Werthe des Volumenmoduls k_1 angegeben, und zwar der Uebersicht halber gleichzeitig mit dem Gestaltsmodul k_2 (pag. 221), über den man das Weitere bei der Torsion (s. w. u.) findet.

	k_1	k_2
Stahl	18760	8340
Eisen	14850	7850
Kupfer	17170	5420
Messing	10630	3620
Glas	3540 bis 4230	1500 bis 2430

Ferner fand BUCHANAN[1]) für bleihaltiges Glas $C = 2{\cdot}92$ Milliontel für eine Athmosphäre Druck bei 12—13°. Die Bestimmungen für krystallinische Stoffe sehe man im Art. »Elasticität der Krystalle«.

Die Compressibilität fester Körper spielt übrigens auch eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Compressibilität der Flüssigkeiten mit dem OERSTED'schen Piezometer. Hier wirkt (s. Art. »Hydrostatik«) auf das Gefäss, welches die zu untersuchende Flüssigkeit aufnimmt, der gleiche Druck von innen und aussen, man hat also für den Fall der Kugel $p = P$, für den Fall des Cylinders $p = P = \Pi$ zu setzen und erhält somit in beiden Fällen die kubische Compression

$$-D = \frac{3p}{2\nu + 3\lambda}.$$

Hierin kommen die Grössen R und r nicht mehr vor, d. h. D ist von der Wanddicke des Gefässes nicht abhängig. Hierdurch wird die von OERSTED gehegte Ansicht, dass die Compression für sehr dünnwandige Gefässe zu vernachlässigen sei, widerlegt, und die Ansicht von COLLADON und STURM gerechtfertigt, dass man durch Versuche mit dem Piezometer nicht die Compressibilität der Flüssigkeit, sondern den Ueberschuss derselben über die Compressibilität des Gefässmaterials bestimmt.

Schliesslich ist einleuchtend, dass, wenn man die Compressibilität eines Körpers bestimmt hat, man durch Vergleich derselben mit der Dehnbarkeit, oder, was dasselbe ist, durch Vergleich von k_1 mit E, die Elasticitätszahl μ für diesen Körper ermitteln kann. Es ist nämlich, durch ν und λ ausgedrückt,

$$k_1 = \frac{1}{3}(2\nu + 3\lambda), \quad E = \nu\frac{2\nu + 3\lambda}{\nu + \lambda}, \quad \mu = \frac{\lambda}{2(\nu + \lambda)},$$

also

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{E}{6k_1}.$$

Der Gleichheit von E und k_1 entspricht z. B. der Werth $\mu = \frac{1}{3}$, der Beziehung $E = \frac{3}{2}k_1$ der Werth $\mu = \frac{1}{4}$, der Beziehung $E = \frac{1}{2}k_1$ der Werth $\mu = \frac{5}{12}$

1) BUCHANAN, Proc. R. Soc. Edinb. 10, pag. 697 (1880).

$= 0{\cdot}42$ u. s. w. In neuester Zeit hat CANTONE[1]) derartige Bestimmungen mit Hohlcylindern durchgeführt, die er einmal dem äussern Druck P_1, sodann dem innern Druck P_0 aussetzte. Die beiden Gleichungen

$$\delta V = -\frac{5-4\mu}{E}\,\frac{R_1^2 V P_1}{R_1^2 - R_0^2}, \quad \delta L = \frac{1-2\mu}{E}\,\frac{R_0^2 L P_0}{R_1^2 - R_0^2}$$

ergeben dann direkt E und μ, wenn im ersteren Falle das Volumen V und seine Aenderung δV, im zweiten Falle die Länge L und ihre Aenderung δL beobachtet wird. Die Zahlenergebnisse s. o. pag. 247.

Ferner hat AMAGAT[2]) mittelst eines Differential-Piezometers die Compression δV einer Kautschukkugel mit der $\delta V'$ einer gleich grossen Bronzekugel verglichen und beide nicht sehr verschieden gefunden; da nun in der Formel

$$2\mu = 1 - (1 - 2\mu')\frac{E'}{E}\cdot\frac{\delta V}{\delta V'}$$

E' (Modul des Kautschuks) sehr klein gegen E (Modul der Bronze) ist, ergiebt sich $\mu = \frac{1}{2}$.

Die Untersuchung des Einflusses der Compression der Thermometerkugeln gehört in die Thermometrie.

F. AUERBACH.

Biegung und Torsion.

Elastisches Gleichgewicht prismatischer Körper. Die Anwendung der allgemeinen Elasticitätsgleichungen auf beliebige elastische Vorgänge an beliebigen Körpern führt zu so grossen Schwierigkeiten, dass es erforderlich ist, gewisse vereinfachende Annahmen zu machen, und es kommt nur darauf an, dass diese Annahmen so gewählt werden, wie sie praktisch häufigen und wichtigen Fällen entsprechen. Eine derartige Annahme ist die der Kleinheit der Veränderungen, wenigstens wenn man sich auf Körper von sämmtlich endlichen Dimensionen beschränkt, und demgemäss Körper vom Charakter dünner Stäbe oder dünner Platten, bei welchen grössere Veränderungen thatsächlich vorkommen, für eine besondere Untersuchung (s. u.) reservirt. Zweitens haben die Körper, um deren elastische Erscheinungen es sich handelt, häufig prismatische oder cylindrische Gestalt, mit Endflächen, die auf der Axe senkrecht stehen. Drittens darf man oft von der Wirkung von Massenkräften, namentlich der Schwere, und von Druckkräften, welche auf die Mantelfläche wirken, absehen, braucht also nur Drucke auf die Endflächen in Betracht zu ziehen. Endlich soll, was ebenfalls häufig vorkommt, ein Punkt der einen Grundfläche so befestigt sein, dass das zugehörige Körperelement sich weder verschieben noch drehen kann. Unter diesen Voraussetzungen ist es DE ST. VENANT[1]) gelungen, das Problem zu lösen, allerdings

[1]) CANTONE, Rendic. Acad. Lincei 4, pag. 220 u. 292 (1888).

[2]) AMAGAT, C. R. 99, pag. 130 (1884).

[1]) ST. VENANT, De la Torsion des prismes, avec des Consid. s. leur flexion, Mém. des Sav. Etr. 14, pag. 233 (1855). — Mém. s. l. flexion des prismes, Liouv. J. (2) 1. (1856). — Eine eingehende Darst. d. Problems giebt auch CLEBSCH, Th. d. Elast. fester Körper, Lpz. 1862, pag. 70 ff.

nicht direkt, indem er den zu gegebenen Drucken gehörigen Gleichgewichtszustand ermittelte, sondern umgekehrt, indem er die zur Herstellung gegebener Gleichgewichtszustände erforderlichen Drucke bestimmte.

Ist der feste Punkt Anfangspunkt, die z-Axe Körperaxe, so sind die (nicht sämmtlich von einander unabhängigen) Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{1}$$

die zur Bestimmung der Verrückungscomponenten $u\,v\,w$ dienenden Grundgleichungen des Problems, wie sie sich aus den allgemeinen Elasticitätsgleichungen (pag. 232) ergeben. Für den festen Punkt gelten die Grenzbedingungen

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0;$$

für die Grenzflächen, wenn der Winkel zwischen der x-Axe und der Normale eines Oberflächenpunktes mit λ bezeichnet wird, die Grenzbedingungen

$$X_x \cos\lambda = X_y \sin\lambda = 0, \quad Y_x \cos\lambda + Y_y \sin\lambda = 0, \quad Z_z \cos\lambda + Z_y \sin\lambda = 0, \tag{3}$$

deren erste beiden durch Annahme

$$X_x = X_y = Y_y = 0$$

befriedigt werden; dabei wirkt alsdann zwischen den einzelnen Längsfasern des Körpers überhaupt kein Druck, sie sind ganz von einander unabhängig.

Die Behandlung dieser Grundgleichungen führt zu folgenden Endformeln:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\mu[a_0 x + \tfrac{1}{2}a_1(x^2-y^2) + a_2 xy + z[\tfrac{1}{2}b_1(x^2-y^2)+b_2 xy]] \\ &\quad + cyz + dz - \tfrac{1}{2}a_1 z^2 - \tfrac{1}{6}b_1 z^3, \\ v &= -\mu[a_0 y + a_1 xy - \tfrac{1}{2}a_2(x^2-y^2) + z[b_1 xy - \tfrac{1}{2}b_2(x^2-y^2)]] \\ &\quad - cxz + ez - \tfrac{1}{2}a_2 z^2 - \tfrac{1}{6}b_2 z^3, \\ w &= z(a_0 + a_1 x + a_2 y) + \tfrac{1}{2}z^2(b_1 x + b_2 y) - xy(b_1 y + b_2 x) + \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_z &= -E[a_0 + a_1 x + a_2 y + z(b_1 x + b_2 y)], \\ X_z &= -\frac{E}{2(1+\mu)}\left[-\frac{b_1}{2}[\mu x^2 + (2-\mu)y^2] - b_2(2+\mu)xy + cy + d + \frac{\partial\Omega}{\partial x}\right] \\ Y_z &= -\frac{E}{2(1+\mu)}\left[-b_1(2+\mu)xy - \frac{b_2}{2}[\mu y^2 + (2-\mu)x^2] - cx + e + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\right] \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hierin sind d und e Constanten, welche durch die Form des Querschnitts ihre Bestimmung finden, a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c willkürliche Constanten, welche die Mannigfaltigkeiten der Erscheinung ausmachen, und Ω ist eine Funktion von x und y, welche sich für eine gegebene Querschnittsform aus den Gleichungen:

allgemein: $$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}=0,$$

für $$x=y=z=0, \quad \Omega_0=0, \quad \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_0=0,$$

und für die Peripherie eines Querschnitts:

$$\left[-\frac{b_1}{2}[\mu x^2+(2-\mu)y^2]-b_2(2+\mu)xy+cy+d+\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right]\cos\lambda$$
$$+\left[-b_1(2+\mu)xy-\frac{b_2}{2}[\mu y^2+(2-\mu)x^2]-cx+e+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right]\sin\lambda=0 \tag{6}$$

bestimmt. Setzt man schliesslich in den Ausdrücken für $X_z\, Y_z\, Z_z$ einmal $z=0$, dann $z=l$ (Länge des Prismas) und kehrt die Vorzeichen um, so erhält man

die äusseren Kräfte, welche man auf die Grundflächen des Prismas wirken lassen muss, um den angegebenen Zustand herzustellen.

Specielle Fälle. Die Form der Ausdrücke für die Verrückungen und die Drucke zeigt, dass man die Veränderung, die das Prisma erfahren hat, betrachten kann als zusammengesetzt aus 6 speciellen Veränderungen, oder, da a_1 und a_2, b_1 und b_2 ganz symmetrisch vorkommen, aus 4 speciellen Veränderungen:

1) Ist nur a_0 von null verschieden, so findet man $d = 0$, $e = 0$, $\Omega = 0$, $X_z = 0$, $Y_z = 0$ und ferner

$$Z_z = Ea_0, \quad u = -\mu a_0 x, \quad v = -\mu a_0 y, \quad w = a_0 z. \tag{7}$$

Es ist dies der oben bereits behandelte Fall des axialen Zuges resp. der von ihm erzeugten Längsdehnung und Quercontraction.

2) Wenn nur c von 0 verschieden ist, so erhält man, wenn man ξ und η statt x und y vermöge der Gleichungen

$$x = \xi + \frac{e}{c}, \quad y = \eta - \frac{d}{c},$$

einführt:

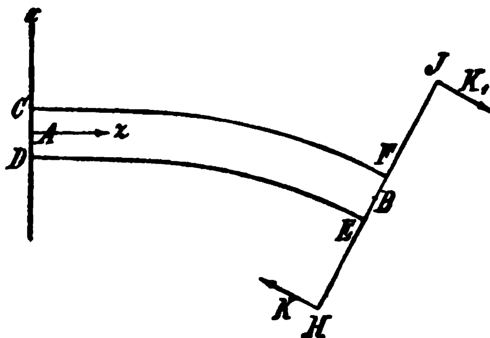
$$\left.\begin{aligned} &u = c\eta z, \quad v = -c\xi z, \quad w = \Omega, \\ &\left(c\eta + \frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) \cos\lambda + \left(-c\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) \sin\lambda = 0, \\ &Z_z = 0, \ X_z = -\frac{E}{2(1+\mu)}\left(c\eta + \frac{\partial\Omega}{\partial x}\right), \ Y_z = -\frac{E}{2(1+\mu)}\left(-c\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Jeder Querschnitt wird hier um einen gewissen, mit seinem Abstand von der festen Endfläche proportionalen Winkel gedreht, ausserdem aber, da w mit x und y variirt, auch noch gewölbt, und zwar werden, da w von z unabhängig ist, alle Querschnitte in derselben Weise gewölbt. Dieser elastische Vorgang heisst Torsion oder Drillung (s. w. u.).

3) Wenn nur a_1 von 0 verschieden ist, so findet man

$$\left.\begin{aligned} &d = 0, \quad e = 0, \quad \Omega = 0, \quad X_z = 0, \quad Y_z = 0, \\ &\text{dagegen} \quad Z_z = -Ea_1 x, \\ &u = -\tfrac{1}{2}a_1[\mu(x^2 - y^2) + z^2], \quad v = -a_1 \mu xy, \quad w = a_1 xz. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Diese Gleichungen, und ebenso die ganz entsprechenden, welche sich ergeben, wenn nur a_2 von 0 verschieden ist, stellen eine gewisse Art von Biegung dar, welche man Biegung erster Art nennen kann. Man denke sich einen Stab $CDEF$ (Fig. 89) mit der einen Endfläche CD gegen die xy-Ebene gestützt, so dass der mittelste Punkt A, zugleich Anfangspunkt der Coordinaten, fest ist ($u = 0$, $v = 0$, $w = 0$), alle übrigen Punkte dieser Endfläche aber wenigstens in der xy-Ebene bleiben müssen ($w = 0$).



(Fig. 89.)

Mit der anderen Endfläche sei in ihrem Mittelpunkt B ein Hebel HJ verbunden, an welchem das Kräftepaar KK_1 in der xz-Ebene angreift. Das Ergebniss ist die in den obigen Gleichungen ausgesprochene Biegung.

4) Macht man endlich alle Constanten ausgenommen b_1 zu Null, so erhält man folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
Z_z &= -E b_1 x z \\
X_z &= -\frac{E}{2(1+\mu)}\left[-\frac{b_1}{2}(\mu x^2 + (2-\mu)y^2) + d + \frac{\partial\Omega}{\partial x}\right] \\
Y_z &= -\frac{E}{2(1+\mu)}\left[-b_1(2+\mu)xy + e + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\right],
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= -\tfrac{1}{2}\mu b_1 z(x^2 - y^2) + dz + \tfrac{1}{6} b_1 z^3 \\
v &= -\mu b_1 xyz + ez \\
w &= \tfrac{1}{2} b_1 x(z^2 - 2y^2) + \Omega,
\end{aligned}
$$

wo Ω sich durch die aus (6) durch Specialisirung hervorgehenden Gleichungen bestimmt. Diese Deformation, und ebenso die analoge, welche entsteht, wenn nur b_2 beibehalten wird, ist eine Biegung der zweiten Art und, wie man sieht, von sehr verwickeltem Charakter.

Die Biegung, wie sie in der Praxis durch angehängte oder aufgelegte Gewichte hervorgerufen wird (s. w. u.), stimmt mit keinerlei der beiden hier abgeleiteten Arten von Biegungen völlig überein.[1])

Für die die Deformationen erzeugenden äusseren Kräfte führen die abgeleiteten Formeln näherungsweise und unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt des Körpers symmetrisch gegen beide Queraxen sei, zur Zerlegung in die Componenten

$$X = E b_1 T_2, \quad Y = E b_2 T_1, \quad Z = E a_0 q, \tag{11}$$

und in die Drehungsmomente

$$
\begin{aligned}
M_x &= E(a_2 T_1 + b_2 T_2 z), \\
M_y &= -E(a_1 T_2 - b_1 T_1 z), \\
M_z &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left[-c(T_1 + T_2) + N\right],
\end{aligned} \tag{12}
$$

wo q der Querschnitt, T_1 und T_2 die Hauptträgheitsmomente, also

$$q = \int dx\,dy, \quad T_1 = \int y^2 dx\,dy, \quad T_2 = \int x^2 dx\,dy$$

und endlich

$$N = \int\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) dx\,dy \tag{12a}$$

ist; hierin liegt das folgende Ergebniss: Die in der Längsrichtung des prismatischen Körpers wirkende Kraftcomponente erzeugt eine reine Dehnung, die beiden andern Componenten wirken bei den beiden zu einander senkrechten Biegungen der zweiten Art mit; das Drehungsmoment um die Längsaxe erzeugt Torsion; die beiden andern Dehnungsmomente wirken bei Biegungen sowohl der ersten wie der zweiten Art mit.

Andere Probleme des elastischen Gleichgewichts. Das de St. Venant'sche Problem bezieht sich, wie bemerkt, nur auf prismatische Körper und zieht nur Drucke auf die Endflächen in Betracht. Es sind nun seitdem auch einige andere einschlägige Probleme theil gelöst, theilss behandelt worden; dieselben können hier nur in Kürze aufgeführt werden.

1) Gleichgewicht kurzer cylindrischer Körper, also mässig dicker Platten, auf welche — gerade umgekehrt wie bei St. Venant — nur in den

[1]) Ueber die Bestimmung von Ω für bestimmte Querschnittsformen s. Clebsch, a. a. O. pag. 99 ff., wo auch gezeigt wird, dass man, solange der Querschnitt beliebig bleibt, zwar nicht Ω, wohl aber die Grössen

$$\int\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,dq \quad \text{und} \quad \int\frac{\partial\Omega}{\partial y}\,dq,$$

allgemein angeben kann.

Mantelflächen Kräfte wirken. Dieses Problem ist von CLEBSCH[1]) allgemein behandelt und, theils näherungsweise allgemein, theils für specielle Querschnittsformen (Kreisplatte) und für specielle Deformationen (Ausdehnung, Biegung) durchgeführt worden (s. auch u. bei »Biegung von Platten«).

2) Gleichgewicht prismatischer resp. cylindrischer Körper, auf deren Grundflächen und Mantelflächen Kräfte wirken. Behandelt einerseits von POCHHAMMER[2]) mit Anwendung auf Vollcylinder, Hohlcylinder, gekrümmte Cylinder u. s. w.; andererseits von MATHIEU,[3]) unter der Voraussetzung, dass die Endflächen sich auf feste Wände stützen, und dass die Mantelfläche Normaldrucke erfährt.

3) Gleichgewicht der Kugelschale, einerseits behandelt von LAMÉ,[4]) zuerst ohne, dann mit Hinzunahme von Massenkräften (Schwerkraft, Centralattraktion, Centrifugalkraft, wenn die Kugel rotirt), andererseits von SIR W. THOMSON[5]) und im Anschluss an seine Entwicklung von R. HOPPE[6]); endlich nach einer Methode, welche der LAMÉ'schen ähnlich ist, aber auch den Uebergang zur Dynamik, d. h. zu elastischen Schwingungen gestattet, von JAERISCH.[7])

4) Gleichgewicht von Rotationskörpern, von WANGERIN[8]) gelöst. Im Anschluss an LAMÉ wird zuerst die Schale behandelt, die von excentrischen Kugeln begrenzt ist, sodann Kreisring und Rotationsellipsoid; schliesslich wird gezeigt, dass die Gleichungen für einen beliebigen (homogenen isotropen) Rotationskörper sich integriren lassen, wenn die Lösung der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ für diesen Körper bekannt ist; damit ist das elastische Problem auf das einfachere Potentialproblem zurückgeführt. Auch dieses Problem ist von JAERISCH im oben schon angedeuteten Sinne erweitert worden.[9])

Endliche Formänderung eines sehr dünnen Stabes. Bei Körpern, welche eine oder zwei sehr kleine Dimensionen haben, werden im allgemeinen, selbst wenn die Verschiebungen jedes Volumenelementes in sich selbst nach wie vor sehr klein bleiben, die Verschiebungen der einzelnen Elemente sich doch in der Weise addiren, dass die räumliche Verschiebung eines Elementes beträchtlich wird. Thatsächlich werden aber hier auch die inneren Verschiebungen eines Elements für sich grösser werden können, als bei einem nach allen Richtungen erheblich ausgedehnten Körper. Aus beiden Gründen ist das Problem für sich zu behandeln; die Lösung desselben verdankt man KIRCHHOFF.[10])

Die Methode beruht auf der Erwägung, dass die inneren Verschiebungen eines sehr kleinen Körpers nur abhängig sind von den auf seine Oberfläche,

1) CLEBSCH, Th. d. El. f. Körper, Lpz. 1862, pag. 148.

2) POCHHAMMER, Unters. üb. d. Gleichgewicht d. elast. Stabes, Kiel 1879.

3) MATHIEU, J. de l'Éc. polytechn. 1881 u. Compt. R. 90, pag. 1272 (1880). — S. auch PADOVA, N. Cim. (3) 10, pag. 102 (1882).

4) LAMÉ, Liouville Journ. 19. (1854) u. Leçons s. l. coordonnées curvilignes, Par. 1859, pag. 299.

5) W. THOMSON, Phil. Trans. 153, (2), pag. 583 (1864).

6) R. HOPPE, Quart. J. of. math. 9. pag. 318 (1871).

7) JAERISCH, CRELLE, J. 88, pag. 131; Mitth. math. Ges. Hamburg 1886, 1, pag. 155. — In derselben Weise wird dann auch das Gleichgw. d. Kreiscylinders ganz allgemein behandelt; ebenda pag. 167.

8) WANGERIN, Ueb. d. Gleichgew. elast. Rot.-Körper. Progr. Sophien-R. Sch. Berl. 1873.

9) JAERISCH, CRELLE J. 104, pag. 177 (1889), Mitth. math. Ges. Hamb. 1889, 1, pag. 275. An die Stelle obiger Potentialgleichung tritt hier die allgemeine $\Delta u + \alpha^2 u = 0$. — Ueber den Fall des Kegels s. noch MEISSNER, In.-Diss. Tüb. 1882.

10) KIRCHHOFF, CRELLE J. 56 (1858)., Ges. Abh. pag. 285 und Mechanik, pag. 407.

nicht aber von den auf sein Inneres wirkenden Kräften, vorausgesetzt, dass die letzteren nicht sehr gross gegen die ersteren sind. Darf man also auch die Formeln (4) nicht auf den ganzen Stab anwenden, so darf man dies doch für jeden einzelnen Theil desselben thun; und indem man alsdann das Princip der Continuität von Theil zu Theil hinzuzieht, gelangt man zu den Formeln für den ganzen Stab. Um diesen Gedanken auszuführen, führt man zwei Coordinatensysteme ein, ein im Raume festes, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt des festen Stabendes, dessen ζ-Axe die Schwerpunktlinie (Axe) des Stabes ist, und dessen ξ- und η-Axe in die Richtungen der Hauptaxen der Querschnitte fallen, alles vor der Deformation gedacht; und ein anderes, dessen Anfangspunkt ein Punkt P der Axe, im Abstande s vom festen Punkte P_0 ist, und dessen Axen $x\,y\,z$ entsprechend wie die des ersten liegen, nur diesmal alles im deformirten Zustande oder, was dasselbe ist, im Körper fest gedacht. Ein nahe bei P gelegener beliebiger Punkt des Stabes habe vor der Deformation die Coordinaten $x\,y\,z$, nachher $x+u$, $y+v$, $z+w$, sodass $u\,v\,w$ die relativen Verschiebungen desselben gegenüber P sind; letzterer Punkt aber habe im ersten System die Coordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$. Ferner seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Cosinus der 9 Winkel zwischen den Axen beider Systeme, σ die relative Aenderung des Axenelementes ds, in Folge dessen

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha_3(1+\sigma), \qquad \frac{d\eta}{ds} = \beta_3(1+\sigma); \qquad \frac{d\zeta}{ds} = \gamma_3(1+\sigma), \tag{13}$$

und zur Abkürzung werde gesetzt

$$\begin{aligned} \alpha_3\frac{d\alpha_2}{ds} + \beta_3\frac{d\beta_2}{ds} + \gamma_3\frac{d\gamma_2}{ds} &= \frac{d\alpha'}{ds} = p \\ \alpha_1\frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_1\frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_1\frac{d\gamma_3}{ds} &= \frac{d\beta'}{ds} = q \\ \alpha_2\frac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2\frac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2\frac{d\gamma_1}{ds} &= \frac{d\gamma'}{ds} = r. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Continuität findet dann ihren Ausdruck in den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -ry + qz, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -pz + rx, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -qx + py + \sigma;$$

andererseits liefern die Gleichungen (4), wenn man, was bis auf einen Ausnahmefall erlaubt ist, die mit b_1 und b_2 behafteten höheren Glieder vernachlässigt, für jedes Element die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial z} = cy - a_1 z + d, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -cx - a_2 z + e, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = a_0 + a_1 x + a_2 y.$$

Die Vergleichung führt zunächst zu dem Ergebniss:

$$d = e = 0, \qquad \frac{d\alpha'}{ds} = a_2, \qquad \frac{d\beta'}{ds} = -a_1, \qquad \frac{d\gamma'}{ds} = -c, \qquad \sigma = a_0;$$

es liefert also σ die Ausdehnung, $d\gamma'/ds$ die Torsion, $d\beta'/ds$ und $d\alpha'/ds$ die Biegungen der ersten Art in der xz- und der yz-Ebene. Mit Hilfe der Gleichungen (11) bis (12a) und wenn man noch zur Abkürzung

$$\frac{T_1 + T_2 - \frac{N}{c}}{2(1+\mu)} = T_0$$

setzt, erhält man somit

$$\sigma = \frac{Z}{Eq}, \qquad \frac{d\alpha'}{ds} = \frac{M_x}{ET_1}, \qquad \frac{d\beta'}{ds} = \frac{M_y}{ET_2}, \qquad \frac{d\gamma'}{ds} = \frac{M_z}{ET_0}. \tag{15}$$

Nunmehr erhält man unmittelbar die Gleichgewichtsbedingungen, indem man zum Ausdruck bringt, dass für jedes Stabtheilchen die Kräfte und Momente sich

gegenseitig zerstören müssen. Wirken ausschliesslich auf die Grundflächen Kräfte, und bestehen diese nur in Kräftepaaren und einer Axialkraft C, so lautet das Endergebniss für isotrope Stäbe:

$$
\begin{aligned}
T_1 \frac{dp}{ds} + (T_0 - T_2) qr - \frac{\gamma_2 C}{E} &= 0 \\
T_2 \frac{dq}{ds} + (T_1 - T_0) rp + \frac{\gamma_1 C}{E} &= 0 \\
T_0 \frac{dr}{ds} + (T_2 - T_1) pq &= 0.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Für beliebige Stäbe kann man die Gleichungen in übersichtlicher Form aufstellen, indem man vermöge der Gleichungen

$$M_x = \frac{\partial P}{\partial p}, \quad M_y = \frac{\partial P}{\partial q}, \quad M_z = \frac{\partial P}{\partial r}, \quad Z = \frac{\partial P}{\partial \sigma}$$

das elastische Potential des Stabes einführt; sie lauten dann

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \frac{\partial P}{\partial p} &= r \frac{\partial P}{\partial q} - q \frac{\partial P}{\partial r} + C\gamma_2 \\
\frac{d}{ds} \frac{\partial P}{\partial q} &= p \frac{\partial P}{\partial r} - r \frac{\partial P}{\partial p} - C\gamma_1 \\
\frac{d}{ds} \frac{\partial P}{\partial r} &= q \frac{\partial P}{\partial p} - p \frac{\partial P}{\partial q}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit denen für die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt [s. Art. »Dynamik«, pag. 91 (15a)], so sieht man, dass sie mit ihnen völlig übereinstimmen, wenn man dort als wirkende Kraft die Schwerkraft einführt, so dass $M_z = 0$ wird, an die Stelle der Zeit t den Abstand s eines Stabquerschnittes vom festen Querschnitt und an die Stelle der kinetischen Energie K die potentielle P setzt. Diese analytische Uebereinstimmung ist von Kirchhoff entdeckt worden; Hess[1]) hat sie alsdann benutzt, um mit Hilfe des Rotationsproblems das elastische Problem eingehend zu behandeln. Dabei entspricht jeder Specialisirung des einen Problems eine analoge Specialisirung des andern. Dem Falle, dass dort die Schwere nicht wirkt oder der Schwerpunkt zugleich der feste Punkt ist, entspricht hier der Fall, dass keine Axialkraft wirkt, also $C = 0$ ist, d. h. der Fall der gleichzeitigen Biegung und Torsion des dünnen Stabes. Den Winkelgeschwindigkeiten um die drei Hauptaxen des Körpers dort entsprechen hier die Torsion um die Längsaxe und die Biegungen um die beiden Queraxen. Wie sich dort ein Bild für die Drehung durch das Abrollen zweier Kegel gewinnen lässt, so können hier aus den Grössen von Biegung und Drillung zwei windschiefe Flächen erzeugt werden, durch deren successives Aufeinanderbiegen die Ueberführung des graden und ungedrillten Stabes in seinen gebogenen und gedrillten Zustand versinnlicht wird. Nur ist das elastische Problem mannigfaltiger als das dynamische, weil hier die drei Fälle zu unterscheiden sind, dass der Widerstand gegen Drillung im Vergleich zu den beiden Biegungswiderständen der kleinste, mittelste oder grösste ist; aus demselben Grunde erhält man auch mannigfaltigere Specialfälle durch Gleichsetzen beider Biegungswiderstände, eines Biegungs- und eines Drillungswiderstandes, aller drei Widerstände u. s. w. Ein anderer Fall, in welchem das Rotationsproblem gelöst worden ist, ist der, dass die Schwere wirkt, der Körper aber ein Rotationskörper ist und der feste Punkt auf der Figuraxe liegt, d. h. der Fall des Kreisels; demselben entspricht hier die Biegung und Drillung eines

[1]) W. Hess, Münch. Ber. 1883, pag. 82; Math. Ann. 23, pag. 181 (1884); 25, pag. 1 (1885).

dünnen Stabes mit zwei gleichen Widerständen, auf dessen freies Ende eine Kraft und ein um die Hauptaxe ungleichen Widerstandes drehendes Kräftepaar einwirkt; dabei ist wieder zu unterscheiden, ob die beiden gleichen Widerstände Biegungswiderstände sind oder ob einer von ihnen der Drillungswiderstand ist. Besonders einfach und zugleich wichtig ist der Specialfall, welcher dort zum ebenen Pendel, hier zur Biegung des isotropen Stabes in einer Ebene führt; die Gleichungen (16) geben dann als einzige Grundgleichung, wenn φ die Neigung des Elementes ds ist,

$$ET_2 \frac{d^2\varphi}{ds^2} = C\sin\varphi. \tag{18}$$

Die Anwendung der Formeln des Rotationsproblems auf das elastische führt noch nicht zur vollständigen Lösung des letzteren, man muss vielmehr, um die Gestalt der deformirten Axe des Stabes zu finden, noch die Integrationen

$$\xi = \int \alpha_3\, ds, \qquad \eta = \int \beta_3\, ds, \qquad \zeta = \int \gamma_3\, ds$$

ausführen. Es können hierfür, indem im Uebrigen auf Hess verwiesen wird, nur zwei Specialfälle angeführt werden. Der erste ist der der Biegung und Torsion eines isotropen Stabes mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten ($T_1 = T_2 = T$); es ergiebt sich, wenn die c Constanten sind und die ξ Axe passend gewählt wird,

$$\xi = c_1 \left[1 - \cos\frac{T - T_0}{T} rs\right], \qquad \eta = c_1 \sin\frac{T - T_0}{T} rs, \qquad \zeta = c_2 s, \tag{19}$$

oder auch in andrer Form, wenn man

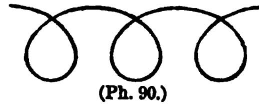
$$\alpha_3 = \cos\psi\sin\vartheta, \qquad \beta_3 = \sin\psi\sin\vartheta, \qquad \gamma_3 = \cos\vartheta$$

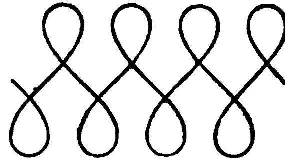
setzt und berücksichtigt, dass $p^2 + q^2$ in diesem Falle eine Constante c_0^2 ist:

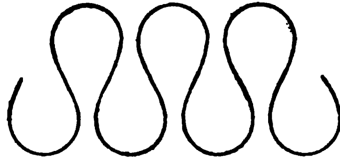
$$\xi = \frac{1}{c_0}\sin^2\vartheta\sin\psi, \qquad \eta = -\frac{1}{c_0}\sin^2\vartheta\cos\psi, \qquad \zeta = s\cos\vartheta. \tag{20}$$

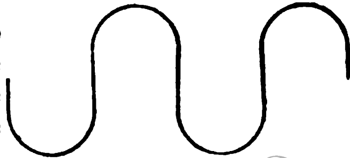
Der Stab bildet also eine Schraubenlinie; die Axe derselben ist die ζ-Axe, der Radius des Cylinders, auf dem sie liegt, ist $\sin^2\vartheta / c_0$, die Höhe eines Schraubenganges ist $2\pi \sin\vartheta\cos\vartheta / c_0$. Der zweite Fall ist der der einfachen Biegung in einer Ebene, der dem Kreispendel entspricht. Hier ergiebt sich aus (18):

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{c - \frac{2C}{ET_2}\cos\varphi}}, \tag{21}$$


(Ph. 90.)


(Ph. 91.)

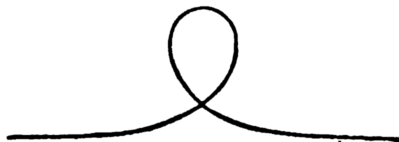

(Ph. 92.)


(Ph. 93.)

wo c eine Constante ist. Der Winkelgeschwindigkeit beim Pendel entspricht hier die Krümmung des Stabes, den Umkehrpunkten des Pendels entsprechen die Wendepunkte der Curve, die der Stab bildet. Der rotatorischen Bewegung des Pendels entspricht eine Stabform ohne Wendepunkte; sie bildet alsdann eine Reihe von Schleifen, in deren Doppelpunkten die Stabtheile praktisch natürlich nicht ineinander, sondern übereinander liegen (Fig. 90). Der schwingenden Bewegung des Pendels entspricht eine Stabform mit Wendepunkten, und je nach den Umständen der äusseren Einwirkung mit Schleifen (Fig. 91) oder ohne Schleifen (Fig. 92 und 93), wobei letztere in einem gewissen Specialfall in die einfache Curve der Fig. 94, für schwache Krümmung aber in eine Sinuslinie übergeht, grade wie die Geschwindigkeit



(Fig. 94.)



(Fig. 95.)

des Pendels bei kleiner Amplitude; den Grenzfall endlich, in welchem das Pendel sich asymptotisch dem höchsten Punkte nähert, entspricht hier die Stabform, bei welcher derselbe eine einzige Schleife bildet, deren beide Enden sich asymptotisch der Axe nähern: es ist die schon 1692 von JAC. BERNOUILLI behandelte elastische Curve (Fig. 95).[1])

Methode der Reihenentwickelung. Eine andere Methode, die elastischen Erscheinungen bei dünnen Stäben zu untersuchen, ist von F. NEUMANN[2]) angegeben worden. Sie beruht darauf, dass man die Druckcomponenten und die Verrückungscomponenten nach aufsteigenden Potenzen der Querdimensionen aus ihren Werthen für die Axe entwickelt und höhere Glieder fortlässt. Die Methode ist auch auf heterotrope Körper anwendbar und z. B. von VOIGT und BAUMGARTEN (s. Elasticität d. Krystalle) angewandt worden; dagegen macht sie es nothwendig, für jeden Querschnitt die Rechnung besonders durchzuführen. Für die Drucke und die ausschliesslich auf die Endflächen wirkenden Kräfte erhält man die allgemeinen, für die Axe giltigen Gleichungen

für kreisförmigen Querschnitt (Radius R):

$$X + \frac{1}{8} R^2 \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial z \, \partial x} \right) = \frac{1}{4} R^2 \frac{\partial^3 Z_z}{\partial z^2 \, \partial x}$$
$$Y + \frac{1}{8} R^2 \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial z \, \partial y} \right) = \frac{1}{4} R^2 \frac{\partial^3 Z_z}{\partial z^2 \, \partial y} \tag{22}$$

für rechteckigen Querschnitt (Kanten a und b):

$$X + \frac{1}{6} \left(\frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{b^2}{4} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial z \, \partial x} \right) = \frac{a^2}{12} \frac{\partial^3 Z_z}{\partial z^2 \, \partial x}$$
$$Y + \frac{1}{6} \left(\frac{a^2}{4} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{b^2}{4} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial z \, \partial y} \right) = \frac{b^2}{12} \frac{\partial^3 Z_z}{\partial z^2 \, \partial y}. \tag{23}$$

Für isotrope Körper gelangt man von diesen Gleichungen zu den Gleichungen für die Verrückungen u und v in der Querrichtung, indem man einfach $\frac{\partial Z_z}{\partial x}$ durch $E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ und $\frac{\partial Z_z}{\partial y}$ durch $E \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ ersetzt, so dass die vierten Differentialquotienten von u und v nach z auftreten. Wirken auf die Masse äussere Kräfte nicht, sieht man insbesondere von der Schwere ab, so werden XYZ null, und die Differentialgleichungen für den deformirten Gleichgewichtszustand lauten einfach

$$\frac{d^4 u}{dz^4} = 0, \qquad \frac{d^4 v}{dz^4} = 0. \tag{24}$$

Theorie der Biegung von Stäben. Für die Behandlung dieser Erscheinungen kann man drei verschiedene Ausgangspunkte wählen, nämlich entweder den Fall 3) des ST. VENANT'schen Problems (Biegung erster Art), oder die der Pendelbewegung entsprechende ebene Biegung der KIRCHHOFF'schen Theorie (pag. 259) oder endlich die NEUMANN'sche Theorie. Im ersten Falle erhält man die Biegung durch ein Kräftepaar am freien Ende [s. o. Fig. 89 und

[1]) Für die allgemeineren Fälle giebt HESS a. a. O. zahlreiche Abbildungen von Curven.

[2]) F. NEUMANN, Vorl. üb. d. Th. d. Elasticität, hrsg. v. O. E. MEYER, Lpz. 1885, pag. 351.

Gleichungen (9)], die Constante a_1 bestimmt sich aus dem Kräftepaar K und seinem Hebelarm $h = HJ$ durch die Gleichung

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \frac{Kh}{ER^4} \quad \text{oder} \quad a_1 = 12 \frac{Kh}{Eab^3}, \tag{24a}$$

je nachdem der Querschnitt des Stabes kreisförmig (Radius R) oder rechteckig (a Breite, b Höhe) ist, und die Senkung des freien Axenendes beträgt daher, wenn L die Länge des Stabes ist:

$$S = \frac{2}{\pi} \frac{L^2}{R^4} \frac{Kh}{E}, \quad \text{resp.} \quad S = 6 \frac{L^2}{ab^3} \frac{Kh}{E}. \tag{25}$$

Bei gleichem Querschnitt verhalten sich diese Senkungen wie $2/R^2 : 6/b^2$ und wenn das Rechteck ein Quadrat ist, wie $\pi : 3$; der quadratische Stab wird also etwas schwächer gebogen als der kreisrunde. Die Axe wird in die Curve

$$x = -\tfrac{1}{2} a_1 z^2, \tag{26}$$

(x Biegungsrichtung, z Axenrichtung), also in eine Parabel gebogen, von welcher jedoch gewöhnlich nur ein sehr schwach gekrümmtes Stück in Betracht kommt.

Wählt man den zweiten Ausgangspunkt, so findet man die elastische Curve aus Gleichung (21), oder in rechtwinkligen Coordinaten, wenn α und β gewisse Constanten sind:

$$z = \int \frac{(x^2 - \beta)\, dx}{\sqrt{4\alpha^4 - \beta^2 + 2\beta x^2 - x^4}}. \tag{27}$$

Für $\beta > 2\alpha^2$ erhält man den Typus der Fig. 90, für $\beta < 2\alpha^2$ den Typus der Fig. 91 und 92—94, endlich für $\beta = 2\alpha^2$ den BERNOUILLI'schen Typus Fig. 95; in letzterem Falle kann man integriren und erhält Logarithmen oder, wenn man $dx/dz = tg\,\vartheta$ setzt, die einfache Gleichung

$$x^2 = 2\,\alpha^2 \cos\vartheta + \beta. \tag{27a}$$

Man kann alle diese Fälle mit geeigneten Objekten, z. B. stählernen Federn oder Gummibändern herstellen, indem man die betreffenden Kräfte mit den Fingern ausübt. Bei grösseren und massigeren Objekten, wie in die Wand eingelassenen Stäben, Balken u. s. w., bildet sich stets nur ein kurzes Stück der elastischen Curve aus, und es gilt dann näherungsweise die schon von BERNOUILLI gefundene Gleichung

$$x = \frac{P}{2FE} \left(Lz^2 - \frac{z^3}{3} \right), \tag{27b}$$

wo P das biegende Gewicht und F vom Querschnitt abhängig ist. Direkt findet man die Werthe von F für verschiedene Querschnittsformen am besten nach der dritten (NEUMANN'schen) Methode, von deren beiden Differentialgleichungen (24) hier nur die erste in Betracht kommt; setzt man dann noch $z = L$, so findet man die Senkung des freien Endes für kreisförmigen resp. rechteckigen Querschnitt

$$S = \frac{4}{3\pi} \frac{PL^3}{R^4 E}, \quad \text{resp.} \quad S = \frac{4PL^3}{ab^3 E}. \tag{28}$$

Vergleicht man diese Formeln mit den für die ST. VENANT'sche Biegung erster Art giltigen (25), so sieht man, dass hier $\frac{2}{3}\, PL$ an die Stelle von Kh dort tritt; die beiden Erscheinungen sind also, selbst wenn man PL als analog mit Kh auffasst, nicht nur hinsichtlich der Biegungscurven (Gleichung 26) resp. (27 b), sondern auch hinsichtlich der Senkungen des freien Endes von einander verschieden.[1])

[1]) Eine fernere Art der Darstellung gewisser Biegungscurven s. b. SANG, Proc. Edinb. Soc. 1883, pag. 172.

Die NEUMANN'sche Methode ist auch am geeignetsten, um die Modificationen abzuleiten, welche die Formeln erleiden, wenn die Versuchsbedingungen, unter welchen der Stab gebogen wird, abgeändert werden. Bisher wurde das eine Ende als fest, das andere, belastete, als frei angenommen. Es können aber auch die beiden Enden lose aufgestützt und die Mitte des Stabes belastet sein; oder es können drittens beide Enden fest und die Mitte belastet sein (die Abbildungen dieser Fälle s. w. u.). Die Differentialgleichung $d^4u/dz^4 = 0$ bleibt dann bestehen, aber die Grenzbedingungen ändern sich. Für gestützte Enden wird die Biegungscurve

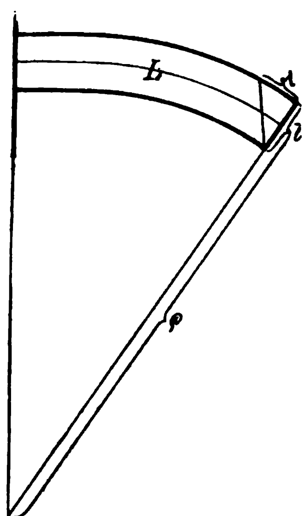
$$x = \frac{PL}{2E}\left(\frac{L^2}{2} - 3z^2 \pm \frac{2z^3}{L}\right), \tag{29}$$

wo der Anfangspunkt der Coordinaten in der Mitte des Stabes liegt, F vom Querschnitt abhängt, und wo das positive Zeichen für die positive, das negative für die negative Hälfte des Stabes gilt. Die Senkung der Mitte wird bei kreisförmigem resp. rechteckigem Querschnitt

$$S = \frac{1}{12\pi}\,\frac{PL^3}{R^4E}, \text{ resp. } S = \frac{1}{4}\,\frac{PL^3}{ab^3E}; \tag{30}$$

sie beträgt also nur $\frac{1}{16}$ der Senkung des freien Endes in dem zuerst betrachteten Falle. Noch kleiner, nämlich nur $\frac{1}{64}$ jener ist sie im dritten Falle, d. h. wenn die Enden fest sind.

Beziehung der Biegung zur Dehnung. Nur bei einem unendlich dünnen Stabe ist die Biegung eine einfache Erscheinung; bei einem Stabe mit endlichem Querschnitt ist sie dies, wie die Lösungen des ST. VENANT'schen Biegungsproblems (Gleichungen (9), pag. 254) zeigen, nur für die durch die Axe des Stabes gelegte, auf der Biegungsebene senkrechte, also bei vertikaler Biegung ursprünglich horizontale Ebene $x = 0$; dann ist nämlich $v = 0$, $w = 0$, und nur die Biegung u bleibt übrig. Jede andere Horizontalschicht des Stabes hingegen wird nicht nur gebogen, sondern erfährt auch eine Aenderung der Länge, und zwar die über der Mittelschicht gelegenen Schichten ($x > 0$) eine Verlängerung ($w > 0$), die unterhalb gelegenen ($x < 0$) eine Verkürzung ($w < 0$), und diese Längenänderung ist dem Abstande x der betreffenden Schicht von der Mittelschicht proportional. Ausserdem wächst diese Längenänderung mit a_1, d. h. nach Gleichung (24a), wenn die Biegung stärker wird, und zwar ist sie, wie leicht ersichtlich, an jeder Stelle der daselbst durch die Biegung erzeugten Krümmung direkt, d. h. dem Krümmungsradius umgekehrt proportional. Man kann den Zusammenhang zwischen den beiden Erscheinungen, nämlich der Biegung einerseits und der Dilatation und Contraktion andrerseits auch umgekehrt auffassen, indem man sagt: Wenn man die oberen Schichten eines Stabes proportional ihrem Abstand von der Mittelschicht streckt, die unteren ebenso zusammendrückt, und wenn man dabei die Forderung stellt, dass jeder ursprünglich auf der Axe senkrechte Querschnitt auch nach der Deformation auf ihr senkrecht bleibe, so ist das Ergebnis eine Biegung des Stabes nach unten, und für kleine Biegungen (Fig. 96) verhält sich, wenn hierbei die elastische Curve als Kreisbogen betrachtet wird (sonst muss man jedes Stück des Stabes für sich betrachten), der Krümmungsradius ρ zur



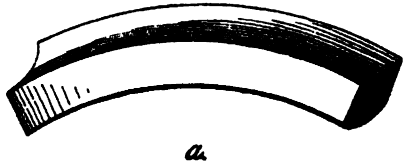
(Ph. 96.)

Dicke des Stabes b in der Krümmungsebene wie die ursprüngliche Länge des Stabes L zu dem durch die Deformation hervorgerufenen Längenunterschied zwischen der obersten und untersten Schicht, in Formel

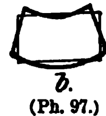
$$\rho : b = L : 2\lambda$$

(λ Verlängerung der obersten Schicht). Mit Hilfe dieser Beziehung kann man, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann, die elementaren Biegungsgesetze aus den entsprechenden Gesetzen von Zug und Druck ableiten.

Querbiegung. Da die Biegung mit einer Längenänderung der einzelnen Schichten verknüpft ist, die letztere aber zugleich eine Querdeformation dieser Schichten bedingt (s. Art. »Zug und Druck«, pag. 244), so folgt, dass auch die Längsbiegung von einer Querbiegung begleitet ist. Wie dort der Längsdehnung eine Quercontraction und umgekehrt entspricht, so entspricht hier einer Längsbiegung mit der Convexität nach unten eine Querbiegung mit der Convexität nach oben. Ist z. B. ein Stab von rechteckigem Querschnitt mit beiden Enden nach unten gebogen (Fig. 97a), so erhält der Querschnitt gleichzeitig die Form (Fig. 97b); die obere und untere Grenzfläche werden dadurch antiklastische oder sattelartige Flächen (THOMSON und TAIT, Theor. Physik 1, pag. 96), die Seitenflächen geneigte Ebenen; mit einem Kautschukstab kann man dies dem blossen Auge sehr deutlich sichtbar machen. Die Querkrümmung steht, wie die obigen Betrachtungen sowie die ST. VENANT'schen Ausdrücke für v und w in den Gleichungen (9) lehren, zur Längskrümmung (abgesehen vom umgekehrten Zeichen) im Verhältniss μ, d. h. im Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation. Bei der weiteren Untersuchung dieser Erscheinung und der Biegung überhaupt hat man zu unterscheiden, in welchen Grössenverhältnissen ρ, a und b (Krümmungsradius, Breite und Dicke) zu einander stehen; namentlich treten, wenn ρ nicht sehr gross gegen a und b, oder wenn a gross gegen b und ρ nicht sehr gross im Vergleich zur dritten Proportionale zu b und a ist, Abweichungen von der normalen Theorie und demgemäss auch abweichende Erscheinungen auf.



a



b.

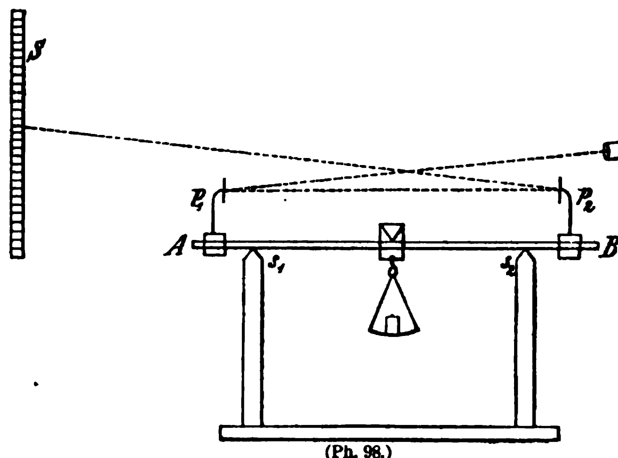
(Ph. 97.)

Experimentelle Untersuchung der Biegung. Diejenigen Enden des Stabes, welche fest sein sollen, werden in Schraubstöcke eingeklemmt, die bloss unterstützten werden auf Lager oder in leichte Rinnen gelegt; die Gewichte werden am Ende oder in der Mitte mittelst Hülse und Haken angehängt. Die Curve, welche der gebogene Stab bildet, wird graphisch oder photographisch aufgenommen. Meist handelt es sich nur um die Senkung der belasteten Stelle, den sogen. »Biegungspfeil«. Um diese genau zu bestimmen, misst man entweder kathetometrisch, oder mittelst einer Mikrometerschraube und einer Spitze, in welche dieselbe ausläuft, indem man dieselbe stets in derselben Weise mit der gesenkten Stabstelle in Berührung bringt; oder endlich man wendet die Methode von Spiegel und Scala an, wobei man unmittelbar nicht die Senkung, sondern die Neigung der Stabstelle, an welcher der Spiegel angebracht ist, misst.[1]) Am empfindlichsten ist wohl das von KÖNIG beschriebene Verfahren,

---

[1]) KIRCHHOFF, Ges. Abh. pag. 316. Weiteres über diese Abh. s. w. u. — PSCHEIDL, Rep. Phys. 19, pag. 178 (1883). — A. KÖNIG, WIED. Ann. 28, pag. 108 (1886).

bei welchem man das Bild der vertikal, ein wenig seitwärts von der Stabrichtung aufgestellten Scala (Fig. 98) durch einen am entgegengesetzten Stabende angebrachten Spiegel, von diesem wiederum ein Bild durch den am andern Stabende angebrachten Spiegel entwirft, und dieses Bild in dem hinter dem ersten Spiegel aufgestellten Fernrohr beobachtet; ist dann D der Abstand zwischen der Scala und dem Spiegel p_2, d der Abtand zwischen beiden Spiegeln und v die Verschiebung des Scalenbildes im Fernrohr, so hat man



(Fig. 98.)

$$v = \frac{3}{2} \cdot \frac{PL^2 (2D + d)}{Eab^3}. \tag{30a}$$

Endlich ist die optische Interferenzmethode zu nennen, welche zuerst von CORNU,[1]) später von KOCH[2]) u. A. benutzt worden ist; bringt man auf die Mitte der horizontalen Oberfläche eines an den Enden abwärts gebogenen Streifens oder Stäbchens aus Glas, Krystallsubstanz oder dergl. eine ebene Glasplatte, so beobachtet man ein System von Hyperbeln, und diese erlauben aus ihren Abständen von einander die Biegung selbst (also auch E), aus dem Winkel φ der Asymptoten mit der Stabaxe nach der Formel $tg^2 \varphi = 1/\mu$ die Querbiegung im Verhältniss zur Längsbiegung, d. h. die Constante μ zu bestimmen. Besondere Sorgfalt ist auf die Messung der kleinen, aber nach obigen Formeln einflussreichen Breite und namentlich der Dicke zu verwenden; letztere ist mit den feinsten Instrumenten und, wenn man sich auf die Gleichmässigkeit der Dicke nicht verlassen kann, an möglichst zahlreichen Stellen des Stabes zu messen. Schliesslich muss man darauf achten, dass man innerhalb der Elesticitätsgrenzen (pag. 217 u. 239) bleibt, verschiedene, dieser Bedingung genügende Gewichte P anwenden und zwar zuerst in aufsteigender, dann in absteigender Reihenfolge, und schliesslich Mittelwerthe bilden.[3])

Abgesehen von diesen statischen Versuchen kann die Biegung auch durch dynamische Versuche behandelt werden, d. h. durch Querschwingungen. Dieselben werden aber, da sie ihrer Schnelligkeit halber akustische Methoden erfordern, besser in der Akustik betrachtet (s. d.)

Gesetze der Biegung von Stäben. Die experimentellen Untersuchungen über Biegung von nicht zu kurzen (s. oben) Stäben haben zur Bestätigung der wichtigsten Resultate der obigen Theorie, und insbesondere zu folgenden Gesetzen geführt.

---

[1]) CORNU, Compt. R. 69, pag. 333 (1869).

[2]) KOCH, WIED. Ann. 5, pag. 251. (1878).

[3]) Eine ausführliche Beobachtungsreihe über die Biegung von Metallen und ihren Legirungen hat kürzlich KIEWIET (In. Diss. Gött. [Leipzig] 1886) veröffentlicht.

1) Der Biegungspfeil ist dem biegenden Gewicht proportional.

2) Der Biegungspfeil ist dem Elasticitätsmodul des Materials umgekehrt proportional.

3) Der Biegungspfeil ist dem Kubus der Länge proportional.

4) Der Biegungspfeil ist von der Form und Grösse des Querschnittes abhängig, insbesondere für kreisförmigen Querschnitt der vierten Potenz des Radius, für rechteckigen Querschnitt der Breite und der dritten Potenz der Dicke umgekehrt proportional. Bei gleicher Querschnittsgrösse wird also der quadratische Stab im Verhältniss von $3:\pi$ schwächer gebogen als der runde Stab, und ein Stab mit rechteckigem Querschnitt wird eben so stark gebogen wie ein runder mit gleich grossem Querschnitt, wenn die Dicke zur Höhe sich wie $3:\pi$ verhält.

5) Der Biegungspfeil am freien Ende, wenn das andre fest ist, der Biegungspfeil in der Mitte, wenn die Enden aufgestützt sind, und der Biegungspfeil in der Mitte, wenn die Enden fest sind, verhalten sich wie $4:\frac{1}{4}:\frac{1}{16}$ (also wie $64:16:1$).

6) Der Widerstand gegen Biegung verhält sich in allen obigen Fällen reciprok wie die Senkung und ist ausserdem dieser umgekehrt proportional.

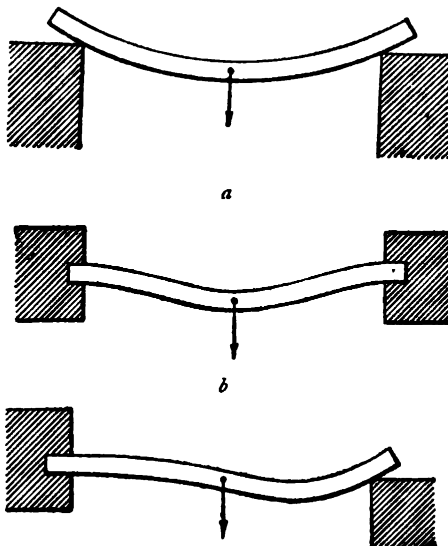
7) Hiernach kann man, wenn q das Trägheitsmoment des Querschnittes um seinen auf der Biegungsebene senkrechten Durchmesser, k ein von den Versuchsbedingungen abhängiger Factor ist, allgemein schreiben:

$$S = \frac{k}{12q}\,\frac{PL^3}{E}, \qquad (31)$$

und hierin ist für

ein festes, ein freies Ende . $k = 4$	Kreisquerschnitt . . . . $q = \frac{\pi R^4}{4}$
zwei gestützte Enden . . $k = \frac{1}{4}$	Rechteckigen Querschnitt (*a* horizontal, *b* vertikal) $q = \frac{ab^3}{12}$
zwei feste Enden . . . . . $k = \frac{1}{16}$	Quadratischen Querschnitt $q = \frac{a^4}{12}$
	Ringquerschnitt (Röhre) . $q = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$

8) Die Gestalt des Stabes ist verschieden, je nachdem die Enden frei, fest oder aufgelegt sind. Insbesondere treten, wenn die Mitte belastet ist, die drei Curven *a* (beide Enden aufgestützt), *b* (beide Enden fest), *c* (ein Ende fest, das andere aufgestützt) auf. In dem letztgenannten Falle ist noch die Frage interessant, wie sich der Druck auf die beiden Enden vertheilt; eine einfache Rechnung ergiebt, dass das gestützte Ende $\frac{5}{16}$ desselben übernimmt.



(Ph 99.)

Weitere Probleme der Biegung von Stäben, welche hier nur kurz erwähnt werden können.

1) Einfluss von Ungleichmässigkeiten im Querschnitt, welche entweder regelmässiger Natur (Prisma oder Kegel von sehr kleinem Winkel, Keil,

Stab mit periodischen Schwellungen u. s. w.) oder unregelmässiger Natur sein können.[1])

2) Biegung durch mehrere, gleichzeitig in verschiedenen Punkten des Stabes angreifende Kräfte.

3) Einfluss des Eigengewichtes[2]) auf die Biegung. Die rechte Seite der Gl. (24) ist hier von null verschieden. Ist, bei beliebiger Querschnittform, Q dessen Grösse und λ sein Trägheitsradius in der Biegungsebene, und ist G das Eigengewicht des Stabes, ε die Dichte des Materials, so wird, wenn ein Ende fest, das andere frei ist, die Biegungscurve

$$x = \frac{P}{2EQ\lambda^2}\left(Lz^2 - \frac{z^3}{3}\right) + \frac{\varepsilon}{2E\lambda^2}\left(\frac{L^2z^2}{2} - \frac{Lz^3}{3} + \frac{z^4}{12}\right)$$

und der Biegungspfeil

$$S = \frac{L^3}{EQ\lambda^2}\left(\frac{P}{3} + \frac{\varepsilon QL}{8}\right) = \frac{L^3}{3EQ\lambda^2}(P + \tfrac{3}{8}G),$$

d. h. das Eigengewicht wirkt so, als wäre das Gewicht P um $\frac{3}{8}$ des Eigengewichtes vergrössert worden; für $P = 0$ erhält man den Biegungspfeil durch das Eigengewicht allein

$$S_0 = \frac{\varepsilon L^4}{8E\lambda^2} = \frac{GL^3}{8EQ\lambda^2} = \frac{3}{2}\,\frac{GL^3}{Eq}\,. \tag{32}$$

Aehnlich findet man Biegungscurve und Pfeil durch das Eigengewicht allein bei zwei aufgestützten Enden

$$x_0 = \frac{\varepsilon}{24E\lambda^2}(L^3z - 2Lz^3 + z^4), \qquad S_0 = \frac{5\,\varepsilon L^4}{384\,E\lambda^2},$$

bei zwei festen Enden

$$x_0 = \frac{\varepsilon}{24E\lambda^2}\,z^2(L - z)^2, \qquad S_0 = \frac{\varepsilon L^4}{384\,E\lambda^2}\,.$$

4) Biegung ursprüglich gekrümmter Stäbe.[3]) Es sind drei im Resultat verschiedenartige Fälle zu unterscheiden, je nachdem die ursprüngliche Stabcurve vom Charakter der Biegungscurve und in der Biegungsebene gelegen ist, oder nur letzteres, oder endlich keins von beidem der Fall ist: im letzten Falle entsteht im Allgemeinen eine Curve doppelter Krümmung. Für die Praxis von Wichtigkeit ist hier namentlich die Anwendung auf Spiralfedern aller Art.

5) Biegung bei starkem Zug oder Druck in der Längsrichtung. Theoretisch hängt dies Problem mit dem oben pag. 243 Angeführten nahe zusammen, praktisch ist es von hervorragender Bedeutung für die Bautechnik (»Säulenfestigkeit«.)[4])

Biegung einer Platte. Für unendlich dünne Platten ist das Problem zuerst von Kirchhoff[5]) gelöst worden. Die Methode ist ganz analog der von Kirchhoff bei der Untersuchung dünner Stäbe (pag. 256) angewandten. In der Mittelfläche der Platte, d. h. in der in der Mitte zwischen den parallelen Oberflächen befindlichen Fläche, wird im natürlichen, ebenen Zustande ein rechtwinkliches Coordinatensystem s_1, s_2 eingeführt, und die Lage eines Punktes P in der Mittel-

---

[1]) Clebsch, a. a. O., p. 396. Die übrigen hierher gehörigen Untersuchungen legen ihr Hauptgewicht meist auf die Schwingungen solcher Körper (s. w. u.).

[2]) Clebsch, a. a. O., pag. 368. — Kirchhoff, Mechanik, pag. 437.

[3]) Kirchhoff, a. a. O. und Mechanik pag. 427. — Hess, a. a. O. — Clebsch, a. a. O. pag. 229.

[4]) Clebsch, a. a. O. pag. 402.

[5]) Kirchhoff, Crelle J. 40 (1850), und, in der oben skizzirten Form, Mechanik, pag. 450.

fläche hierdurch bestimmt; durch P werden ferner drei Linienelemente 1, 2, 3 gelegt, deren erste beiden den Axen der s_1 und s_2 parallel sind; nach der Deformation sollen diese drei Richtungen die Axen des xyz Systems sein, und durch dieses soll die Lage eines in der Nähe von P gelegenen, sonst beliebigen Plattenpunktes bestimmt werden, derart, dass seine Coordinaten vor der Aenderung xyz, nachher $x+u$, $y+v$, $z+w$, seine relativen Verrückungen gegen P also $u\,v\,w$ sind; dabei sei z die der Plattenaxe entsprechende Axe, w die entsprechende Verrückung. Endlich seien wieder $\xi\,\eta\,\zeta$ die Coordinaten von P nach der Veränderung in Bezug auf ein im Raume festes Coordinatensystem, und α_1, β_1 u s. w. die Cosinus der neun Winkel zwischen den Axen der xyz und der $\xi\,\eta\,\zeta$. An der Stelle der drei Gl. (13) beim Stabe treten hier deren sechs, nämlich je drei für s_1 σ_1 und für s_2 und σ_2; auch aus den drei Gl. (14) werden hier sechs, welche die Grössen $p_1\,q_1\,r_1$, $p_2\,q_2\,r_2$ definiren. Führt man noch den kleinen Winkel τ ein, um welchen der Winkel zwischen den Linien 1 und 2 nach der Formänderung von einem rechten abweicht, so erhält man, den Gl. (14 a) entsprechend,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=q_1 z+\sigma_1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-p_1 z \qquad \frac{\partial w}{\partial x}=p_1 y-q_1 x$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-p_1 z+\tau \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-p_2 z+\sigma_2 \qquad \frac{\partial w}{\partial y}=p_2 y+p_1 x$$

und durch Integration

$$u=u_0-p_1 yz+q_1 zx+\sigma_1 x+\tau y$$
$$v=v_0-p_2 yz-p_1 zx+\sigma_2 y$$
$$w=w_0-\tfrac{1}{2}q_1 x^2+p_1 xy+\tfrac{1}{2}p_2 y^2.$$

Zur Bestimmung von $u_0\,v_0\,w_0$ dienen die Bedingungsgleichungen

allgemein: $X_z=0,\quad Y_z=0,\quad Z_z=0,$

für $x=0,\ y=0,\ z=0$: $u=0,\ v=0,\ w=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}=0.$

Damit sind die unbekannten Grössen sämmtlich bestimmt, und man kann schliesslich auch das elastische Potential der ganzen Platte berechnen. Ist die Platte endlich gekrümmt, so erhält man die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial s_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial s_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s_1}\right)^2=1$$
$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial s_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial s_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s_2}\right)^2=1$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial s_1}\frac{\partial\xi}{\partial s_2}+\frac{\partial\eta}{\partial s_1}\frac{\partial\eta}{\partial s_2}+\frac{\partial\zeta}{\partial s_1}\frac{\partial\zeta}{\partial s_2}=0;$$

σ_1, σ_2, τ, verschwinden, die Elemente der Mittelfläche erfahren also keine Dehnung und Verzerrung, die Mittelfläche ist mithin eine abwickelbare Fläche. Das elastische Potential ist, wenn K, L die KIRCHHOFF'schen Constanten sind, und $2d$ die Dicke der Plattte ist:

$$V=-\frac{2}{3}Kd^3\iint\left(q_1^2+p_2^2+2p_1^2+\frac{L}{1+L}(q_1-p_2)^2\right)ds_1\,ds_2.$$

Die weitere Behandlung dieses Problems hat CLEBSCH[1]) geliefert. Ist die Platte unendlich wenig gekrümmt, so darf man $\sigma_1\,\sigma_2\,\tau$ nicht vernachlässigen, findet vielmehr für diese Grössen Werthe, welche den Werthen von $p_1\,p_2\,q_1$ vergleichbar sind, und erhält schliesslich V nicht, wie oben, mit d^3 proportional,

[1]) CLEBSCH, a. a. O. pag. 264.

sondern zusammengesetzt aus zwei Gliedern, deren eines d^3, deren anderes d als Factor enthält.

Die wirkliche Durchführung des Problems stösst auf Schwierigkeiten, welche in den meisten Fällen unüberwindlich geblieben sind. Für den einfachsten Fall, nämlich den einer am Rande fest eingespannten, im Mittelpunkt durch ein Gewicht P belasteten, kreisförmigen Platte erhält man, wenn R der Radius, r der Radius vector ist, als Biegungscurve jedes Durchmessers:

$$\zeta = \frac{3(1-\mu^2)P}{4\pi E d^3}\left(R^2 - r^2 - 2r^2 \log\frac{R}{r}\right),$$

und somit die Senkung des Mittelpunktes

$$S = \frac{3(1-\mu^2)PR^2}{4\pi E d^3}.$$

Diese Senkung ist also der Belastung und der Fläche der Scheibe direkt, dem Kubus ihrer Dicke umgekehrt proportional.

Weitergeführt und verallgemeinert wurde das Problem, ausser durch Clebsch,[1]) durch Gehring[2]) für anisotrope Stoffe, durch Aron[3]) für beliebige Krümmungen, und durch Oeltjen[4]) für kleine, aber nicht unendlich kleine Dicke der Platte. Endlich ist an dieser Stelle auf eine interessante Abhandlung von Hertz[5]) hinzuweisen, betreffend das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten.

Torsion kreiscylindrischer Stäbe und Drähte. Im allgemeinen ist die Torsion, wie der zweite Fall des St. Venant'schen Problems lehrt, eine zusammengesetzte Erscheinung, da alle drei Verrückungscomponenten [Gleichung (8)] besondere Werthe haben. Ist aber der Querschnitt des cylindrischen Stabes ein Kreis vom Radius R, so kann man x und y mittelst der Gleichungen $x = r\cos\lambda$, $y = r\sin\lambda$, durch den Radius vector r ausdrücken, und findet dann, da $d = 0$, $e = 0$, $\Omega = 0$ wird,

$$u = crz\sin\lambda, \quad v = -crz\cos\lambda, \quad w = 0$$

$$Z_z = 0, \quad X_z = -\frac{Ecr\sin\lambda}{2(1+\mu)}, \quad Y_z = \frac{Ecr\cos\lambda}{2(1+\mu)}.$$

Jeder Querschnitt bleibt also eben, behält seine Grösse und seine kreisförmige Gestalt bei, wird aber um einen Winkel φ gedreht, der sich aus der Gleichung

$$2r\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{u^2+v^2} = crz, \text{ also } \varphi = 2\,arc\sin\frac{cz}{2},$$

also für kleine Torsionen aus der Gleichung

$$\varphi = cz$$

ergiebt. Bei kleinen Torsionen erleiden also die Querschnitte eine ihrem Abstande vom festen Querschnitt proportionale Drehung, kurz ausgedrückt: die Torsion ist eine gleichförmige. Die Constante c bestimmt sich durch das am freien Ende angreifende Drehungsmoment $D = Pl$, wenn dieses Drehungsmoment durch ein am Hebelarm l angreifendes Gewicht P dargestellt wird. In Anbetracht

1) Clebsch, a. a. O. pag. 148 u. 264.

2) Gehring, In.-Diss. Berl. 1860.

3) Aron, Gleichgew. u. Bew. e. unendlich dünnen, bel. gekr. elast. Schale, In.-Diss., Berlin 1873.

4) Oeltjen, D. Diff.-Gleichungen für d. Gleichgewicht e. isotr. elast. Platte. In.-Diss. Kiel 1881.

5) Hertz, Wied. Ann. 22, pag. 449 (1884).

des Gleichgewichts muss nämlich, wenn $\frac{E}{2(1+\mu)}$ durch K (identisch mit k_2, Gleichung 11, pag. 224) ersetzt wird:

$$D = \int_0^{2\pi}\int_0^R d\varphi\, r\, dr\, (Y_z x - X_z y) = \frac{\pi}{2}\frac{c}{K} R^4$$

sein; hieraus findet man c, und erhält somit für die Drehung des freien Endquerschnittes ($z = L$)

$$\varphi = \frac{2PlL}{\pi K R^4}.$$

Die Grösse, welche, mit dem Torsionswinkel multiplicirt, das Drehungsmoment ergiebt, heisst das Torsionsmoment τ, und es ist

$$\tau = \frac{Pl}{\varphi} = \frac{\pi K R^4}{2L};$$

hat man aus der ersten dieser Gleichungen τ bestimmt, so findet man aus der zweiten durch reine Längenmessungen K. Wie man sieht, hängt die Torsion nur von der einzigen Elasticitätsconstanten K ab, dieselbe heisst daher Torsionsmodul. Hiermit hängt es auch zusammen, dass bei der Torsion die räumliche Dilatation $\sigma = 0$ ist; es findet also nur Verzerrung (Gestaltsänderung) statt, und bei Kreiscylindern auch diese nur innerlich, d. h. ohne Aenderung der äusseren Begrenzung.

Experimentelle Untersuchung der Torsion. Das eine Stabende wird erst eingeklemmt, das andere mit einer Scheibe oder einem Rade versehen, und an diesem das Gewicht angebracht; der Torsionswinkel, der übrigens nicht in Graden, sondern in absolutem Masse ($180° = \pi$) auszudrücken ist, wird entweder direkt, oder mittelst Fernrohr, Skala und eines dicht vor dem Rade am Stabe der Länge nach angebrachten Spiegels mit den nöthigen Correctionen gemessen; besondere Sorgfalt ist wieder auf die Messung des sehr einflussreichen Radius des Stabes zu verwenden. Ist der Köper zu dünn für derartige statische Versuche, so wendet man die dynamische Methode der Torsionsschwingungen an, indem man den Draht vertikal, mit festem oberen Ende, aufhängt, durch einen schweren Körper vom Trägheitsmoment T beschwert und die Dauer t einer Torsionsschwingung misst; es wird dann das Torsionsmoment

$$\tau = \frac{\pi^2 T}{t^2},$$

während sonst alles beim Alten bleibt; nur muss man, um von Massen zu Gewichten überzugehen, die Schwere g in den Nenner setzen. Es wird also

$$K = \frac{2\pi}{g}\frac{TL}{t^2 R^4}.$$

Ueber die Bestimmung des Trägheitsmomentes s. pag. 77 und 81, über die der Schwingungsdauer pag. 82.[1])

Gesetze der Torsion. Aus der Theorie und Erfahrung übereinstimmend ergeben sich folgende Gesetze.

1) Der Torsionswinkel ist der tordirenden Kraft und ihrem Hebelarm direkt proportional. Innerhalb der Torsionsgrenzen gilt dies Gesetz ohne nähere Er-

[1]) Die dynamische Methode ist zuerst von COULOMB, Mém. de l'Ac. des Sciences, Paris 1784, die statische zuerst eingehend von SAVART, Ann. chim. phys. (2), 61 (1836) und WERTHEIM, Ann. chim. phys. (3) 50, pag. 202 (1857) benutzt worden. Eine neuere Methode siehe bei MELDE, Z. f. Instr. K. 1, pag. 76 (1881).

läuterung; für Torsionen, die zum Theil permanent sind, gilt es jedoch nur nach geeigneter Behandlung des Stabes mit Vor-Torsionen.[1])

2) Der Torsionswinkel ist der Länge des Stabes proportional.

3) Der Torsionswinkel ist der vierten Potenz der Dicke des Stabes umgekehrt proportional.

4) Der Torsionswinkel ist dem Torsionsmodul umgekehrt proportional.

5) Der dynamisch bestimmte Torsionsmodul fällt meist etwas grösser aus als der statisch bestimmte.[2])

6) Der Torsionsmodul wird von den etwa gleichzeitig mit der Torsion vor sich gehenden andern Deformationen, z. B. Zug und Biegung beeinflusst, jedoch, wie es scheint, nur dann in erheblichem Grade, wenn die Torsion beträchtlich und demgemäss zum Theil permanenten Charakters ist.[3])

7) Bei der Torsion treten in noch höherem Grade als bei Dehnung und Biegung Erscheinungen auf, welche von der Zeit, der Anordnung resp. Wiederholung der Versuche u. s. w. abhängen und desto stärker und verwickelter werden, je stärker die Torsion ist (s. auch Art. »Elastische Nachwirkung«).

Torsionsmodul. Je nachdem man die statische oder die dynamische Methode (s. ob.) anwendet, erhält man den Torsionsmodul K aus einer der Gleichungen

$$K = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\varphi}Pl\frac{L}{R^4} = \frac{2\pi L}{gR^4}\frac{T}{t^2}.$$

Die dynamischen Versuche haben meist etwas grössere Werthe ergeben als die statischen. Einige der wichtigeren Zahlen sind folgende:

Stoff	K	Autor	Stoff	K	Autor
Eisen	7651	COULOMB[4])	Eisen, weich	8100	BAUMEISTER[7])
Kupfer	4213	SAVART[5])	„ hart	7350	BAUMEISTER[7])
Eisen	6706	WERTHEIM[6])	Kupfer, hart	4450	BAUMEISTER[7])
Gussstahl	7458	WERTHEIM[6])	Messing, weich	3600	BAUMEISTER[7])
Kupfer	3612	WERTHEIM[6])	„ hart	3500	BAUMEISTER[7])
Glas	2346	WERTHEIM[6])	Silber, hart	2650	BAUMEISTER[7])
			Zinn	1543	KIEWIET (s. pag. 264).
			Zink	3820	KIEWIET (s. pag. 264).
			Kupfer	4664	KIEWIET (s. pag. 264).

$K = K_0(1 + \alpha t + \beta t^2)$ nach F. KOHLRAUSCH und LOOMIS[8]) (t Temperatur in C°):

Stoff	K_0	α	β
Eisen	6940	— 0·000483	— 0·00000012
Kupfer	3900	— 0·000572	— 0·00000028
Messing	3200	— 0·000455	— 0·00000136

1) G. WIEDEMANN, Wied. Ann. 6, pag. 485 (1879).

2) WARBURG, Wied. Ann. 10, pag. 13 (1880). — TOMLINSON, Proc. R. Soc. 43, pag. 88 (1887) u. Andere.

3) BRAUN, Pogg. Ann. 159, pag. 352 (1876). — WARBURG, a. a. O. — HIMSTEDT, Wied. Ann. 17, pag. 701 (1882).

4) COULOMB, a. a. O.

5) SAVART, a. a. O.

6) WERTHEIM, a. a. O.

7) BAUMEISTER, Wied. Ann. 18, pag. 578 (1883.)

8) KOHLRAUSCH u. LOOMIS, POGG. Ann. 141, pag. 502 (1870).

$K = K_0(1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3)$ nach PISATI[1]):

Stoff	K_0	α	β	γ
Silber	2566	− 0·000387	− 0·00000038	− 0·0000000011
Eisen	8108	− 0·000206	− 0·00000019	+ 0·0000000011
Stahl	8290	− 0·000187	− 0·00000059	+ 0·0000000009
Kupfer	3972	− 0·002716	+ 0·00000023	− 0·0000000047
Messing	2652	− 0·002158	− 0·09000048	− 0·0000000032
Platin	6632	− 0·000111	− 0·00000050	+ 0·0000000008

K und δ (Abnahme von K in $\frac{0}{0}$ zwischen 0° und 100°) nach KATZENELSOHN[2]):

Metall	K (20°)	δ	Metall	K (20°)	δ
Platin	7412	1·64	Messing	3150	5·35
Eisen	7505	3·10	Silber (legirt) . .	2551	7·10
Gold (rein) . . .	3950	2·85	„ (rein) . . .	—	7·23
„ (legirt) . . .	4211	3·29	Aluminium . . .	3350	21·3
Kupfer	3587	3·65	Zink	—	40·0
Neusilber	4320	4·10	Blei	—	80·0

Der Torsionsmodul nimmt also mit steigender Temperatur ab, und zwar meist in etwas beschleunigtem Tempo; für die verschiedenen Metalle geht seine Abnahme mit der thermischen Ausdehnung Hand in Hand.

Abnorm verhält sich, wie schon oben (pag. 242) bemerkt wurde, das Kautschuk. In Uebereinstimmung mit seinen thermischen Eigenschaften nimmt sein Torsionsmodul, wie GRAETZ[3]) beobachtet hat, mit der Temperatur zu, und zwar meist mit abnehmender Geschwindigkeit. Wurde nämlich die Formel

$$K = K_{20}[1 + \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2]$$

zu Grunde gelegt, so fand sich (bei Benutzung der KOHLRAUSCH'schen Definition des Moduls, pag. 238) α zwischen 0·0042 und 0·0071; β zwischen − 0·0001 und + 0·0001, aber meist negativ. Für den Torsionsmodul selbst ergab ein Versuch den Werth $K_{20} = 0{\cdot}163$.

Bestimmung von E und μ aus Biegung und Torsion. Die gegebenen Entwickelungen zeigen, dass man Biegung und Torsion in verschiedener Weise benutzen kann, um E und μ zu finden. Die Biegung ergiebt nämlich nach Gl. (31) resp. (30a) direkt

$$E = \frac{k}{12q}\,\frac{PL^3}{S}\,{}^{4)} \quad \text{resp.} \quad E = \frac{3}{2v}\,\frac{PL^2(2D + a)}{ab^3}$$

aus der Senkung S resp. der Verschiebung v, oder auch aus den Abständen der CORNU'schen Interferenzstreifen, die Torsion ergiebt alsdann wegen $K = \frac{E}{2(1+\mu)}$ sofort

1) PISATI, N. Cim. (3) 4, pag. 152 (1878) u. (3) 5, pag. 34. 135. 145 (1879).

2) KATZENELSOHN, In.-Diss. Berl. 1887.

3) GRAETZ, WIED., Ann. 28, pag. 354 (1886). Weitere Literatur s. pag. 242, Anm. 2.

4) Für sehr kurze Stäbchen ist diese Formel nach WARBURG und KOCH (WIED. Ann. 5, pag. 253, 1878) durch eine genauere zu ersetzen, welche für rechteckigen Querschnitt

$$E = \frac{1}{4}\,\frac{PL^3}{ab^3S}\left[1 + 3\left(\frac{b}{L}\right)^2\right]$$

lautet; nach VOIGT (WIED. Ann. 34, pag. 1023, 1888) dürfte jedoch diese Formel meist nicht genauer als die obige sein.

$$\mu = \frac{E}{2K} - 1.$$

Von besonderem Vortheil ist es hierbei, Biegung und Torsion gleichzeitig zu messen, wofür KIRCHHOFF[1]) und später OKATOFF[2]) ein sinnreiches Verfahren benutzt hat. Der Stab $A_1 A_2$ (Fig. 100), in der Mitte A_0 befestigt, trägt in A_1 und A_2 je einen Querarm $B_1 D_1$ und $B_2 D_2$; werden in B_1 und B_2 Gewichte angehängt, so wird der Stab zugleich gebogen und tordirt, und man kann Biegung und Torsion messen, wenn man in zwei Fernröhren die von den horizontal befestigten Spiegeln C_1 und C_2 reflectirten Bilder einer Quadratnetz-Skala beobachtet; aus der Längsverschiebung erhält man die Biegung, aus der Querverschiebung die Torsion. Aus den Werthen, die beide Fernröhre ergeben haben, und aus den Werthen, die sich ergeben, je nachdem die Gewichte in B_1 und B_2 oder in D_1 und D_2 hängen, nimmt man das Mittel.

(Fig. 100.)

Eine zweite Methode, um μ zu finden, ist die Combination des Torsionsmoduls K mit dem kubischen Compressibilitätsmodul (pag. 250). Ganz direkt findet man andererseits μ als das Verhältniss der Querbiegung zur Längsbiegung (pag. 263), und zwar entweder auf direkt mechanischem Wege nach der Methode von MALLOCK[3]), welcher die Verschiebungen von vier, durch Fäden markirten, ein Quadrat bildenden Punkten auf der Oberfläche des Biegungsstreifens mikroskopisch maass, oder optisch aus dem Asymptotenwinkel der CORNU'schen Interferenzhyperbeln (pag. 264). Benutzt man dann diesen Werth von μ, oder den aus der Quercontraction bei der Längsdehnung ermittelten, so kann man dann aus der Torsion E finden, nämlich $E = 2K(1 + \mu)$.

Torsion von Stäben beliebigen Querschnitts. Die vollständige Lösung dieses Problems durch ST. VENANT[4]) bildet die schönste Anwendung seiner allgemeinen Theorie, insbesondere des Gleichungssystems (8). Zur Drehung jedes Querschnitts um die Grösse cz tritt hier noch eine für jeden Punkt verschiedene Längsverschiebung w, welche durch die beiden Gleichungen

$$\text{überall:} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{am Rande:} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \varphi x\right) dx - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi y\right) dy = 0$$

bestimmt ist (φ Torsionswinkel); die Integrale sind, wenn $x = r\cos\lambda$, $y = r\sin\lambda$ gesetzt wird (r Radius vector):

$$w = \sum^{n}(A r^n + A_1 r^{-n}) \sin n\lambda + \sum^{n'}(A' r^{n'} + A_1' r^{-n'}) \cos n'\lambda$$

$$\frac{r^2}{2}\varphi = \sum^{n}(A r^n - A_1 r^{-n}) \cos n\lambda - \sum^{n'}(A' r^{n'} - A_1' r^{-n'}) \sin n'\lambda$$

---

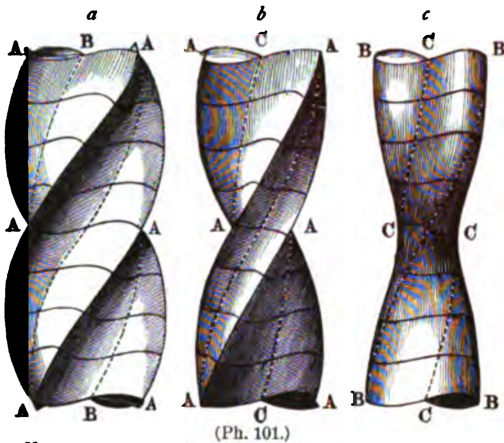
1) KIRCHHOFF, POGG. Ann. 108, pag. 369 (1859). Ges. Abh. pag. 316.

2) OKATOW, POGG. Ann. 119, pag. 11 (1863).

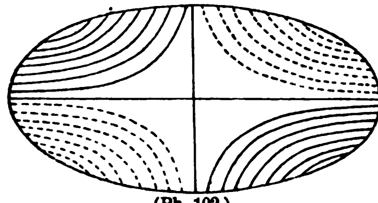
3) MALLOCK, Proc. R. Soc. 29, pag. 157 (1879).

4) ST. VENANT, Mém. sur la torsion des prismes, Mém. sav. étr. 1855, pag. 232. Obige Form der Lösung Compt. R. 87, pag. 823. 849. 893 (1879). Siehe auch THOMSON und TAIT, Bd. 2, pag. 229.

letzteres für den Rand. Mit orthogonalen Coordinaten lassen sich hiernach zahlreiche Fälle von Querschnitten behandeln. Die beifolgenden Figuren geben einige Beispiele aus den Resultaten ST. VENANT's. In den Fig. 101 *a* bis *c* sind Cylinder von quadratischem, rechteckigem und elliptischem Querschnitt im Zustande der Torsion ihrer äusseren Ansicht nach dargestellt. Dagegen geben die Fig. 102—104 eine Vorstellung von der Längsdeformation einiger Querschnitte, und zwar mit Hilfe der »topographischen Contouren«, d. h. der Linien, in welchen der ursprünglich ebene, jetzt gewölbte Querschnitt von einer Schaar auf der Axe senkrechter Ebenen geschnitten wird; die erhabenen Curven sind voll, die vertieften unterbrochen gezeichnet.



(Ph. 101.)


(Ph. 102.)

Was die Grösse der Torsion, also mit anderen Worten den Torsionsmodul betrifft, so hatte für rechteckigen Querschnitt (M Drehungsmoment, l Länge, φ Drillungswinkel, a, b Seiten, n ihr Verhältniss, Q Querschnitt) schon CAUCHY[1]) die Formel

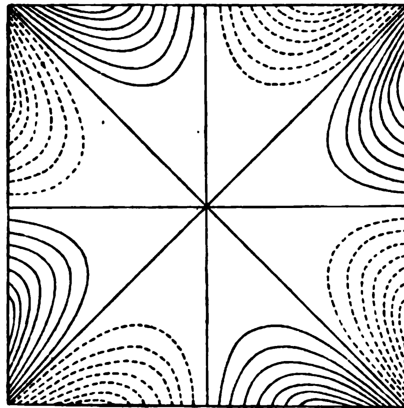
$$K = \frac{3l(a^2+b^2)M}{a^3b^3\varphi}$$

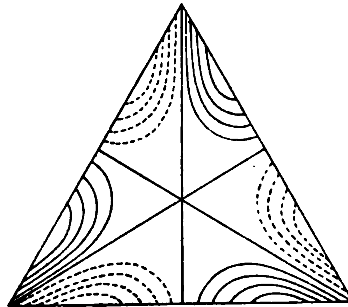
aufgestellt, die aber durch die Beobachtungen VOIGT's[2]) widerlegt wird. Dagegen wird durch dieselben die von ST. VENANT[3]) aus seiner Theorie abgeleitete Formel

$$K = \frac{Ml}{\varphi ab^3\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{a}\cdot\frac{\lambda(n)}{16}\right)}$$

$$= \frac{Ml}{\varphi\left[\frac{Qb^2}{3} - \frac{b^4}{16}\lambda(n)\right]},$$

worin $\lambda(n)$ eine aus den ST. VENANT'schen Tafeln[4]) zu entnehmende Function von n ist, vollauf bestätigt (nur bei Krystallen ist an ihr noch eine Correction anzubringen, s. w. u.). In neuerer Zeit hat ST. VENANT[5]) eine Formel gegeben, welche für elliptischen Querschnitt genau, für andere näherungsweise gilt, nämlich


(Ph. 103.)


(Ph. 104.)

1) CAUCHY, Exercises de math. pag. 167.
2) VOIGT, WIED. Ann. 15, pag. 497 (1882).
3) ST. VENANT, a. a. O.
4) ST. VENANT, a. a. O., pag. 559.
5) ST. VENANT, Compt. rend. 88, pag. 142 (1879).

$$K = \frac{Mlq}{\varphi \cdot k Q^4},$$

wo q das polare Trägheitsmoment des Querschnitts Q ist, während k (theils genau, theils näherungsweise) folgende Werthe hat (rund: $k = 1/40$):

Ellipse, unabhängig vom Axenverhältniss $k = \frac{1}{4\pi^2} = 0{\cdot}0253$.

Rechteck, mit dem Seitenverhältniss:

	1 (Quadrat)	2	4	8
$k =$	0·0234	0·0238	0·0249	0·0260.

Kreissector, mit dem Centriwinkel:

	45°	60°	90°	120°	180°
$k =$	0·0233	0·0230	0·0236	0·0246	0·0245

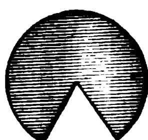
Gleichseitiges Dreieck . . . . $k = 0{\cdot}0222$.

Ein überraschendes und praktisch wichtiges Ergebniss ist noch dies, dass gerade die der Axe am nächsten liegenden Punkte des Randes am meisten verzerrt werden, und dass, was hiermit zusammenhängt, eine ausspringende Ecke einer sehr kleinen, eine einspringende Ecke einer sehr grossen Deformation ausgesetzt ist (Fig. 105*a* und *b*) — eine Thatsache, welcher in der Praxis durch Abrundung jeder einspringenden Ecke Rechnung getragen wird.

a.

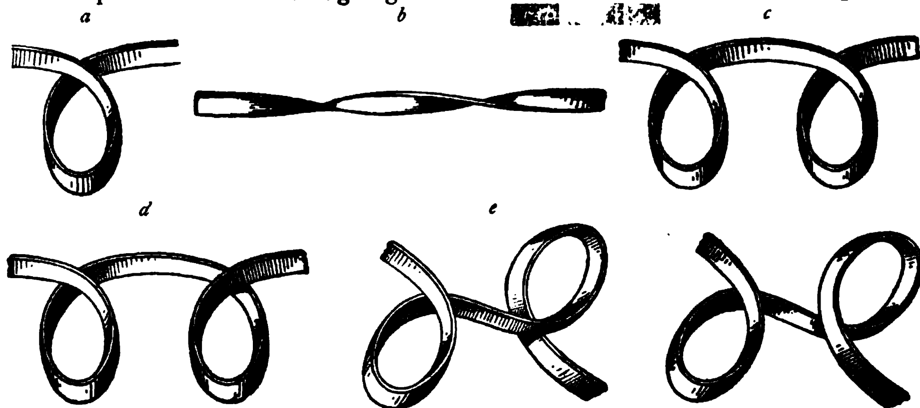


b.



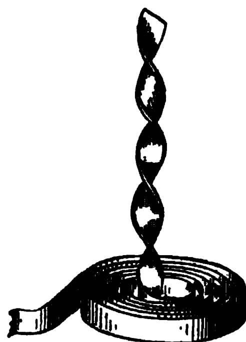
(Ph. 105.)

Aequivalenz von Biegung und Torsion. So verschiedenartig auch



(Ph. 106.)

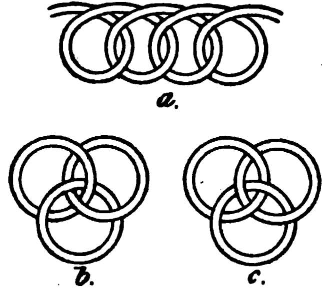
im allgemeinen die Erscheinungen von Biegung und Torsion sind, so leicht sind sie doch in einander überführbar, zumal wenn es sich um Biegungen, resp. Drillungen von einem oder mehreren ganzen Umgängen handelt. Ertheilt man einem Gummiband eine ganze Biegung von 360° (Fig. 106*a*) und fügt jetzt einen Zug hinzu, so erhält man eine ganze Torsion um 360° (Fig. 106*b*). Aus zwei ganzen Biegungen erhält man im Falle Fig. 106*c* zwei ganze Torsionen, dagegen in den Fällen Fig. 106*d* und 106*e* gar keine, weil die beiden Biegungen entgegengesetzt sind und die beiden in Folge dessen ebenfalls entgegengesetzten Torsionen sich ausgleichen; im Fall Fig. 106*f* endlich erhält man wieder zwei Torsionen. Ein anderes Beispiel erhält man durch Ausziehen des inneren Endes eines ebenen Spiralbandes (Fig. 107); noch andere, und



(Ph. 107.)

zwar besonders interessante durch Versuche mit ringförmig geschlossenen Kautschukbändern.

Elasticität zusammengesetzter Körper. Sehr complicirt, aber wegen ihrer Wichtigkeit für die Bau- und sonstige Technik vielfach untersucht sind die Erscheinungen an zusammengesetzten Körpern, z. B. Stabsystemen, Ketten, Geweben, Drahtnetzen u. s. w. Gewebe haben in der Längs- und Querrichtung einen grossen, in der Diagonalrichtung einen kleinen Dehnungsmodul. Ein wie in Fig. 108 *a* geknüpfter Drahtstreifen hat in einem Sinne einen grossen, im andern einen kleinen Biegungs- und Torsionswiderstand. Ein nach Art der Fig. 108 *b* hergestelltes Geflecht ist sehr biegsam (Panzerhemd), ein wie Fig. 108 *c* gearbeitetes fast gar nicht (Rohrstuhl).



(Ph. 108.)

Grenze der Biegungs- und Torsionselasticität. Dieselbe ist erreicht, wenn die Hinzufügung der kleinsten biegenden resp. tordirenden Kraft eine dauernde Biegung resp. Torsion erzeugt. Allgemeines lässt sich hierüber jedoch nicht sagen, da die Lage der Grenze von zahlreichen Factoren bedingt wird; so liegt sie bei hartgezogenen Drähten höher als bei geglühten, nach wiederholten Deformationen rückt sie meist hinauf (in gewissen Fällen aber auch hinab) u. s. w. In vielen Punkten lauten die Resultate verschiedener Beobachter zum Theil nicht übereinstimmend oder gar widersprechend. Ein nahe bis zur Grenze tordirter Draht bekommt nach Mac Ferlane eine dauernde Torsion, wenn er gespannt wird, und ein nahe bis zur Grenze gespannter Draht erfährt eine dauernde Dehnung, wenn er tordirt wird. Andererseits wird nach Wiedemann einem permanent tordirten Draht durch Spannung ein Theil der permanenten Torsion entzogen.

Anwendungen der Elasticität. Die wichtigsten sind folgende: 1) Federn mit der Bestimmung, auf irgend einen Gegenstand einen Druck auszuüben, stets für Herstellung des ursprünglichen Zustandes zu sorgen u. s. w. 2) Spiralförmige Uhrfedern zur Erzeugung (Hauptfeder) und Regulirung (Unruhe) der Bewegung. 3) Federwaagen (s. Art. »Waage«, pag. 135). 4) Federdynamometer zu verschiedenen Zwecken, insbesondere zur Messung der Muskelkraft und der Leistung von Maschinen. 5) Aneroidbarometer, Federmanometer und andere druckmessende Apparate (s. Art. »Luftdruck«).

F. Auerbach.

Elasticität der Krystalle.

Die Elasticität äussert sich bei Krystallen naturgemäss in weit verwickelteren Erscheinungen als bei isotropen Körpern. Die hauptsächlichsten Punkte, welche diese grössere Complication ausmachen, sind folgende:

1) Längszug oder -Druck bringt zwar auch hier ausser der Längsdehnung oder -Verkürzung die Nebenerscheinung der Quercontraction oder Querdilatation hervor; dieselbe ist aber nicht nach allen Querschnittsrichtungen gleich gross, und es wird folglich nicht nur, wie bei isotropen Körpern, die Grösse, sondern

auch die Gestalt des Querschnitts eine andere, z. B. wird aus einem kreisförmigen Querschnitt ein elliptischer, aus einem rechteckigen ein solcher mit gekrümmten Seiten u. s. w.

2) Die durch allseitig gleichen Druck erzeugte kubische Compression ist hier nicht, wie bei isotropen Körpern, eine reine Compression, sondern sie ist, da die linearen Compressionen in verschiedenen Richtungen verschieden sind, mit der Begleiterscheinung einer Deformation, d. h. Gestaltsänderung verknüpft; der Körper bleibt nicht sich selbst ähnlich, die an oder in ihm vorkommenden oder gedachten Winkel ändern sich im allgemeinen. Eine Ausnahme machen nur die dem regulären System angehörigen Krystalle; bei ihnen erzeugt allseitig gleicher Druck eine reine Compression.

3) Bei prismatischen oder cylindrischen, aus Krystallen gebildeten Körpern bewirken, selbst wenn sie doppelt symmetrische Querschnitte haben, Zugkräfte, die auf die Grundflächen ausgeübt werden, ausser der in einer Biegung bestehenden Haupterscheinung noch die Nebenerscheinung einer Drillung, und umgekehrt bringen Drehungsmomente um die Längsaxe ausser der Drillung noch eine Biegung hervor. Man kann diese Erscheinungen als »freie Biegung« und »freie Drillung« bezeichnen; nur in besonderen Fällen gehen dieselben in eine »reine Biegung« resp. »reine Drillung« über.[1])

4) Die Grösse der eintretenden Compressionen, Winkeländerungen, Biegungen und Drillungen hängt, von den wirkenden Kräften abgesehen, nicht bloss von dem Stoffe ab, aus welchem der Körper besteht, sondern auch von der Richtung, in welcher das Stäbchen, Scheibchen oder allgemein das Beobachtungsstück aus dem Krystall herausgeschnitten ist. Es genügt also hier nicht, den Elasticitätsmodul E, den Torsionsmodul T, die Quercontraction μ u. s. w. schlechthin anzugeben, sondern man muss diese Grössen für jede der krystallographischen Hauptrichtungen besonders ermitteln.

5) Das elastische Verhalten der Krystalle ist hiernach nicht, wie bei den isotropen Körpern, durch zwei, sondern durch mehr Constanten besimmt. Bei jenen konnte man hierfür entweder E und μ oder E und T oder die Elasticitätsconstanten, oder Volumen- und Gestaltsmodul wählen; hier, bei den Krystallen, empfiehlt sich am meisten entweder die Angabe der verschiedenen E und T oder die Angabe sämmtlicher Elasticitätsconstanten.

Druckcomponenten.[2]) Dieselben, $X_x\ Y_y\ Z_z\ Y_z\ Z_x\ X_y$, sind 6 homogene lineare Functionen der 9 Differentialquotienten der Verrückungscomponenten $u\ v\ w$ nach den Coordinaten $x\ y\ z$. Die hiernach auftretende Zahl von 54 Constanten verringert sich aber zunächst auf 36 durch Berücksichtigung des Umstandes, dass die Differentialquotienten nur in den 6 Combinationen

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

oder abgekürzt $x_x,\ y_y,\ z_z,\ y_z,\ z_x,\ x_y$ vorkommen (s. Art. »Elasticität«, pag. 232, Gleichung 28); sodann weiter auf 21 auf Grund der Existenz des elastischen Potentials (pag. 233)

---

1) Voigt, Wied. Ann. 16, pag. 273. 1882.

2) Für die Druckcomponenten: F. Neumann, Vorl. üb. Elast. pag. 164; mit Rücksicht auf das Potential: Voigt, Wied. Ann. 16, pag. 276. 1882. Für die Potentiale selbst: Kirchhoff, Mechanik, pag. 390; Story, Am. J. Math. 1, pag. 177. 1878.

$$
\left.\begin{array}{l}
P = \frac{1}{2}c_{11}x_x^2 + c_{12}x_xy_y + c_{13}x_xz_z + c_{14}x_xy_z + c_{15}x_xz_x + c_{16}x_xx_y \\
\qquad + \frac{1}{2}c_{22}\,y_y^2 + c_{23}y_yz_z + c_{24}y_yy_z + c_{25}y_yz_x + c_{26}y_yx_y \\
\qquad\qquad + \frac{1}{2}c_{33}\,z_z^2 + c_{34}z_zy_z + c_{35}z_zz_x + c_{36}z_zx_y \\
\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}c_{44}\,y_z^2 + c_{45}y_zz_x + c_{46}y_zx_y \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}c_{55}\,z_x^2 + c_{56}z_xx_y \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}c_{66}\,x_y^2
\end{array}\right\} \quad (1)
$$

Durch Differentiation nach x_x u. s. w. erhält man hieraus X_x u. s. w.; die erste verticale und die erste horizontale Columne ergeben die sechs Glieder von X_x, die 2. vert. und 2. hor. Columne die Glieder von Y_y u. s. w.

$$
\left.\begin{array}{l}
X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{14}y_z + c_{15}z_x + c_{16}x_y \\
Y_y = c_{12}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{24}y_z + c_{25}z_x + c_{26}x_y \\
Z_z = c_{13}x_x + c_{23}y_y + c_{33}z_z + c_{34}y_z + c_{35}z_x + c_{36}x_y \\
Y_z = c_{14}x_x + c_{24}y_y + c_{34}z_z + c_{44}y_z + c_{45}z_x + c_{46}x_y \\
Z_x = c_{15}x_x + c_{25}y_y + c_{35}z_z + c_{45}y_z + c_{55}z_x + c_{56}x_y \\
X_y = c_{16}x_x + c_{26}y_y + c_{36}z_z + c_{46}y_z + c_{56}z_x + c_{66}x_y
\end{array}\right\} \quad (1\,a)
$$

Für die einzelnen Krystallsysteme gestalten sich diese Formeln folgendermaassen:

a) Für das allgemeinste Krystallsystem, das trikline, gelten diese Ausdrücke ohne weiteres, d. h. ohne dass Vereinfachungen in ihnen auftreten.

b) Das monokline System hat die Besonderheit, dass die dritte Axe auf der Ebene der beiden ersten senkrecht steht, dass also die letztere, es sei die xy Ebene, eine Symmetrie-Ebene ist.[1] Es muss hiernach P bei Vertauschung von z mit $-z$ umgeändert bleiben, was, da in diesem Falle y_z und z_x ihr Zeichen ändern, nur möglich ist, wenn die Coefficienten der diese Grössen linear enthaltenden Glieder, also die 8 Constanten c_{14}, c_{15}, c_{24}, c_{25}, c_{34}, c_{35}, c_{46}, c_{56} verschwinden. Es wird also

$$
\left.\begin{array}{ll}
X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z + c_{16}x_y & Y_z = c_{44}y_z + c_{45}z_x \\
Y_y = c_{12}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z + c_{26}x_y & Z_x = c_{45}y_z + c_{55}z_x \\
Z_z = c_{13}x_x + c_{23}y_y + c_{33}z_z + c_{36}x_y & X_y = c_{16}x_x + c_{26}y_y + c_{36}z_z + c_{66}x_y
\end{array}\right\} \quad (2)
$$

Krystalle dieses Systems sind also durch 13 Elasticitätsconstanten charakterisirt.

c) Beim rhombischen System stehen alle drei Axen auf einander senkrecht, sind also alle drei Ebenen Symmetrie-Ebenen; es ist indes nur nothwendig, die Existenz zweier Symmetrie-Ebenen (xy und yz) einzuführen, da die Existenz der dritten dann nothwendig folgt. Es müssen also noch die 4 Constanten c_{26}, c_{36}, c_{45}, c_{16} verschwinden, und es wird:

$$
\begin{array}{l}
P = \frac{1}{2}c_{11}x_x^2 + \frac{1}{2}c_{22}y_y^2 + \frac{1}{2}c_{33}z_z^2 + c_{23}y_yz_z + c_{13}z_zx_x + c_{12}x_xy_y \\
\qquad + \frac{1}{2}c_{44}y_z^2 + \frac{1}{2}c_{55}z_x^2 + \frac{1}{2}c_{66}x_y^2,
\end{array}
$$

also:

$$
\left.\begin{array}{ll}
X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z & Y_y = c_{44}y_z \\
Y_y = c_{12}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z & Z_x = c_{55}z_x \\
Z_z = c_{13}x_x + c_{23}y_y + c_{33}z_z & X_y = c_{66}x_y
\end{array}\right\} \quad (3)
$$

Dem rhombischen System entsprechen also nur noch 9 Elasticitätsconstanten.

d) Beim quadratischen System ist das elastische Verhalten nicht, wie beim rhombischen, in jeder der auf einander senkrechten 3 Axenrichtungen ein anderes, sondern es sind zwei derselben, etwa x und y, gleich lang und elastisch

[1] Der Kürze halber ist hier und im folgenden die Symmetrie und Gleichwerthigkeit immer geometrisch aufgefasst; sie braucht aber im Princip natürlich nur in elastischer Hinsicht vorhanden zu sein.

gleichwerthig, so dass, wenn diese beiden Axen mit einander vertauscht werden, sich nichts ändert.

Es muss daher $c_{11} = c_{22}$, $c_{44} = c_{55}$, $c_{13} = c_{23}$ sein und es wird:

$$P = \tfrac{1}{2}c_{11}(x_x^2 + y_y^2) + \tfrac{1}{2}c_{33}z_z^2 + c_{13}(y_y z_z + z_z x_x) + c_{12}x_x y_y + \tfrac{1}{2}c_{44}(y_z^2 + z_x^2) + \tfrac{1}{2}c_{66}x_y^2,$$

$$\left.\begin{array}{ll} X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z & Y_z = c_{44}y_z \\ Y_y = c_{12}x_x + c_{11}y_y + c_{13}z_z & Z_x = c_{44}z_x \\ Z_z = c_{13}(x_x + y_y) \quad + c_{33}z_z & X_y = c_{66}x_y \end{array}\right\} \quad (4)$$

Dem quadratischen System entsprechen also nur noch 6 Elasticitätsconstanten.

e) Beim regulären System sind alle drei Axen gleich lang resp. gleichwerthig; es muss also $c_{11} = c_{22} = c_{33}$, $c_{13} = c_{23} = c_{12}$, $c_{44} = c_{55} = c_{66}$ sein, und folglich erhält man:

$$P = \tfrac{1}{2}c_{11}(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + c_{12}(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) + \tfrac{1}{2}c_{44}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2),$$

$$\left.\begin{array}{ll} X_x = c_{11}x_x + c_{12}(y_y + z_z) & Y_z = c_{44}y_z \\ Y_y = c_{11}y_y + c_{12}(z_z + x_x) & Z_x = c_{44}z_x \\ Z_z = c_{11}z_z + c_{12}(x_x + y_y) & X_y = c_{44}x_y \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die Constantenzahl ist hier nur noch gleich 3.

f) Die hemiedrischen Formen obiger 5 Krystallsysteme erfordern zwar, da ihre Symmetrie-Verhältnisse im allgemeinen andere sind, eine gesonderte Untersuchung, führen aber, insbesondere für alle tetraëdrischen und für die regulär-dodekaëdrischen Formen zur unveränderten Anwendbarkeit der obigen bezüglichen Formeln.

g) Das hexagonale System unterscheidet sich von allen übrigen dadurch, dass es nicht drei, sondern vier Axen hat, und dass die Symmetrie eine dreifache mit einem Symmetriewinkel von 60° ist. Drückt man dies in Gleichung (1) aus und wählt man die z-Axe als Hauptaxe, so erhält man:

$$P = \tfrac{1}{2}c_{11}(x_x^2 + y_y^2) + \tfrac{1}{2}c_{33}z_z^2 + c_{13}(x_x + y_y)z_z + c_{12}x_x y_y + \tfrac{1}{4}(c_{11} - c_{12})x_y^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}(y_z^2 + z_x^2),$$

$$\left.\begin{array}{ll} X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z & Y_z = c_{44}y_z \\ Y_y = c_{12}x_x + c_{11}y_y + c_{13}z_z & Z_x = c_{44}z_x \\ Z_z = c_{13}(x_x + y_y) \quad + c_{33}z_z & X_y = \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12})x_y \end{array}\right\} \quad (6)$$

Die Zahl der Elasticitätsconstanten beträgt also hier 5.

h) Das Rhomboëder ist zwar eine hemiedrische Form des hexagonalen Systems, das rhomboëdrische System führt aber doch zu besonderen Formeln. Es ist eine einfach symmetrische Form mit dem Drehungswinkel 120°. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich, wenn durch den Index null die Werthe in (6) bezeichnet werden:

$$\left.\begin{array}{lll} & P = P^0 + c_{14}[(x_x - y_y)z_x - x_y y_z] & \\ X_x = X_x^0 + c_{14}z_x, & Y_y = Y_y^0 - c_{14}z_x, & Z_z = Z_z^0, \\ Y_z = Y_z^0 - c_{14}x_y, & Z_x = Z_x^0 + c_{14}(x_x - y_y), & X_y = X_y^0 - c_{14}y_z \end{array}\right\} \quad (7)$$

Durch Hinzutreten von c_{14} wird also hier die Constantenzahl 6.

Bei diesen Formeln ist die Stetigkeitshypothese der Materie zu Grunde gelegt. Die Poisson'sche Moleculartheorie (pag. 235) reducirt die Constantenzahlen wie bei isotropen Stoffen (von 2 auf 1) so auch hier. Es wird nämlich im regulären System $c_{12} = c_{44}$, also die Constantenzahl 2 statt 3, im rhombischen System $c_{44} = c_{23}$, $c_{55} = c_{31}$, $c_{66} = c_{12}$, die Constantenzahl also 6 statt 9; im hexagonalen und im rhomboëdrischen System $c_{13} = c_{44}$, $c_{11} = 3c_{12}$, die Constantenzahl also 3 statt 5. Diese Beziehungen werden aber durch die Erfahrung im allgemeinen nicht bestätigt; man muss also, wenn man zur Molekular-

theorie neigt, die POISSON'sche durch die VOIGT'sche (pag. 235) ersetzen, d. h. die polare Wirkung der Molekeln auf einander in Betracht ziehen.[1])

Anwendung auf die einzelnen elastischen Erscheinungen.[2])

1) Einseitiger Druck. Die Gleichungen (1a), auf ein willkürliches Coordinatensystem bezüglich, ergeben, wenn das dem Druck unterworfene Prisma die z-Axe zur Längs- und Druckaxe (die aber im allgemeinen keine Hauptaxe ist) hat, also $Z_z = p$, alles Uebrige $= 0$ ist, durch Auflösung nach x_x u. s. w.

$$x_x = p\frac{\Sigma_{31}}{\Pi},\quad y_y = p\frac{\Sigma_{32}}{\Pi},\quad z_z = p\frac{\Sigma_{33}}{\Pi},\quad y_z = p\frac{\Sigma_{34}}{\Pi},\quad z_x = p\frac{\Sigma_{35}}{\Pi},\quad x_y = p\frac{\Sigma_{36}}{\Pi}, \tag{8}$$

wo Π die Determinante jener Gleichungen und Σ_{hk} deren h tes Element in der k ten Columne ist. Die dritte dieser Grössen ist offenbar die Längscompression resp. Dilatation, und folglich der Elasticitätsmodul

$$E = \frac{\Pi}{\Sigma_{33}}. \tag{9}$$

Ferner wird die Querdilatation resp. die Quercontraction in einer Richtung, welche mit der x-Axe den Winkel φ bildet

$$\begin{aligned} Q &= x_x \cos^2\varphi + y_y \sin^2\varphi + x_y \cos\varphi \sin\varphi \\ &= \frac{p}{\Pi}(\Sigma_{31}\cos^2\varphi + \Sigma_{32}\sin^2\varphi + \Sigma_{34}\sin\varphi\cos\varphi); \end{aligned}$$

sie ist also rings um die z-Axe variabel, ausser wenn $\Sigma_{34} = 0$ und $\Sigma_{31} = \Sigma_{32}$ ist. Dasselbe gilt natürlich auch von dem Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation

$$\mu = \frac{\Sigma_{31}}{\Sigma_{33}}\cos^2\varphi + \frac{\Sigma_{32}}{\Sigma_{33}}\sin^2\varphi + \frac{\Sigma_{34}}{\Sigma_{33}}\sin\varphi\cos\varphi. \tag{10}$$

Endlich sind noch die Winkeländerungen zu bestimmen, insbesondere die Aenderung ursprünglich rechter Winkel. Die beiden Ebenen, die diesen Winkel bilden, seien

$$\mu x + \nu y + \pi z = 1 \quad \text{und} \quad \mu_1 x + \nu_1 y + \pi_1 z = 1,$$

also die Cosinus der Richtungswinkel ihrer Normalen

$$a = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}},\qquad b = \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}},\qquad c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2+\nu^2+\pi^2}}$$

und entsprechend a_1, b_1, c_1, so dass ursprünglich

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

ist; die Winkeländerung ist alsdann

$$\eta = 2(x_x aa_1 + y_y bb_1 + z_z cc_1) + y_z(bc_1 + cb_1) + z_x(ca_1 + ac_1) + x_y(ab_1 + ba_1). \tag{11}$$

Die Einsetzung der Werthe (8) in diese Gleichungen und die weitere Ausführung derselben liefert freilich schon für die einfacheren Fälle recht complicirte Formeln. Die Mittheilung derselben kann um so eher unterbleiben, als in ihnen die Elasticitätsconstanten in derselben Combination vorkommen wie bei der Biegung und Drillung (s. u.), Beobachtungen von Winkeländerungen also, da sie heikler sind als Biegungs- und Drillungsmessungen und diesen gegenüber nichts neues liefern, nur ganz ausnahmsweise angezeigt erscheinen werden.

Bei der Anwendung obiger Formeln für einseitigen Druck auf ein bestimmtes Krystallsystem muss man, um die dann eintretende Vereinfachung der Gleichungen

---

[1]) VOIGT, Gött. Abh. 34, pag. 1. 1887. Anfänge der verallgemeinerten Theorie in POISSON's letzter unvollendeter Arbeit: Mém. Acad. 18, pag. 3. 1842. S. ferner ARON, WIED. Ann. 20, pag. 272. 1883. Minnigerode, Gött. Nachr. 1884, pag. 195.

[2]) F. NEUMANN, Vorl. üb. Elast. pag. 179; VOIGT, WIED. Ann. 16, pag. 273 und pag. 416. 1882; sowie 29, pag. 604. 1886.

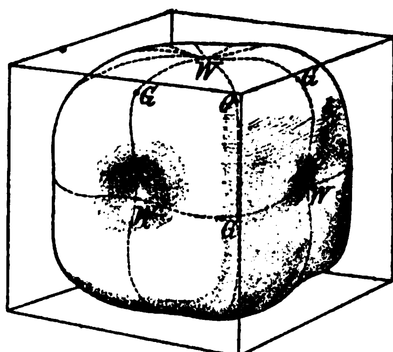
(1a) benutzen zu können, diese auf die Krystallaxen beziehen, daneben aber ein zweites Coordinatensystem einführen, dessen z-Axe die Längs- und Druckaxe ist, und das mit jenem durch die bekannten 9 Cosinus $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$ verknüpft ist; zuweilen genügt es auch, 3 von diesen Grössen, nämlich die Richtungscosinus der Längs- und Druckaxe des Stäbchens in Bezug auf jenes System, die dann kurz $\alpha\ \beta\ \gamma$ heissen mögen, einzuführen.

Beispiel: Reguläres System.[1]) Die drei Elasticitätsconstanten sind hier $c_{11}\ c_{12}\ c_{44}$ (häufig auch ABc oder $AB\varepsilon$ oder $AB\delta$ genannt). Die Dilatationen nach den Krystallaxen ergeben sich

$$\varepsilon_x = \frac{p}{c_{11}-c_{12}}\left(\frac{c_{12}}{c_{11}+2c_{12}}-\alpha^2\right), \quad \varepsilon_y = \frac{p}{c_{11}-c_{12}}\left(\frac{c_{12}}{c_{11}+2c_{12}}-\beta^2\right),$$
$$\varepsilon_z = \frac{p}{c_{11}-c_{12}}\left(\frac{c_{12}}{c_{11}+2c_{12}}-\gamma^2\right),$$

dagegen die Dilatation in der Längs- und Druckrichtung oder gleich ihr p ter Theil, also das Reziproke des Elasticitätsmoduls

$$\frac{1}{E} = \frac{c_{12}}{(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})} - \frac{1}{2c_{44}} - \left(\frac{1}{c_{11}-c_{12}} - \frac{1}{2c_{44}}\right)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4). \quad (12)$$



(Ph. 109.)

Schneidet man also Stäbchen aus regulären Krystallen in den verschiedensten Richtungen heraus, bestimmt man jedes Mal $\frac{1}{E}$ und trägt diese Grösse in der entsprechenden Richtung als Radius auf, so erhält man[2]) eine Oberfläche 4. Ordnung (Fig. 109). In drei Richtungen finden Maxima resp. Minima der Elasticität statt, nämlich senkrecht zur Würfelfläche ein Maximum (oder Minimum), senkrecht zur Oktaëderfläche ein Minimum (oder Maximum), senkrecht zur Granatoëderfläche ein gemischtes Maximum-Minimum; und zwar ist

$$\frac{1}{E_w} = \frac{c_{11}+c_{12}}{(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})}, \quad \frac{1}{E_o} = \frac{1}{3(c_{11}+2c_{12})} + \frac{1}{3c_{44}},$$
$$\frac{1}{E_g} = \frac{c_{11}}{2(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})} + \frac{1}{4c_{44}}. \quad (13)$$

Wie man sieht, findet die einfache Beziehung statt:

$$\frac{1}{E_w} + \frac{3}{E_o} = \frac{4}{E_g};$$

die Gleichungen (12) reichen also zur Bestimmung von c_{11}, c_{12}, c_{44} nicht aus. Die Abbildung bezieht sich auf Steinsalz, und zwar nach Versuchen, durch welche VOIGT die obigen theoretischen Resultate vollauf bestätigte (s. u.) In ähnlicher Weise lässt sich die Quercontraction und die Winkeländerung verfolgen. Findet der Druck senkrecht zur Würfelfläche oder zur Oktaëderfläche statt, so ergiebt sich μ ringsherum constant und unabhängig von der Richtung der Seitenflächen; und im ersteren Falle wird besonders einfach $\mu = c_{12}/(c_{11}+c_{12})$. Auch die Winkeländerungen werden in bestimmten Fällen gleich null.

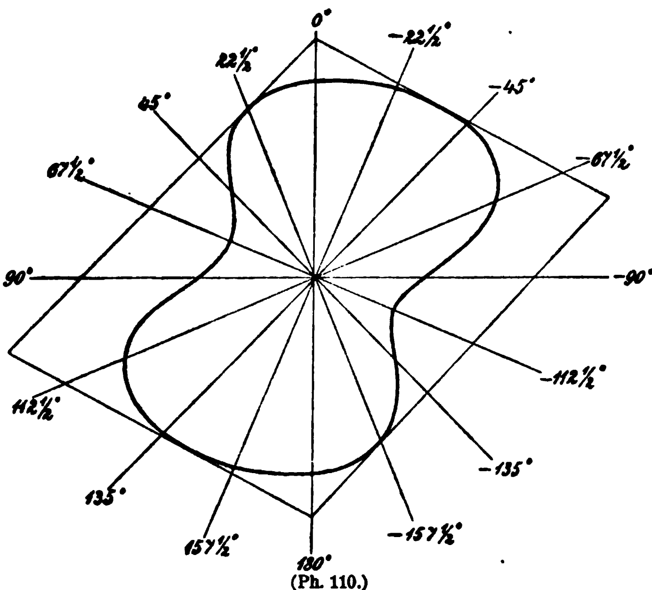
---

[1]) VOIGT, WIED. Ann. 35, pag. 642. 1888.

[2]) VOIGT, POGG. Ann. Ergbd. 7, pag. 1 u. 177. 1876 (Fig. 11).

Für die übrigen Krystallsysteme werden die Formeln natürlich complicirter.

Es ist noch zu bemerken, dass die durch Fig. 109 veranschaulichte Darstellung des Verhaltens eines Krystallstäbchens bei Längsdruck zwar die allgemeinste ist, häufig aber durch einfachere ersetzt werden kann. Es genügt nämlich meistens, die Curven anzugeben, in welchen jene Oberfläche von einigen ausgezeichneten Ebenen geschnitten wird; in manchen Fällen und für gewisse Zwecke genügt sogar die Aufzeichnung einer derartigen Curve, z. B. die Curve der Dilatationen bei verschiedener Neigung der Längsaxe des Stäbchens gegen die krystallographische Hauptaxe.[1]) Die Fig. 110 stellt eine solche Curve für einen rhomboëdrischen Krystall, z. B. Kalkspath, dar; die Zahlen geben die erwähnten Neigungswinkel an.[2])



(Fig. 110.)

2) Allseitig gleicher Druck. Die Gleichung (1a) sollen sich jetzt auf die Hauptaxen beziehen, die Determinante heisse jetzt P, und ihr h-Element in der $k$ten Reihe S_{hk}. Alsdann findet sich die kubische Dilatation

$$\frac{\delta V}{V} = x_x + y_y + z_z = -\frac{p}{P}[(S_{11} + S_{22} + S_{33}) + 2(S_{23} + S_{31} + S_{12})],$$

und folglich die cubische Compressibilität

$$C = \frac{1}{P}[(S_{11} + S_{22} + S_{33}) + 2(S_{23} + S_{31} + S_{12})];$$

die Umrechnung der S_{11} u. s. w. in die eigentlichen Elasticitätsconstanten c_{11} u. s. w. erfolgt besser in jedem Specialfalle für sich.

Beispiele: a) für das reguläre System wird

$$C = \frac{3}{c_{11} + 2c_{23}}.$$

b) Für das quadratische, hexagonale und rhomboëdrische System wird übereinstimmend

$$C = \frac{c_{11} + 2c_{33} + c_{12} - 4c_{23}}{c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{23}^2}.$$

Die lineare Dilatation wird für jede Richtung eine andere; nur beim regulären System ist sie für alle Richtungen gleich und folglich ein Drittel der obigen kubischen. Für die Aenderung eines ursprünglich rechten Winkels ergiebt sich aus Gleichung (11)

---

[1]) Baumgarten, Pogg. Ann. 152, pag. 369. 1874.

[2]) Eine dritte Darstellungsart hat kürzlich Finsterwalder (Münch. Ber. 1888, pag. 257) angewandt.

$$\eta = -\frac{2p}{P}[(S_{11}+S_{21}+S_{31})aa_1+(S_{12}+S_{22}+S_{32})bb_1+(S_{13}+S_{23}+S_{33})cc_1]$$
$$+\frac{p}{P}[(S_{14}+S_{24}+S_{34})(ab_1+ba_1)+(S_{15}+S_{25}+S_{35})(bc_1+cb_1)$$
$$+(S_{16}+S_{26}+S_{36})(ca_1+ac_1)].$$

Für das reguläre System wird $\eta = 0$, und zwar für beliebige Grösse des ursprünglichen Winkels; in Bezug auf kubische Compression verhält sich also ein regulärer Krystall ganz wie ein isotroper Körper. Für das quadratische, hexagonale und rhomboëdrische System wird übereinstimmend:

bei ursprünglich rechtem Winkel

$$\eta = -\frac{p}{P}\frac{(c_{11}+c_{12})-(c_{33}+c_{23})}{c_{33}(c_{11}+c_{12})-2c_{23}^2}2cc_1,$$

bei ursprünglich beliebigem Winkel φ

$$\eta\, sin\varphi = -\frac{p}{P}\frac{(c_{11}+c_{12})-(c_{33}+c_{23})}{c_{33}(c_{11}+c_{12})-2c_{23}^2}[2cc_1-cos\varphi(c^2+c_1^2)].$$

3) Biegung. Die strenge Durchführung des allgemeinen Problems ist nicht möglich; man muss sich also entweder auf die sogen. gleichförmige Biegung durch Drehungsmomente (wobei der Stab die Gestalt eines Kreisbogens annimmt) beschränken, oder, wenn man die gewöhnliche Versuchsanordnung beibehalten will, den Querschnitt klein gegen die Länge annehmen und sich mit einer angenäherten Lösung begnügen. Das allgemeine Resultat ist folgendes: die Biegung ist von einer Drillung begleitet, ausser wenn die Längsrichtung des Stäbchens normal zu einer Symmetrieebene liegt; in diesem Falle erhält man eine reine Biegung, und zugleich bleiben hier ursprünglich ebene Querschnitte eben. Auf ein solches Stäbchen können demgemäss ohne weiteres die Biegungsformeln für isotrope Medien angewandt werden. Die Senkung der Mitte eines an den Enden unterstützten, in der Mitte belasteten Stäbchens wird angenähert

$$s = \frac{pL^3}{48\,EQk^2},$$

speciell für rechteckigen Querschnitt

$$s = \frac{pL^3}{4\,EBD^3},$$

mit der von früher bekannten Bedeutung der Zeichen. Der Zusammenhang zwischen E und den Elasticitätsconstanten braucht nicht von neuem untersucht zu werden, da er schon von der Druckelasticität bekannt ist [z. B. für reguläre Krystalle Gleichung (12)].

4) Drillung. Das Problem ist, wie für isotrope Körper, so auch für Krystalle von St. Venant theilweise behandelt und von Voigt für allgemeinere Fälle durchgeführt worden.[1]) Im allgemeinen ist die Torsion zugleich von einer Biegung begleitet; nur wenn die Längsaxe normal zu einer Symmetrieebene ist, findet reine Drillung statt. Der Drillungswinkel eines rechteckigen Prismas lässt sich dann auf die Form bringen:

$$\psi = \frac{ML}{T\left[\frac{4\,Qn^2}{3} - n^4 f\left(\frac{m}{n}\right)\right]},$$

[1]) Die von Cauchy und Neumann ausgebildete ältere Theorie hat sich in ihren Endformeln als nicht allgemein anwendbar erwiesen, wohl aber die von St. Venant (Mém. Sav. Etr. 14, pag. 370, 1855), welche zuerst dieser selbst und alsdann Voigt auf Krystalle angewandt hat: Wied. Ann. 16, pag. 294, 1882 (angenäherte Formel) und Wied. Ann. 29. pag. 604, 1886 (strenge Formel).

wo M das tordirende Moment, T der Torsionsmodul, L die Länge, Q der Querschnitt, m die halbe grössere, n die halbe kleinere Querdimension und f eine Funktion von m/n ist, die sich in gewissen Fällen zahlenmässig angeben lässt. Bei gemischter Torsion gilt diese Formel nur noch näherungsweise, nämlich wenn n^2 klein gegen m^2 ist; die genaue Formel ist von VOIGT angegeben worden (s. d.) Bei etwas anderer Schreibweise ergiebt sich aus obigem der Torsionsmodul für das reguläre System, wenn die Kanten des Stäbchens in die Symmetrieaxen fallen:

$$T = \frac{3ML}{\psi d^3 b\left(1 - \frac{3}{16}\lambda\frac{d}{b}\sqrt{\frac{T}{T'}}\right)},$$

wo jetzt d die Dicke, b die Breite des Stäbchens, T' der aus T durch Vertauschung der Querdimensionen hervorgehende Werth und λ eine Funktion ist, die, wenn das Verhältniss der Querdimensionen grösser als 3 ist, merklich constant, nämlich gleich 3·361 ist. Mit den Elasticitätsconstanten hängt T durch die Formel

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{P}[S_{44} + 2(2(S_{11} - S_{12}) - S_{44})(\alpha^2\alpha_1^2 + \beta^2\beta_1^2 + \gamma^2\gamma_1^2)]$$

zusammen, wo $\alpha\beta\gamma$ die Richtungscosinus der Längsrichtung, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ die der grösseren Querrichtung sind (entsprechend für T'). Die Reduktion der S_{11} u. s. w. auf die eigentlichen Elasticitätsconstanten führt zu sehr complicirten Formeln; speciell für das reguläre System wird

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{c_{44}} - 4\left(\frac{1}{2c_{44}} - \frac{1}{c_{11} - c_{23}}\right)(\alpha^2\alpha_1^2 + \beta^2\beta_1^2 + \gamma^2\gamma_1^2);$$

(entsprechend für T'); ist die Längsrichtung normal zur Würfelfläche, so wird

$$\frac{1}{T_w} = \frac{1}{c_{44}} \quad \text{und auch} \quad \frac{1}{T_w'} = \frac{1}{c_{44}};$$

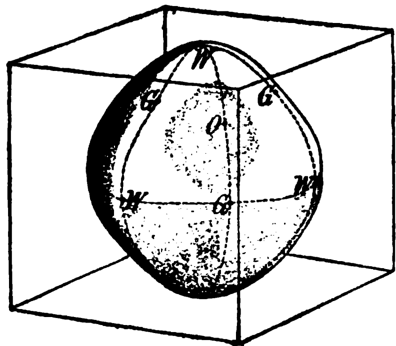
ist die Längsrichtung normal zur Granatoëderfläche, die längere Querrichtung normal zur Würfelfläche, so ist ebenfalls

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{c_{44}}, \quad \text{dagegen} \quad \frac{1}{T_g'} = \frac{2c_{11} + 3c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})}.$$

Hat das Stäbchen kreisförmigen Querschnitt, so hängt die Torsion nur von der Lage der Längsrichtung gegen die Axen ab,

$$\frac{1}{T} = \frac{2}{c_{44}} + 4\left(\frac{2}{c_{11} - c_{12}} - \frac{1}{c_{44}}\right)(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2);$$

man kann alsdann die Torsionsverhältnisse ähnlich wie früher die Elasticitätsverhältnisse durch eine Oberfläche darstellen und erhält, diesmal freilich nur mit angenäherter Gültigkeit, die Fig. 111)[1]. Wie jene Fläche an einen abgerundeten und eingedrückten Würfel, so erinnert diese an ein abgerundetes und eingedrücktes Octaëder. Für die genaue Darstellung, insbesondere nach der neueren, strengeren Torsionsformel, wird man auch hier die Zeichnung ebener Torsionsdiagramme vorziehen.



(Ph. 111.)

---

[1]) VOIGT, POGG. Ann. Ergbd. 7, Fig. 31.

Aehnliche Formeln gelten für das rhombische[1]), hexagonale[2]) und rhomboëdrische[3]) System.

Beobachtungsmethoden. Dieselben sind im wesentlichen schon oben bei »Zug und Druck« (pag. 237) resp. bei »Biegung und Torsion« (pag. 263 und 269) aufgeführt worden. Am wichtigsten sind einerseits Versuche über kubische Compressibilität, welche zur Kenntniss von C führen, und welche Röntgen und Schneider[4]) nach der schon erwähnten Piezometermethode angestellt haben, andererseits Versuche über Biegung und Torsion, welche, nach einander an denselben Stäbchen ausgeführt, nicht nur zur Kenntniss von E und T führen, sondern auch zu der aller Elasticitätsconstanten c_{11} u. s. w. führen, mit dem weiteren Vortheil, dass man eine mehr als ausreichende Zahl von Bestimmungen erhält, so dass man entweder Controlwerthe hat oder die geeignetsten Beobachtungen sich auswählen kann; man wird dies in der Weise thun, dass man möglichst viel Daten durch Biegungen und nur den Rest durch Drillungen ermittelt.[5]) Im einzelnen sei noch folgendes bemerkt: Die Dimensionen der Krystallstäbchen resp. der auch zuweilen benutzten Krystallscheibchen[6]) müssen bei ihrer Kleinheit mit besonderer Sorgfalt gemessen werden. Den Querschnitt der Stäbchen nimmt man rechteckig und wählt seine beiden Kanten zur Vereinfachung der Theorie (s. o.) einigermaassen verschieden. Ebenso empfiehlt es sich, bei abnehmender Länge der Stäbchen auch Breite und Dicke entsprechend abnehmen zu lassen, weil sonst die gewöhnliche Biegungsformel hinfällig und auch die Anwendbarkeit des Warburg-Koch'schen Correktionsgliedes (pag. 271) von Voigt[7]) bezweifelt wird. Ergeben die Messungen der Dicke an verschiedenen Stellen verschiedene Werthe, so kann man bei den Drillungen einfach die mittlere Dicke, muss aber bei den Biegungen einen anders zu ermittelnden Werth in die Rechnung einführen[8]). In Bezug auf eine Reihe weiterer Vorsichtsmaassregeln, besonders bei der Herstellung, Behandlung und Belastung der Stäbchen, muss auf die betreffenden Untersuchungen verwiesen werden. Die Messung der Biegung selbst geschieht entweder nach der besonders von Koch[9]) ausgebildeten mikroskopischen Interferenzstreifenmethode oder nach der von Voigt[10]) ausgebildeten teleskopischen Spiegelungsmethode; die letztere hat den Vortheil, auch gleich zur Messung der Drillungen zu dienen. Die Messungen werden, wenn nur die Hauptwerthe von E und T ermittelt werden sollen, nur an in den Hauptrichtungen geschnittenen Stäbchen ausgeführt, dagegen noch an zahlreichen schiefgeschnittenen, wenn es sich um Zeichnung der Elasticitäts- und Torsionsflächen resp. Curven oder um Ermittelung sämmtlicher Elasticitätsconstanten handelt.

Neben der statischen ist noch kurz der dynamischen Methode zu gedenken, bei welcher die Schwingungen, etwa mit der Hilfe der Klangfiguren auf Krystallscheibchen, beobachtet werden, und welche, von Savart[11]) angewandt,

---

1) Voigt, Wied. Ann. 34, pag. 981. 1888.
2) Voigt, Wied. Ann. 31, pag. 479. 1887.
3) Voigt, Wied. Ann. 31, pag. 495. 1887.
4) Röntgen und Schneider, Wied. Ann. 31, pag. 1000. 1887.
5) Voigt, Wied. Ann. 16, pag. 416. 1882.
6) Beckenkamp, Z. f. Kryst. 10, pag. 41. 1885.
7) Voigt, Wied. Ann. 34, pag. 1023. 1888.
8) Voigt, Ber. Berl. Akad. 1884, pag. 989.
9) Koch, Wied. Ann. 5, pag. 251. 1878; Freib. Verh. 8, Heft 2. 1881; Wied. Ann. 18, pag. 325.
10) Voigt, Wied. Ann. 31, pag. 474. 1887.
11) Savart, Pogg. Ann. 16, pag. 206. 1829.

die erste war, durch welche überhaupt die Elasticität der Krystalle, wenn auch nur qualitativ, untersucht wurde.

Resultate. Es bedeutet: E den Elasticitätsmodul, T den Torsionsmodul, dieselben beiden Grössen mit Indices ihre Werthe in bestimmten Richtungen; s_{11} u. s. w. $= S_{11}/P$ sind die indirekten, aber aus den Beobachtungen zunächst sich ergebenden, c_{11} u. s. w. die wirklichen Elasticitätsconstanten (alles in Kilogrammen); C die kubische Compressibilität, bezw. auf Atmosphären; $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Richtungscosinus der Längsaxe, $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ die der grösseren, $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ die der kleineren Querdimension.

A. Reguläres System. 1) Steinsalz.[1])

Beobachter	E_w	E_g	E_o	E_w/E_g	E_g/E_o	T_w
Voigt (1876) .	4103	3410	3193	1·20	1·07	—
„ (1884) .	4186	3482	—	1·20	—	1292
„ (1888) .	4187	3490	3026	1·20	1·15	1294
Koch	4033	3395	—	1·19	—	—
Groth . . .	—	—	—	1·19	—	—

$$\frac{1}{E} = [33{\cdot}48 - 9{\cdot}66\,(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)] \cdot 10^{-5}$$

(Kreiscylinder) $\frac{1}{T} = [154{\cdot}58 - 77{\cdot}28\,(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5}$

$C = 4{\cdot}2 \cdot 10^{-6}$ (Voigt); $= 5{\cdot}0 \cdot 10^{-6}$ (Röntgen u. Schneider)[2]),

$c_{11} = 4770,\quad c_{12} = 1320,\quad c_{44} = 1294.$

Für Steinsalz ist also die Poisson'sche Beziehung $c_{12} = c_{44}$ nahezu erfüllt; nach Voigt ist also die Polarität der Steinsalzmolekeln sehr gering.

2) Sylvin[3]).

$E_w = 4010,\quad E_g = 2088,\quad E_w : E_g = 1{\cdot}92$ (Koch)

$E_w = 3724,\quad E_g = 1960,\quad E_w : E_g = 1{\cdot}90,\quad T_w = 655$

$\frac{1}{E} = [75{\cdot}1 - 48{\cdot}2(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)] \cdot 10^{-5}$, hieraus ber. $E_o = 1695$

$c_{11} = 3750,\quad c_{12} = 198,\quad c_{44} = 655,\quad C = 7{\cdot}45 \cdot 10^{-6}$ (Voigt)

$C = 5{\cdot}6 \cdot 10^{-6}$ (Röntgen u. Schneider).

3) Flussspath (Voigt)[4]).

$E_w = 14730,\quad E_g = 10080,\quad E_o = 9100,\quad T_w = 3446$

$$\frac{1}{E} = [13{\cdot}05 - 6{\cdot}26\,(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma_4)] \cdot 10^{-5}$$

$c_{11} = 16700,\quad c_{12} = 4570,\quad c_{44} = 3450;\quad C = 1{\cdot}20 \cdot 10^{-6}.$

Die Poisson'sche Beziehung ist hier nicht erfüllt; Flussspath muss also nach Voigt stark polar wirkende Molekeln haben.

4) Pyrit (parallelflächige Hemiëdrie) (Voigt)[5]).

$E_w = 35300,\quad E_g = 25300,\quad E_o = 23100$ (ber.), $T_w = 10750;\quad C = 1{\cdot}14 \cdot 10^{-6}$

$c_{11} = 36800,\quad c_{12} = -4830,\quad c_{44} = 10750.$

---

[1]) Voigt, Pogg. Ann. Ergbd. 7, pag. 1 u. 177. 1876. — Voigt, Ber. Berl. Akad. 1884, pag. 989. — Voigt, Wied. Ann. 35, pag. 651. 1888. — Koch, Freib. Ber. 8 (2), pag. 1, u. Wied. Ann. 18, pag. 325. 1881. — Groth, Ber. Berl. Akad. 1875, pag. 544.

[2]) Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 31, pag. 1000. 1887.

[3]) Koch, a. a. O. — Voigt, Wied. Ann. 35, pag. 655. 1888. — Röntgen u. Schneider, a. a. O.

[4]) Voigt, Ber. Berl. Akad. 1884, pag. 999; Wied. Ann. 35, pag. 645. 1888; s. auch Klang, Wied. Ann. 12, pag. 321. 1881.

[5]) Voigt, Wied. Ann. 35, pag. 649. 1888.

Pyrit hat also einen überaus grossen (den grössten bisher bekannten) Elasticitätsmodul und ausserdem die merkwürdige Eigenschaft, dass eine der drei Elasticitätsconstanten negativ ist; von Erfüllung der POISSON'schen Beziehung kann also hier gar nicht die Rede sein.

5) Chlorsaures Natron (KOCH).[1])

$$E_w = 4047, \quad E_g = 3190, \quad E_w : E_g = 1\cdot27.$$

6) Alaune (BECKENKAMP)[2]).

Kalialaun: $E_w = 1806$, $E_g = 1987$, $E_w : E_g = 0\cdot90$.

Chromalaun: $E_w = 1608$, $E_g = 1771$, $E_o = 1832$, $E_w : E_g = 0\cdot90$.

Eisenalaun: $E_g = 1861$.

7) Kupfer (VOIGT)[3]).

$$E = 12260, \quad T_1 = 4616, \quad T_2 = 3930$$
$$c_{11} = 13420, \quad c_{12} = 6575, \quad c_{44} = 5590.$$

B. Rhombisches System. Fällt die Längsaxe in eine dei drei Hauptaxen, so ist der Index 1, 2, 3, fällt sie in eine der drei Hauptebenen unter 45° gegen die beiden betreffenden Axen, so ist der Index 4, 5, 6 beigefügt, der zweite Index giebt die Richtung der grösseren Querdimension an.

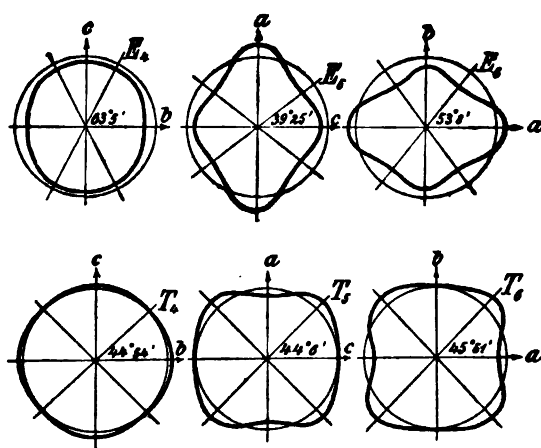
8) Topas (VOIGT)[4]).

$E_1 = 23040$, $E_2 = 28900$, $E_3 = 26520$, $E_4 = 26700$, $E_5 = 28930$, $E_6 = 31800$,
$T_{23} = T_{32} = 11040$, $T_{31} = T_{13} = 13530$, $T_{12} = T_{21} = 13360$,

$$\frac{1}{E} = [4\cdot341\alpha^4 + 3\cdot460\beta^4 + 3\cdot771\gamma^4 + 2(3\cdot879\beta^2\gamma^2 + 2\cdot856\gamma^2\alpha^2 + 2\cdot390\alpha^2\beta^2)] \cdot 10^-$$

(Kreiscylinder) $$\frac{1}{T} = (14\cdot88\alpha^4 + 16\cdot54\beta^4 + 16\cdot45\gamma^4 + 30\cdot89\beta^2\gamma^2 + 40\cdot89\gamma^2\alpha^2 + 43\cdot51\alpha^2\beta^2) \cdot 10^{-5}.$$

Die Hauptschnitte beider Flächen sind in Fig. 112 gezeichnet.



(Fig. 112.)

$$C = 0\cdot61 \cdot 10^{-6}.$$
$$c_{11} = 28700, \quad c_{22} = 35600, \quad c_{33} = 30000$$
$$c_{44} = 11000, \quad c_{55} = 13500, \quad c_{66} = 13300$$
$$c_{23} = 9000, \quad c_{31} = 8600, \quad c_{12} = 12800.$$

Die POISSON'schen Relationen sind hier durchaus nicht erfüllt; die hiernach vorhandene starke Polarität der Topasmolekeln stimmt mit den bekannten pyroelektrischen Eigenschaften des Topases überein.

---

1) KOCH, a. a. O.

2) BECKENKAMP, Z. f. Kryst. 1885, pag. 41 u. 1887, pag. 418.

3) VOIGT, Ber. Berl. Akad. 1883, pag. 961 u. 1884, pag. 1015.

4) VOIGT, WIED. Ann. 34, pag. 981. 1888. Gött. Nachr. 1887, Nr. 19.

9) Baryt (VOIGT)[1].

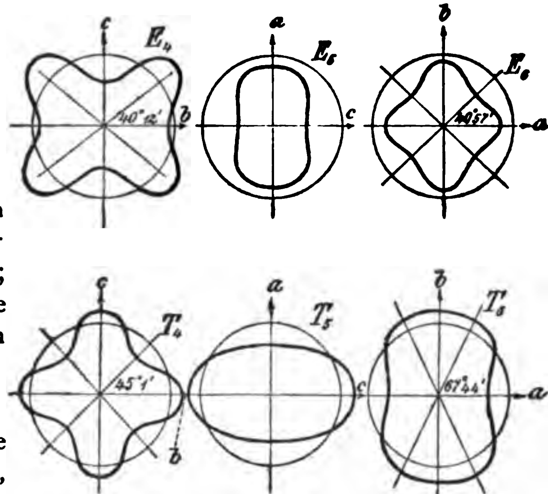
$$E_1 = 6199,\quad E_2 = 5403,\quad E_3 = 9594,\quad E_4 = 3764,\quad E_5 = 7025,\quad E_6 = 7400,$$
$$T_{23} = T_{32} = 1215,\quad T_{31} = T_{13} = 2927,\quad T_{12} = T_{21} = 2828,$$
$$\frac{1}{E} = [16{\cdot}13\alpha^4 + 18{\cdot}51\beta^4 + 10{\cdot}42\gamma^4 + 2(38{\cdot}79\beta^2\gamma^2 + 15{\cdot}21\gamma^2\alpha^2 + 8{\cdot}88\alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5}$$

(Kreiscylinder) $$\frac{1}{T} = [69{\cdot}52\alpha^4 + 117{\cdot}66\beta^4 + 116{\cdot}46\gamma^4 + 2(20{\cdot}16\beta^2\gamma^2 + 85{\cdot}29\gamma^2\alpha^2 + 127{\cdot}35\alpha^2\beta^2)] \cdot 10^{-5}.$$

Die Hauptschnitte sind in Fig. 113 dargestellt.

$C = 1{\cdot}93 \cdot 10^{-6}$.

$c_{11} = 9070,\quad c_{22} = 8000,$
$c_{33} = 10740,\quad c_{44} = 1220,$
$c_{55} = 2930,\quad c_{66} = 2830,$
$c_{23} = 2730,\quad c_{31} = 2750,$
$c_{12} = 4680.$



(Ph. 113.)

C. Monoklines System (COROMILAS).[2] Es sind hier nur die Spaltungsflächen untersucht; es fand sich Grösse und Lage des Maximum und Minimum von E bei

10) Gyps:

$E_{max.} = 8870$ in 21·9° gegen die Hauptaxe,
$E_{min.} = 3130$ „ 75·4° gegen die Hauptaxe.

11) Glimmer: $E_{max.} = 22133$ in der Hauptaxe
$E_{min.} = 15543$ in 45° gegen die Hauptaxe.

D. Hexagonales System. Der Index bedeutet die Neigung der Längsaxe gegen die Hauptaxe.

12) Beryll (Smaragd) (VOIGT)[3].

$E_0 = 21650,\quad E_{45} = 17960,\quad E_{90} = 23120,\quad T_0 = 6666,\quad T_{90} = 8830$ (letztere Zahl, wenn die kleinere Querdimension in die Hauptaxe fällt). Ferner, wenn φ, φ_1, φ_2 die Winkel der Längs-, Breiten- und Dickenrichtung des Stäbchens gegen die Hauptaxe sind:

$$\frac{1}{E} = (4{\cdot}325\, sin^4\varphi + 4{\cdot}619\, cos^4\varphi + 13{\cdot}328\, sin^2\varphi\, cos^2\varphi) \cdot 10^{-5}$$
$$\frac{1}{T} = (15{\cdot}000 - 3{\cdot}675\, cos^2\varphi_2 - 17{\cdot}536\, cos^2\varphi\, cos^2\varphi_1) \cdot 10^{-5}.$$

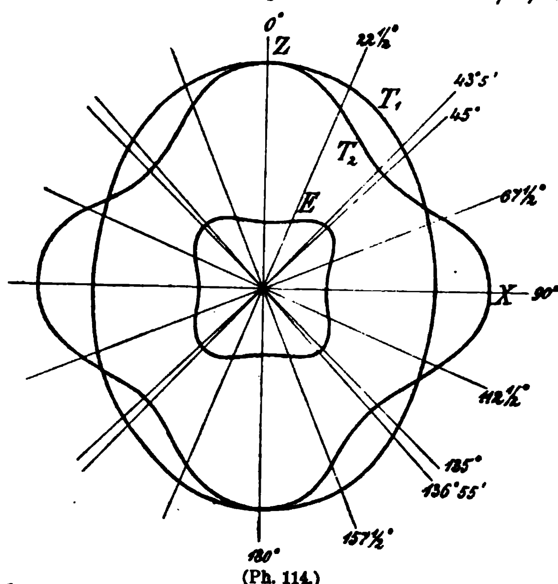
In Fig. 114 stellt die Curve E den Werth von $1/E$ bei verschiedenen φ dar,

[1]) VOIGT, ebenda. Ferner: NIEDMANN, Z. f. Kryst. 1887, pag. 362. Es fand sich: $E_1 = 6500$, $E_2 = 5410$, $E_3 = 8490$, ersterer ziemlich, der zweite Wert gut, der dritte schlecht mit VOIGT überstimmend.

[2]) COROMILAS, Ueb. d. El.-Verh. im Gyps u. Glimmer. Diss. Tüb. 1877 u. Z. f. Kryst. 1, pag. 407.

[3]) VOIGT, WIED. Ann. 31, pag. 474. 1887. Gött. Nachr. 1886, Nr. 3.

die Curven T_1 und T_2 die Werthe von $1/T$, wenn die Längsrichtung in einem Hauptschnitte variirt und entweder die grössere oder die kleinere Querdimension senkrecht zur Hauptaxe bleibt. Endlich wird:



(Ph. 114.)

$$C = 0{\cdot}747 \cdot 10^{-6}.$$

$$c_{11} = 27460,\quad c_{12} = 9800,$$
$$c_{13} = 6740,\quad c_{33} = 24090,$$
$$c_{44} = 6660.$$

Die POISSON'schen Beziehungen sind hier nahe erfüllt, die Polarität also klein.

E. Rhomboëdrisches System.

13) Bergkrystall (VOIGT)[1].

$$E_0 = 10304,\quad E_{-45} = 13050,$$
$$E_{+45} = 8505,\quad E_{90} = 7853,$$
$$T_0 = 5085,\quad T_{90} = 3481,$$

$$\frac{1}{E} = [12{\cdot}734\,(1-\gamma^2)^2 + 16{\cdot}693\,(1-\gamma^2)\,\gamma^2 + 9{\cdot}705\,\gamma^4 - 8{\cdot}460\,\beta\gamma(3\alpha^2-\beta^2)]\cdot 10^{-5},$$

und speciell für Richtungen || oder ⊥ zur Symmetrieebene:

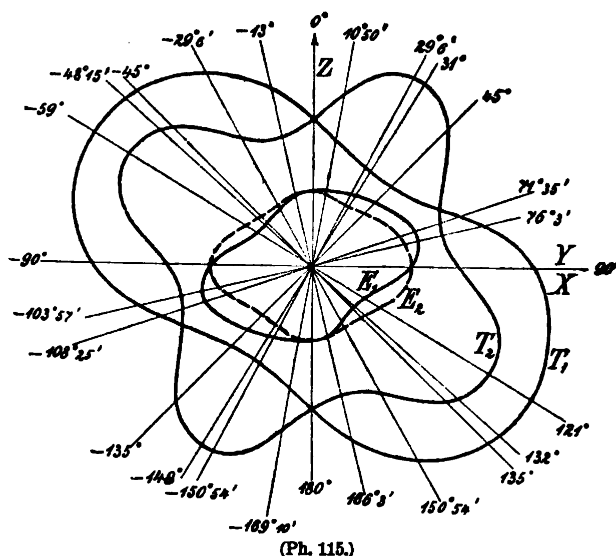
$$\frac{1}{E_1} = [12{\cdot}734\,\sin^4\varphi + 16{\cdot}693\,\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi + 9{\cdot}705\,\cos^4\varphi + 8{\cdot}460\,\cos\varphi\,\sin^3\varphi]\cdot 10^{-5}$$

$$\frac{1}{E_2} = [12{\cdot}734\,\sin^4\varphi + 16{\cdot}693\,\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi + 9{\cdot}705\,\cos^4\varphi]\cdot 10^{-5}.$$

Ferner:

$$\frac{1}{T} = [19{\cdot}665 + 9{\cdot}060\,\gamma_2^2 + 22{\cdot}984\,\gamma^2\gamma_1^2 - 16{\cdot}920\,[(\gamma\beta_1 + \beta\gamma_1)(3\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) - \beta_2\gamma_2]]\cdot 10^{-5},$$

und speciell, wenn die Längs- und die grössere oder kleinere Querdimension in der Symmetrieebene liegt:



(Ph. 115.)

$$\frac{1}{T_1} = [19{\cdot}665 + 5{\cdot}746\,\sin^2 2\varphi + 8{\cdot}460\,\sin 2\varphi\,\cos 2\varphi]\cdot 10^{-5}$$

$$\frac{1}{T_2} = [19{\cdot}665 + 9{\cdot}060\,\sin^2\varphi - 8{\cdot}460\,\sin 2\varphi]\cdot 10^{-5}.$$

Die Elasticitätscurve auf der Basis ist ein Kreis; im übrigen ist das elastische Verhalten des Bergkrystalls durch die vier Curven der Fig. 115 dargestellt. Endlich ist:

[1]) VOIGT, Gött. Nachr. 1886, Nr. 3. WIED. Ann. 31, pag. 495 u. 701. 1887.

$$C = 2{\cdot}675 \cdot 10^{-6}.$$

$$c_{11} = 8682, \quad c_{33} = 10745, \quad c_{44} = 5823$$
$$c_{12} = 709, \quad c_{13} = 1438, \quad c_{14} = 1715.$$

14) Kalkspath.

$E_0 = 5010$, $E_{-45} = 4411$, $E_{+45} = 7720$, $E_{90} = 7904$ (BAUMGARTEN [1]).

Die Elasticitätscurve in der Basis ist ein Kreis, die im Hauptschnitt ist schon oben in Fig. 110 dargestellt. F. AUERBACH.

Stoss.

Allgemeines. Wenn zwei Körper bei ihrer Bewegung mit einander in Berührung kommen, so tritt eine Reihe von Erscheinungen auf, welche man als die Erscheinungen des Stosses zusammenfasst. Bestimmend für dieselben sind die Massen der beiden Körper, ihre Geschwindigkeiten vor dem Stosse nach Grösse und Richtung, ihre Elasticitäts- und zuweilen auch ihre Reibungsverhältnisse, endlich die Lage und Beschaffenheit der Berührungsstellen. Zu ermitteln sind einmal die Geschwindigkeiten nach dem Stosse, und zweitens die Vorgänge und Begleiterscheinungen während der Berührung selbst (Stosszeit, Stossfläche, Stosstiefe, Erwärmung, Schall, dauernde Deformation u. s. w.). Bei Beschränkung auf den ersten Punkt kann man schon durch elementare Betrachtungen (mechanische Theorie) zu Ergebnissen gelangen; dieselben sind aber nur in gewissen Specialfällen erfahrungsgemäss streng richtig, in anderen sind sie es nur näherungsweise, in noch anderen endlich werden sie durch die Beobachtungen widerlegt. Alsdann, und ebenso wenn es sich um Probleme der zweiten Classe handelt, muss die höhere, elastische Theorie zu Grunde gelegt werden, die jedoch ebenfalls, ihrem heutigen Stande nach, die Beobachtung nur in einigen Fällen befriedigend wiedergiebt.

Man unterscheidet zunächst den centralen Stoss, bei welchem im Momente der Berührung die Stossrichtung, d. h. die Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Körper auf der Tangentialebene senkrecht steht, von dem excentrischen Stoss, bei welchem entweder nur eine oder keine der beiden von den Schwerpunkten nach der Berührungsstelle gezogenen Linien auf der Tangentialebene senkrecht steht. Bei zwei homogenen Kugeln z. B. ist jeder Stoss central, bei Ellipsoiden nur, wenn die Berührung an den Enden der Axen stattfindet u. s. w. Zweitens unterscheidet man den geraden Stoss, bei welchem die vor dem Stosse stattfindenden Bewegungsrichtungen gemeinschaftlich in die Stossrichtung fallen, von dem schiefen Stosse, wo eine oder beide Bewegungsrichtungen mit der Stossrichtung einen Winkel bilden. Beim schiefen excentrischen Stosse können dabei noch verschiedene Möglichkeiten eintreten, auf welche jedoch hier nicht näher eingegangen werden kann. Drittens hat man den Stoss auf einen freien, auf einen drehbaren oder auf einen festen Körper resp. zwischen solchen zu unterscheiden. Endlich werden die Erscheinungen complicirt, wenn die stossenden Körper vor dem Stosse ausser der fortschreitenden auch noch eine drehende (rollende oder kreiselnde) Bewegung haben.

---

[1]) BAUMGARTEN, POGG. Ann. 152, pag. 369. 1874. Siehe auch: VATER, Z. f. Kryst. 1886, pag. 549 (auch für Apatit).

Mechanische Theorie[1]).

Gerader centraler Stoss. Hier verläuft die ganze Erscheinung in einer Linie, und es handelt sich nur darum, bei gegebenen Massen m_1 und m_2 der Körper K_1 und K_2 (die man sich der Anschaulichkeit halber als Kugeln vorstellen kann) und gegebenen Geschwindigkeiten c_1 und c_2 vor dem Stoss die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach demselben zu ermitteln. Hierzu können nach Wahl verschiedene Principien der Mechanik dienen. Wählt man das der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (Princip 6, pag. 36), so argumentirt man folgendermaassen: Während der Berührung übt jeder der beiden Körper auf den anderen einen Druck aus, und nach dem obigen Princip sind diese beiden Drucke gleich und entgegengesetzt. Folglich werden auch die Wirkungen, die sie hervorbringen, gleich und entgegengesetzt sein; jede dieser Wirkungen besteht nun in einer Geschwindigkeitsänderung ($v_1 - c_1$ resp. $v_2 - c_2$), also in einer Aenderung der Bewegungsgrösse (pag. 19). Man erhält also

$$m_1(v_1 - c_1) = m_2(c_2 - v_2)$$

oder auch

$$m_1c_1 + m_2c_2 = m_1v_1 + m_2v_2 = const. \tag{1}$$

Wählt man das Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, so hat man für Ort und Geschwindigkeit des Schwerpunktes von K_1 und K_2 vor dem Stoss, also auch nach ihm:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad \text{also} \quad v = c = \frac{m_1c_1 + m_2c_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

also wieder wie oben. In Worten besagt diese Gleichung: Die Summe der Bewegungsgrössen beider Körper wird durch den Stoss nicht geändert. Hiermit hat man aber nur eine einzige Bestimmungsgleichung für die beiden gesuchten Grössen v_1 und v_2, und es können folglich unendlich viele verschiedene Fälle eintreten. Welcher von ihnen eintritt, hängt von der Elasticität des Materials von K_1 und K_2 ab. Die beiden hier möglichen äussersten Fälle sind diejenigen völlig unelastischer und vollkommen elastischer Körper.

a) Unelastischer Stoss. Der Druck der Körper auf einander deformirt dieselben, ohne eine innere Gegenkraft wachzurufen; es wird also ein völliger Ausgleich sowohl des Druckes als der Geschwindigkeiten stattfinden, die relative Geschwindigkeit der Körper gegeneinander, welche vor dem Stosse $c_1 - c_2$ betrug, ist nach ihm null geworden, und die Körper werden sich gemeinsam (ohne sich wieder zu trennen), mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, nämlich mit der Geschwindigkeit

$$v_1 = v_2 = v = c = \frac{m_1c_1 + m_2c_2}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Stossen also z. B. zwei Kugeln von gleicher Masse mit gleichen, entgegengesetzten Geschwindigkeiten auf einander ($m_1 = m_2$, $c_1 = -c_2$), oder stossen zwei Kugeln von verschiedenen Massen mit entgegengesetzten, ihren Massen umgekehrt proportionalen Geschwindigkeiten aufeinander ($m_1c_1 = -m_2c_2$), so kommen sie zum Stillstand. Stossen zwei Kugeln von gleichen Massen mit verschiedenen Geschwindigkeiten aufeinander, so bewegen sie sich mit dem arithmetischen Mittel

---

[1]) Die mechanische Theorie des Stosses ist fast gleichzeitig 1668 in Folge einer Preisfrage der Londoner Akademie von HUYGENS (De motu corporum ex percussione), WALLIS (Opera I, pag. 1012: De percussione) und WREN entwickelt und in den Trans. R. Soc., Bd. I, zuerst veröffentlicht. — Bald darauf hat auch NEWTON die Stosstheorie entwickelt (Philos. nat. princ. math., Einleitung).

der Geschwindigkeiten weiter. Da der Stoss die unelastischen Körper dauernd deformirt, so leistet er Arbeit; ein Theil der kinetischen Energie muss also verloren gehen, und zwar findet man diesen Verlust

$$\frac{1}{2}(m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2.$$

Der Verlust an kinetischer Energie ist also einerseits einer reinen Function der Massen, andererseits einer reinen Function der Geschwindigkeiten, nämlich dem Quadrat ihrer Differenz proportional. Der verhältnissmässige Verlust an kinetischer Energie endlich hängt nur von dem Verhältniss δ der beiden Massen und dem Verhältniss ε der beiden Geschwindigkeiten ab und ist gleich

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{(1+\delta)(1/\delta + \varepsilon^2)};$$

er variirt von 0 bis 100 Procent.

b) Elastischer Stoss. Hier ist der eigentliche Vorgang des Stosses damit, dass die beiden Körper ihre relativen Geschwindigkeiten gegen den Schwerpunkt, $c_1 - c$ und $c_2 - c$, einbüssen, noch nicht beendet, der Druck der Körper auf einander ruft nämlich deren Elasticität wach, und wenn diese eine vollkommene ist, so treibt sie die Körper mit dem gleichen, aber entgegengesetzten Druck auseinander. Auf jene erste Periode der Berührung folgt also eine zweite, in welcher die relative Geschwindigkeit jeder der beiden Körper von null auf den dem ursprünglichen entgegengesetzten Werth steigt, d. h. auf $c - c_1$ resp. $c - c_2$. Die absoluten Geschwindigkeiten der Körper vom Augenblicke ihrer Trennung an sind also

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= c + (c - c_1) = \frac{(m_1 - m_2)c_1 + 2m_2 c_2}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= c + (c - c_2) = \frac{(m_2 - m_1)c_2 + 2m_1 c_1}{m_2 + m_1} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man die Gleichungen (1) mit dem Princip von der Erhaltung der kinetischen Energie, also mit der Gleichung

$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

combinirt, und umgekehrt findet man auch durch die Gleichungen (3) dieses Princip befriedigt, d. h. den Verlust an kinetischer Energie gleich null. Die relative Geschwindigkeit nach dem Stosse findet sich: $v_1 - v_2 = c_2 - c_1$, sie ist also der relativen Geschwindigkeit vor dem Stoss gleich und entgegengesetzt. Ist $m_1 < m_2$ und ruht einer der Körper vor dem Stoss, so wird:

wenn der schwere stösst, der leichte ruht: $v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} c_2$, $v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} c_2$,

wenn der leichte stösst, der schwere ruht: $v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} c_1$, $v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} c_1$.

Sind beide Körper in Bewegung, ihre Massen aber gleich, so wird besonders einfach

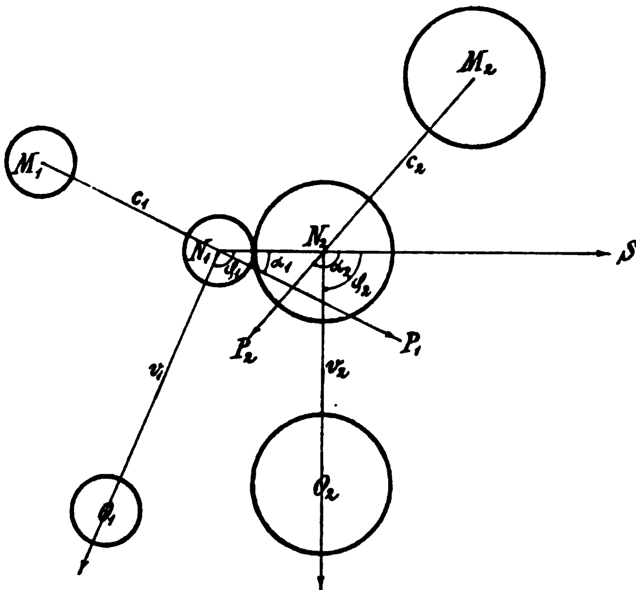
$$v_1 = c_2 \qquad v_2 = c_1; \qquad (3a)$$

die Kugeln prallen also mit vertauschten Geschwindigkeiten auseinander oder, wie man auch sagen kann, sie verhalten sich so, als ob sie mit unveränderter Geschwindigkeit durch einander hindurch gegangen wären. Stösst z. B. eine Kugel auf eine gleich schwere ruhende, so giebt sie ihre ganze Geschwindigkeit an diese ab und kommt selbst zur Ruhe. Stossen zwei gleich schwere Kugeln mit gleichen, aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten aufeinander, so prallen sie mit unveränderter Geschwindigkeit zurück.

Unvollkommen elastischer Stoss. In den beiden untersuchten extremen

Fällen sind, wie man sieht, die Erscheinungen völlig verschieden. Sie werden aber vermittelt durch die Erscheinungen beim Stoss unvollkommen elastischer Körper oder, was im wesentlichen dasselbe ist, bei Stössen, deren Wirkung die Elasticitätsgrenze der Stoffe überschreitet. Die erste Periode der Berührung verläuft dann wieder ebenso wie in den beiden extremen Fällen, in der zweiten aber erlangen die Kugeln, wenn k ein echter Bruch ist, nur die relativen Geschwindigkeiten $k(c-c_1)$ resp. $k(c-c_2)$ wieder, ihre absoluten Geschwindigkeiten werden also

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= c + k(c-c_1) = \frac{(m_1-km_2)c_1+(1+k)m_2c_2}{m_1+m_2} \\ v_2 &= c + k(c-c_2) = \frac{(m_2-km_1)c_2+(1+k)m_1c_1}{m_1+m_2} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$



(Ph. 116.)

Die relative Geschwindigkeit nach dem Stosse wird

$$v_1 - v_2 = k(c_2 - c_1),$$

also der ursprünglichen entgegengesetzt und gleich ihrem k-fachen. Dieser Bruch heisst[1]) Restitutionscoëfficient. Für wollne Kugeln z. B. ist er nach NEWTON etwa 0·56, für gläserne etwa 0·94. Für $k=0$ erhält man wieder (2), für $k=1$ wieder (3).

Eine andere Klasse von Zwischenerscheinungen erhält man bei dem elastisch-unelastischen Stoss, d. h. dem Stoss zwischen einem als völlig elastisch und einem als völlig unelastisch betrachteten Körper.

Schiefer Stoss. Zu den Zahlengrössen kommen hier noch (Fig. 116) die Winkel $P_1N_1S=\alpha_1$ und $P_2N_2S=\alpha_2$ hinzu, welche die Geschwindigkeiten c_1 und c_2, und die Winkel $O_1N_1S=\varphi_1$ und $O_2N_2S=\varphi_2$, welche die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 mit der Stossrichtung bilden (die Complementwinkel bilden sie mit der Berührungsebene). Die Wirkung des Stosses erstreckt sich nur auf die in die Stossrichtung fallenden Componenten, die man daher nach obigen Formeln zu behandeln hat; die andern Componenten bleiben, wenn keine Reibung vorhanden ist, unverändert; schliesslich hat man wieder die Resultante zu bilden. Man erhält auf diese Weise:

a) für unelastische Körper, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{m_1c_1\cos\alpha_1+m_2c_2\cos\alpha_2}{m_1+m_2}=K$$

setzt:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{K^2+c_1^2\sin^2\alpha_1}, & v_2 &= \sqrt{K^2+c_2^2\sin^2\alpha_2} \\ \tan\varphi_1 &= \frac{c_1\sin\alpha_1}{K} & \tan\varphi_2 &= \frac{c_2\sin\alpha_2}{K}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

[1]) THOMSON und TAIT, Hdb. d. theor. Physik I, pag. 236.

Die Kugeln trennen sich hiernach im Allgemeinen nach dem Stosse wieder; sie bleiben nur zusammen, wenn $v_1 = v_2$ und $\varphi_1 = \varphi_2$ wird, also wenn die Anfangsgeschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Sinus der Anfangsrichtungen verhalten, oder in dem Specialfalle $m_1 = m_2$, $c_1 = c_2$, $\alpha_1 = -\alpha_2$; im letzteren gehen die vereinigten Kugeln in der Berührungsebene weiter. Ruht die zweite Kugel, so ist $c_2 = 0$ und es wird

$$K = \frac{m_1 c_1 \cos\alpha_1}{m + m_1}, \quad v_1 = \sqrt{K^2 + c_1^2 \sin^2\alpha_1}, \quad v_2 = K, \quad \tang\varphi_1 = \frac{c_1 \sin\alpha_1}{K}, \quad tg\varphi_2 = 0;$$

die getroffene Kugel geht also in der Stossrichtung ab, und zwar desto langsamer, je schiefer sie getroffen wurde.

b) Für elastische Körper, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{(m_1 - m_2) c_1 \cos\alpha_1 + 2m_2 c_2 \cos\alpha_2}{m_1 + m_2} = K_1 \qquad \frac{(m_2 - m_1) c_2 \cos\alpha_2 + 2m_1 c_1 \cos\alpha_1}{m_1 + m_2} = K_2$$

setzt:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = \sqrt{K_1^2 + c_1^2 \sin^2\alpha_1} & v_2 = \sqrt{K_2^2 + c_2^2 \sin^2\alpha_2} \\ \tang\varphi_1 = \dfrac{c_1 \sin\alpha_1}{K_1} & \tang\varphi_2 = \dfrac{c_2 \sin\alpha_2}{K_2} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Für gleiche Massen wird

$$v_1 = \sqrt{c_1^2 \sin^2\alpha_1 + c_2^2 \cos^2\alpha_2} \qquad v_2 = \sqrt{c_1^2 \cos^2\alpha_1 + c_2^2 \sin^2\alpha_2}$$

$$\tang\varphi_1 = \frac{c_1 \sin\alpha_1}{c_2 \cos\alpha_2} \qquad \tang\varphi_2 = \frac{c_2 \sin\alpha_2}{c_1 \cos\alpha_1},$$

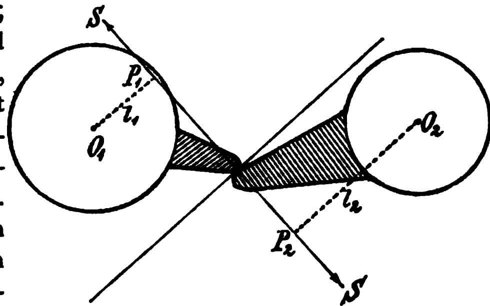
und wenn auch noch $c_1 = c_2$, $\alpha_1 = -\alpha_2$ ist, so laufen die Kugeln mit vertauschten Richtungen weiter. Wenn die gestossene Kugel vorher ruht, so wird allgemein

$$K_1 = \frac{(m_1 - m_2) c_1 \cos\alpha_1}{m_1 + m_2}, \quad v_1 = \sqrt{K_1^2 + c_1^2 \sin^2\alpha_1}, \quad v_2 = K_2 = \frac{2m_1 c_1 \cos\alpha_1}{m_1 + m_2},$$

$$\tang\varphi_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \tang\alpha_1, \quad \tang\varphi_2 = 0. \qquad (7)$$

Auch hier geht die getroffene Kugel in der Stossrichtung, aber doppelt so schnell wie eine unelastische, fort; insbesondere bei gleichen Massen wird $v_1 = c_1 \sin\alpha_1$, $v_2 = c_1 \cos\alpha_1$, $\tang\varphi_1 = \infty$, $\tang\varphi_2 = 0$; die stossende Kugel geht also in der Berührungsebene, die gestossene in der Stossrichtung, mithin beide rechtwinklig gegeneinander weiter.

c) Beim elastisch-unelastischen Stosse und beim Stosse unvollkommen elastischer Körper treten wieder gewisse mittlere Erscheinungen auf.



(Ph. 117.)

Stoss gegen feste Wände. Man erhält die bezüglichen Formeln, indem man in den bisherigen $m_2 = \infty$, $c_2 = 0$ setzt. Bei einem unelastischen Körper wird, wenn er senkrecht auf eine unelastische Wand stösst, $v = 0$, er kommt zur Ruhe; stösst er schief auf, so wird $v = c \sin\alpha$, $\tang\varphi = \infty$, er läuft also längs der Wand weiter, und zwar desto schneller, je schiefer er aufstiess. Ein elastischer Körper dagegen wird, da $K_1 = -c_1 \cos\alpha_1$, $v_1 = c_1$, $\tang\varphi_1 = -\tang\alpha_1$ wird, mit gleicher Geschwindigkeit unter gleichem, aber entgegengesetztem Winkel zurückgestossen. Bekanntlich gilt dasselbe Reflexionsgesetz auch für Schall, Licht, Wärme und Elektricität.

Stoss zwischen drehbaren Körpern. Sind die beiden aufeinander stossenden Körper nicht frei, sondern nur um eine Axe drehbar, so sind die

Massen auf die Stossrichtung zu reduciren, indem man sie mit den Quadraten der Trägheitsradien r_1 und r_2 multiplicirt und mit den Quadraten der von den Axen auf die Stossrichtung gefällten Lothe $O_1P_1 = l_1$ und $O_2P_2 = l_2$ dividirt. Sind dann die Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stosse ε_1 und ε_2, so sind sie nach dem Stosse

$$\begin{aligned} w_1 &= \varepsilon_1 - l_1(l_1\varepsilon_1 - l_2\varepsilon_2)(1+k)\frac{m_2 r_2^2}{m_1 r_1^2 l_2^2 + m_2 r_2^2 l_1^2} \\ w_2 &= \varepsilon_2 + l_2(l_1\varepsilon_1 - l_2\varepsilon_2)(1+k)\frac{m_1 r_1^2}{m_1 r_1^2 l_2^2 + m_2 r_2^2 l_1^2}, \end{aligned} \tag{8}$$

wo für unelastische Körper $k = 0$, für vollkommen elastische $k = 1$, für unvollkommen elastische k ein echter Bruch ist. Trifft ein freier Körper auf einen drehbaren, so sind nur für letzteren die bezeichneten Substitutionen zu machen, es wird also

$$\begin{aligned} v_1 &= c_1 - (c_1 - l_2\varepsilon_2)(1+k)\frac{m_2 r_2^2}{m_1 l_2^2 + m_2 r_2^2} \\ w_2 &= \varepsilon_2 + l_2(c_1 - l_2\varepsilon_2)(1+k)\frac{m_1}{m_1 l_2^2 + m_2 r_2^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Durch Specialisirung erhält man hieraus den Stoss eines freien auf einen drehbaren, ruhenden Körper und den Stoss eines rotirenden Körpers auf einen freien ruhenden.



(Ph. 118.)

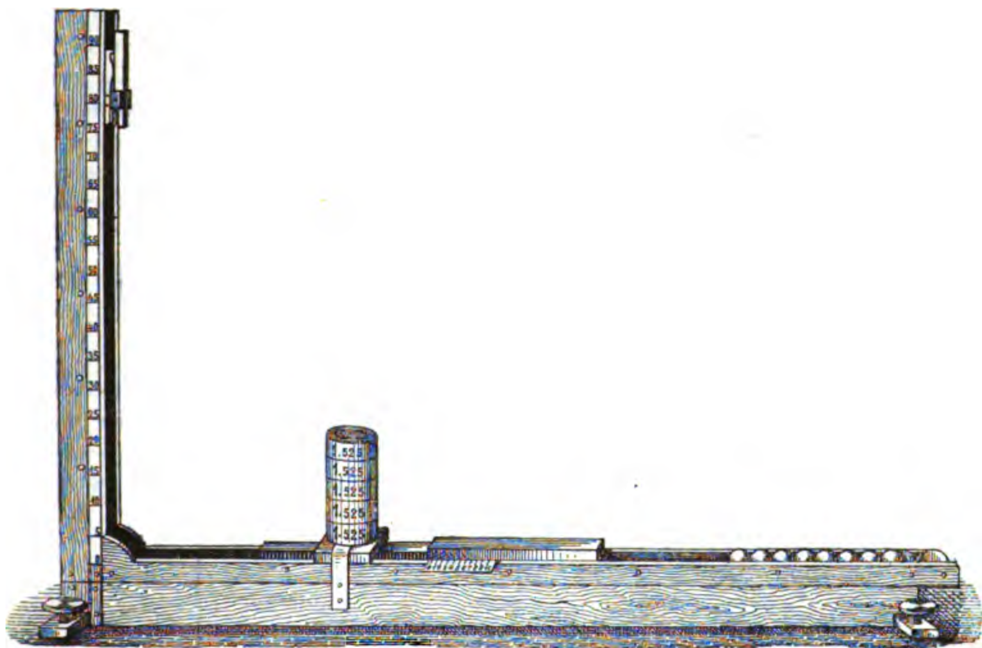
Excentrischer Stoss zwischen freien Körpern. Die Wirkungen desselben lassen sich zusammensetzen aus der Wirkung eines centralen Stosses zwischen den beiden Körpern und der Wirkung, welche ein Stoss zwischen ihnen haben würde, wenn sie nur um ihre Schwerpunkte drehbar wären; die Darstellung der Formeln würde indessen hier zu weit führen.

Stossapparate. Der erste derartige Apparat ist die von MARIOTTE[1]) angegebene Percussionsmaschine. In der jetzigen, brauchbarsten Form besteht dieselbe aus einem in seinen Theilen verstellbaren Stativ, an welchem Kugeln oder andere Körper mittelst Fäden aufgehängt sind; für die Versuche über den geraden Stoss eignet sich die Aufhängung jeder Kugel an zwei schrägen Fäden, deren Ebene senkrecht auf der Bewegungs- und Stossrichtung steht; für den schiefen Stoss ist die Aufhängung je an einem Faden erforderlich. Als Material eignet sich z. B. Lehm für unelastische, Elfenbein für vollkommen elastische, Blei für unvollkommen elastische Körper. Man kann hiermit die meisten obigen Versuche anstellen und findet die Theorie qualitativ, zum Theil aber auch quantitativ bestätigt. Durch Anbringung von mehr als zwei, z. B. n Kugeln, welche sich im Ruhezustand sämtlich berühren, kann man auch die Fortpflanzung des Stosses studieren. Trifft z. B. die erste Kugel die zweite mit der Geschwindigkeit c, so erhalten bei gleicher Grösse und unelastischem Stoff alle Kugeln die gemeinsame

[1]) MARIOTTE, Traité de la percussion ou choc des corps. Paris 1677.

Geschwindigkeit c/n; bei vollkommen elastischem Stoff dagegen kommt die erste zur Ruhe, die zweite bleibt in Ruhe, und die letzte springt mit der Geschwindigkeit c ab. Stossen die beiden ersten Kugeln, so springen die beiden letzten ab u. s. w. Stösst von jeder Seite eine, so springen diese beiden äussersten mit vertauschten Geschwindigkeiten zurück. Nehmen die Kugeln an Grösse zu, und stösst die kleinste, so springen alle zurück und trennen sich von einander; stösst die grösste, so gehen sie nach vorwärts auseinander.

Eine neuere Stossmaschine ist von SEDLACZEK[1]) in zwei Formen angegeben worden; sie hat gegenüber der MARIOTTE'schen die Vortheile und Nachtheile, die



(Ph. 119.)

daraus sich ergeben, dass die Kugeln nicht hängen, sondern in Rinnen laufen. Bei der einfachen Stossmaschine handelt es sich nur um qualitative Versuche, bei der zusammengesetzten (Fig. 119), welche mit einer graduirten Fallröhre und einem Quadranten zur Umwandlung der vertikalen in horizontale Geschwindigkeit versehen ist, um quantitative Messungen.

Der mannigfaltigste Apparat zum Studium der Gesetze des elastischen Stosses ist jedenfalls das Billard. Indessen kommen dieselben hier nicht immer in ihrer einfachen Gestalt zum Ausdruck, sondern in derjenigen modificirten, welche eine Folge des Rollens und Kreiselns der Kugeln ist. Ersteres findet immer statt (bei hohem Stoss stark, bei mittlerem und tiefem schwächer vorwärts, bei ganz tiefem rückwärts), ausser dem schwer exact zu verwirklichenden Falle, dass der Tiefstoss das Rollen gerade aufhebt, die Kugel also gleitet; es beeinflusst die Geschwindigkeit v_1 der stossenden Kugel nach dem Stoss nicht unwesentlich (Nachläufer, Rückläufer u. s. w.). Letzteres, das Kreiseln, tritt stets ein, wenn die erste Kugel vom Queu, oder die zweite von der ersten seitlich getroffen wird; es hat ebenfalls einen oft erheblichen Einfluss auf die Geschwindigkeit, einen noch grösseren aber auf die Richtung der Bewegung, namentlich des gestossenen Balls

[1]) SEDLACZEK, POGG. Ann. 156, pag. 476 (1875).

und kann selbst krummlinige Bahnen erzeugen. Endlich machen sich alle diese Einflüsse auch bei der Reflexion der Bälle von den festen Wänden (Banden) geltend.

Die exacten Versuche über Stossgeschwindigkeiten werden weiter unten Besprechung finden.

Elasticitätstheorie des geraden Stosses von Cylindern. Dieselbe ist nach einigen unvollkommenen Versuchen von CAUCHY[1]), POISSON[2]) und POINSOT[3]) von ST. VENANT[4]) und von F. NEUMANN[5]) (unabhängig von einander) entwickelt worden[6]). Sie unterscheidet sich von der mechanischen dadurch, dass die durch den Stoss in den Stäben erregten Verdichtungs- und Verdünnungswellen und ihre Rückwirkung auf den Stoss berücksichtigt werden. Führt man Cylinder-Coordinaten $x\,r\,\vartheta$ ein, nennt die Verschiebungscomponenten entsprechend $u\,\rho\,\psi$ und drückt die Druckcomponenten sowie die Elasticitätsgleichungen (Art. Elasticität, pag. 232) in diesen Coordinaten aus, so findet man bei Beschränkung auf die hier allein interessirenden Grössen x und r resp. u und ρ, und wenn keine äusseren Kräfte wirken, die Gleichungen (ε Dichte, K und L KIRCHHOFF'sche Elasticitäts-Constanten):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{K}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 2(1+L)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+(1+2L)\left(r\frac{\partial^2 \rho}{\partial x\partial r}+2\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\\ \frac{\varepsilon}{K}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}+2(1+L)\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)+(1+2L)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial r}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Diese Gleichungen kann man vereinfachen, wenn man u und ρ in Potenzreihen von r entwickelt, beachtet, dass hierin nur die geraden Glieder vorkommen können, und von diesen nur die beiden ersten $u = u_0 + u_2 r^2$, $\rho = \rho_0 + \rho_2 r^2$ beibehält, indem man sich auf dünne Cylinder beschränkt; es werden dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{K}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= 2(1+L)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+4u_2+2(1+2L)\frac{\partial \rho_0}{\partial x}\\ \frac{\varepsilon}{K}\frac{\partial^2 \rho_0}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial x^2}+16(1+L)\rho_2+2(1+2L)\frac{\partial u_2}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Hierzu kommen die Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_1 \text{ für } 0 < x < a_1,\quad \frac{\partial u}{\partial t} = c_2 \text{ für } a_1 < x < a_1 + a_2, \qquad (12)$$

(a_1 und a_2 Längen der Stäbe, deren Dicke und Material gleich sei)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ für } 0 < x < a_1 + a_2 \text{ (keine Spannung vorhanden);} \qquad (12a)$$

ferner für die von Druck freien Mantelflächen:

$$2u_2 + \frac{\partial \rho_0}{\partial x} = 0 \qquad (1+2L)\rho_0 + L\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0; \qquad (13)$$

für die freien Endflächen ($x = 0$ und $x = a_1 + a_2$)

$$X_x = 2K\frac{1+3L}{1+2L}\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0,\quad \text{also } \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0; \qquad (14)$$

endlich für die zusammenstossenden Enden ($x = a_1$):

---

[1]) CAUCHY, Bull. Soc. philom. 1826, pag. 180.

[2]) POISSON, Traité de mécan. 2, § 499.

[3]) POINSOT, Liouv. J. (2) 2. 1857, und (2) 4. 1859.

[4]) ST. VENANT, Liouville J. (2) 12, pag. 237. 1867.

[5]) F. NEUMANN, Vorl. ü. d. Th. der Elast. Lpzg. 1885, pag. 332.

[6]) Andere Abhandlungen über den Stoss, meist im Anschlusse an ST. VENANT, von BOUSSINESQ, RESAL u. A. (Compt. rend. 1882 ff.).

$$(u_0)_1 = (u_0)_2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)_2.$$

Die Gleichungen (11) und (13) führen zunächst, wenn zur Abkürzung

$$\frac{2K}{\varepsilon}\frac{1+3L}{1+2L} = \omega^2 \tag{15}$$

gesetzt wird, zu der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \tag{16}$$

deren Lösung nach D'ALEMBERT eine elastische Doppelwelle mit der Geschwindigkeit ω (Schallgeschwindigkeit), also:

$$u_0 = f(x + \omega t) + \varphi(x - \omega t)$$

ist, wo die Funktionen f und φ sich aus (12) und (12a) bestimmen, nämlich zunächst, wenn f' und φ' die Ableitungen sind,

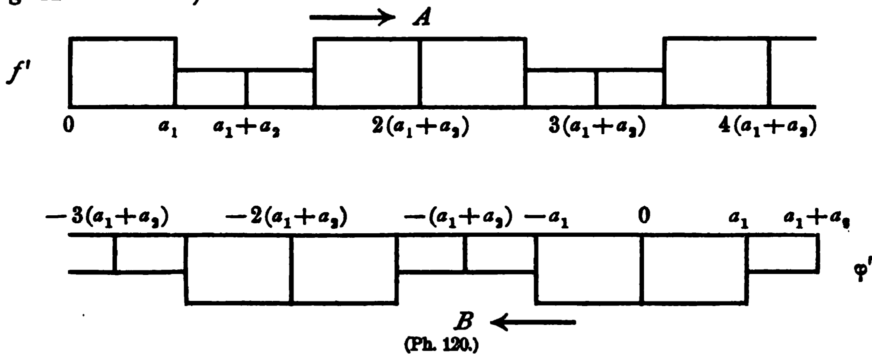
$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{c_1}{\omega}, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{2}\frac{c_1}{\omega} \quad (\text{für } 0 < x < a_1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{c_2}{\omega}, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{2}\frac{c_2}{\omega} \quad (\text{für } a_1 < x < a_1 + a_2),$$

und dann weiter für andere Argumente aus (14) durch die Gleichung

$$f'(\omega t) + \varphi'(-\omega t) = 0 \qquad f'(a_1 + a_2 + \omega t) + \varphi'(a_1 + a_2 - \omega t) = 0,$$

so dass f' und φ', graphisch ausgedrückt, gebrochene gerade Linien werden (Fig. 120 A und B).



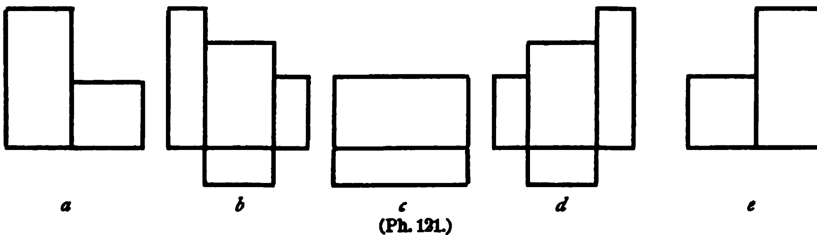
(Fig. 120.)

Schliesslich wird die Geschwindigkeit

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \omega\,[f'(x + \omega t) - \varphi'(x - \omega t)]$$

und der Druck (17)

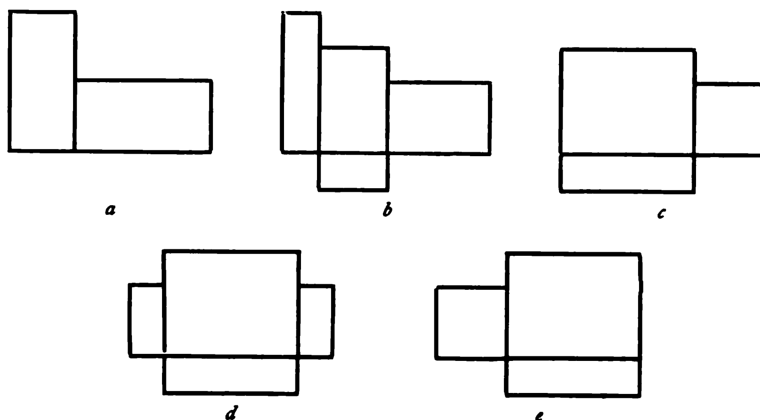
$$X_x = \varepsilon\omega^2\,[f'(x + \omega t) + \varphi'(x - \omega t)].$$



(Fig. 121.)

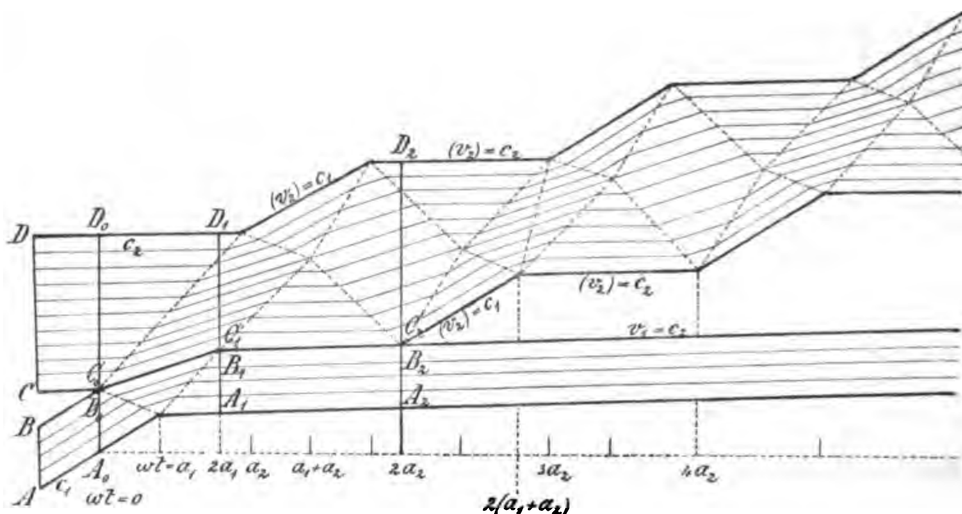
Stellt man nach dem Vorgange von F. NEUMANN hiernach für die 5 Zeitpunkte $\omega t = 0,\ \frac{1}{2}a_1,\ a_1,\ \frac{3}{2}a_1,\ 2a_1$ die Geschwindigkeiten durch Ordinaten über, die Drucke durch Ordinaten unter den die Stäbe repräsentirenden Abscissen dar, so erhält man bei zwei gleich langen Stäben die Fig. 121 a—e, bei Stäben von

$l_2 = 2\,l_1$ die Fig. 122 *a—e*. Wie man sieht, findet im ersten Falle ein einfacher Austausch der Geschwindigkeiten statt, der zweite dagegen ist in jeder Hinsicht complicirter. Für diesen Fall, also für ungleiche Längen, hat St. Venant die eigentliche



(Ph. 122)

graphische Methode angewandt und Zeichnungen erhalten, welche den Gang der Erscheinung und alle ihre Einzelheiten in überaus anschaulicher Weise wiedergeben (Fig. 123). Hier ist die Zeit die Abscisse, die Stäbe sind die Ordinaten,



(Ph. 123.)

die starken Linien die »Zeitbahnen« ihrer Endpunkte, die schwachen die der innern Punkte der Stäbe, die Neigungen dieser Linien also die Geschwindigkeiten, ihre Abstände die Verdichtungen und Verdünnungen; endlich die gebrochenen Linien die Wellen. $ABCD$ sind die Stäbe kurz vor dem Stoss, $A_0 B_0 C_0 D_0$ bei Beginn desselben ($t = 0$). Jetzt dringt in jeden Stab eine Verdichtungswelle, welche das Ende des Kürzeren a_1 zur Zeit $\omega t = a_1$ erreicht, dort reflectirt wird und zur Zeit $\omega t = 2a_1$ wieder an die Stossstelle gelangt; da im längeren Stabe noch Druck herrscht, geht sie in diesen über, bis sie sich mit dessen eigener, zurückkehrender Welle trifft. Nunmehr entsteht eine Verdünnungswelle, welche, an der Stossstelle zur Zeit $\omega t = 2a_2$ angelangt, nicht mehr in den kürzeren Stab übergeht (da

hier seit der Zeit $\omega t = 2a_1$ kein Druck mehr besteht), sondern reflectirt wird. Wie man sieht, ist der Druck der Stäbe auf einander schon zur Zeit $t = 2a_1/\omega$ (Stellung $A_1 B_1 C_1 D_1$), ihre Berührung aber erst zur Zeit $t = 2a_2/\omega$ ($A_2 B_2 C_2 D_2$) beendet. Ferner sieht man, dass der kürzere Stab als starres Ganzes weiter geht und zwar mit der Anfangsgeschwindigkeit c_2 des längeren, dass dagegen der längere nicht aufhört, sich zu dehnen und zusammenzuziehen, so dass seine Enddunkte sich abwechselnd mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 bewegen. Man kann also nicht von seiner Geschwindigkeit schlechthin, sondern nur von der seines Schwerpunktes sprechen; nennt man diese jetzt v_2, so findet sich

$$v_1 = c_2, \quad v_2 = c_2 + \frac{a_1}{a_2}(c_1 - c_2), \tag{18}$$

letzteres am einfachsten aus dem Princip von der Bewegung des Schwerpunkts. Hiernach tritt ein Verlust an kinetischer Energie der fortschreitenden Beweguug ein, welcher in Bruchtheilen der ursprünglich vorhandenen

$$\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \frac{\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)^2}{1 + \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2} \tag{19}$$

ist, also am grössten, nämlich gleich $1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}$ ist, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten entgegengesetzt und umgekehrt proportional den Längen sind, andererseits null wird, wenn die Stäbe gleich lang sind; ein Fall, in welchem $v_1 = c_2$, $v_2 = c_1$ wird, in Uebereinstimmung mit der mechanischen Theorie. Ruht der kürzere Stab a_1 vor dem Stoss ($c_1 = 0$), so wird

$$v_1 = c_2, \quad v_2 = c_2\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right);$$

ruht der längere, so wird ($c_2 = 0$) (20)

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{a_1}{a_2} c_1.$$

Stellt man dieses Ergebniss, in Worte gekleidet, dem der mechanischen Theorie (Gleichung 3a) gegenüber, so findet man:

Mechanische Theorie.	Elastische Theorie.
1. Bei gleich langen Stäben überträgt der stossende seine ganze Geschwindigkeit auf den ruhenden und kommt selbst zur Ruhe.	1. Ebenso.
2. Stösst der längere Stab, so überträgt er eine gesteigerte Geschwindigkeit auf den ruhenden und geht doch selbst noch langsam mit.	2. Stösst der längere Stab, so überträgt er seine volle Geschwindigkeit auf den ruhenden und geht selbst langsam mit (etwas schneller als nach der mechanischen Theorie).
3. Stösst der kürzere Stab, so überträgt er einen Theil seiner Geschwindigkeit auf den längeren und springt selbst zurück.	3. Stösst der kürzere Stab, so überträgt er einen Theil seiner Geschwindigkeit (einen grösseren als nach der mechanischen Theorie) auf den längeren und kommt selbst zur Ruhe.

Aehnlich verhält es sich bei Stäben von verschiedenem Querschnitt q und verschiedenem Material, also verschiedenem ω; die hierfür von St. Venant entwickelten Formeln sind aber natürlich viel complicirter, und es sei nur angeführt, dass dann beide Stäbe nach dem Stosse vibriren.

Versuche über die Stossgeschwindigkeit von Cylindern. Wie man aus obigen Angaben entnimmt, stehen die Formeln, welche die mechanische Theorie einerseits und die elastische andrerseits liefert, in schreiendem Widerspruch mit einander, und es fragt sich, wie sich das Experiment zu ihnen stellt. Derartige Versuche sind von Voigt[1]), Boltzmann[2]) und Hausmaninger[3]) angestellt worden. Die Versuche von letzteren Beiden, auf Kautschuckstäbe bezüglich, sind zu obigem Zwecke deshalb nicht geeignet, weil sie auch schon für zwei gleich lange Stäbe, für welche doch beide Theorien dasselbe Resultat (volle Uebertragung der Bewegung auf den ruhenden Stab, Stillstand des stossenden) liefern, von diesen abweichen. Von einem $c_1 = 100$ verblieben nämlich für Stab 1 circa $v_1 = 14$, und nur $v_2 = 85$ wurden auf 2 übertragen; ebenso entsprechen dem Werthe $c_1 = 50$ die Werthe $v_1 = 6$, $v_2 = 42$. Ob diese Abweichung von beiden Theorien dem Kautschuk eigenthümlich ist, wird erst noch zu entscheiden sein.

Dagegen ergaben die Voigt'schen Versuche (Material: glasharter Stahl) für gleich lange Stäbe volle Uebereinstimmung mit beiden Theorien. Für ungleich lange (aber gleich dicke) ist ein Theil der beobachteten Zahlen in folgender Tabelle mit den »mechanisch« nach Formeln (3 a), in welchen statt der Massen die Längen eingesetzt sind, berechneten, und mit den »elastisch« nach (20) berechneten zusammengestellt. Die beobachteten Zahlen bedeuten eigentlich Ausschläge, können aber mit ziemlicher Genauigkeit auch den Geschwindigkeiten kurz vor resp. nach dem Stosse proportional gesetzt werden; der Index 1 bezieht sich, in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (3a) und (20), stets auf den kürzeren Stab.

1) Gleichlange Stäbe: $a_2 : a_1 = 1$.

c_1	beobachtet		mechanisch		elastisch	
	v_1	v_2	v_1	v_2	v_1	v_2
20	0	19·9	0	20	0	20
40	0	39·8	0	40	0	40
80	0	80 1	0	80	0	80
120	0	119·9	0	120	0	120
160	0	159·8	0	160	0	160

Ungleichlange Stäbe: $a_2 : a_1 = 1·5$.

a) Lang stösst, kurz ruht.							*b*) Kurz stösst, lang ruht.						
c_2	beobachtet		mechanisch		elastisch		c_1	beobachtet		mechanisch		elastisch	
	v_2	v_1	v_2	v_1	v_2	v_1		v_1	v_2	v_1	v_2	v_1	v_2
20	3·9	23·5	4	24	6·7	20	20	— 3·6	16·2	— 4	16	0	13·3
40	7·9	47·0	8	48	13·3	40	40	— 7·6	31·7	— 8	32	0	26·7
80	16·8	93·5	16	96	26·7	80	80	—13·9	62·9	—16	64	0	53·3
160·4	35·3	187·4	32·1	192·5	53·3	160·4	160·8	—25·5	124·0	—32	128	0	106·7

[1]) Voigt, Wied. Ann. 19, pag. 43. 1883.

[2]) Boltzmann, Wien. Ber. 84, pag. 1225. 1881. Wied. Ann. 17, pag. 343. 1882.

[3]) Hausmaninger, Wien. Ber. 88, pag. 768. 1883.

3) Ungleichlange Stäbe: $a_2 : a_1 = 2$.

a) Lang stösst, kurz ruht.							*b*) Kurz stösst, lang ruht.						
c_2	beobachtet		mechanisch		elastisch		c_1	beobachtet		mechanisch		elastisch	
	v_2	v_1	v_2	v_1	v_2	v_1		v_1	v_2	v_1	v_2	v_1	v_2
20	6·7	26·4	6·7	26·7	10	20	20	— 6·4	13·2	— 6·7	13·3	0	10
40	13·6	52·6	13·3	53·3	20	40	40	— 12·2	26·2	—13·3	26·7	0	20
80·2	28·7	101·1	26·7	106·7	40·1	80·2	80·4	—21·6	51·4	—26·7	53·3	0	40·2
160·4	61·1	197·9	53·3	213·3	80·2	160·4	160·8	—38.9	99·0	—53·3	106·7	0	80·4

Wie man sieht, stimmt keine von beiden Theorien vollkommen, aber die mechanische stimmt sehr viel besser als die elastische; erstere giebt für kleine Geschwindigkeiten nur wenige (0—5), für grössere etwas mehr Fehlerprocente; bei letzteren bewegen sie sich zwischen 14 und 72 Procent, und von dem Zurückspringen des kürzeren Stabes giebt sie überhaupt keine Rechenschaft.

Theorie von Voigt[1]). Der Umstand, dass in obigen Tabellen die beobachteten Werthe stets zwischen den nach beiden Theorien berechneten liegen, hat Voigt auf eine Theorie geführt, welche zwischen jenen beiden zu vermitteln sucht und sie als Spezialfälle enthält. Es wird an der Berührungsstelle der Stäbe eine Zwischenschicht angenommen, welche die kleine Ausdehnung l, den Querschnitt q und den »mittleren Elasticitätsmodul« $e = pl/\delta l$ (p Druck auf die Flächeneinheit, δl die hierdurch bewirkte Aenderung von l) hat; e ist dann ausser von der Natur der Stäbe auch von der Stärke des Stosses abhängig. Es muss dann nach Voigt für die Verrückungen die Grenzbedingung

$$E_1 q_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{eq}{l}(u_2 - u_1) = E_2 q_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

gelten ($E_1 \, E_2$ die Elasticitäts-Coëfficienten, $q_1 \, q_2$ die Querschnitte der Stäbe). Im übrigen bleibt alles beim alten. Das Resultat der Rechnung ist sehr verwickelt und lässt, da man e nicht kennt, eine allgemeine Anwendung nicht zu. Für $eq/l = \infty$ kommt man auf die elastische, für sehr kleines eq/l auf die mechanische Theorie.

Für endliche Werthe hat Hausmaninger[2]) die Voigt'sche Theorie unter gewissen Voraussetzungen und für specielle Fälle nach der Methode der willkürlichen Funktionen weitergeführt und für die drei Fälle: a) gleiche Länge und Dicke der Stäbe, b) gleiche Dicke, Längen wie 1:2, c) Längen wie 1:2, Querschnitte wie 2:1, das Resultat in Tabellen zusammengestellt.

Theorie von Hertz[3]). Diese Theorie bezieht sich auf beliebig gestaltete Körper und geht allgemein von der Berührung unter Druck aus, erst zuletzt die Anwendung auf den Stoss machend. Die während der Aneinanderpressung gemeinsame Fläche heisst Druckfläche, und nur auf Punkte in ihr und in ihrer Nähe braucht sich die Betrachtung zu erstrecken. Die Tangentialebene vor dem Druck ist die xy-Ebene, die Druckrichtung also die z-Axe. Den Abstand zweier Punkte der Körper kann man mit genügender Genauigkeit $e = Ax^2 + By^2$ setzen, so dass man ein System von ähnlichen Ellipsen $e = const$ um den Nullpunkt herum erhält. Die Aufgabe ist nun die, Druckfläche, Druckfigur (deren Contur), Verschiebungen und Spannungen so anzugeben, dass 1) den Gleichungen des elastischen Gleichgewichts genügt wird und die Spannungen in grösserer Ent-

1) Voigt, a. a. O., pag. 52.

2) Hausmaninger, Wied. Ann. 25, pag. 189. 1885.

3) Hertz, Crelle J. 92, pag. 156 (1882). Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbfleisses 1882.

fernung von der Druckfläche verschwinden, 2) in den beiden Oberflächen die Tangentialcomponenten der Drucke überall verschwinden, 3) ausserhalb der Druckfläche auch der oberflächliche Normaldruck verschwinde, in ihr aber Druck gleich Gegendruck, und zwar über die ganze Druckfläche integrirt gleich dem gegebenen Druck p sei, endlich 4) dass der durch die Verschiebungen geänderte Abstand der Oberflächen in der Druckfläche null werde, ausserhalb aber grösser als null bleibe.

Diesen Bedingungen wird genügt, wenn man als Druckfigur eine Ellipse wählt, deren Halbaxen mit denen der Ellipsen $e = const$ der Richtung nach zusammenfallen, deren Grössen aber gegeben sind durch

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22})}}, \quad b = \beta \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22})}}. \quad (21)$$

Hierin sind ρ_{11} und ρ_{12} die Hauptkrümmungen der Oberfläche des ersten, ρ_{21} und ρ_{22} des zweiten Körpers; diese sollen gegeben sein, ebenso wie der Winkel ω zwischen den Ebenen von ρ_{11} und ρ_{21}; die ρ sollen positiv gerechnet werden, wenn die zugehörigen Mittelpunkte im Innern des betreffenden Körpers liegen. Ferner hängen ϑ_1 und ϑ_2 mit den ebenfalls gegebenen Elasticitätsconstanten E_1, μ_1 und E_2, μ_2 durch die Gleichungen

$$\vartheta_1 = \frac{4(1-\mu_1^2)}{E_1} \qquad \vartheta_2 = \frac{4(1-\mu_2^2)}{E_2} \qquad (22)$$

zusammen. Endlich sind α und β Funktionen eines Winkels τ, die durch graphische Interpolation aus der Tabelle

τ	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
α	1·006	1·128	1·284	1·486	1·754	2·136	2·731	3·778	6·612	∞
β	1·000	0·893	0·802	0·717	0·641	0·567	0·493	0·408	0·319	0

gefunden werden können, während τ durch die Gleichung

$$\cos\tau = -(A-B)(A+B)$$

definirt ist, und A und B sich durch die Gleichungen:

$$2(A+B) = \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}$$
$$2(A-B) = -\sqrt{(\rho_{11}-\rho_{12})^2 + 2(\rho_{11}-\rho_{12})(\rho_{21}-\rho_{22})\cos 2\omega + (\rho_{21}-\rho_{22})^2}$$

bestimmen. Die Gestalt der Druckellipse ($a:b$ oder $\alpha:\beta$) ist hiernach ausschliesslich durch die Gestalt der Ellipsen $e = const$ bedingt, ihre Dimensionen dagegen sind proportional der Kubikwurzel aus dem Druck, aus der reciproken mittleren Krümmung und (bei gleichem μ beider Körper) aus dem reciproken mittleren Elasticitätsmodul. Die Annäherung der beiden Körper ist

$$\varepsilon = \frac{3p}{8\pi} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{a} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\left(1 + \frac{b_2}{a_2} z^2\right)(1 + z^2)}}, \qquad (23)$$

und die beiden Glieder dieses Ausdrucks sind die Einsenkungen, welche die Körper erleiden. Dieselben sind u. a. desto grösser, je kleiner a, also je grösser die Krümmung ist; daher die eindringende Wirkung von Spitzen und Schneiden. Der Normaldruck in der Druckfläche endlich wird

$$Z_z = \frac{3p}{2ab\pi} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; \qquad (24)$$

er nimmt also vom Rande, wo er null ist, gegen die Mitte hin zu.

Für zwei Kugeln gehen die Formeln (21) und (23) in die speciellen über:

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16(\rho_1 + \rho_2)}}, \quad \varepsilon = \frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16a}. \tag{25}$$

Um von diesem statischen Problem der Berührung eine Anwendung auf die dynamische Erscheinung des Stosses zu machen, muss man annehmen, dass die Zeitdauer, während welcher der Stoss die Körper in Berührung mit einander bringt, gross sei gegen die Zeit, in welcher Längswellen die Körper durchlaufen, eine Annahme, welche zuweilen verwirklicht ist, besonders bei kurzen Körpern und kleinen Anfangsgeschwindigkeiten. Die Gleichung der Erhaltung der Energie lautet dann, wenn e die z-Componente der Entfernung zweier Punkte in der Nähe der Stossfläche, k_1 eine nur von den Massen- und Trägheitsverhältnissen, k_2 eine nur von den Oberflächenformen und Elasticitätsverhältnissen der Körper abhängige Constante ist, und der Index 0 sich auf die Zeit kurz vor dem Stosse bezieht, für beliebigen Stoss:

$$\left(\frac{de}{dt}\right)^2 - \left(\frac{de}{dt}\right)_0^2 + \frac{4}{5} k_1 k_2 e^{5/2} = 0; \tag{26}$$

für die grösste Annäherung ist $e = e_m = \left[5\left(\frac{de}{dt}\right)_0^2 \Big/ 4k_1 k_2\right]^{2/5}$ und der Druck $p = p_m = k_2 e_m^{3/2}$. Für den geraden Stoss zweier Kugeln von der Dichte s und dem Radius R wird

$$k_1 = \frac{3}{2R^3 \pi s}, \quad k_2 = \frac{8}{3\vartheta}\sqrt{\frac{R}{2}}. \tag{27}$$

Stosszeit. Von den beiden wichtigen Grössen, welche sich auf den Vorgang des Stosses selbst beziehen, ist die eine die Zeitdauer des Stosses.

A. Cylinder. Nach der Neumann-St. Venant'schen-Theorie hat man (s. o.) zwischen der Zeit, während deren Druck ausgeübt wird $(2a_1/\omega)$ und der Zeit, während deren Berührung stattfindet $(2a_2/\omega)$ zu unterscheiden; erstere ist die eigentliche Stosszeit. Theoretisch erhält man also das Ergebniss: Die Stosszeit zwischen Stäben, die sich nur durch die Länge unterscheiden, ist gleich der Zeit, die die Welle zum Hin- und Herweg durch den kürzeren Stab braucht oder auch gleich der ganzen Schwingungsdauer des longitudinalen Grundtones des kürzeren Stabes. Experimentell lässt sich die Stosszeit auf elektrischem Wege nach der von Pouillet[1]) angegebenen, von Schneebeli[2]) modificirten Methode bestimmen. Während des Stosses findet der Schluss eines Stromes statt, der vor und nachher unterbrochen ist, und der einen der Zeitdauer des Schlusses proportionalen Galvanometerausschlag erzeugt; den absoluten Zeitwerth dieser Ausschläge verschafft man sich vorher durch Erzeugung derselben mittelst eines Pendels, das in Folge einer Spitze, die unten angebracht ist, ebenfalls den Strom (denselben, der später benutzt werden soll) schliesst, und zwar während einer Zeit, die sich in diesem Falle aus den Pendelgesetzen berechnen lässt. Ein wesentlicher Mangel dieser Methode liegt darin, dass die Hauptbedingung, die Constanz der Stromstärke, während des Stosses in Folge des wechselnden Uebergangswiderstandes zwischen den Körpern nicht streng erfüllt, und dass insbesondere nicht sicher ist, ob während der auf die Stosszeit folgenden Contactzeit ohne Druck der Strom noch wirkt und in welchem Maasse er dies thut. Die erhaltenen Zahlen werden also bei verschieden langen Stäben zwischen der Stosszeit und der Contactzeit liegen. Hierfür erhielt Hamburger[3]) folgende Resultate:

---

[1]) Pouillet, Pogg. Ann. 64 (1885).

[2]) Schneebeli, Pogg. Ann. 143, pag. 239 (1871) u. 145, pag. 328 (1872).

[3]) Hamburger, Bresl. In.-Diss. 1885 u. Wied. Ann. 28, pag. 653 (1886).

1) Die Stosszeit fand sich bei Stahlcylindern von 100 bis 400 *mm* Länge je nach den übrigen Umständen zu 0·00057 bis 0·00071 *sec*, und speciell bei je 300 *mm* Länge zu etwa 0·0006 *sec*. Nach der Theorie sollte sie gleich $2a/\omega = 2 \cdot 300/5000000 = 0{\cdot}00012$ *sec* sein. Sie ist also in Wahrheit fünf Mal so gross, und die Theorie erweist sich auch hier als hinfällig.

2) Die Stosszeit wächst mit der Länge des stossenden Stabes, aber sehr wenig (zwischen 100 und 400 *mm* um 6%); nach der Theorie sollte sie der Länge des kürzeren Stabes proportional sein.

3) Die Stosszeit wächst ein wenig mit der Dicke.

4) Die Stosszeit nimmt ab, wenn die Stossgeschwindigkeit wächst (zwischen 12 und 400 *mm* um 8 bis 15%); von dieser Abhängigkeit giebt die Theorie gar keine Rechenschaft; die VOIGT'sche thut es theilweise, soweit die in ihr vorkommenden Constanten eine Vergleichung zulassen.

B) Kugeln. Hierfür ergiebt die Theorie von HERTZ durch Integration der Gleichung (26) die Stosszeit

$$T = 2\int_0^{e_m} \frac{de}{\sqrt{\left(\frac{de}{dt}\right)_0^2 - \frac{4}{5}k_1 k_2 e^{5/2}}} = 2{\cdot}9432 \sqrt[5]{\frac{25}{16\, c k_1^2 k_2^2}}, \tag{28}$$

wo c die relative Anfangsgeschwindigkeit der Kugeln gegen einander ist, und $k_1\, k_2$ die Werthe (27) haben; setzt man diese und in ihnen für ϑ nach Gleichung (22) den Werth $4(1-\mu^2)/E$, indem man Kugeln von gleichem Radius R und gleichem Material wählt, so erhält man:

$$T = 2{\cdot}9432 R \sqrt[5]{\frac{25\pi^2 s^2 (1-\mu^2)^2}{8 c E^2}}. \tag{29}$$

Die Stosszeit ist also dem Radius proportional, in geringerem Grade mit der Dichte direkt, mit E und μ verkehrt veränderlich, und in noch geringerem Grade mit der Anfangsgeschwindigkeit verkehrt veränderlich. Die Beobachtungen von HAMBURGER und SCHNEEBELI liefern eine hiermit ziemlich gut übereinstimmende Abhängigkeit der Stosszeit von Stahl- und Messingkugeln von R und c, und diese Uebereinstimmung erstreckt sich einigermaassen auch auf die absoluten Werthe von T. Bei Messingkugeln ($R = 13$ *mm*, $s = (8{\cdot}4 \cdot 10^{-6} \cdot 9810^{-2})$ in *kg* und *mm*, $E = 10000$, $\mu = \frac{1}{3}$) ergab sich z. B.

Geschwindigkeit	73·7	122·9	192·1	295 *mm*
Stosszeit, berechnet . .	0·000185	0·000167	0·000153	0·000140 *sec.*
„ beobachtet . .	0·000196	0·000173	0·000157	0·000148 *sec.*

Der Curiosität halber sei nach HERTZ angeführt, dass, während bei den dem Experimente zugänglichen Verhältnissen die Stosszeit sehr klein ist, sie bei zwei Stahlkugeln von der Grösse der Erde und einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 *mm* nicht weniger als nahezu 27 Stunden betragen würde.

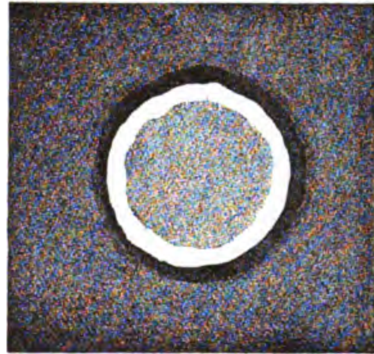
Stossfläche und Druckfläche. Die andere der beiden für den Vorgang des Stosses selbst charakteristischen Grössen ist die Druckfläche, resp. ihre Contur, die Druckfigur. Die Druckfigur kann nach der HERTZ'schen Theorie eine Ellipse sein, deren Halbaxen a und b durch (25) bestimmt sind. Für zwei gleiche Kugeln wird sie ein Kreis, die Druckfläche eine ebene Kreisfläche, und der Radius wird

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{16} p R \vartheta}.$$

Hertz selbst fand diese Formel für Glaslinsen und Glasplatten (und eine ähnliche für Glascylinder, die sich längs eines Stückes der Mantelfläche berührten) durch Beobachtung mittelst Russüberzuges gut bestätigt. Für die von Schneebeli[1]) aneinander gepressten Kautschukkugeln sollte $r = 1\cdot34$ *mm* sein, und in guter Uebereinstimmung ergab das Experiment mit Hilfe von Färbung durch Platinchlorür $r = 1\cdot42$; beides bei $p = 2000$ *kg*. Die Stossfläche ergiebt sich nach der Theorie von Hertz durch Einführung von c in die Formel für die Druckfläche, und man findet

$$r = R\sqrt[5]{\frac{5\pi s\vartheta \cdot c^2}{64}},$$

also den Radius der Stossfläche proportional dem Radius, schwach wachsend mit der Geschwindigkeit des Stosses, noch schwächer direkt mit der Dichte, verkehrt mit E und μ. Aehnlich verhält es sich, wenn die beiden Kugeln von verschiedenem Radius und Material sind, wenn z. B. eine Kugel gegen eine ebene Platte stösst. Auch einige der hierauf bezüglichen Ergebnisse fanden Schneebeli und Hamburger[2]) durch den Versuch (ersterer mittelst paraffinirter Stahlkugeln, letzterer mittelst Elfenbeinkugeln und berussten Glasplatten) bestätigt. Die (etwa zehnmal vergrösserte) Abbildung einer solchen Stossfläche nach Hamburger (Fig. 124) zeigt in Folge der Dicke der Russschicht den Unterschied zwischen Druckfläche und blosser Berührungsfläche; auf ersterer (im inneren Kreis) ist der Russ theilweise festgepresst, auf letzterer ist er fast gänzlich fortgenommen (mittlerer Ring); endlich bildet sich aussen noch ein Wall fortgeschleuderten Russes; die wirkliche Stossfläche ist die innerste Kreisfläche.



(Ph. 124.)

Anwendungen. Der Stoss und seine Gesetze findet, abgesehen vom Billardspiel (s. o.), theils technische Anwendungen (über »Stossfestigkeit« s. w. u. im Art. »Cohäsion«), theils wissenschaftliche, namentlich auf die Moleculartheorie; es muss aber hier genügen, auf die bezüglichen, grundlegenden Arbeiten von Maxwell[3]) hinzuweisen.

F. Auerbach.

Cohäsion.

Uebersicht. Unter dem Namen Cohäsion kann man alle die Erscheinungen zusammenfassen, welche sich auf bleibende Veränderungen der Körper beziehen, d. h. auf Veränderungen, welche nach Aufhebung des Zwangszustandes (pag. 215) noch bestehen bleiben. Während also Elasticität der Widerstand gegen vorübergehende Veränderungen ist, ist Cohäsion der Widerstand gegen bleibende

1) Schneebeli, Rep. d. Phys. 22, pag. 183. 1886.

2) Hamburger, Tageblatt d. Nat. Vers. in Wiesbaden 1887.

3) Maxwell, Phil. Mag. (4) 19, pag. 20, und 20, pag. 35. 1860.

Veränderungen. Wie bei der Elasticität, so soll auch hier die Betrachtung auf feste Körper beschränkt bleiben, da die analogen, auf Flüssigkeiten und Gase bezüglichen Erscheinungen anderweitig selbständige Behandlung finden (s. Art. »Capillarität«, »Reibung« u. s. w.).

Zwischen den Erscheinungen der Elasticität und denen der Cohäsion besteht eine scharfe Grenze, gebildet durch die »*Elasticitätsgrenze*« (pag. 217); jene bewegen sich innerhalb, diese ausserhalb derselben. Die Elasticitätsgrenze, welche wie früher und wie alle noch zu behandelnden analogen Grössen in Kilos auf das Quadratmillimeter ausgedrückt werden soll, kann als der *Widerstand gegen bleibende Veränderung* bezeichnet werden; da in der Praxis (bei Bauten, Maschinen, Apparaten u. s. w.) bleibende Veränderungen ausgeschlossen werden müssen, kann man jenes Gewicht auch *Tragfähigkeit* oder, in Analogie mit dem Elasticitätsmodul, *Tragmodul* nennen. Dies ist also die *untere Grenze* des Gebietes, in welchem die Cohäsionserscheinungen sich abspielen. Die *obere Grenze* andererseits wird durch das Gewicht bezeichnet, bei welchem der Körper, auf den es wirkt, resp. die Theile desselben ihren Zusammenhang verlieren und *sich trennen*. Diese Grösse heisst *Festigkeit* oder *Festigkeitsmodul*. In der Technik spielt, wie gesagt, nicht dieser, sondern der weitaus kleinere Tragmodul die entscheidende Rolle; ja in den meisten Fällen legt man der Rechnung sogar eine noch um einen usuellen Factor kleinere Zahl, den *Sicherheitsmodul*, zu Grunde, um sich darauf verlassen zu können, dass nicht nur bei kurzem, einmaligem und gewöhnlichem, sondern auch bei langem und wiederholtem Gebrauche sowie bei aussergewöhnlichen Fällen keine bleibenden Veränderungen eintreten.

Die drei genannten Moduln ordnen sich also der Grösse nach, vom kleinsten angefangen, so: Sicherheitsmodul, Tragmodul, Festigkeitsmodul. Wie sich der Elasticitätsmodul in diese Reihe einordnet, lässt sich im Princip nicht allgemein sagen. Thatsächlich aber ist er, ausser bei einigen anomalen Stoffen, wie Kautschuk, der weitaus grösste von allen. Während nämlich Dehnungs-, Torsionsmodul u. s. w. sich auf eine Längenänderung von 100 %, resp. eine Winkeldrehung von 57° u. s. w. beziehen, tritt eine dauernde Veränderung, also die Elasticitätsgrenze, schon bei einer vorübergehenden Längenänderung von ½—2 % resp. einer Winkeländerung von ¼—1° auf, und die Trennung der Theile bei einer solchen von 1—5 % resp. ½—3°.

Wie der Elasticitätsmodul, so ist auch der Tragmodul und der Festigkeitsmodul nicht eigentlich ein Begriff, sondern eine Begriffskategorie, die für jede Klasse äusserer Eingriffe zu einem besonderen Begriffe führt: Für Zug und Druck (die hier nicht, wie bei der Elasticität, entgegengesetzt gleiche Erscheinungen liefern), für Biegung und Torsion, für Scherung u. s. w. Eine besondere Art der Festigkeit, welche hier neu hinzukommt, ist die Härte, eine weitere (deren Behandlung jedoch wesentlich in die Mineralogie gehört) der Widerstand gegen Spaltung (reciprok: »Spaltbarkeit«), endlich eine Art von Festigkeit zwischen zwei verschiedenen Körpern die Adhäsion. Spricht man von den angeführten Erscheinungen schlechthin, so denkt man an statische Zustände, und man erhält eine neue Klasse von Grössen, die Stossfestigkeit, wenn man dynamische Vorgänge ins Auge fasst.

Bisher war nur von den beiden Grenzen die Rede, zwischen denen die Cohäsionserscheinungen liegen. Zur Kenntniss einer neuen Klasse von Eigenschaften der Körper gelangt man nun aber, wenn man sich fragt, wie weit diese beiden Grenzen bei einem bestimmten Körper auseinander liegen, d. h. ob es,

wenn auf den Körper eine der Elasticitätsgrenze gleiche Kraft wirkt, bleibende Veränderungen also eben einzutreten beginnen, nunmehr einer erheblichen Steigerung dieser Kraft bedarf, um ihn zu zertheilen, oder ob schon eine geringe Steigerung diese Wirkung hat. Im ersten Falle, wenn also der Festigkeitsmodul sehr erheblich grösser ist als der Tragmodul, heisst der Körper geschmeidig, im andern Falle, wenn also beide Moduln dicht bei einander liegen, heisst er spröde, und zwischen der äussersten Geschmeidigkeit und der äussersten Sprödigkeit liegt eine stetige Reihe von Graden derselben. Auch hier handelt es sich im übrigen um zahlreiche einzelne Arten von Geschmeidigkeit (Duktilität, Walzbarkeit, Hämmerbarkeit u. s. w.).

In Bezug auf alle hierher gehörigen Erscheinungen ist noch zu bemerken, dass die quantitative Gesetzmässigkeit und somit auch die Genauigkeit der Zahlenresultate hier keine sehr beträchtliche ist.

Festigkeit. a) Festigkeit gegen Zug (Festigkeit gegen Zerreissen, absolute Festigkeit.) Man bestimmt den Tragmodul T, bei welchem bleibende Dehnung (von 0·5 *mm* oder mehr), und den Festigkeitsmodul F, bei welchem Zerreissen eintritt. Beide Erscheinungen sind von der Länge unabhängig und (mit den unten angeführten Ausnahmen) dem Querschnitt proportional. Wirkt das Eigengewicht wesentlich mit, so muss man den Querschnitt in passender Weise veränderlich wählen (Zug und Druck pag. 243), falls dies erlaubt ist und man eine in allen Querschnitten gleiche Tragfähigkeit resp. Festigkeit erzielen will.

Metalle nach WERTHEIM.[1])

Metall	gezogen		angelassen		Metall	gezogen		angelassen	
	T	*F*	*T*	*F*		*T*	*F*	*T*	*F*
Blei	0·3	2·1	0·2	1·8	Kupfer . . .	12	40·3	3	30·5
Zinn	—	2·5	—	1·7	Platin	26	34·1	14·5	23·5
Gold	14	27	3	10	Eisen	32	61	5	47
Silber	11	29	2·8	16	Gussstahl . . .	56	80	5	66
Zink	—	12·8	—	—	Stahldraht . .	43	70	15	40

Gezogene Metalle haben also eine grössere Festigkeit als angelassene (s. w. u.). Hiermit hängt es wohl auch zusammen, dass nach BAUMEISTER[2]), wie folgende Tabelle zeigt, mit abnehmender Dicke von Drähten die Festigkeit steigt:

Stoff	Dicke in *mm*	*F*	Stoff	Dicke in *mm*	*F*
Schwedisches Stabeisen . .	0·72	64	Messing	0·75	76
„ „ . .	0·50	83	„	0·25	98
„ „ . .	0·30	96	„	0·10	98
„ „ . .	0·25	94	Kupfer	0·27	35
„ „ . .	0·15	98	Silber	0·35	30
„ „ . .	0·10	123			

Ferner fand WERTHEIM die Festigkeit für kurzdauernde Belastung grösser als für langdauernde, weil bei letzterer die Dehnung immer weiter fortschreitet und oft erst nach Tagen oder Wochen zum Zerreissen führt. Eine etwas andere Frage,

[1]) WERTHEIM, Ann. Ch. Phys. (3) 12, pag. 385 (1844). Nach den hier gegebenen Werthen von T sind die in der Tabelle auf pag. 239 für Zink, Gold und Silber irrthümlich zu hoch angegebenen Werthe von G zu corrigiren.

[2]) BAUMEISTER, WIED. Ann. 18, pag. 578 (1883) und Würzb. In.-Diss. 1883.

nämlich den Einfluss der Schnelligkeit, mit welcher man das spannende Gewicht steigert, untersuchte BOTTOMLEY[1]); hier ist das Ergebniss gerade das entgegengesetzte: bei langsamer Zugsteigerung (in 1 bis 2 Tagen 1 Pfund) ist die Festigkeit grösser als bei rascher (in 2 bis 5 Minuten 1 Pfund), überdies ist im ersten Falle die äusserste Dehnung sehr viel kleiner als im letzten. Bei plötzlicher Spannung wird eben ein Stoss ausgeübt und demgemäss die Stossfestigkeit zum Theil mit in Anspruch genommen; man muss also bei allen Versuchen über statische Festigkeit allmählich zu Werke gehen.

Eine Reihe eigenthümlicher, auf die Elasticitätsgrenze und die Festigkeit von Metallen bezüglicher Erscheinungen haben J. THOMSON[2]), THURSTON[3]), HODGKINSON[4]), UCHATIUS[5]), BAUSCHINGER, KRAMM[6]) (Einfluss von Torsionen auf die absolute Festigkeit) u. A. beobachtet; hier kann auf dieselben nicht näher eingegangen werden.

Legirungen nach WERTHEIM.

Legirung	Formel	F	Legirung	Formel	F
DARCET's Metall . .	$Pb_2Bi_2Sn_2$	1·74	Similor	ZCu_5	51·90
Lettern-Metall . . .	Pb_2Sb	1·87	Messing	ZCu_2	60·22
Schnellloth	$PbSn$	2·46	Neusilber	$Z_4Cu_{18}Ni_2$	61·88
Tomback	ZCu_2	32·50	Packfong	$Z_2Cu_5Ni_2$	68·10

Für Legirungen von Gold mit Spuren anderer Metalle fand ROBERTS AUSTEN[7]), dass hierdurch die Cohäsionsverhältnisse sehr stark beeinflusst werden. Während nämlich reines Gold nach ihm eine Zugfestigkeit von 10 hat, wird sie beim Zusatz von nur 0·2 % von

Kalium oder Wismut . . . . . 0·8 } (also viel kleiner)
Tellur oder Blei . . . . 6 }
Thallium, Zinn, Antimon . . . . 10 (also unverändert)
aller andern Metalle . . . . . . 11 bis 14 (also grösser).

Ob beim Zusatz geringer Spuren fremder Stoffe zu andern Metallen als Gold sich ähnliche Erscheinungen ergeben, ist noch nicht untersucht worden.

Ferner hat THURSTON[8]) zahlreiche Broncen untersucht und als festeste diejenige gefunden, welche 55 % Kupfer, 43 % Zink und 2 % Zinn enthält.

Die Abhängigkeit der Festigkeit von der Temperatur ist besonders von PISATI[9]) untersucht worden. Für Eisen ergab sich F und λ (Verlängerung vor der Trennung)

t	14°	50°	75°	90°	120°	125°	200°	235°	240°	300°
F	54·9	53·5	53·8	55·5	53·0	52·4	52·6	51·4	71·2	65·8
λ	0·144	0·122	0·044	0·049	0·027	0·019	—	0·029	0·067	0·116

Zwischen 14 und 235° nahm also F unregelmässig und langsam ab, dann plötzlich stark zu und dann wieder ab. Ebenso fanden sich bei Stahl und Messing mehrere Maxima und Minima. Dagegen ergab hartes Kupfer:

---

1) BOTTOMLEY, Proc. R. Soc. 29, pag. 221 (1879).
2) J. THOMSON, Cambr. and Dubl. Math. Journ. 1848.
3) THURSTON, DINGL. Polyt. J. 225, pag. 233 (1877).
4) HODGKINSON, Rep. Brit. Ass. 1837, pag. 362 u. a. a. O.
5) UCHATIUS, DINGL. Polyt. J. 223, pag. 242 (1877).
6) KRAMM, Marburger In.-Dissert. 1873 (s. w. u.).
7) ROBERTS AUSTEN, Proc. R. Soc. 43, pag. 425 (1888).
8) THURSTON, Mondes 55, pag. 148 (1879).
9) PISATI und SAPORITA-RICCA, N. Cim. (3) 1, pag. 35 (1877). Soc. Ital. Scienze (3) 2, pag. 1 (1877). — PISATI und SICHILONE, Rend. Acc. Lincei 1876—77.

t	18°	50°	100°	150°	200°	250°	300°
F	49·6	47·6	46·1	43·2	41·3	38·0	31·3

also eine regelmässige Abnahme der Festigkeit; bei weichem Kupfer liess sich dieselbe sogar ziemlich genau durch die lineare Formel $F = 29·40 - 0·037\,t$ darstellen. Aehnlich verhält sich Aluminium, und zwar ist

bis zu 100°: $F = 50·8 - 0·0458\,t - 0·000372\,t^2$

von 100° bis 300°: $F = 54·7 - 0·12\,t$.

Für nichtmetallische Stoffe seien folgende Angaben gemacht:

F für Hölzer bei 20% Feuchtigkeit (nach WERTHEIM und CHEVANDIER)[1]).

Holz	*long.*	*rad.*	*tang.*	Holz	*long.*	*rad.*	*tang.*
Pappel	1·97	0·15	0·21	Erle	4·54	0·33	0·18
Fichte	2·48	0·26	0·20	Eiche	6·49	0·58	0·41
Buche	3·57	0·89	0·75	Esche	6·78	0·22	0·41
Ahorn	3·58	0·72	0·37	Espe	7·20	0·17	0·41
Tanne	4·18	0·22	0·30	Akazie	7·93	—	1·23
Birke	4·30	0·82	1·06				

Die Akazie hat also das festeste, die Eiche fast ebenso festes, die Pappel das wenigst feste Holz. In der Axenrichtung ist die Festigkeit am grössten, in den beiden andern ziemlich gleich.

F für Glas nach WERTHEIM.

Sorte	F	Sorte	F
Fensterglas	1·763	Krystallglas (bleifrei)	1·002
Spiegelglas	1·400	„ (bleihaltig)	0·665

Die Kleinheit dieser Zahlen im Vergleich zu den nicht unbeträchtlichen Elasticitätsmoduln der Gläser (pag. 240) steht jedenfalls mit der grossen Sprödigkeit dieses Materials (s. w. u.) in nahem Zusammenhange.

Für Bessemerstahl mit verschiedenem Gehalt an Kohlenstoff hat BAUSCHINGER [2]) nicht nur die Werthe für Zug, sondern auch die übrigen ermittelt, die hier der Kürze und Uebersichtlichkeit halber gleich mit angegeben sind.

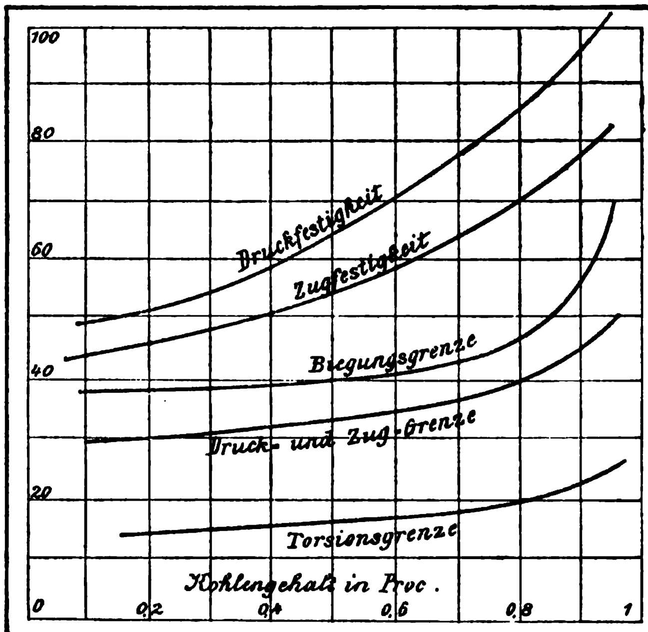
Bessemerstahl nach BAUSCHINGER.

Gehalt an Kohlenstoff in Procenten	Zug		Druck		Biegung		Schub	Torsion
	T	F	T	F	T	F	F	T
0·14	30	44	28	48	38	—	34	—
0·19	33	48	30	54	42	—	37	15
0·46	35	53	34	63	40	83	36	15
0·51	34	56	33	70	42	93	40	—
0·54	35	56	34	61	40	86	39	15
0·55	33	56	35	62	42	88	40	—
0·57	33	56	34	66	45	96	36	16
0·66	37	63	38	66	44	86	43	17
0·78	37	65	38	73	47	88	41	18
0·80	40	72	44	97	47	76	48	20
0·87	43	74	39	89	47	77	50	20
0·96	49	83	50	99	69	85	58	27

1) WERTHEIM und CHEVANDIER, Comptes rendus 23 (1846).

2) BAUSCHINGER, Mitth. a. d. mech.-techn. Lab. zu München, Heft 3. 1874.

Wie man sieht, wächst sowohl der Tragmodul als auch der Festigkeitsmodul nicht unwesentlich (um 50—100%), wenn der Gehalt an Kohlenstoff von einem siebentel bis zu einem ganzen Procent steigt. Einige der obigen Zahlen sind in Fig. 125 der Anschaulichkeit halber graphisch dargestellt. Dabei ist aus den Zahlen für Zug- und Druckgrenze, die fast gleich sind, nur eine Curve gebildet, während die Zug- und Druckfestigkeitscurven, wie man sieht, ziemlich verschieden sind.



(Ph. 125.)

Für einige organische Stoffe kann man folgende Werthe annehmen, welche jedoch insofern nur eine beschränkte Bedeutung haben, als hier die Proportionalität mit dem Querschnitt naturgemäss nicht vorhanden und folglich auch die Reduction auf 1 *qmm* Querschnitt eigentlich gar nicht zulässig ist; desshalb ist jedenfalls der wahre Durchmesser anzugeben:

Stoff	Dicke	Festigkeit	Stoff	Dicke	Festigkeit
Pferdehaar	0·26 *mm*	9·6	Spinnfaden	0·0025 *mm*	18·8
Menschenhaar	0·10 „	11·6	Hanffaden	0·26 „	25·9
Wollfaden	0·55 „	13·9	Coconfaden	0·0013 „	27·5

Die Festigkeit solcher Fäden ist also relativ sehr beträchtlich, was sie für wissenschaftliche Zwecke ausserordentlich verwendbar macht.

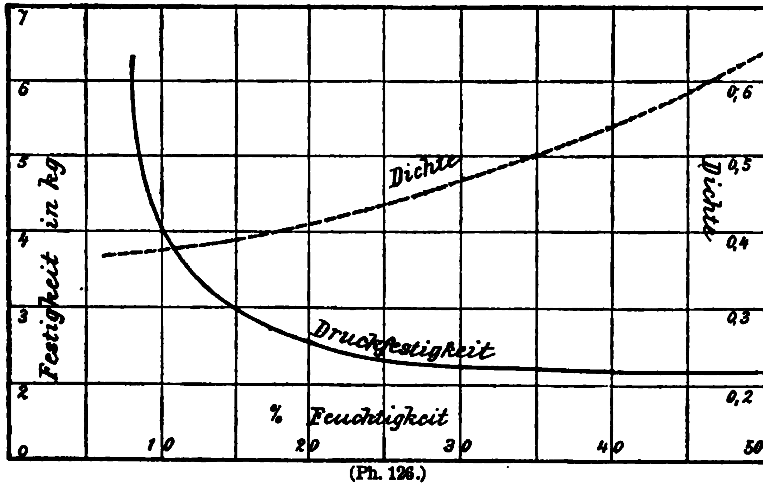
b) Festigkeit gegen Druck (rückwirkende Festigkeit). Wenn ein Körper von zwei gegenüberliegenden Seiten zusammengedrückt wird, oder, wenn er mit einer Seite befestigt ist und von der entgegengesetzten einen Druck erfährt, so wird seine Druckfestigkeit in Anspruch genommen. Man hat aber hier zwei Fälle zu unterscheiden. Ist nämlich der Körper kurz, so wird er thatsächlich zerdrückt (zermalmt, zerquetscht), und es kommt die eigentliche Festigkeit gegen Zerdrücken in Betracht; ist er aber lang, so kann er dem Druck mittelst Ausbiegung ausweichen, er wird zerknickt, und es kommt die Festigkeit gegen Zerknicken in Betracht, welche eine Mittelstellung zwischen Druckfestigkeit und Biegungsfestigkeit (s. w. u.) einnimmt, ganz analog mit der in der Elasticität betrachteten Erscheinung der Biegung durch Druck (pag. 243).

Die Druckfestigkeit (im engeren Sinne) ist im Allgemeinen grösser als die Zugfestigkeit, nur bei Hölzern verhält es sich umgekehrt; sie ist von der Länge unabhängig, bei ähnlichen Querschnitten diesen annähernd proportional, aber desto grösser, je regelmässiger der Querschnitt geformt ist. Auch hier muss in Folge

des Eigengewichtes der Querschnitt nach einem bestimmten Gesetze mit der Länge variiren, wenn die Festigkeit überall dieselbe sein soll. Der übliche Sicherheitsfactor, mit welchem der Festigkeitsmodul hier multiplicirt wird, ist bei Eisen 5, bei Holz und Steinen 10, bei Bruchsteinen 20. Aus den zahlreichen, aber meist rohen Messungen seien folgende angeführt.

Stoff	Festigkeit	Stoff	Festigkeit	Stoff	Festigkeit
Gusseisen . . .	57 bis 102	Kalkstein, dicht .	14	Eiche	7·0
Schmiedeeisen . .	25 „ 55	„ erdig .	2 bis 8	Buche und Esche	6·6
Kupfer	30 „ 45	„ weich .	1	Weisstanne . .	5·1
Diabas	27	Sandstein, roth .	7 bis 10	Nussbaum . . .	5·0
Porphyr	24·5	„ weiss .	1 „ 6	Erle	4·9
Granit	12 bis 22	Gneis	2·5	Fichte	4·8
Marmor	6 „ 12	Ziegelstein . . .	0·5 bis 2	Rothtanne . . .	4·6
Basalt	13	Mörtel	0·4	Birke	4·5
				Pappel	3·6

Die Zahlen für Hölzer, welche von Hodgkinson herrühren, beziehen sich auf den trockenen Zustand. In neuester Zeit hat in dieser Hinsicht Bauschinger [1])



(Ph. 126.)

eingehende Untersuchungen angestellt und gefunden, dass die Festigkeit in doppelter Weise von der Dichte des Holzes abhängt; insoweit nämlich mit wachsender Feuchtigkeit die Dichte zunimmt, nimmt die Festigkeit ab, und zwar (Fig. 126) anfangs schnell, später langsam; bei verschiedenen Proben derselben Holzart, welche dieselbe Feuchtigkeit, aber verschiedene Dichte haben, ist dagegen die Festigkeit desto grösser, je grösser die Dichte ist. Im Mittel fand Bauschinger bei 15 % Feuchtigkeit folgende Zahlen:

Lärche . . .	5·1	Föhre	4·2	Weimuthskiefer .	2·5
Fichte	4·3	Tanne	4·2	Zirbe	2·4

Wie man sieht, sind Gusseisen und Kupfer von Metallen, Diabas, Basalt, Porphyr und Granit, sowie einige Marmorarten unter den Steinen, Eiche, Buche und Esche unter den Bäumen besonders geeignet, um auf Druckfestigkeit beansprucht zu werden. Alle angeführten Zahlen gelten übrigens, wie gesagt, nur, wenn die

[1]) Bauschinger, Mitth. d. mech.-techn. Labor. d. Techn. Hochsch. in München, Heft 16 (1887).

Länge des Körpers ein nicht zu grosses (weniger als zwölffaches) Vielfaches der Dicke ist; ist sie dagegen das

12 24 36 48 60 72 fache,

so muss man die Zahlen mit

$\frac{5}{6}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{24}$

multipliciren. Ausserdem gelten dann zum Theil ganz andere Gesetze; unter anderm ist die Festigkeit gegen Zerknicken, die dann in Betracht kommt, dem Quadrat des Querschnitts direkt und dem Quadrat der Länge umgekehrt proportional.

c) Festigkeit gegen Biegung (relative Festigkeit). In der Elasticitätslehre führt die Biegung zu keiner neuen Constanten, da sie sich in eine Dehnung der convexen und eine Zusammenziehung der concaven Hälfte auflösen lässt. Analog würde man hier, wenn h der Hebelarm der biegenden Kraft ist, und K_1 und K_2 die Kräfte sind, die bleibende Veränderung resp. Bruch herbeiführen,

$$K_1 h = kT\frac{q}{l} \qquad K_2 h = kF\frac{q}{l}$$

haben, wo

für rechteckigen Querschnitt (Breite a, Höhe b)	$q = \frac{1}{6}ab^2$	für ein festes, ein freies Ende	$k = 1$
für quadratischen Querschnitt	$q = \frac{1}{6}a^3$	„ zwei aufgestützte Enden	$k = 4$
„ kreisförmigen „	$q = \frac{\pi}{4}r^3$	„ zwei feste Enden	$k = 8$

ist. Für die Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit von den Dimensionen des Stabes gelten hiernach dieselben Gesetze wie für die Biegungselasticität (pag. 264 u. f.). Was aber den Zahlenfactor betrifft, so hat man zu bedenken, dass es sich hier nicht, wie dort, um kleine, sondern um grosse Dehnungen und Verkürzungen handelt, und dass für solche nicht eine gemeinsame Constante, wie dort E, sondern zwei verschiedene massgebend sind, wie denn in der That die obigen Zahlen für Druck- und Zugfestigkeit beträchtlich von einander abweichen. Hieraus folgt, dass die durch Biegungsversuche bestimmten Trag- und Festigkeitsmoduln T und F zwischen denen für Zug und Druck liegen werden. Ferner ergiebt sich, dass man dem Querschnitt des auf Biegung beanspruchten Körpers eine ganz bestimmte Form geben muss, um möglichst günstige Ergebnisse zu erzielen; ist der Stab oder Balken z. B. mit den Enden aufgelegt und in der Mitte belastet, so muss man bei Metallen und Steinen (Druckfestigkeit grösser als Zugfestigkeit) den Querschnitt ⊥förmig (umgekehrt T-förmig), bei Hölzern T-förmig (T-förmig) gestalten. Kommt es hierauf weniger an, wohl aber darauf, möglichst viel Material in den Grenzschichten zu concentriren, so wählt man einen hohlen, □förmigen oder einen Ɪförmigen (doppelt-T-förmigen) Querschnitt. Wo es angängig ist, muss man im übrigen auch der Länge nach die Masse passend vertheilen.

Biegungsfestigkeit einiger Stoffe.[1])

Gusseisen	32	Lärche	6·8	Granit	1·2
Schmiedeeisen	25	Föhre	5·5	Kalkstein	0·9
		Tanne	5·2	Rother Sandstein	0·6—0·9
Esche	8·5	Fichte	5·1	Weisser Sandstein	0·4—0·6
Eiche	7·1	Zirbe	3·8	Ziegelstein	0·1—0·3
Buche	6·6	Weimuthskiefer	2·8		

[1]) Die Zahlen rühren von verschiedenen älteren Beobachtern her, die für Nadelhölzer, die sich auf 15 % Feuchtigkeit beziehen, von BAUSCHINGER, a. a. O. Heft 16 (1887).

Die Werthe für Bessemerstahl sind schon mitgeteilt worden.

d) Festigkeit gegen Scherung (Schubfestigkeit). Hierüber liegen nur wenige Zahlen vor; solche für Bessemerstahl sind oben angeführt; für einige Steine fand ebenfalls BAUSCHINGER[1]):

Holz (Kiefer und Fichte) 0·3 bis 0·5.

Syenit . .	1·4—2·7	Kalkstein . . .	0·5—1·0	Weisser Sandstein	0·1—0·3
Granit . .	0·5—1·4	Rother Sandstein	0·6—1·0	Ziegelstein . . .	0·1—0·3

e) Torsionsfestigkeit. Für das Moment $K_1 h$ der dauernd tordirenden resp. dasjenige $K_2 h$ der abdrehenden Kraft (h Hebelarm) gilt wie bei der Elasticität die Formel $K_1 h = Tq$, wo

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für kreisförmigen Querschnitt} & & q = \frac{\pi}{2} r^3 \\ \text{„ rechteckigen} & \text{„} & q = \frac{2}{3} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \text{„ quadratischen} & \text{„} & q = \frac{1}{3\sqrt{2}} a^3 \end{array}\right\} \text{ ist.}$$

Einige Werte für F sind: Gusseissen 17 bis 25, Schmiedeeisen 6 bis 12; einige Werte von T für Stahl sind oben zusammengestellt.

Ueber Festigkeit und Tragfähigkeit im Allgemeinen ist noch die Bemerkung zu machen, dass in der Wirklichkeit häufig mehrere Arten gleichzeitig beansprucht werden, und dass sie sich dann gegenseitig nicht unwesentlich beeinflussen, ebenso wie auch der zeitliche Verlauf und die Wiederholung der Beanspruchung von grosser Bedeutung sind. So untersuchte BAUSCHINGER[2]) den Einfluss der Streckung der Metalle auf die Elasticitätsgrenze und fand eine Erhöhung derselben z. B. bei Bronze durch Streckung mittelst 10 *kg* pro *qmm* von 7·1 auf 9·4 *kg*. KRAMM[3]) untersuchte die Beziehungen zwischen Torsion und absoluter Festigkeit, und erhielt eine Reihe interessanter Sätze. Ferner gehören hierher Untersuchungen und Betrachtungen von W. THOMSON[4]), HIMSTEDT[5]), WARBURG[6]) u. A. Auf die zahlreichen, diese Fragen behandelnden, rein technischen Untersuchungen kann hier nicht näher eingegangen werden.

Stossfestigkeit. Den sämmtlichen bisher betrachteten Arten der Festigkeit, die man als statische bezeichnen kann, stehen ebensoviel Arten der dynamischen oder Stossfestigkeit gegenüber. Während dort die Frage einfach lautet, welches Gewicht einen gegebenen Körper eben dauernd verändere oder eben seines Zusammenhanges beraube resp., wie es sich in der Praxis meist stellen wird, welches Material und welche Dimensionen man einem Köper geben müsse, damit ihn ein gegebenes Gewicht noch nicht verändere oder noch nicht zerreisse, sind hier der bestimmenden Einflüsse zwei, nämlich ausser dem Gewicht G die Geschwindigkeit v, mit welcher dasselbe den ruhenden Körper trifft. Dasjenige, worauf es ankommt, ist hier die kinetische Energie K, also das halbe Produkt der Masse M mit dem Quadrat der Geschwindigkeit; man muss also entweder fragen: welche kinetische Energie des Stosses deformirt den Körper dauernd, welche zerstört ihn — oder man muss eine der beiden Grössen geben und folglich

1) BAUSCHINGER, a. a. O. Heft 3 (1874) u. 9 (1883).

2) BAUSCHINGER, DINGL. Polytechn. J. 224, pag. 1 u. 129 (1877). Siehe auch UCHATIUS, ebenda 223, pag. 242 (1877).

3) KRAMM, Ueber d. Einfl. d. Torsion a. d. abs. Festigkeit v. Drähten, Marb. In.-Diss. 1873.

4) W. THOMSON, Enc. Brit., Art. »Elasticity«.

5) HIMSTEDT, Ber. Nf. Ges. Freiburg 8 (2) (1882).

6) WARBURG, ebenda 7 (4) (1880).

fragen: mit welcher Geschwindigkeit darf das gegebene Gewicht auffallen, oder auch, welches Gewicht darf mit gegebener Geschwindigkeit auffallen, um jene Wirkungen zu erzielen? Ein kleineres Gewicht darf dann mit einer entsprechend grösseren Geschwindigkeit auffallen und umgekehrt. Erlangt der stossende Körper seine Wucht durch die Schwerkraft, so kann man statt der Geschwindigkeit auch, was meist praktischer sein wird, die Fallhöhe h des Gewichtes einführen, wodurch man, da

$$K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 = G h$$

[mit Benutzung von Gleichung (2 b), pag. 109] ist, noch den weiteren Vortheil einer einfacheren Formel erlangt. Hat dagegen der stossende Körper rotirende Bewegung (z. B. durch Dampfkraft), so muss man bei der ursprünglichen Formel stehen bleiben. Die Anwendung dieser Ideen auf die einzelnen Fälle der Beanspruchung gehören in die Technik; hier sei nur bemerkt, dass, da zu der dynamischen sich stets noch die statische Wirkung addirt, die Stossfestigkeit stets kleiner (und bei heftigem Stosse sehr beträchtlich kleiner) ist, als die statische, worauf man fast immer Rücksicht nehmen muss, da es Beanspruchungen, welche nicht, mindestens zeitweilig, mit Stössen verbunden werden, kaum giebt.

Härte. Für den Begriff der Härte haben sich seit längerer Zeit zwei verschiedene Definitionen eingebürgert, die eine von technischer, die andere von mineralogischer Seite ausgehend. Stossen (was jene betrifft), oder drücken zwei Körper vom Querschnitt q_1 und q_2, den Längen l_1 und l_2 und den Elasticitätsmoduln E_1 und E_2 mit der Kraft P gegeneinander, so verhalten sich die Zusammendrückungen, die sie erfahren:

$$\lambda_1 : \lambda_2 = \frac{P l_1}{q_1 E_1} : \frac{P l_2}{q_2 E_2}.$$

Nach Whewell heisst nun die Grösse qE/l die Härte, und man kann daher sagen: die Härten zweier Körper sind den Tiefen der Zusammendrückungen, die sie sich gegenseitig ertheilen, umgekehrt proportional.

Während hier die beiden aufeinanderwirkenden Körper in ihrer ganzen Quer- und Längsdimension berücksichtigt werden, handelt es sich bei der mineralogischen Definition um die Wirkung einer Spitze des einen Körpers auf eine ebene und möglichst glatte Fläche des andern Körpers. Die ersten hier thätigen Forscher beschränkten sich darauf zu sagen: von zwei Körpern ist derjenige der härtere, welcher den andern ritzt. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, dass, wenn eine Spitze aus dem Stoffe 1 eine Fläche aus dem Stoffe 2 ritzt, nicht etwa auch eine Spitze aus 2 eine Fläche aus 1 ritze — eine Voraussetzung, die zwar für grössere, nicht aber für kleinere Härteunterschiede erfüllt zu sein braucht; die Methode wird also nicht sehr empfindlich sein. Um ferner auf diese Weise eine Härtescala der Stoffe zu gewinnen, muss man noch weiter voraussetzen, dass, wenn Körper 1 den Körper 2 und Körper 2 den Körper 3 ritzt, dann auch Körper 1 den Körper 3 ritzt, was a priori nicht feststeht, durch die Erfahrung aber bestätigt wird. Nach dieser, von Hauy begründeten Methode hat Mohs folgende Skala von Härtegraden aufgestellt, die noch heute in Gebrauch ist:

1) Talk	6) Feldspath
2) Gyps	7) Quarz
3) Kalkspath	8) Topas
4) Flussspath	9) Korund
5) Apatit	10) Diamant.

Man kann aber hiernach offenbar quantititative Härtevergleichungen nicht ausführen, da die 10 Grade nur die Bedeutung von Nummern, nicht aber die von Zahlen haben. Methoden zu quantitativen Bestimmungen schlugen MUSCHENBROEK, FRANKENHEIM[1]), CRACE-CALVERT und JOHNSTON[2]), HUGUENY[3]), BETTONE[4]) u. A. vor. Die relativ brauchbarsten rühren von SEEBECK[5]), FRANZ[6]), GRAILICH u. PEKAREK[7]) und PFAFF[8]) her. Das hierbei benutzte Sklerometer besteht aus einem Stativ zur Aufnahme der polirten Fläche, deren Härte bestimmt werden soll, und aus einer durch Auflegen von Gewichtsstücken auf eine mit ihr verbundene Schale mehr oder weniger zu beschwerende Diamantspitze, welche mittelst eines Schlittens über jene Fläche geführt wird; die Belastung, bei welcher die Ritzung eben verschwindet, wird als Maass der Härte betrachtet; die Härte wird also nicht mit dem Festigkeitsmodul (obere Grenze), sondern mit dem Tragmodul (untere Grenze) in Analogie gestellt. Da bei Krystallen die Härte nicht nur für verschiedene Flächen, sondern auch auf einer und derselben Fläche für verschiedene Richtungen verschieden ist, hat PFAFF, um Mittelwerthe zu erhalten, noch das Mesosklerometer construirt[9]); hier ruht die Krystallfläche auf einer rotirenden Scheibe, und man bestimmt die Zahl der Umdrehungen, die, bei einer bestimmten Belastung der Spitze, erforderlich sind, damit diese bis zu einer bestimmten, mittelst eines Fühlhebels genau messbaren Tiefe eindringe; für weichere Krystalle wählt man 130 *gr*, für härtere 200 *gr* Belastung, zur Reduction stellt man bei Flussspath beide Versuche an.

In neuester Zeit hat HERTZ[10]) eine strenge Definition der Härte gegeben und diese damit zugleich in den Rahmen der übrigen Festigkeiten eingeordnet. Dabei wählt er der grösseren Zuverlässigkeit halber ebenfalls statt der Festigkeitsgrenze die Elasticitätsgrenze. Denkt man sich die drei Hauptdrucke X_x Y_y Z_z (pag. 230) als rechtwinklige Coordinaten, so erhält man eine gewisse Fläche, deren Inneres der Bereich der elastischen Vollkommenheit ist, und deren einzelne ausgezeichnete Punkte den einzelnen Arten der Elasticitätsgrenze (für Druckfestigkeit, Zugfestigkeit u. s. w.) entsprechen. Auch die Härte wird durch einen bestimmten Punkt dieser Fläche dargestellt. HERTZ definirt nun die Härte als diejenige Festigkeit, welche ein Körper der durch Berührung mit kreisförmiger Druckfläche hervorgerufenen Deformation entgegensetzt, und zwar wird die Härte gemessen durch den auf die Flächeneinheit bezogenen Normaldruck, welcher bei der Elasticitätsgrenze im Mittelpunkte der Druckfläche herrscht. Wählt man für den drückenden Körper eine Spitze, so kommt man auf die alte Härteskala; aber die Messung wird eine absolute, weil die Spitze aus demselben Material wie die Fläche bestehen darf. Nach dieser Definition wird auf Grund der HERTZ'schen Drucktheorie (pag. 301), wenn P der Druck und H die Härte ist:

---

[1]) FRANKENHEIM, De cohaesione etc. I.-Diss. Breslau 1829. — Die Lehre v. d. Cohaesion, Breslau 1835.

[2]) CRACE-CALVERT u. JOHNSTON, Phil. Mag. (4) 17 (1859).

[3]) HUGUENY, Rech. exp. sur la dureté des corps. Paris 1865.

[4]) BETTONE, Chem. News 1873.

[5]) SEEBECK, Progr. Cöln. Realgymn. Berl. 1833.

[6]) FRANZ, De lapidum duritate, In.-Diss. Bonn. 1850. — POGG. Ann. 80, pag. 37 (1850).

[7]) GRAILICH u. PEKAREK, Wien. Ber. 13, pag. 410 (1854).

[8]) PFAFF, Münch. Ber. 1883, pag. 55 u. 372.

[9]) PFAFF, Münch. Ber. 1884, pag. 255.

[10]) HERTZ, Verh. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbefleisses. Berlin (ohne Jahr).

$$H = \frac{2}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3P(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22})^2}{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2}},$$

oder speciell, wenn es sich um eine Spitze, die einen Theil einer Kugelfläche darstellt, und um eine ebene Fläche aus demselben Stoff handelt:

$$H = \frac{2}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3P\rho^2 E^2}{16(1-\mu^2)^2}};$$

in Worten: die Härte ist proportional der Kubikwurzel aus dem Grenzdruck, aus dem Quadrate der Krümmung der Spitze und aus dem Quadrate des Elasticitätsmoduls und wächst ausserdem mit der Elasticitätszahl. Die genaue Messung von P und ρ dürfte die Schwierigkeiten der Methode ausmachen. In drei vorläufigen Versuchsfällen erhielt HERTZ selbst für Glas 135, 150, 190 *kgr* pro *qmm*.

Im Folgenden sind einige der wichtigsten Zahlenergebnisse zusammengestellt. Von den darin enthaltenen, zum Theil noch sehr schwach begründeten, allgemeinen Gesetzen sei hier nur das von TURNER[1]) gefundene angeführt, wonach bei amorphen Substanzen die Härte dem Quotienten des specifischen Gewichts durch das Atomgewicht proportional sein soll. Die Bruchtheile der folgenden Zahlen beruhen meist nur auf Schätzungen.

Achat	7	Beryll	7·8	Granat	7	Palladium	4·8
Adular	6	Bittersalz	2·3	Graphit	0·5—1	Platin	4·3
Alabaster	1·7	Bleiglanz	2·5	Gyps	1·6—2	Platiniridium	6·5
Alaun	2—2·5	Chlorsilber	1·3	Hornblende	5·5	Quarz	7
Andalusit	7·5	Diamant	10	Iridium	6	Salpeter	2
Anthracit	2·2	Dolomit	3·5—4	Iridosmium	7	Schwefel	1·5—2·5
Antimon	3·3	Eisenglanz	6	Kalkspath	3	Schwerspath	3·3
Antimonblüthe	2·6	Eisenkies	6·3	Kaolin	1	Serpentin	3—4
Antimonglanz	2	Eisenvitriol	2	Korund	9	Silber	2·5—3
Apatit	5	Feldspath	6	Kupfer	2·5—3	Steinkohle	2—2·5
Aragonit	3·5	Feuerstein	7	Kupfervitriol	2·5	Talk	1
Arsen	3·5	Flussspath	4	Lehm (0°)	0·3	Topas	8
Asbest	5	Galmei	5	Magneteisenerz	6	Turmalin	7·3
Asphalt	1—2	Glaubersalz	1·7	Marmor	3—4	Wachs (0°)	0·2
Augit	6	Glimmer	2·8	Meerschaum	2—3	Wismuth	2·5
Bernstein	2—2·5	Gold	2·5—3	Opal	4—6		

Mit steigender Temperatur nimmt die Härte ab, und zwar desto rapider, je mehr sich der Körper seinem Schmelzpunkte nähert. Ebenso ist natürlich die Feuchtigkeit von Einfluss auf die Härte (Thon, Gyps).

Bei Krystallen ist die Härte verschieden: 1) für die verschiedenen (natürlichen oder künstlichen) Flächen; 2) auf jeder Fläche für die verschiedenen Richtungen; 3) nach FRANKENHEIM[2]) und F. EXNER[3]) häufig auch innerhalb derselben Richtung für das Hin- und Herritzen. Diese Verschiedenheiten hängen, wie namentlich der letztere Forscher nachgewiesen hat, innig mit der Lage und Natur der Spaltungsebenen zusammen; z. B. ist die Härte nach allen Richtungen gleich auf einer Fläche, welche von keiner Spaltungsebene durchschnitten wird; andernfalls weist sie doppelt so viele Maxima und Minima auf, als die Fläche Combinationskanten mit Spaltungsebenen hat, und die Minima

[1]) TURNER, Proc. Birm. Phil. Soc. 5 (2) (1887).

[2]) FRANKENHEIM, a. a. O.

[3]) F. EXNER, Unt. üb. die Härte an Krystallflächen. Wien 1873.

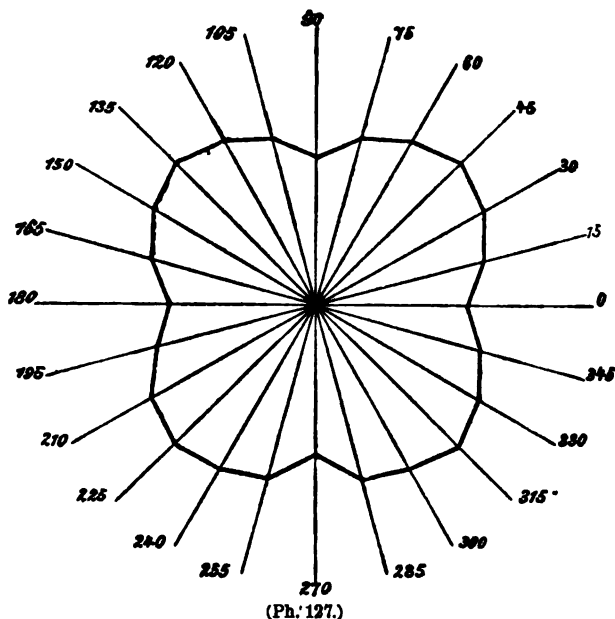
liegen diesen Kanten parallel; in der Richtung gegen einen spitzen Spaltungswinkel hin ist die Härte grösser als in der umgekehrten u. s. w. Wie grosse Unterschiede der Härte in den verschiedenen Richtungen auftreten können, zeigen folgende von PFAFF[1]) herrührende Zahlen (in Grammen):

Kalkspath		Gyps	
Rhomboëderfläche	0·65 bis 34·3	Fläche *P*	0·20 bis 1·15
Gerade Endfläche	0·5 „ 4	„ *M*	9·6 „ 32·1
Säulenfläche	22 „ 61	„ *T*	2·6 „ 6·3

Zur Erlangung von Mittelwerthen hat daher PFAFF[2]) zahlreiche Bestimmungen mit dem Mesosklerometer ausgeführt und folgende Werthe erhalten:

Speckstein	1	Flussspath, Würfelfläche	20
Gyps, erster Bruch	5	Apatit, Endfläche	28
„ zweiter Bruch	7·6	„ Säulenfläche	48
Steinsalz	7	Adular	105
Kalkspath, Rhomboëderfläche	8	Quarz, Endfläche	133
„ Endfläche	3	„ Säulenfläche	180
„ Säulenfläche	27	Topas	240
Flussspath, Oktaëderfläche	19·5	Korund	340

Die zahlreichsten Beobachtungen über die Härte in den verschiedenen Richtungen der Krystallflächen rühren von FRANKENHEIM, GRAILICH und PEKAREK[3]), sowie von F. EXNER[4]) her. Letzterer hat seine Messungen in zahlreichen graphischen Darstellungen, die man Härtecurven nennen kann, veranschaulicht; Fig. 127—129 giebt ein Beispiel für Steinsalz, und zwar bezieht sich Fig. 127 auf eine Würfelfläche (Richtung 0° ist parallel einer Kante), Fig. 128 auf eine Dodekaëderfläche (0° senkrecht auf der abgestumpften Kante), Fig. 129 auf eine Oktaëderfläche (0° parallel der Würfelkante), wobei die stark gezogene Curve dem positiven und negativen Sinne der Richtung des Ritzens, jeden für sich genommen, entspricht, während die schwach gezogene die Mittelwerthe für jede Richtung giebt. Die drei Curven sind jedoch ihren absoluten Verhältnissen nach nicht mit einander vergleichbar.

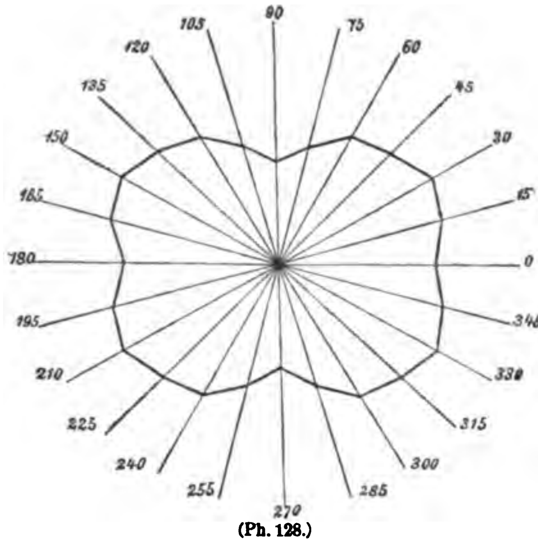


(Ph. 127.)

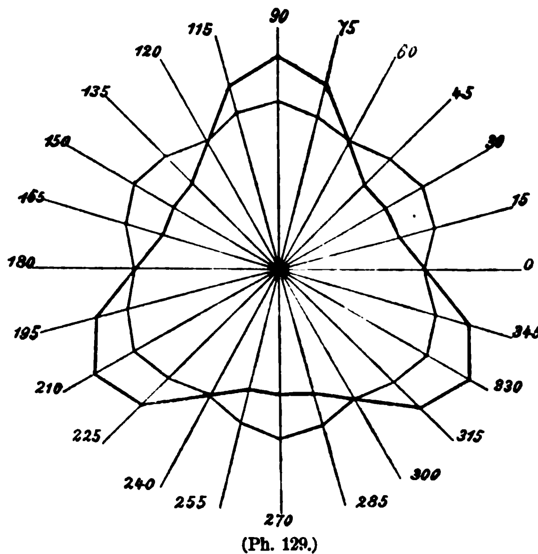
[1]) PFAFF, Münch. Ber. 1883, pag. 55 und 372.
[2]) PFAFF, Münch. Ber. 1884, pag. 255.
[3]) GRAILICH und PEKAREK, a. a. O.
[4]) EXNER, a. a. O.

Ueber die sogen. Härtung der Metalle, welche nicht deren Härte, sondern deren Sprödigkeit betrifft, sehe man weiter unten.

Geschmeidigkeit und Sprödigkeit. Diese beiden, einander entgegengesetzten Begriffe, oder besser Begriffskategorien, sind für die praktische Technik von ausserordentlicher Wichtigkeit, können aber hier nur flüchtig berührt werden. Geschmeidig oder plastisch ist ein Stoff, wenn der Bereich, in welchem er dauernde Formänderungen zulässt, gross, der Widerstand gegen dieselben klein ist; spröde ist er im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn der Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze die Ueberschreitung der Zusammenhangsgrenze unmittelbar folgt. Der äusserste Grad der Geschmeidigkeit ist die Plasticität, der äusserste Grad der Sprödigkeit die sogen. Glashärte. Gewöhnlich, aber nicht immer, trifft die Plasticität mit der Weichheit, die Sprödigkeit mit der Härte zusammen; Lehm und Eis sind z. B. weich und plastisch, abgelöschter Stahl ist hart und spröde; dagegen ist z. B. Glas meist überaus spröde, aber nicht besonders hart. Ueber sehr plastische Körper sind zahlreiche Untersuchungen angestellt, namentlich im Hinblick auf die Fähigkeit dieser Körper, unter Wirkung starker Drucke ganz nach Art der Flüssigkeiten zu fliessen (s. Art. Ausfluss); das imposanteste Beispiel bieten die Gletscher dar[1]). Abgesehen hiervon kann man folgende Arten von Geschmeidigkeit unterscheiden:



(Ph. 128.)



(Ph. 129.)

1) Duktilität oder Geschmeidigkeit für Längs-Zug (Ausdehnung in eine Linie). Sie ist sehr gross bei Platin, Silber, Kupfer, Eisen und Gold, dagegen klein bei Blei, Zinn und Zink. Platindraht ist bis herab zu 0·00005 *mm* Dicke hergestellt worden. Stoffe, die bei gewöhnlicher Temperatur nicht duktil sind, werden es in der Hitze, z. B. Zink, Siegellack und ganz besonders Glas. Von

[1]) Ueber die Plasticität des Eises und anderer Körper s. z. B. Koch, Wied. Ann. 25, pag. 438 (1885). — Pfaff, Ber. d. phys.-med. Soc. zu Erlangen 1875, pag. 72. — Marangoni, Riv. Scient. 11, pag. 170 und 196 (1879).

letzterem erhielt durch Kunstgriffe (Abschiessen mit der Armbrust) Boys[1]) Fäden von 30 *m* Länge und 0·002 *mm* Dicke; noch dünnere Fäden gab Quarz.

2) Walzbarkeit oder Geschmeidigkeit für Flächendruck (Ausbreitung in eine Fläche). Hier steht Gold an der Spitze, dann folgen Silber, Kupfer, Platin, Zinn, Zink, Messing und Eisen. Als Goldschaum hat Gold eine Dicke von 0·0003 *mm*, als Vergoldung eine solche von nur 0·00001 *mm*; nicht ganz so dünn lässt sich Staniol, Schaumgold u. s. w. herstellen. In der Eisentechnik hat das Walzen eine sich noch immer steigernde Bedeutung.

3) Hämmerbarkeit oder Schmiedbarkeit (Geschmeidigkeit für Stoss). Fast alle Metalle lassen sich mehr oder weniger gut hämmern, einige besonders gut in kaltem, andere in heissem resp. glühendem Zustand.

Härtung. Von den zahlreichen Methoden, durch welche man einem gegebenen Stoff die verschiedenen Grade von Sprödigkeit resp. Geschmeidigkeit ertheilen kann, ist die am mannigfaltigsten zu regulirende und darum wichtigste die des Erhitzens und Wiederabkühlens. Macht man z. B. Stahl hellroth glühend und bringt ihn dann plötzlich mit kaltem Wasser, Oel oder einer andern geeigneten, flüssigen oder dampfförmigen Substanz in Berührung (»Ablöschen«), so wird er äusserst spröde, oder, wie man sagt, glashart. Je grösser die Erhitzung und je kälter das Ablöschungsbad, desto stärker die Wirkung. Will man nun einen gegebenen Grad von Geschmeidigkeit erzielen, so erwärmt man den so gehärteten Stahl bis zu einer bestimmten Temperatur (»Anlassen«) und lässt ihn dann allmählich (z. B. durch Umhüllung mit schlechten Wärmeleitern) abkühlen; je höher die Temperatur ist, bis zu welcher man geht, desto geschmeidiger wird der Stab, und dies kann man sehr genau abmessen, da sich bestimmte Temperaturen beim Stahl durch entsprechende Anlauf-Farben bemerklich machen: anfangs hellgrau, bei 220° blassgelb, 230° strohgelb, 240° goldgelb, 250° braun, 275° purpurn, 285° hellblau, 290° vollblau, 315° dunkelblau, darüber hinaus dunkelgrau. Bei andern Metallen ist das Verhalten ein etwas abweichendes, zumal bei Legirungen, von denen einige sogar durch schnelles Abkühlen geschmeidiger werden, als durch langsames. Andere Vorgänge, die Härtung im Gefolge haben, sind der Drahtzug, die Appretur (Oberflächenbehandlung) und der Zusatz anderer Stoffe (Kupfer zu Gold und Silber, Zinn zu Kupfer, Antimon zu Blei, Eisen zu Silber u. s. w.); am wichtigsten ist in dieser Hinsicht das Beispiel des Stahles, den sein Kohlenstoffgehalt ($\frac{1}{2}$ bis $1\frac{1}{2}$ $\frac{0}{0}$), im Gegensatz zum Eisen, in hohem Grade (wie oben angegeben) härtungsfähig macht.

Mit dem Härtungsgrade des Stahls stehen übrigens Erscheinungen, welche dessen übrige Eigenschaften aufweisen, in Wechselwirkung, so namentlich die Dichte und deren Vertheilung, der elektrische Widerstand und das magnetische und das thermoelektrische Verhalten; es muss jedoch genügen, in dieser Hinsicht auf die Arbeiten von Barus, Strouhal und Barus, Auerbach, Fromme, H. Meyer, Clémandot und Cheesman hinzuweisen[2]).

In noch höherem Grade als Stahl wird Glas durch plötzliches Ablöschen spröde, und es sind in dieser Hinsicht namentlich die Bologneser Flaschen

---

[1]) Boys, Phil. Mag. (5) 45, pag. 489 (1887).

[2]) Barus, Wied. Ann. 7, pag. 338 (1879). — Strouhal u. Barus, Verh. phys. med. Ges. zu Würzb. 15 (1880). — Auerbach, Wied. Ann. 5, pag. 289. 1878. — Fromme, Gött. Nachr. 1876, pag. 157; Wied. Ann. 8, pag. 352 (1879), u. 22, pag. 371 (1884). — H. Meyer, Wied. Ann. 18, pag. 233 (1883). — Clémandot, Compt. rend. 94, pag. 703 (1882), u. 95, pag. 587 (1882). — Cheesman, Würzb. In.-Diss. Lpz. 1882.

und die Glasthränen oder batavischen Tropfen berühmt geworden. Wirft man in jene einen noch so kleinen, aber scharfen Splitter, der den Boden nur schwach ritzt, so zerspringt die Flasche; bricht man bei diesen die Spitze, in die sie in Folge der Herstellung auslaufen, ab, so zerfallen sie in Staub. Aehnliche Thränen, die bei genügender Kälte des Ablöschwassers sogar von selbst zerplatzten, stellte MARANGONI[1]) aus Kolophonium her. Die Sprödigkeit hängt hier, ebenso wie bei andern Stoffen, jedenfalls mit der durch das rasche Erkalten erzeugten Verschiedenheit in der Beschaffenheit der oberflächlichen und der tieferen Theile zusammen, wie denn auch BARUS[2]) fand, dass durch Loslösung der oberflächlichen Schichten in Flusssäure die Explodirbarkeit mehr und mehr verloren geht.

Adhäsion. Wird die Cohäsion als die Erscheinung des Zusammenhaltens der Theile eines Körpers aufgefasst, so steht ihr die Adhäsion als die Erscheinung des Zusammenhaltens zweier verschiedener Körper ergänzend zur Seite. Wie schon die tägliche Erfahrung zeigt, haften leichte Theilchen an der Oberfläche anderer Körper (Staub, Bleistift auf Papier, Kreide auf Holz u. s. w.) Bringt man zwei Platten, indem man sie übereinander schiebt und dreht, in innige Berührung, so leisten sie der Trennung einen gewissen Widerstand, den man messen kann, indem man die untere fest hinlegt, die obere an die eine Schale einer Waage hängt und die andere mit Gewichten belastet[3]). Auf diese Weise kann man auch die Adhäsion fester Körper an Flüssigkeiten messen. Aber alle diese Messungen fallen sehr schwankend aus, weil die verschiedensten Einflüsse (Parallelität, Glätte, Reinheit u. s. w. der Platten) sich geltend machen; bei Flüssigkeiten kommt meist noch störend hinzu, dass der feste Körper eine Schicht der Flüssigkeit mit sich nimmt, weil deren Cohäsion kleiner ist als die Adhäsion. Besonders gut adhäriren Marmor-, Blei- und Kupferplatten. Man kann z. B. die Seitenflächen von kupfernen Würfeln so vollkommen ebnen, dass, wenn man ein Dutzend derselben zu einer Säule aufschichtet und den obersten hebt, die ganze Säule mit gehoben wird. Das die Adhäsion quantitativ darstellende Gewicht P ist natürlich der Grösse der Adhäsionsfläche F proportional, also $P = \alpha F$, und hierin ist α der Adhäsionscoëfficient. Wie klein derselbe meist im Vergleich zum Festigkeitscoëfficienten ist, zeigen folgende, von verschiedener Seite beobachtete Zahlen (in *kg* pro *qmm.*):

Platten von gleichem Metall		Feste Körper und Flüssigkeiten	
Kupfer	0·0000013	Glas und Wasser . . .	0·000006
Zink	10	Glas und Quecksilber .	0·000018
Wismut	10	Zinkamalgam und Quecksilber	0·000050
Antimon	09		
Blei	09		
Zinn	06		

Uebrigens muss man nach einer Untersuchung von STEFAN[4]) beachten, dass es sich häufig nicht um die wirkliche, sondern um eine scheinbare Adhäsion handelt, die in Wahrheit eine hydrodynamische Erscheinung ist. Die Berührung zwischen zwei Platten ist nämlich streng genommen meistens keine mathematisch genaue, sondern es existirt zwischen ihnen eine dünne Schicht; in Folge der Reibung strömt, wenn die Platten auseinander gezerrt werden, die Luft, das Wasser, oder überhaupt das umgebende Medium nur langsam ein, zu-

1) MARANGONI, N. Cim. (3) 5, pag. 116 (1879).
2) BARUS, Sill. J. (3) 31, pag. 439 u. 32, pag. 181 (1886).
3) Einen Schulapparat dieser Art hat KREBS (POGG. Ann. 135, pag. 144, 1868) beschrieben.
4) STEFAN, POGG. Annalen 154, pag. 316 (1875).

mal hierbei ein äusserer Ueberdruck entsteht; man kann sogar aus den Gleichungen des so aufgefassten Vorganges die Reibungsconstante bestimmen, und erhält dann fast genau die auf anderem Wege für Luft und Wasser gefundenen Werthe. Nur beim Experimentiren im luftleeren Raume kann man hiernach sicher sein, dass man es mit einer wirklichen Adhäsionserscheinung zu thun hat.

Metallüberzug, Leimung, Löthung, Schweissung. In das Gebiet der Adhäsionserscheinungen gehören zahlreiche technische Processe, die hier wenigstens erwähnt werden mögen. Der Metallüberzug erfolgt auf feurigem, trocknem, nassem oder galvanischem Wege und führt, je nach der Natur der beiden Metalle, zu einem mehr oder weniger hohen Grade von Adhäsion (Vergoldung, Versilberung, Plattirung u. s. w.). Beim Leimen werden flüssige Stoffe benutzt, die durch Verdunstung fest werden. Andere Stoffe, wie Mörtel und Gyps, werden durch Trocknung fest, und ihre Adhäsion wird dadurch eine relativ grosse, z. B. bei Mörtel bis zu 0·000025, bei Gyps sogar bis zu 0·00004. Beim Löthen wird, nach Entfernung der oberflächlichen Oxydschicht, durch Schmelzung des Lothes, Auflegen in diesem Zustande und nachträgliches Erstarren eine innige Verbindung erzielt. Das Schweissen endlich beruht auf dem Zusammenhämmern in glühendem Zustande, und hierbei wird, namentlich bei Eisen und Platin, eine Adhäsion erzielt, welche der Cohäsion (Festigkeit) häufig so gut wie gleichkommt und die beiden Stücke von nun an als ein einziges Ganze zu betrachten gestattet.

F. Auerbach.

Elastische Nachwirkung.

I. Eine Reihe von Thatsachen.

1) Bei einer Untersuchung über die Elasticität von ungedrehten Seidenfäden beobachtete W. Weber[1]) die folgende Erscheinung: Wurde ein Coconfaden einige Zeit lang gespannt und dann rasch abgespannt, so ging er nicht sofort auf seine ursprüngliche Länge zurück. Einen gewissen Weg legte er schnell — sagen wir momentan — zurück; dann zog er sich langsam, im Laufe mehrerer Stunden, bis zu einer Länge zusammen, welche aber auch noch grösser als die ursprüngliche war; von da ab machte er keine merkliche Bewegung mehr. Diese drei Strecken wollen wir bezeichnen: die erste als elastische Verschiebung; die zweite als elastische Nachwirkungsverschiebung; die dritte als dauernde (permanente) Deformation. Dass diese drei Grössen nicht streng von einander zu trennen sind, ist selbstverständlich. Bei Magnetisiren von Eisen zeigen sich ähnliche Erscheinungen; den drei Abschnitten entsprechen dort die temporäre, remanente und permanente Magnetisirung.

Wenn Weber einen Coconfaden ein paar Stunden lang an- und dann wieder abspannte, so ergab sich, dass der Faden beträchtlich und zwar bleibend verlängert worden war. Diese Operation wurde darauf ein zweites und drittes Mal wiederholt. Auch das zweite Mal erhält er eine bleibende aber kleinere Verlängerung. Nach dreimaliger Wiederholung entstand keine neue bleibende Verlängerung mehr.

[1]) W. Weber, Pogg. Ann. 34, pag. 247. 1835.

Auf diese Weise lässt sich also in einem gewissen Maasse die Elasticitätsgrenze erweitern und der Vorgang der Nachwirkung unabhänging von der der dauernden Gestaltsänderung beobachten. Die temporäre Verschiebung darf selbstredend nicht die zuerst gewählte überschreiten; sonst wird eine neue dauernde Verlängerung eintreten.

Man sollte nun eigentlich unterscheiden zwischen einer Nachwirkungsdeformation und der Nachwirkung selber, indem man den letzteren Namen für die Ursache der Deformation sich reservirt. Da aber meistens keine Zweifel entstehen, was gemeint sei, so soll Nachwirkung auch gebraucht werden für »Deformation durch Nachwirkung«, gleichgültig, ob letztere in absolutem oder in einem beliebigen relativen Maasse dargestellt ist.

Das Charakteristikum der Nachwirkung besteht also darin, dass sie eine Funktion der Zeit ist. Praktisch wird diese Abgrenzung oft Schwierigkeiten haben, namentlich für den Beginn einer Nachwirkung.

Der folgende Artikel wird sich möglichst auf die Nachwirkung beschränken; dauernde Deformationen werden nur, wo es unumgänglich nöthig ist, mit in seinen Bereich gezogen.

2) Die Beobachtungsmethode von W. Weber war die folgende, durch Gauss ihm angegebene: Ein Seidenfaden war horizontal ausgespannt; sein eines Ende war an ein Schraubenmikrometer, sein anderes an ein, an einem langen Drath aufgehängtes Gewicht geknüpft. Bewegte man das Schraubenmikrometer, so neigte sich der Faden, an welchem das Gewicht hing und der Faden bekam eine aus dieser Neigung und der Grösse des Gewichts bestimmbare Spannung.

Die Abhängigkeit der Nachwirkungsverlängerung x von der Zeit t, welche verflossen ist seit Aufhebung der Spannung, stellte Weber in seinen ersten Versuchen dar durch $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{b}$ oder $x = -\frac{b}{t + C}$, wo b und C Constanten sind.

In einer späteren Abhandlung[1]) zeigte er, dass genauere Beobachtungen sich dieser Form nicht fügten; er versuchte daher die Annahme

$$\frac{dx}{dt} = bx^m$$

und fand für einen speciellen Fall genügend:

$$x = 29{\cdot}05(t + 1{\cdot}1816)^{-0{\cdot}1719}$$

wenn x in mm, t in Minuten gemessen ist.

3) Weber wies darauf hin, dass die Dämpfung von Schwingungen durch innere Reibung sich aus der Nachwirkung müsse erklären lassen. Bei jeder Hinschwingung würde die Ruhelage, d. h. diejenige Stelle, an welcher die im Innern des Körpers wirkenden Kräfte im Gleichgewicht wären und an der er also, hätte er keine träge Masse, würde stehen bleiben, etwas rückwärts, bei jeder Rückschwingung etwas vorwärts verlegt werden. Daraus würde eine Abnahme des Schwingungsbogens bei jeder Schwingung nahe um das Doppelte jener Verschiebung bewirkt werden.

4) Den Beobachtungen von Weber folgten zunächst einige gelegentliche von R. Kohlrausch[2]) an Seide und Glasfäden ohne allgemeine Resultate. Gegenstand einer eingehenden Untersuchung wurde die Nachwirkung erst durch F. Kohlrausch[3]). Er wählte, als leichter beobachtbar, die Torsionsnachwirkung

1) W. Weber, Pogg. Ann. 54, pag. 1. 1841.

2) R. Kohlrausch, Pogg. Ann. 72, pag. 393. 1847.

3) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 119, pag. 337. 1863.

und stellte sich als die direkte experimentelle Aufgabe die Fragen: 1) Wenn man einen Draht um einen constanten Winkel tordirt, wie ändert sich das Torsionsmoment D als Funktion der Zeit t, welche die Torsion bereits dauert? 2) Welches Torsionsmoment ist nach Aufheben der Torsion nöthig, den unteren Querschnitt in die Ruhelage zurückzuführen? 3) Ein Draht sei während der Zeit T um einen Winkel φ tordirt worden, welches ist der Torsionswinkel x, um den der Draht von seiner permanenten Ruhelage absteht zur Zeit t nach Aufheben der Torsion? Die Temperatur sei $\tau°$ C.

Ad 1) Die erste Frage wurde geprüft, indem an einem Glasfaden eine Magnetnadel befestigt und aus dem magnetischen Meridium durch eine Torsion abgelenkt wurde. Ist dasjenige Drehungsmoment $= 1$ gesetzt, welches auf die Nadel ausgeübt wird, wenn sie senkrecht zum magnetischen Meridian steht, so ergab sich das Torsionsmoment als Zeitfunction zu

$$D = D_1 + c e^{-a t^m}$$

$D_1 = 0{\cdot}8970$ Material: Glasfaden.
$c = 0{\cdot}0405$ Zeiteinheit: Minute.
$a = 0{\cdot}3527$
$m = 0{\cdot}25.$

Ad 2) Es fand sich d für denselben Glasfaden durch eine Zeitfunction gleicher Form darstellbar und zwar:

$$d = d_1 + c e^{-a t^m} \quad \text{(Zeiteinheit: Minute).}$$

Hierin war $m = 0{\cdot}25$ und

Dauer der Torsion	c	a
1380′	0·04551	0·45204
40	0·04225	1·0886
20	0·04178	1·2497
10	0·03240	1·3086

Ad 3) Was endlich die dritte Frage betrifft, so handelt es sich vorzugsweise um eine Entscheidung über das Folgende: Lassen sich die Beobachtungen darstellen durch die von WEBER benutzten Formen:

$$\frac{dx}{dt} = -b x^p \tag{1a}$$

mit dem Integral

$$x = \frac{b_1}{(t + C_1)^p} \quad (p > 1) \tag{1b}$$

oder die von KOHLRAUSCH supponirte

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \cdot \frac{x}{t^n} \tag{2a}$$

mit dem Integral

$$x = C \cdot e^{-\alpha t^m}. \tag{2b}$$

Die Gleichung (1a) ist dann ein specieller Fall von (2a). Schreibt man nämlich

$$\frac{dx}{dt} = -b x \cdot x^{p-1}$$

und nach (1a)

$$\frac{dx}{x^p} = -b\,dt; \quad x^{-(p-1)} = -(p-1)\,b\,(t + C),$$

so wird

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{(p-1)(t+C)}$$

und daher für $C = 0$

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \frac{x}{t} \tag{3a}$$

mit dem Integral

$$x = \frac{c}{t^\alpha}. \tag{3b}$$

α nennt KOHLRAUSCH den Coëfficient der elastischen Nachwirkung.

Das allgemeine Resultat der KOHLRAUSCH'schen Beobachtungen[1]) geht dahin: Für kurze Torsionsdauern lassen sich die Formeln (3) benutzen. Wird aber der Draht durch eine längere Zeit dauernde Torsion in den Zustand der Nachwirkung versetzt, so stellen nur die Gleichungen (2) den Verlauf derselben genügend dar. Es ist also n nicht mehr $= 1$, entfernt sich im Gegentheil um so mehr vom Werthe 1, je grösser die Torsionsdauer war; gleichzeitig nimmt auch α ab; $n - \alpha$ bleibt aber nahezu constant. Zum Belege mögen die folgenden Zahlen dienen; sie beziehen sich auf die

Torsionsnachwirkung eines Silberdrahtes.

Torsionsdauer	α	n	$n - \alpha$
60 Sec.	0·388	1·0000	0·612
120 „	0·321	0·931	0·610
300 „	0·293	0·849	0·556
600 „	0·236	0·785	0·549
32400 „	0·042	0·652	0·610

Hat man bei einer gewissen Temperatur die Nachwirkung eingeleitet und steigt die Temperatur, während die Nachwirkung sich ausgleicht, so läuft dieselbe rascher ab. — Umgekehrt giebt dieselbe Deformation, bei höherer Temperatur hergestellt, in gleichen Zeiten grössere Nachwirkung (wenigstens bei Silber). Sie kann innerhalb Temperaturen von $+3$ bis $+22°$ praktisch proportional der von $-21·5°$ an gerechneten Versuchstemperaturen gesetzt werden.

Die sämmtlichen Beobachtungsreihen lassen sich schliesslich zusammenfassen in der folgenden Gleichung. Die Ablenkung x zur Zeit t Minuten nach Aufheben der Torsion φ, welche während T Secunden bestanden hat, ist (alle Vorgänge bei einer Temperatur von $\tau°$ C. gedacht):

$$x = 0·00009093 \cdot T^{0·587} \cdot \varphi \frac{\tau + 21·5}{34} \cdot \frac{1}{t^{0·8875}}.$$

x und φ sind im gleichen Maasse ausgedrückt. Die Formel gilt unabhängig von der Länge des Drahtes. Der Radius des Silberdrahtes war $= 0·046$ *mm*. T ging dabei bis zu 600 Sekunden, φ bei dem 125 *mm* langen Draht bis zu 340°.

Für grössere Torsionen ist die Proportionalität der Nachwirkung mit der Torsion nicht mehr streng[2]); es muss ein quadratischer Ausdruck eingeführt werden. Für die Torsionsdauer von 1 Minute gilt dann

$$x = (0·0000219\,\varphi + 0·0000000187\,\varphi^2)\, T^{0·59} \cdot \frac{1}{t^{0·39}} \cdot (\tau + 21·5).$$

5) Versuche von NEESEN[3]) führten den Verf. zum Schlusse, dass die KOHLRAUSCH'schen Formeln auf seine Beobachtungen nicht anwendbar seien, sondern dass man ihnen genügen müsse durch eine Summe von Exponentialfunctionen, mindestens 2 Gliedern von der Form

$$x = c e^{-\beta t} + c_1 e^{-\beta_1 t}.$$

---

[1]) F. KOHLRAUSCH, POGG. Ann. 128, pag. 1 und 399. 1866; 158, pag. 337. 1876.

[2]) F. KOHLRAUSCH, POGG. Ann. 158, pag. 337. 1876.

[3]) NEESEN, POGG. Ann. 153, pag. 498. 1874.

KOHLRAUSCH[1]) zeigte, dass die Messungen nicht zu diesem Schlusse nöthigen. Sie fügen sich ebenso gut der KOHLRAUSCH'schen Formel, erstrecken sich aber überhaupt über eine zu kleine Zeit und ausserdem über eine solche, bei denen die Bewegungen schon so langsam sind, dass man denselben Beobachtungen, welche durch die Gleichung $x = ce^{-\beta t}$ dargestellt werden, ebenso gut genügt, wenn man statt t einführt z. B. $\sqrt{t}$.

Für seine späteren Versuche über die Längsausdehnung des Kautschuks[2]) fand NEESEN überhaupt keine Formel, welche sie gut darstellte. Am besten genügte ihnen noch $x = c/log(a + t)$.

6) Den Coëfficient α der elastischen Nachwirkung fand KOHLRAUSCH

für Cocon	0·1719	Ausdehnung
„ Messingdraht . . .	0·1643	Torsion
„ Silberdraht . . .	0·3875	„
„ Kautschuk . . .	0·67	„

7) Auch für Verlängerungs- und Biegungsnachwirkung von Kautschuk zeigte KOHLRAUSCH, dass die Formel (2) den Vorgang gut darstellt, während Formel (3) nur bei kleinen Deformationszeiten zulässig ist. Die Anwendbarkeit der KOHLRAUSCH'schen Formeln, namentlich für die ersten Zeiten nach der Deformation, hat auch MESSER auf einem hübschen Wege (unter Anwendung der Photographie auf eine bewegte Platte) gezeigt.[3])

8) Von weiteren Resultaten der KOHLRAUSCH'schen Versuche seien noch folgende bemerkt: Die elastische Nachwirkung tritt am stärksten bei organischen Substanzen auf; am Cocon beträgt sie mehr als die Hälfte der plötzlichen Aenderung. Bei Glas und Metallen erreicht sie den Betrag von mehreren Procenten. Ueberraschend aber ist es, dass der Coëfficient α bei allen von gleicher Grössenordnung ist. — Von den dauernden Veränderungen durch Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze scheint sie unabhängig zu sein. — Bei Silber liess sich ein gesetzlicher Verlauf der Nachwirkung bis zu einer Beobachtungszeit von einem halben Jahre nachweisen.

Bei Kautschuk ist der Einfluss der Temperatur entgegengesetzt dem bei Silber. Kautschuk nimmt grössere Nachwirkung bei niedrigerer Temperatur an.[4])

Gegen die Formel $x = \frac{c}{t^\alpha}$ kann man einwenden, dass für $t = 0$ die Nachwirkung $x = \infty$ würde. Doch ist dies praktisch ohne Belang. KOHLRAUSCH berechnet z. B., dass bei einem Silberdraht die Nachwirkung gleich der ganzen ertheilten Torsion würde für $t = 0·00000002$ Min. und zeigt, dass bei der Längsnachwirkung von Kautschukfaden schon für $t = 1$ Sec. die Formel die Beobachtungen darstellt.

Von besonderem Interesse sind endlich die Erscheinungen des allmählichen Heraustretens verschiedener, entgegengesetzter Nachwirkungen. Tordirt man z. B. einen Kautschukfaden erst längere Zeit nach rechts (1 Tag um 1080°), lässt ihn dann los und drillt ihn, sobald seine Bewegungen langsam geworden sind, kurze Zeit und weniger nach links (10 Min. um 180°), so bewegt er sich zuerst im

[1]) F. KOHLRAUSCH, POGG. Ann. 155, pag. 579. 1875.
[2]) NEESEN, WIED. Ann. 7, pag. 460. 1879.
[3]) MESSER, Ber. d. naturf. Ges. zu Freiburg i. Br., Bd. 2, Heft 3. 1878.
[4]) NEESEN (POGG. Ann. 7, pag. 469. 1879) schliesst aus seinen Beobachtungen an einem Kautschukfaden auf ein anderes Verhalten.

Sinne der letzten Nachwirkung, die Bewegung verlangsamt sich, hört bald nachher auf und geht (nach 3·5 Min.) in eine entgegengesetzte über, wie sie die erste Nachwirkung verlangt. So lassen sich mehrere Nachwirkungen übereinder lagern; dies gilt auch für Verlängerung und Verbiegung.

9) Der allgemeine Schluss, den man mit KOHLRAUSCH aus seinen Beobachtungen ziehen kann, ist daher, dass mit einer und derselben äusseren Gestalt verschiedene Anordnungen der Moleküle verbunden sein können. Schon aus seinen ersten Versuchen folgerte er, dass man zur Erklärung der Nachwirkung eine Drehung der Moleküle annehmen könne, wenn man voraussetzt, das sie langsam geschehe, und dass durch sie eine Aenderung der Molecularkräfte herbeigeführt werde, ohne dass die Mittelpunkte der Theilchen ihre gegenseitige Stellung zu ändern brauchen. Diese Ansicht hatte auch W. WEBER schon angedeutet; und CLAUSIUS [1]) hatte gleichfalls auf dieselbe hingewiesen. Endlich machte G. WIEDEMANN [2]) darauf aufmerksam, dass man durch Zurückgehen auf seine Versuche über den Zusammenhang der Magnetisirung mit mechanischen Deformationen und die von ihm gegebene Erklärung der Erscheinungen für diese Vorstellungen eine positive Grundlage würde gehabt haben.

Es handelt sich noch um die Deutung der Formeln (2), welche den Vorgang darstellen. KOHLRAUSCH fasst dieselbe (2a) auf (etwa in Analogie zum OHM'schen Gesetze), als sei die Kraft, mit welcher die Drehung hervorgebracht wird, proportional dem Abstand aus der Gleichgewichtslage und umgekehrt proportional einem Widerstand. Der letztere wäre der Zeit, die seit der primären Aenderung verstrichen ist, proportional; allgemeiner einer Potenz derselben (mit einem Exponenten kleiner als 1).

II. Versuche zu einer theoretischen Behandlung der Nachwirkung.

10) Der erste, welcher eine Theorie der elastischen Nachwirkung aufstellte, war O. E. MEYER [3]). Er nahm an, dass die elastischen Kräfte in Körpern unvollkommener Elasticität nicht nur von den Verrückungen, sondern auch von der Geschwindigkeit abhängen, mit welcher erstere vor sich gehen; diese Voraussetzung führte er in die Differentialgleichungen der Elasticität ein. BOLTZMANN erhob gegen die Behandlung von O. E. MEYER verschiedene Bedenken, insbesondere, dass eine solche Annahme nicht den Charakter der elastischen Nachwirkungserscheinungen wiedergeben könne. Er gab eine auf eine andere Hypothese gegründete Thoerie. [4])

BOLTZMANN nimmt an, dass die Kraft, welche nöthig ist, eine Verschiebung zu erhalten, nicht nur vom augenblicklichen Zustand des Körpers, sondern auch von den vorhergegangenen Deformationen abhängig ist. Wie man sich dies etwa denken könne, vergl. WIED. Ann. 5, l. c. Durch frühere Verschiebungen, welche in gleichem Sinne mit der momentanen stattfanden, tritt nach dieser Annahme eine »Kraftverminderung« ein; diese ist abhänglg von der Grösse der früheren Verschiebung α_τ, ihrer Dauer und der Zeit, welche seit ihrer Existenz verflossen ist. Bezeichnet t die gegenwärtige, τ die frühere Zeit, so setzt BOLTZMANN die

$$\text{Kraftverminderung} = \alpha_\tau \, d\tau \cdot \varphi(t - \tau),$$

[1]) CLAUSIUS, POGG. Ann. 76, pag. 46 insbesondere pag. 66. 1849.

[2]) G. WIEDEMANN, WIED. Ann. 6, pag. 505.

[3]) O. E. MEYER, CRELLE's J. 78, pag. 130; 80, pag. 315; POGG. Ann. 151, pag. 108. 1874; 154, pag. 358. 1875. Vergl. auch WIED. Ann. 4, pag. 249. 1878, woselbst auch die Formulirung einer anderen Hypothese sich befindet. Bemerkung v. BOLTZMANN dazu WIED. Ann. 5, pag. 430. 1878.

[4]) BOLTZMANN, Ber. Wien. Ak. 70; POGG. Ann. Ergzgsbd. 7, pag. 624—654. 1876.

wo der Index τ andeutet, dass α stattfand zur Zeit τ; φ ist eine vorerst unbekannte Function. Ausserdem wird das Princip der Superposition als gültig gedacht, d. h. dass sich der Einfluss der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Deformationen superponirt oder dass die Kraftverminderung, welche eine bestimmte vor einer bestimmten Zeit stattgefundene Dehnung erzeugt, nicht abhängt von den Zuständen, welche der Körper inzwischen durchlaufen hat.

Sind α, β, γ die Dehnungen der Längeneinheit in den resp. Richtungen x, y, z; bezeichnet N_1 die Normalkraft auf die Fläche $dy\,dz$ eines rechtwinkligen Volumelementes, λ und μ die Lamé'schen Elasticitätsconstanten, so geht z. B. das N_1 der gewöhnlichen Elasticitätstheorie, wo

$$N_1 = \lambda(\alpha + \beta + \gamma) + 2\mu\alpha$$

ist, über in

$$N_1 = \lambda(\alpha_t + \beta_t + \gamma_t) + 2\mu\alpha_t - \int_0^\infty d\omega\, \varphi(\omega)\,(\alpha_\tau + \beta_\tau + \gamma_\tau) - 2\int_0^\infty d\omega\, \psi(\omega)\, \alpha_\tau,$$

wo $t - \tau = \omega$, $-d\tau = d\omega$ gesetzt ist. Daraus leiten sich, wie bei Clebsch, die Kräfte als Functionen der Verschiebungen u, v, w ab. In die Gleichungen gehen zwei Functionen φ und ψ der Zeit ein; φ wäre aus Dehnungs- und Biegungsversuchen, ψ aus Torsionsbeobachtungen zu bestimmen. Beide wären auch verbunden durch die Relation für Nachwirkung gegen kubische Compression, welche letztere vielleicht gleich Null ist.

11) Boltzmann behandelt nun eine Reihe von Fällen, welche experimentell wichtig sind und leitet die Rechnungen so, dass die unbekannten Zeitfunctionen aus den Beobachtungen ermittelt werden können. Die wichtigsten wollen wir hier geben. Es werde z. B. ein Draht von der Länge l und dem Radius R durch das Drehungsmoment D tordirt um den Winkel ϑ (das Drehungsmoment soll immer am untersten Querschnitt angreifen und dort auch der Winkel ϑ gemessen sein); ist der Draht belastet mit einem Gewicht vom Trägheitsmoment K, so wird die Bewegungsgleichung des unteren Endes (die Torsion gleichmässig über den Draht vertheilt gedacht)

$$D - K\frac{d^2\vartheta_t}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2l}\left[\mu\vartheta_t - \int_0^\infty d\omega\, \psi(\omega)\vartheta_{(t-\omega)}\right]. \tag{A}$$

I. Ist der Draht vorher vollkommen untordirt und wird er zur Zeit $t = 0$ tordirt um den constanten Winkel c (ohne dass er Schwingungen ausführen kann), so ist das Drehungsmoment D zur Zeit t

$$D = \frac{\pi R^4 c}{2l}\left[\mu - \int_0^t d\omega\, \psi(\omega)\right].$$

Setzt man $D_0 = \frac{\pi R^4 \mu c}{2l}$ = dem Drehungsmoment, welches zur Zeit $t = 0$ nöthig ist zur Verdrehung um den Winkel c, so ist

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\pi R^4 c}{2l}\cdot\psi(t) = \frac{D_0}{\mu}\psi(t). \tag{1}$$

Bezeichnet man mit D_∞ das Drehungsmoment für $t = \infty$ und setzt man

$$\mu' = \mu - \int_0^\infty d\omega\, \psi(\omega),$$

bezeichnet also μ' die Constante μ für $t = \infty$, so ist

$$\frac{dD}{dt} = \frac{D_\infty}{\mu'}\cdot\psi(t). \tag{2}$$

Die Beobachtungen von F. Kohlrausch (§ 4, ad 1) bezögen sich auf diesen Fall. Für Glas wäre demnach $\psi(t)$ von der Form:

$$\psi(t) = A\cdot t^{-\frac{2}{3}}\, e^{-0{\cdot}85\cdot t^{\frac{1}{3}}}.$$

Wir geben noch einige weitere Formeln:

II. Dem Draht werde von $-\frac{\tau}{2}$ bis $+\frac{\tau}{2}$ die constante Torsion γ ertheilt. Das Moment d ist gesucht, welches nach Aufheben der Torsion zur Zeit $t > \frac{\tau}{2}$ nöthig ist, um den Draht in der ursprünglichen Ruhelage zu erhalten. Dann ist

$$d = -\frac{\pi R^4 \gamma}{2l} \int_{t+\frac{\tau}{2}}^{t-\frac{\tau}{2}} d\omega\, \psi(\omega) = -\frac{\pi R^4 \gamma}{2l} \tau \cdot \psi(t) \text{ (}\tau\text{ eine kleine Zeit).} \tag{3}$$

III. Der Draht sei vorher untordirt, dann von $-\frac{\tau}{2}$ bis $+\frac{\tau}{2}$ um γ tordirt und nun frei gelassen. Dann ist er zur Zeit t noch um den Winkel

$$\vartheta = \frac{\gamma\tau}{\mu} \psi(t) \tag{4}$$

tordirt.

IV. Es soll ein Zusammenhang zwischen Dämpfung und Nachwirkung, oder das logarithmische Decrement als Function der Schwingungsdauer gesucht werden. Auf den Draht wirke ausser der Torsion kein Drehungsmoment. Dann ist (vergl. Gleichung A)

$$\vartheta = Ce^{-\varepsilon t} \sin (n + \alpha) t,$$

wo

$$n = \sqrt{\frac{\pi R^4 \mu}{2lK}};$$

ε und α werden kleine Grössen sein. Setzt man den Ausdruck für ϑ in die Gleichung (A) ein und nimmt in dem bestimmten Integrale, welches in ihr vorkommt, ε und α gleich Null, so ergiebt sich durch Vergleichung der so entstehenden Form mit der bekannten Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung (unter Anwendung des Fourier'schen Satzes) das Folgende: Ist L das logarithmische Decrement, $T = \frac{2\pi}{n}$ (so dass $L = \varepsilon T$), ferner $L = \chi(T)$, so wird

$$\varepsilon = \frac{1}{T} \chi(T)$$

und

$$\psi(t) = 2\mu \int_0^\infty \chi\left(\frac{2\pi}{n}\right) \sin nt \cdot dn. \tag{5}$$

V. Wenn das logarithmische Decrement von der Schwingungsdauer unabhängig ist, wie dies Streintz fand, so wird die Gleichung (5) unbestimmt. Boltzmann macht daher die den Beobachtungen jedenfalls nicht widersprechende Annahme, dass $\chi(T)$ für mässige T constant sei, für sehr kleine aber continuirlich abnehme. Man erhält dann $\psi(t) = B/t$. Diese Formel ist aber auch noch nicht direkt verwendbar, weil sowohl $\int_t^\infty \psi(t)\, dt$ als auch $\int_0^t \psi(t)\, dt$ unendlich wird. Daher substituirt Boltzmann statt der Constanten B eine Function $f(t)$, die für mässige t fast constant, für sehr grosse immer kleiner wird. Dann bleibt das erste Integral endlich; damit auch das zweite diese Eigenschaft behält, setzt er in Gleichung (A) $\mu = \int_0^\infty \frac{f(\omega)\, d\omega}{\omega}$ und zieht beide Integrale in eines

zusammen. Durch derart modificirte Gleichungen leitet er noch folgende Relationen ab:

Ia. Bedingungen wie in I. Das Drehungsmoment, welches den Draht in der constanten Torsion c zur Zeit t erhalten kann, ist (den früheren Gleichungen, welche über die Function ψ keine bestimmte Angabe wussten, ordnen sich jetzt solche zu, welche die Form der Function enthalten; zu Gleichung (1) gehört Gleichung (1a) u. s. f.):

$$D = c\left[a - b \log nat \left(\frac{t}{\rho}\right)\right] = A - B \log nat\, t. \tag{1a}$$

IIa. Bedingungen wie in No. II.

$$d = - b\gamma \log nat \frac{t + \frac{\tau}{2}}{t - \frac{\tau}{2}}, \tag{3a}$$

oder für kleine τ

$$= - \frac{b\gamma\tau}{t}.$$

IIIa. Bedingungen wie in No. III.

$$\vartheta = \frac{b\gamma}{a} \log nat \left|\frac{t + \frac{\tau}{2}}{t - \frac{\tau}{2}}\right|, \tag{4a}$$

oder für kleine τ

$$\vartheta = \frac{b\gamma\tau}{at}.$$

IVa. Ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{a}} = \sqrt{\frac{8\pi lK}{R^4 A}}$$

$$\varepsilon = \frac{bT}{8K} = \frac{\pi b}{4\sqrt{aK}} = \sqrt{\frac{\pi^3 R^4 B^2}{32 lKA}},$$

worin a der Torsionsmodul, A und B Constanten sind, welche nur vom Materiale des Drahtes abhängen, so wird

$$L = \varepsilon T = \pi^2 \frac{b}{2a} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{B}{A},$$

also das logarithmische Decrement nur abhängig vom Materiale des Drahtes.

Dies liefert endlich, wenn die Torsionsdauer τ klein ist,

$$\vartheta = \frac{2\tau\gamma L}{\pi^2 t} + c \tag{4b}$$

(wo c die dauernde Deformation misst); ist τ nicht klein, so kommt

$$\vartheta = \frac{2L\gamma}{\pi^2} \log nat \left|\frac{t + \frac{\tau}{2}}{t - \frac{\tau}{2}}\right| + c. \tag{4c}$$

12) Prüfungen von BOLTZMANN's Theorie. F. KOHLRAUSCH[1]) hat speciell die Frage, ob das Princip der Superposition gültig sei, in einer Reihe von Fällen untersucht. Nach demselben muss eine Nachwirkung, welche in irgend einem Zeitmoment existirt, sich in derselben Weise ändern (also immer abnehmen, wenn die Zeit weiter fortschreitet), wie auch im Uebrigen der Zustand des Drahtes ist. Die Nachwirkung nach einer Verschiebung von der Zeit T betrage zur Zeit t

[1]) F. KOHLRAUSCH, POGG. Ann. Bd. 160, pag. 225. 1877.

nach Aufheben dieser Verschiebung nach a_t; nach einer gleich grossen Verschiebung von der Dauer nT betrage sie A_t. Wenn n eine ganze Zahl ist, so spricht sich das Princip der Superposition daher aus in der Gleichung:

$$A_t = a_t + a_{t+T} + a_{t+2T} + \ldots a_{(n-1)T+t}.$$

Diese Beziehung fand sich für einen Glasfaden bei nicht zu langen Zeiten annähernd erfüllt; bei einem Silberdraht waren aber die aus dem Princip der Superposition berechneten Nachwirkungen grösser (bis zum ganzen Betrag der berechneten Grösse) als die beobachteten. Auch HOPKINSON[1]) schliesst für grössere Torsionsdauer aus seinen Versuchen an Glasfäden auf eine gleichsinnige Abweichung von der Theorie.

Gut bestätigen sich aber an Glasfäden die speciellen Gleichungen (1a) und (3a).

So erhielt KOHLRAUSCH (Gleichung 1a)

$$D = D_1 (1 - 0\cdot00467 \cdot log\, nat\, t).$$

Darin ist D_1 das vom Faden, 1 Minute nach erfolgter Drillung, ausgeübte Drehungsmoment; t ist in Minuten gemessen, die Zeiten t gehen bis zu 2 Tagen. — Für einen zweiten Faden kommt 0·00375.

Ferner Gleichung (3a)

$$d = d_1 \cdot 0\cdot00467 \cdot log\, nat \frac{\tau + t}{t}.$$

Aus Beobachtungen von BOLTZMANN an einem Glasfaden berechnet endlich KOHLRAUSCH (Gleichung 4a)

$$\vartheta = \gamma \cdot 0\cdot00254 \cdot log\, nat \frac{\tau + t}{t}.$$

FINGER[2]) hat die Formel (4a) für kleine τ an Stahldraht bestätigt gefunden. —

Die von BOLTZMANN's Theorie geforderte Unabhängigkeit des logarithmischen Decrements ε von der Schwingungsdauer T findet KLEMENČIČ[3]) an Glasstäben nicht bestätigt. In den meisten Beobachtungsreihen wird ε kleiner, wenn T abnimmt (z. B. $\varepsilon_1 = 0\cdot00214$, $T_1 = 7\cdot15$; $\varepsilon_2 = 0\cdot0017$, $T_2 = 2\cdot46$). Die Belastung blieb dabei ungeändert, nur das Trägheitsmoment wurde variirt. Die Luftreibung ist eliminirt. — Aenderte man aber die Länge des schwingenden Theiles vom Stab und dadurch die Schwingungsdauer, so ergab sich fast kein Einfluss auf das Decrement.

13) Versuche von F. BRAUN[4]). Die BOLTZMANN'sche Theorie betrachtet die Deformationen durch Nachwirkung gewissermeassen als einen Rest der vorher eingeleiteten und operirt bei der mathematischen Behandlung mit den Nachwirkungsverschiebungen nach denselben Gesetzen wie mit den in der gewöhlichen Elasticitätstheorie betrachteten Verschiebungen. Nach den von W. WEBER und F. KOHLRAUSCH entwickelten Ansichten kann man bezweifeln, ob dies gestattet ist. Mit der elastischen Verschiebung, welche in einer translatorischen Bewegung der Theilchen bestände, könnten Drehungen verbunden sein, welche die Nachwirkung bedingen. Wenn auch keine Möglichkeit vorhanden erscheint, experimentell darüber zur Gewissheit zu kommen, ob Nachwirkung wirklich in einer Drehung der Moleküle begründet ist, so bleibt doch die allgemeine Frage bestehen: Sind elastische Nachwirkung und elastische Verschiebung wesentlich gleiche, oder sind dieselben specifisch verschiedene Bewegungen?

---

1) HOPKINSON, Fortschr. 35, pag. 222. 1879; Proc. Roy. Soc. 28, pag. 148. — Vergl. auch MESSER, Ber. d. naturf. Ges., Freiburg i. Br., Bd. 2. 1878. Er hat Biegungsnachwirkung untersucht.

2) FINGER, Wien. Ber. 72 (2), pag. 257. 1876.

3) KLEMENČIČ, Wien. Ber. 81 (2), pag. 791. 1880.

4) F. BRAUN, POGG. Ann. 159, pag. 337. 1876; Sitzber. d. Naturf. Ges. zu Leipzig. 1876.

Eine Entscheidung darüber ist aber möglich auf Grund folgender Ueberlegung: Im Allgemeinen wird in elastischen Körpern durch eine äussere Kraft, welche in einer Richtung wirkt, auch eine Verschiebung in einer dazu senkrechten Richtung hervorgebracht. So werden Gewichte, welche einen Stab durchbiegen, im Allgemeinen gehoben oder gesenkt, wenn man den Stab durch einen horizontal laufenden Faden verbiegt. Zwei zu einander senkrechte Kräfte beeinflussen sich daher im Allgemeinen. Doch lassen sich in einem einfach gestalteten Körper immer drei zu einander senkrechte Richtungen finden, welche so beschaffen sind, dass elastische Verschiebungen und Kräfte in der einen Richtung unabhängig sind von gleichzeitig eintretenden elastischen Verschiebungen in den andern Richtungen. Elastische Nachwirkungsverschiebungen, welche in einer dieser Richtungen hervorgerufen sind, müssen dann von Verschiebungen in den andern unabhängig sein, wenn die Nachwirkung wesentlich gleich ist mit elastischer Verschiebung. Es wird sich nicht mehr so zu verhalten brauchen, wenn die Nachwirkung ein molekularer Vorgang ist, welcher nicht wesensgleich mit der elastischen Verschiebung ist, sondern eine mit derselben zwar gleichzeitig, aber doch in specifisch anderer Weise eintretende molekulare Aenderung darstellt.

Die Ebenen, deren Durchschnittslinien die obigen Richtungen sind, sollen Hauptebenen heissen. In einem cylindrischen, ursprünglich geraden Stabe müsste demnach sein 1) eine Biegung in einer Hauptebene unabhängig von einer solchen in der zweiten Hauptebene; 2) eine Biegung unabhängig von einer Torsion; 3) einer axiale Verlängerung unabhäng von einer Torsion. Die Hauptbiegungsebenen sind parallel den Hauptträgheitsradien des Querschnittes. Sie sind gleichzeitig dadurch charakterisirt, dass ein Stab in ihnen linear ausschwingt. Bis zu welchen Grenzen diese Sätze gültig sind, wurde von BRAUN an dem zur Beobachtung benutzten Materiale vorher untersucht.

Elastische Nachwirkungen verhalten sich nun, wie die Versuche zeigten, im Allgemeinen nicht wie elastische Verschiebungen. Im Allgemeinen wird eine in einer ersten Hauptrichtung bestehende Nachwirkung durch eine Deformation in einer andern Hauptrichtung verkleinert; in diesem Sinne wirkt Biegung auf Biegung, Verbiegung auf Torsionsnachwirkung, eine axiale Verschiebung auf eine Torsionsnachwirkung. Dabei ist es gleichgültig, ob die axiale Verschiebung durch eine Vermehrung oder eine Verminderung der Längsspannung hervorgebracht ist. Bemerkenswerth ist aber, dass eine axiale Nachwirkung nicht auch umgekehrt durch eine Torsion beeinflusst wird. Die Einwirkung ist also nicht immer reciprok. Um dieses letztere Resultat mit Sicherheit zu constatiren, war es nötig, die raschen Aenderungen der Länge, welche die ablaufende Nachwirkung hervorbringt, zu eliminiren. Zu dem Ende waren in einem Abstand von 4 mm zwei Kautschukfäden von 61 *cm* Länge und 1 mm^2 Querschnitt nebeneinander vertikal aufgehängt. Sie trugen unten einen leichten Querstab, an welchem sich ein Spiegel befand, die Spiegelnormale horizontal und in der Ebene der Fäden. Der eine Faden war mit seinem oberen Ende an der Axe eines Torsionskreises befestigt und konnte so tordirt werden. Am unteren Querstab hing ein leichtes Blech, das in Wasser tauchte, um Schwingungen des Systems zu beruhigen. Waren die Fäden längere Zeit gestreckt gewesen und dann frei gemacht, so dass sie sich zusammenzogen, so geschah die Zusammenziehung in beiden so gleichmässig, dass mit einer Aenderung von mehreren Millimetern keine Drehung der Spiegelnormale verbunden war, welche an einer entfernten Scala hätte wahrgenommen werden können. Eine Verschiedenheit der Längenänderung beider Fäden von 0·0004 *mm* wäre aber noch beobachtbar gewesen, d. h. bei 5 *mm* Gesammtverlängerung noch

0·008 %. Wurde einer der Fäden tordirt und wäre dadurch eine Aenderung der Nachwirkung im angegebenen Betrage hervorgerufen worden, so hätte diese der Beobachtung nicht entgehen können. Bei einer derartigen Torsion wäre aber auch das ganze System und somit der Spiegel verdreht worden; um dies zu vermeiden, lehnte der Querstab an zwei vertikale Glasstäbe an. Die Reibung an diesen hat eine geringe Störung zur Folge; immerhin war mit voller Sicherheit zu constatiren, dass Torsionen um $20 \times 360°$ die Längsnachwirkung nicht um 0·1 % ihres Betrages veränderten. —

14) Die Versuche erstreckten sich auf Stahl, Kupfer, Eisen, Messing, Neusilber, Platin, Silber, Kautschuk und Glas. Bei allen fanden sich die gleichen Resultate; nur bei Glas war nicht mit Sicherheit eine gegenseitige Beeinflussung nachweisbar. Braun ist der Ansicht, dass dies mit der sogen. Sprödigkeit des Materials zusammenhängt.

Dass eine Nachwirkung durch eine unabhängige Deformation verkleinert wird, gilt aber nur, wenn beide nach einander eingeleitet werden. Sind sie gleichzeitig vorhanden, so begünstigen sie sich im Gegentheil. Wenigstens wirken so Verbiegungen auf einander, sowie eine Längsspannung auf eine gleichzeitig angestrebte Torsionsnachwirkung. Zwei von einander unabhängig wirkende äussere Kräfte bringen also gleichzeitig wirkend einen andern Endzustand hervor (wenigstens in gleicher Zeit), als wenn sie nach einander wirken und jede ohne die Gegenwart der andern, den ihrer Wirksamkeit entsprechenden Endzustand herbeiführt.

Die Versuche beweisen also, dass elastische Nachwirkung und elastische Verschiebung ihrem Wesen nach verschiedene Vorgänge sind. Sie zeigen, dass weder eine räumliche noch eine zeitliche Superposition allgemein auf sie anwendbar ist, stehen aber nicht im Widerspruch mit den speciellen von Boltzmann behandelten Problemen. Braun hebt die Analogie mit chemischen Erscheinungen hervor und deutet schliesslich eine auf die Drehung der Moleküle beruhende Erklärung an.

15) Gegen die Versuche von Braun hat G. Wiedemann in dem Bericht über eine sehr ausführliche Untersuchung über die Torsion[1]) mehrere Bedenken erhoben. Diese Untersuchung von Wiedemann bezieht sich auf permanente Gestaltsänderungen und fällt daher ausserhalb des unserem Artikel gezogenen Rahmens. Sie enthält ausserdem eine solche Fülle von Beobachtungen und Einzelresultaten auf engem Raum zusammen, dass ein Auszug kaum möglich erscheint. Diese können daher hier nur soweit erwähnt werden, als sie zu unserem speciellen Gegenstand in Beziehung stehen. G. Wiedemann erinnert an seine bekannten Versuche, wonach die Magnetisirung, desgleichen eine permanente Torsion zunimmt, wenn man während der Zeit, in welcher die magnetisirende oder tordirende Kraft einwirkt, den Körper erschüttert, dass sie dagegen abnimmt, wenn die Erschütterungen stattfinden zu einer Zeit, wo die Kraft nicht mehr wirkt. Er nimmt an, dass dabei die Moleküle beweglicher werden, indem die Reibung der Ruhe gewissermaassen in die kleinere Reibung der Bewegung verwandelt werde. a) Hiergegen ist zu bemerken, dass diese Analogie doch sehr äusserlich ist. Wenn die Reibung der Ruhe, z. B. von Eisenpulver, welches unter der Wirkung eines Magnetes sich anordnen soll, durch Erschütterungen scheinbar verkleinert wird, so rührt dies daher, dass das Eisenpulver beim Klopfen einen Moment von der Unterlage entfernt ist und nun, in der Luft schwebend, sich einstellt. Einen solchen Fall kann man wohl nicht

[1]) G. Wiedemann, Wied. Ann. 6, pag. 485, spec. 496, 507, 509. 1879.

auf die Einstellung der Moleküle starrer Körper übertragen. b) Eine »Erschütterung« und eine wohl definirte Deformation lassen sicht nicht direct mit einander vergleichen. In der That, wäre die Sache so, wie G. WIEDEMANN es auffasst, so sähe man nicht ein, warum nicht auch Glas sich verhält wie die anderen Körper und vor Allem, warum nicht auch eine Längsnachwirkung durch Torsion geändert wird. Es scheint vielmehr der umgekehrte Weg der rationellere, nämlich den Einfluss der unbestimmten »Erschütterungen« zu erklären aus demjenigen, den gut definirte Deformationen ausüben. Endlich handelt es sich bei der Frage eben um Nachwirkungen, nicht um permanente Aenderungen. — Bei alledem ist die Aehnlichkeit, welche Magnetisirung, permanente und Nachwirkungsdeformation zeigen, unverkennbar, und der continuirliche Uebergang der letzteren in einander so natürlich, dass auch der Ref. nicht an der Gleichheit eines inneren Grundes zweifelt. Nur wird man, so lange nicht die Beobachtung dies bestätigt hat, nicht aus dem Verhalten permanenter Deformationen unmittelbar auf ein gleiches Verhalten für Nachwirkung und umgekehrt schliessen können. Ueber die Aenderung einer permanenten Deformation durch eine andere, in von der ersten unabhängigen Richtung war übrigens zur Zeit als die besprochenen Versuche angestellt wurden, so gut wie nichts publicirt.

16) Theorie von WARBURG. Die Resultate der BRAUN'schen Versuche veranlassten WARBURG, eine andere mechanische Erklärung der Nachwirkung durchzuführen[1]). Er geht aus von der Ueberlegung, dass, wenn eine Drehung der Theilchen um ihre Schwerpunkte die Ursache der elastischen Nachwirkung sein soll, dies des weiteren erfordert, dass man die Theilchen nicht als kugelförmig ansehen darf. Die elastische Nachwirkung wäre also ein Phänomen, welches durch die Abweichung der Moleküle von der Kugelgestalt bedingt ist. WARBURG stellt sich deshalb die Aufgabe, für ein System beliebig gestalteter, gleicher Moleküle, deren Schwerpunkte im natürlichen Zustande gleichförmig angeordnet sind, die Gleichgewichtsbedingungen nach einer unendlich kleinen Verschiebung der Schwerpunkte zu untersuchen; d. h. es sollen diejenigen Orientirungen[2]) der Moleküle gesucht werden, wclehe einer stabilen Gleichgewichtslage entsprechen; ferner sollen die Spannungen berechnet werden für diese Anordnung und verglichen mit derjenigen, die sich ergeben, wenn an jeder Stelle keine Richtung des Raumes bezüglich der Einstellung der Moleküle bevorzugt ist.

WARBURG nimmt dabei an, dass die linearen Dimensionen der Moleküle unendlich klein sind gegen den Abstand ihrer Schwerpunkte. Das Potential der Masseneinheiten auf einander im Abstand r soll $f(r)$ sein und so beschaffen, dass $rf'(r)$, $r^2f''(r)$ etc. nicht sehr gross gegen $f(r)$ sind. Um den Zustand natürlichen Gleichgewichts zu erhalten, muss zu diesen noch ein zweites $\varphi(r)$ hinzugefügt werden, welches man früher als das der Abstossungskräfte der Moleküle bezeichnete und welches nach den modernen Anschauungen den Einfluss der Wärmebewegung repräsentirt. Da die Stösse der Wärmebewegung wegen ihrer Unregelmässigkeiten keine bestimmte Richtung der Moleküle anstreben, so wird die Orientirung der Moleküle nur von $f(r)$ abhängen; dagegen bestimmt dieses nicht den von der Richtung der Moleküle unabhängigen Theil der Spannung, welcher der elastischen Verschiebung entspricht.

---

[1]) WARBURG, Im Auszug WIED. Ann. 4, pag. 233—249. Ausführlich in Ber. d. naturf. Ges. zu Freiburg i. Br. VII. Heft 2.

[2]) Mit »Orientirung« soll stets die nur von den Winkeln abhängige Einstellung eines mit dem Moleküle festverbundenen Axensystems gegen ein im Raume feststehendes bezeichnet werden.

Wir können von den Resultaten nur einige hier anführen: 1) Die Hauptträgheitsaxen der Moleküle haben in den Gleichgewichtslagen die Richtungen der Hauptaxen des Elasticitätsellipsoids. Im natürlichen Zustande sowohl als in dem einer gleichförmigen Compression haben die Moleküle daher keine bestimmte Orientirung. Bei der Torsion ist eine Trägheitsaxe gerichtet nach dem Radius des Querschnittes, die beiden anderen bilden einen Winkel von $\pm 45^\circ$ mit der Axe. 2) Wenn ein elastischer Körper unter dem Einfluss von Kräften, welche auf seine Oberfläche wirken, eine gegebene Formänderung erleidet, so ist die von den Kräften geleistete Arbeit ein Minimum, wenn während der Formänderung die Moleküle die der stabilen Gleichgewichtslage entsprechende Orientirung besitzen. 3) Ein Draht vom Radius R werde tordirt und die Moleküle sollen dabei die stabile Orientirung, wie er der Torsion entspricht, annehmen. Welche Druckkräfte muss man den schon vorhandenen hinzufügen, um den Draht im Gleichgewicht zu erhalten? Auf der Mantelfläche ist nöthig ein Druck in der Richtung der Innennormale:

$$P_1 - P^0 = \frac{2nf^2}{3}[(\lambda^2 - \mu^2) - (\varkappa^2 - \lambda^2)],$$

auf der Endfläche der Druck

$$P_2 - P^0 = -\frac{2nf^2}{3}[(\lambda^2 - \mu^2) - (\varkappa^2 - \lambda^2)],$$

und das Drehungsmoment

$$\Delta' = -\frac{2nf^2}{3}(\varkappa^2 - \mu^2)\pi R^2).$$

Darin ist f die früher besprochene Function, k, λ, μ die Hauptträgheitsradien eines Moleküles; n die Zahl der Moleküle in der Raumeinheit. Daraus folgt: Das Drehungsmoment, welches den Stab Anfangs tordirte, lässt immer nach, sobald die Moleküle sich einstellen. — Das Vorzeichen von $P_1 - P^0$ und $P_2 - P^0$ hängt aber ab von der Gestalt der Moleküle. Wäre z. B. $\lambda^2 > \mu^2$ und $k^2 = \lambda^2$ (wie bei abgeplatteten Rotationsellipsoiden), so wäre $P_1 - P^0$ positiv; wären sie wie verlängerte Rotationsellipsoide ($\lambda^2 = \mu^2$; $k^2 > \lambda^2$), so wäre $P_1 - P^0$ negativ. 4) Auch für die Dehnung ergeben sich ähnliche Resultate. Soll die Deformation bestehen bleiben, während die Moleküle sich einstellen, so muss die Zugkraft, welche auf die Endflächen wirkt, nachlassen, auf der Mantelfläche aber eine Kraft angebracht werden, welche den Stab hindert, sich weiter in die Quere zu contrahiren. Beachtenswerth ist, dass bei Compression und Dilatation der Betrag, um welchen die Kräfte sich ändern, nicht gleich zu sein braucht.

Aus den Warburg'schen Resultaten (Satz 1) folgt z. B., dass ein Draht, der im Zustande von Torsionsnachwirkung sich befindet, diese ändern, nämlich verkleinern muss, sobald man den Draht spannt. Denn die Moleküle streben dann derjenigen Lage zu, wo ihre Axen der Drahtaxe parallel stehen und wo sie kein Torsionsmoment bewirken. — Am Schlusse giebt Warburg noch eine besondere Anschauung, wie er sich elastische Nachwirkung vorstellt. Sie beruht auf der Annahme, dass das Wärmegleichgewicht für eine bestimmte Temperatur eine bestimmte mittlere lebendige Kraft der Bewegungen (Rotationen oder Schwingungen) um den Schwerpunkt erfordert. Wird nun durch eine elastische Deformation die Anordnung der Schwerpunkte geändert, so treten für die einzelnen Molecüle Drehungsmomente auf, dadurch wird die lebendige Kraft der Drehungsbewegung vergrössert und somit das Wärmegleichgewicht gestört. Um es wieder herzustellen, ist eine Verkleinerung der Verdrehungen erforderlich, d. h. die Moleküle nähern sich ihrer Gleichgewichtsorientirung.

17) MICHAELIS[1]) hat die WARBURG'sche Theorie weiter fortgeführt und zunächst gezeigt, dass sich aus der Theorie die folgenden Resultate der BRAUNschen Beobachtungen ergeben: a) dass eine Torsionsnachwirkung durch eine elastische Verschiebung nach der Cylinderaxe verkleinert wird, mag letztere von Zu- oder Abnahme der Spannung herrühren; b) dass eine Torsionsnachwirkung durch eine Biegung; c) dass eine Biegung durch eine spätere unabhängige Biegung verkleinert wird; dass aber eine Biegung in einer Hauptebene keine Nachwirkung in der unteren hervorruft. Nur dass eine gleichzeitige Spannung die Torsion vergrössert, steht im Widerspruch zur Theorie. Hier nimmt MICHAELIS die Erschütterungswirkungen WIEDEMANN's zu Hilfe. — Im weiteren Verlaufe seiner Betrachtungen nimmt MICHAELIS auch Kräfte an, welche die Moleküle in die ursprünglichen Richtungen zurückzutreiben suchen; die Formeln ergeben dann auch die permanenten Gestaltsänderungen.

18) Eine Theorie von NEESEN[2]) führt die elastische Nachwirkung und deren zeitlichen Ausgleich auf die Molekularstösse zurück. Diese würden bei einer veränderten Anordnung der Moleküle je eines derselben immer in anderen Phasen seiner Bewegung treffen und diese Unregelmässigkeiten in der Vertheilung der Stösse sich erst mit der Zeit ausgleichen. Nach NEESEN würde z. B. die zur Aufrechterhaltung einer Torsion nothwendige Torsionskraft aus drei Theilen bestehen: 1) aus der schliesslich nach Verlauf einer sehr langen Zeit nöthigen Kraft; 2) aus der Kraft, welche während der Zeit des veränderlichen Zustandes nötig ist zur Ueberwindung des Einflusses der unregelmässig auf einander folgenden Molekularstösse; 3) aus einem negativen Theil, welcher den zweiten mit der Zeit immer mehr vermindert und schliesslich ganz aufhebt. Eine mathematische Formulirung sucht diese Differenz zwischen den Kräften 2 und 3, (d. h. die zeitliche Abnahme der Kraft 2) zu ermitteln und ergiebt, dass ihr Funktionen von der Form $e^{a t^m}$ oder $a/(a + b t^m)$ etc. entsprechen. — Die Gestalt der Moleküle spielt bei NEESEN keine Rolle.

19) Endlich hat MAXWELL[3]) eine Anschauung über die Natur der elastischen Nachwirkung gegeben. Er bemerkt, dass BOLTZMANN's Thorie eine mathematische Formulirung, aber keine physikalische Erklärung sei, und dass man, statt die verflossene Zeit einzuführen, auch alles auf die gegenwärtige beziehen könne, wenn man die Grösse $\vartheta_{t-\omega}$ in eine TAYLOR'sche Reihe entwickelt

$$\vartheta_{t-\omega} = \vartheta_t - \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \cdot \cdot$$

und schreibt

$$A = \int_0^\infty \psi(\omega)\, d\omega; \qquad B = \int_0^\infty \omega\, \psi(\omega)\, d\omega \text{ etc.,}$$

so wird die elastische Kraft zur Zeit t, welche BOLTZMANN setzte:

$$N_t = k\vartheta_t - \int_0^\infty \varphi(\omega)\, \vartheta_{t-\omega}\, d\omega$$

übergehen in

$$N_t = (k - A)\,\vartheta + B \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + C \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2},$$

wo sich Alles auf die gegenwärtige Zeit bezieht.

Die Grundlage von MAXWELLS Anschauung besteht darin, dass in jedem Körper Gruppen von Molekülen vorausgesetzt werden, welche, namentlich unter

---

1) MICHAELIS, WIED. Ann. 17, pag. 726. 1882 (vergl. auch Literaturverzeichniss).

2) NEESEN, POGG. Ann. 157, pag. 579. 1876.

3) MAXWELL, Encyclop. Brit. 9. Ausg., Bd. VI, pag. 313—15. 1877. Art. Constitution of bodies.

Einfluss einer elastischen Verschiebung aufbrechen, während andere so fest sind, dass sie dann bestehen bleiben. Sind gar keine der letzteren Art in einem Körper, so ist das Medium eine zähe Flüssigkeit. Sind die festen so zahlreich, dass sie ein festes Fachwerk bilden, so ist der Körper fest, kann aber durch eine Kraft, welche eine gewisse Grenze überschreitet, dauernd deformirt werden. Enthält er beide Arten von Gruppen, so wird unter dem Einfluss einer Verschiebung der Widerstand gegen dieselbe so lange abnehmen, bis alle Gruppen der ersten Art aufgebrochen sind, und dies dauert so lange, bis die elastische Kraft reducirt ist auf die der permanenten Gruppen. — Diese Anschauung erinnert, wie BARUS[1]) hervorhebt, an die CLAUSIUS'sche Auffassung der Electrolyte. — BUTCHER[2]) hat die MAXWELL'sche Hypothese mathematisch eingekleidet.

III. Weitere Thatsachen.

20) Accommodation. G. WIEDEMANN[3]) hat zuerst gezeigt, dass ein elastischer Körper, den man öfters durch gleiche Kräfte deformirt, im Anfang wechselnde Erscheinungen zeigt, aber schliesslich in einen constanten Zustand gelangt, d. h. dass dann der gleichen Kraft auch stets die gleiche Gestalt sich zuordnet. In diesem Zustande sind dann auch die Torsionen unabhängig von der Belastung[4]). WIEDEMANN hat diese Erscheinungen aus Drehungen der Moleküle erklärt, und insbesondere dies aus den Aenderungen des magnetischen Verhaltens von derart deformirten Stäben geschlossen. Im Anfang setzen die Moleküle den Drehungen einen grösseren Widerstand entgegen; derselbe nimmt aber bei wiederholten gleichsinnigen Deformationen bis zu einem constanten Werthe ab.

Aehnliche Erscheinungen hat später STREINTZ[5]) beobachtet und mit dem Namen der »Accomodation« bezeichnet. Er fand z. B., dass das logarithmische Decrement eines Torsionsschwingungen ausführenden Drahtes bei längerem Schwingen abnahm. Nach längerem Ruhen, namentlich wenn er inzwischen einmal in krummer Lage gewesen war, wuchs es wieder. Er wiess auf bekannte Erfahrungen des täglichen Lebens hin (Stahlfedern werden während des Gebrauches weicher) und erklärte aus ihr die Angaben, wonach Blasinstrumente und Violinen durch öfteren richtigen Gebrauch an Tonfülle gewinnen sollen.

Gegenüber den Beobachtungen von STREINTZ und deren Erklärung weist P. M. SCHMIDT[6]) nach, dass nicht die vorausgegangenen Schwingungen die Ursache der Accomodation sind, als vielmehr die längere Zeit wirkende Spannung. Das logarithmische Decrement nimmt auch dann ab, wenn die Belastung längere Zeit am Drahte hängt, ohne dass er Schwingungen ausführt; z. B. fand SCHMIDT für einen Magnesiumdraht nach dem Aufhängen das Decrement $\varepsilon = 0{\cdot}01031$; nachdem er 10 Tage gehangen hatte, ohne dass er Schwingungen ausführte, war $\varepsilon = 0{\cdot}00664$. Spannt man den Draht einige Zeit ab, so ist das Decrement nach der Ruhepause wieder gestiegen, um nach längerer Belastung wieder zu fallen.

Spätere Versuche haben STREINTZ[7]) überzeugt, dass in der That schon blosse

---

1) BARUS, Physikalische Verification von MAXWELLS Theorie der Viscosität fester Körper. Phil. Mag. (5) 26, pag. 183. 1888.

2) BUTCHER, Proc. Lond. Math. Soc. VIII. 1878; Beibl. 2, pag. 625—632. 1878.

3) G. WIEDEMANN, POGG. Ann. 103, pag. 563. 1858; 106, pag. 161. 1859; u. 107, pag. 139. 1860; Berl. Monber. 1860; POGG. Ann. 117, pag. 193. 1862.

4) G. WIEDEMANN, WIED. Ann. 6, pag. 502. 1879.

5) STREINTZ, POGG. Ann. 153, pag. 387. 1874; Wien. Ber. 79. 1874.

6) SCHMIDT, WIED. Ann. 2, pag. 48, 241. 1877.

7) STREINTZ, Wien. Ber. 80, pag. 397; Carl. Rep. 16, pag. 476. 1880.

Belastung ausreicht, um das logarithmische Decrement abnehmen zu lassen, dass aber auch die früher von ihm allein angenommene Accomodation an die Schwingungsbewegung vorhanden ist. — Er fand ferner, dass die bereits eingetretene Accommodation durch jede Störung der molekularen Anordnung wieder aufgehoben wird (Verbiegung, Erschütterung, Erwärmung).

STREINTZ fand ferner, dass wiederholte Torsionen um grosse Winkel die zurückbleibenden Deformationen vergrössern, wiederholte Torsionen um kleine Winkel dagegen dieselbe verkleinern. W. BRAUN und A. KURZ[1]) bestätigten dies Resultat. Sie folgern daraus, dass Decremente, welche man bei einer mit grosser Amplitude beginnenden Beobachtungsreihe erhält, einen gestörten Verlauf zeigen und daher die Frage, wie das Decrement von der Amplitude abhängt (vergl. § 23) schwer definitiv zu erledigen ist. —

Auch bei wiederholten Temperaturänderungen zeigt die Nachwirkung, wie Th. SCHRÖDER fand[2]), eine Accommodation, d. h. die Nachwirkung ist bei einem Drahte (*Ag*), nachdem er einige Mal auf 100° erwärmt war, viel kleiner.

Auch die Schwingungsdauer nimmt mit wachsender Zeit für die Dauer der Belastung ab, ob nun der Draht in der Zwischenzeit Schwingungen ausführte, oder nur belastet blieb[3]). Dies wurde aber nur beobachtet, wenn die Belastung vergrössert worden war. An einem Kupferdrath dagegen hatte WARBURG[4]) früher gefunden, dass die Schwingungsdauer mit wachsender Zeit abnahm, gleichgültig, ob die Schwingungsänderung in einer Zu- oder Abnahme der Spannung bestanden hatte.

Ueber den Einfluss der Zeit, welche der Draht schon schwingt, auf den Torsionsmodul vergl. PISATI, l. c., § 23. Die Schwingungsdauer nimmt nach längerem Schwingen ab, beim Silber z. B. im Verhältniss von 1·0038 : 1·0000 (l. c., pag. 19).

21) Statisch und dynamisch bestimmte Elasticitätsmoduln. Der Unterschied, welchen man nach beiden Methoden gewöhnlich erhält, ist bekannt. Er kann, namentlich bei Bestimmungen von Längsverschiebungen, wohl von Nachwirkung herrühren, da er statisch in der Regel grösser ausfällt[5]). Durch eine sehr elegante und genaue Methode hat WARBURG die Torsionscoëfficienten auf statischem und dynamischem Wege an demselben Draht bestimmt[6]). Sie beruht auf der Vergleichung des Torsionsmomentes mit dem Drehungsmoment, einer bifilaren Aufhängung. Auch hier fanden sich die Torsionsmomente statisch bestimmt sämmtlich kleiner als dynamisch gemessen (Stahl 0·1 ℘, Eisen 0·6 ℘, Kupfer 2·8 ℘). Nach WARBURG erklärt sich dies aber am einfachsten durch die Annahme, dass die elastischen Pressungen etwas langsamer wachsen als die Deformationen. —

SCHRÖDER[7]) fand für Silber

$$\frac{\text{Drehungsmoment statisch}}{\text{Drehungsmoment dynamisch}} = 0{\cdot}987 \text{ bei } 15{\cdot}1^\circ,$$

$$\text{„} \qquad \text{„} \qquad = 0{\cdot}918 \text{ „ } 99{\cdot}7^\circ.$$

22) Drähte, welchen man eine permanente Torsion ertheilt hat, verlieren durch Belastung einen Theil derselben. Wiederholte Belastung und Entlastung

1) W. BRAUN u. A. KURZ, Carl. Rep. 17, pag. 253. 1881.

2) SCHRÖDER, WIED. Ann. 28, pag. 369. 1886.

3) BAUMEISTER, WIED. Ann. 18, pag. 578. 1883.

4) WARBURG, WIED. Ann. 10, l. c.

5) Vergl. über die Literatur WARBURG, WIED. Ann. 10, pag. 20. 1880.

6) l. c., pag. 13 ff.

7) SCHRÖDER, WIED. Ann. 28.

wirken in gleichem Sinne mit abnehmender Intensität, bis der Draht in einen constanten Zustand gelangt ist. Dann tritt eine dauernde Aenderung der permanenten Torsion nicht mehr bei Spannungsänderung ein.[1]).

Belastet man den Draht in diesem Zustande, so tordirt er sich, wie WARBURG fand, und kehrt nach Fortnahme der Belastung in seine alte Lage zurück. Der Sinn dieser temporären Torsion ist der gleiche wie der Sinn der permanenten Torsion, welche dem Drahte ertheilt war.[2]) Diese Erscheinung, welche namentlich gut an Kupferdrähten zu beobachten war (bei Messing bemerkte sie WIEDEMANN nicht), erklärt WARBURG[3]) daraus, dass der Draht anisotrop (äolotrop) geworden ist. Bei der Torsion findet in Richtungen, die senkrecht zum Radius des Querschnittes stehen und $\pm 45°$ gegen die Axe des Drahtes geneigt sind, resp. Compression und Dilatation statt. Der Draht verhält sich, wenn seine Substanz diesen Kräften nachgegeben hat, wie ein Krystall des rhombischen Systems. Wenn der Grad der Anisotropie auch nicht gleichmässig im Drahte vertheilt ist, da die Verschiebungen nach aussen zu grösser sind, so folgt doch hieraus die beobachtete Erscheinung; und zwar wäre der Elasticitätsmodul in derjenigen Richtung, in welcher permanente Dehnung stattgefunden hat, kleiner, als für diejenige, nach welcher die Substanz comprimirt ist.[4]) —

SCHRÖDER[5]) schliesst aus der Aenderung der Ruhelage eines tordirten Silberdrahtes bei Temperaturerhöhung, dass auch der thermische Ausdehnungscoëfficient in der Richtung der permanenten Dehnung grösser als in derjenigen der permanenten Compression sei.

23) Dämpfung. Abhängigkeit von der Amplitude. Einfluss der Temperaturänderung. Nach GAUSS nnd WEBER soll das logarithmische Decrement constant sein, unabhängig von der Amplitude, d. h. die Dämpfung in jedem Moment proportional der Geschwindigkeit. W. THOMSON[6]) machte auf eine Abhängigkeit des Decrements von der Amplitude aufmerksam, später fast gleichzeitig STREINTZ[7]) für Torsionschwingungen und der Referent[8]) für Transversalschwingungen von Stäben. In den letzteren Beobachtungen ist aber noch der Einfluss der Luftreibung enthalten und es lässt sich daher aus ihnen nach der Ansicht des Referenten nicht direct, wie es vielfach geschehen ist, ein Einfluss der Amplitude auf die innere Reibung folgern. Auch Schwingungen von Saiten scheinen mir aus demselben Grunde nicht vergleichbar. Es sei daran erinnert, dass WARBURG[9]) bei Torsionsschwingungen (für den inneren Widerstand) grösseres Decrement bei grösserer Schwingungsdauer beobachtete; die stärkere Dämpfung, welche er z. B. in Blei und Kautschuk für die Fortleitung gerade der höheren Töne fand, sieht er daher in der Bildung kleinerer schwingender Unterabtheilungen begründet.

---

[1]) WIEDEMANN, WIED. Ann. 6, l. c.

[2]) WARBURG, WIED. Ann. 10, pag. 28.

[3]) Auch W. THMOSON, Art. Elasticity. Encyclop. Brit. 1878.

[4]) Vergl. weitere Beobachtungen von HIMSTEDT, WIED. Ann. 17, pag. 701. 1882. Er findet die Erscheinung allgemein; man hat aber zwei Gruppen von Körpern zu unterscheiden; bei den einen giebt Belastung Torsion, bei den anderen Detorsion. Zur letzten Gruppen gehören Messing, Aluminium, Nickel.

[5]) SCHRÖDER, WIED. Ann. 28.

[6]) W. THOMSON, Phil. Mag. 30.

[7]) STREINTZ, POGG. Ann. 153, l. c.

[8]) BRAUN, POGG. Ann. 151, pag. 260. 1874.

[9]) WARBURG, POGG. Ann. 139, pag. 89. 1870.

P. M. SCHMIDT[1]) fand für langsame Torsionsschwingungen eine Zunahme des logarithmischen Decrements mit zunehmender Amplidude; gleichzeitig erhielt er aber auch für die gleichen Amplituden ein grösseres Decrement ε, wenn der Draht mit grösseren Anfangsamplituden seine Bewegung begonnen hatte. Es ergab sich z. B. für dieselbe Amplitude von 14260″ ein Werth $\varepsilon = 0{\cdot}01862$, wenn die Anfangsamplitude 17669″, so dagegen $\varepsilon = 0{\cdot}02060$, wenn die erste Amplitude = 45466″ gemacht war.

In höherer Temperatur wird die Dämpfung grösser (STREINTZ). Dabei fand aber SCHMIDT auch wieder, dass eine Temperaturänderung ähnlich wie eine Belastungsänderung wirkt; d. h. wenn die Temperatur des Drahtes schon einen constanten etwa 20° höheren oder niederen Werth als vorher hat, so ändert sich das Decrement doch noch längere Zeit[2]).

G. WIEDEMANN[3]) fand für einen Silberdraht bei 100° einen sehr starken Einfluss der Belastung auf die Dämpfung. Wird aber nach einer stärkeren Belastung eine schwächere angewendet, so sinkt das Deceremant sofort auf den dieser letzteren entsprechenden früheren Werth. Lässt man die Drähte aber auch bei stärkerer Belastung sehr lange Zeit fortschwingen, so nähert sich das Decrement immer mehr dem, welches sie bei der niederen Belastung besitzen. Bei diesen Versuchen änderte sich mit der Belastung auch das Trägheitsmoment.

Bei geglühtem Eisendraht fand dagegen MESSER[4]), dass bei gleicher Belastung das Verhältniss des logarithmischen Decrements bei 20 und 100° mit abnehmender Schwingungsdauer wächst. —

Dagegen beobachtete wieder für Eisen KLEMENČIČ[5]) weder einen Einfluss der Magnetisirung noch einen merklichen der Temperatur auf das Decrement.

Aus den ausgedehnten Versuchen PISATI's, der Silber[6]), Stahl, Eisen, Kupfer, Messing, Gold, Platin, Aluminium bis zu Temperaturen von 300° prüfte, würde folgen, dass, sobald der Draht in einen stationären Zustand gelangt ist, das logarithmische Decrement immer, meistens sehr erheblich mit steigender Temperatur zunimmt (für Silber ist es bei 300° ca. 150 mal grösser als bei 30°).

24) Eine dreifache Wanderung der Ruhelage unterscheidet TAMMEN (für Torsion)[7]), nämlich 1) eine oft Jahre lang anhaltende I. Art; sie entsteht durch die Aenderung der Belastung; 2) eine oscillatorische Bewegung der wirklichen Gleichgewichtslage um die experimentell bestimmte Ruhelage; ihre Periode ist gleich der Dauer der Torsionsschwingungen des Drahtes; sie rührt daher, dass die mittleren Querschnitte eines tordirten und an beiden Enden festgehaltenen Drahtes sich noch lange nach der neuen Ruhelage hinbewegen (O. E. MEYER, NEESEN). 3) Eine vorher nicht beobachtete Wanderung III. Art, welche darin besteht, dass die Ruhelage, während die Amplituden in einer Beobachtungsreihe

---

1) SCHMIDT, WIED. Ann. 2, pag. 241. 1877.

2) Ueber die Abhängigkeit des Decrementes von Länge, Querschnitt und Temperatur des Drahtes vergl. die ausführliche Abh. Vergl. ferner zu den Controversen zwischen SCHMIDT und STREINTZ die Arbeiten von W. BRAUN und A. KURZ (Literaturübersicht).

3) G. WIEDEMANN, WIED. Ann. 6, pag. 517—519.

4) MESSER, Wien. Ber. 78, pag. 935. Fortschr. 35, pag. 225. 1879.

5) KLEMENČIČ, Ber. d. nat. Ges. zu Freiburg i. Br. 1877.

6) PISATI, Gaz. chimica Ital. Thl. VI. 1876; Thl. VII. 1877, 109 Seiten. Eine übersichtliche Darstellung und Berechnung der Versuche siehe STREINTZ, Carl. Rep. 16, pag. 502.

7) TAMMEN, Carl. Rep. 18, pag. 348—381. 1881; Beibl. 6, pag. 564. 1882. Vergl. TAMMEN, l. c. 20, pag. 413—417. 1884; Beibl. 8, pag. 850. 1884. W. BRAUN u. A. KURZ, Carl. Rep. 15, 1879; 17, 1881; 18, pag. 665. 1882; Beibl. 5, pag. 393—399. 1881; 8, pag. 177. 1884.

abnehmen, in entgegengesetztem Sinn zu demjenigen wandert, in welchem sie sich in Folge andauernder oder vermehrter Belastung bewegt. Die Wanderung III. Art ist um so grösser, je länger der Apparat schon benutzt ist. Sie wurde an einem Stahldraht deutlich erkannt. Diesen drei Wanderungen sollen sich drei logarithmische Decremente zuordnen.

25) Einfluss der Temperatur auf die Nachwirkung. Bei höherer Temperatur ändert sich die Nachwirkung in der früher ausführlich nach den Versuchen von F. Kohlrausch erörterten Weise. Weitere Beobachtungen über den Einfluss, welche eine rasche Temperaturänderung hat, sind von Th. Schröder gemacht[1]). a) Wird ein Draht bei 100° tordirt, losgelassen, die Nachwirkung beobachtet und schnell abgekühlt, so wird die Drehung plötzlich nach der Ruhelage hin beschleunigt, aber nur auf kurze Zeit. Die Bewegung hörte dann auf, bis die Temperatur von neuem erhöht wurde. War diese Erwärmung eingetreten, so drehte sich der Spiegel wieder etwas von der Ruhelage fort, dann aber wieder derselben zu. b) Wird umgekehrt bei niederer Temperatur die Nachwirkung eingeleitet und dann die Temperatur erhöht, so läuft die Nachwirkung rasch ab.

A. Miller[2]) hat den Einfluss der Temperaturerhöhung (20—100°) auf die elastische Dehnung und deren Nachwirkung bei Eisen untersucht. Der Modul der gesammten Dehnung sowohl, als derjenige der elastischen Dehnung nimmt mit steigender Temperatur ab; letzterer der Temperaturdifferenz proportional; doch gilt dieses Gesetz erst, wenn der Draht durch wiederholtes Erwärmen und Abkühlen in den sogen. Normalzustand gekommen ist. Vorher besitzt der Modul der elastischen Dehnung zwischen 10 und 20° ein Maximum. — Es ist

$$\frac{E_{100} - E_0}{E_0} = -0{\cdot}0495; \quad \frac{E_{100}' - E_0'}{E_0'} = -0{\cdot}0428, \quad \frac{E_{100}'' - E_0''}{E_0''} = -0{\cdot}1897.$$

Darin bedeuten E die Moduln der gesammten Dehnung bei resp. 100° und 0°; E' die Moduln der elastischen Dehnung, E'' diejenigen der elastischen Nachwirkung.

Dass die elastische Nachwirkung, welche der gleichen Deformation entspricht, im Allgemeinen grösser ausfällt, wenn die Deformation bei höherer Temperatur stattfindet, ist schon § 7 besprochen. Ueber das entgegengesetzte Verhalten zum Kautschuk vgl. daselbst. Auch Glas verhält sich nach den Beobachtungen von Weidmann[3]) wie Kautschuk.

26) Thermische und elastische Nachwirkung. Weidmann[3]) hat die bekannten Nullpunktsänderungen der Thermometer, welche nach dem Erhitzen auftreten, verglichen mit der elastischen Nachwirkung, welche Stäbe der gleichen Glassorte nach einer Deformation zeigen (insbesondere wurden Biegungen benutzt). Vergrössert man das Volum der Glashülle, indem man von innen Ueberdruck wirken lässt, so erhält man im Allgemeinen auch eine elastische Nachwirkung; bringt man die gleiche Volumänderung durch Erwärmen hervor, so entsteht eine thermische Nachwirkung. Beide sind aber nicht direct mit einander zu vergleichen.

Nach Pernet ist die letztere nämlich proportional dem Quadrate der Temperaturerhöhung, die elastische Nachwirkung dagegen der ersten Potenz der Deformation. In der That sind beide Gestaltsänderungen auch nicht von gleichen

---

1) Schröder, Wied. Ann. 28, pag. 369—393. 1886.

2) Miller, Sitzb. d. bayr. Ak. 1882. pag. 377—463; Beibl. 7, pag. 223. 1883.

3) Weidmann, Wied. Ann. 29, pag. 214. 1886; vergl. daselbst auch die Literatur über thermische Nachwirkung.

Verschiebungen begleitet; dazu müsste man den Druck von allen Seiten auf das Glas wirken lassen. Bezeichnet man aber Gläser, welche entweder keine elastische Nachwirkung (bei Biegung, Torsion oder Volumveränderung durch einseitigen Druck) oder nur eine rasch verlaufende besitzen, als elastisch gut, so lässt sich doch sagen, dass elastisch gute Gläser im Allgemeinen auch thermisch gut sind. »Glas von grosser resp. geringer thermischer Nachwirkung zeigt auch grosse resp. geringe elastische Nachwirkung und umgekehrt.« Die Zusammensetzung der Gläser steht damit in dem Zusammenhang, dass solche Gläser, welche nur ein Alkalimetall (Natron oder Kali) enthalten, besser sind, als solche mit zweien; ein grosser gleichzeitiger Gehalt an beiden ist schädlich; *cet. par.* sind solche, welche zwar beide Alkalien, aber in geringem Procentsatz, enthalten, besser als die an beiden reichen Gläser.

Weitere Literatur.

HODGKINSON, Fortschr. 9, pag. 120. Nachwirkung bei Steinplatten 1855.

BOILEAU, Compt. rend. 42, pag. 933. Fortschr. 12, pag. 179. 1856, Kautschuk betr.

DIETZEL, Pol. Centralbl. 1857, pag. 689; Fortschr. 13, pag. 143, Kautschuk betr.

REUSCH, Ueber die Guttapercha, POGG. Ann. 134, pag. 315. 1868. Reckung derselben und merkwürdiger Temperatureinfluss auf die gereckte Substanz.

STREINTZ, POGG. Ann. 155, pag. 588. (Polemik gegen O. E. MEYER.)

BOLTZMANN, CRELLE's Journ. 81, pag. 96. (Zu O. E. MEYER's Theorie.)

FINGER, Wien. Ber. (2) 72, pag. 257. (Versuche zur Prüfung von BOLTZMANN's Theorie.)

BOLTZMANN, Wien. Ber. (2) 76, pag. 815. Fortschr. 33, pag. 243. (Bemerkungen zu P. M. SCHMIDT's Abhandlung, einen Einwand gegen BOLTZMANN betreffend.)

O. FABIAN, Dehnbarkeit und Elasticität des Eises. Fortschr. 33, pag. 246. 1877. Carl. Rep. 13, pag. 447—457.

KLEMENCIC, Beobachtungen über die elastische Nachwirkung am Glase. Carl. Rep. 15, pag. 409—427. 1879. (Prüfung nnd meistens Bestätigung der KOHLRAUSCH'schen allgemeinsten Formel bei Torsion und Biegung.)

W. BRAUN u. A. KURZ, Dämpfung von Torsionsschwingungen von Drähten. Carl. Rep. 15, pag. 561—577. 1879; 17, pag. 233—253. 1881; 20, pag. 856—57. 1884; Beibl. 9, pag. 297. 1885.

TH. NISSEN, Zur Kenntniss der elastischen Nachwirkung (Inaug.-Dissert. Bonn 1880; Beibl. 5, pag. 19. 1881). Eine Theorie, bei welcher der intermolekulare Aether zur Erklärung herangezogen wird.

N. A. HESEHUS, Die elastische Nachwirkung und andere verwandte physikalische Erscheinungen, Beibl. 7, pag. 654. 1883. Auszug des Verf. aus Journ. d. russ. chem.-phys. Ges. 14, pag. 320—385. 1882). Bezieht sich vorzugsweise auf das Verhalten des Kautschuks.

A. MILLER, Münch. Ber. 1885, pag. 9—92; Beibl. 9, pag. 498. 1885. Der Elasticitätsmodul einer grossen Zahl untersuchter Stoffe ergiebt sich abhängig von der Anfangsspannung und verschieden, je nachdem dieselbe ab- oder zunimmt. Die Drähte waren vorher durch grössere Belastungen dauernd gestreckt.

L. PERARD, Rev. univ. des mines. (2) 15, pag. 346—364. 1884; Beibl. 9, pag. 375. 1885. Der Verf. stimmt Erklärungen von TAMMEN, die dreifache Wanderung der Ruhelage betr., auf Grund seiner Beobachtungen zu.

G. J. MICHAELIS, Theorie der elastischen Nachwirkung, Beibl. 9, pag. 11. 1885.

G. J. MICHAELIS, Theorie der Rotation der Moleküle, Beibl. 10, pag. 149. 1886. Arch. Néerl. 20, pag. 20—35. 1885.

PULFRICH, Elastische Nachwirkung eines Kautschukschlauches und deren Einwirkung auf die Constante μ. WIED. Ann. 28, pag. 87—107. 1886. Der Verf. untersucht auch die Nachwirkungen nach der Querdimension und zeigt, dass beide bei Belastung und Entlastung in genau identischer Weise und mit derselben Geschwindigkeit erfolgen; auch Prüfung der KOHLRAUSCH-schen Formeln enthaltend.

H. TOMLINSON, Bleibende und vorübergehende Wirkung einer Temperatursteigerung bis

100° C. auf einige physikalische Eigenschaften des Eisens, Chem. News 55, pag. 45. 1887; Beibl. 11, pag. 499. 1887. Bezieht sich auf log. Decrem. u. die Elasticitätsmoduln.

H. TOMLINSON, Zähigkeit der Metalle, innere Reibung der Metalle, Proc. Lond. Roy. Soc. 38, pag. 42—45. 1884; Beibl. 9, pag. 707. 1885; 40, pag. 240—242. 1886; Beibl. 11, pag. 213. 1887.

A. MILLER, Der primäre und secundäre longitudinale Elasticitätsmodul und die thermische Constante des letzteren. Münch. Ber. 1886, pag. 707—758; Beibl. 11, pag. 211. 1887.

FERDINAND BRAUN.

Hydrostatik.

Allgemeines. Die Hydrostatik ist die Lehre vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten. Der Ausgangspunkt dieser Lehre ist nach dem oben (s. Artikel »Aggregatzustände«) Gesagten die Thatsache, dass in Flüssigkeiten alle Vorgänge, soweit sie nicht durch vorhandene Geschwindigkeiten bedingt sind, auf eine einzige Grösse, die man schlechthin den Druck nennen kann, zurückzuführen sind, und dass dieser Druck sich nach allen Richtungen gleichmässig und senkrecht zu den Flächen, auf die er wirkt, fortpflanzt. Von den zahlreichen Beobachtungen und Experimenten, welche diese Thatsache darlegen, genüge es hier, eine anzuführen. Versieht man eine Spritze mit zahlreichen, nach den verschiedensten Richtungen hin vertheilten Oeffnungen und lässt das Wasser durch alle gleichzeitig austreten, so sieht man erstens, dass jeder Strahl zunächst senkrecht gegen seine Oeffnung austritt (erst später nimmt er in Folge der Wirkung der Schwere eine andere Richtung ein) und zweitens, dass alle Strahlen mit der gleichen Geschwindigkeit austreten.

Die Gleichheit des Druckes bezieht sich natürlich auf gleich grosse Flächen, und hieraus folgt ohne Weiteres, dass für verschieden grosse Flächen der Druck proportional der Grösse dieser Flächen ist. Dies gilt sowohl von dem von aussen her auf die Flüssigkeit ausgeübten, als auch von dem im Innern derselben fortgepflanzten Druck. Wird ersterer etwa durch einen Stempel ausgeübt, welcher mit einer Kraft von p Kilo in die Flüssigkeit hineingedrückt wird, oder wird der Stempel, der an sich die Flüssigkeit nur eben berührt, ohne sie zu drücken, mit Gewichtsstücken im Betrage von p Kilo belastet, so ist, unter f die Stempelfläche verstanden, der Druck auf die Fläche f gleich p, derjenige auf die Flächeneinheit gleich p/f, und der auf irgend eine Fläche F wirkende $p \cdot F/f$. Gewöhnlich hat man Angaben über den Druck ohne nähere Bezeichnung der Druckfläche verschieden zu verstehen, je nachdem es sich um den äusseren Druck oder um den inneren Druck handelt; im ersteren Falle ist der Druck auf die gesammte Druckfläche gemeint, im letzteren Falle der Druck auf die Flächeneinheit. Ein Punkt im Innern einer Flüssigkeit erfährt, auch wenn ein künstlicher Druck auf die letztere von aussen nicht ausgeübt wird, doch einen natürlichen Druck in Folge des Gewichtes der über ihm lastenden Flüssigkeitssäule. Für den gesammten Querschnitt eines cylindrischen Gefässes z. B. ist dieser Druck

$$P = fhs, \tag{1}$$

wo f die Fläche des Querschnittes, h die Höhe der über ihm befindlichen Flüssigkeitssäule und s deren specifisches Gewicht ist; der Druck auf die Flächeneinheit wird also

$$p = hs. \tag{2}$$

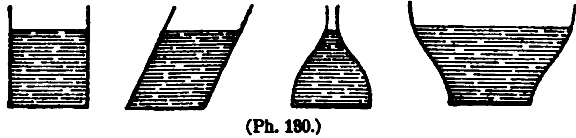
Wirkt auf die Oberfläche ausserdem noch ein künstlicher Druck, welcher für die Flächeneinheit p_0 beträgt, so wird

$$p = p_0 + hs. \tag{3}$$

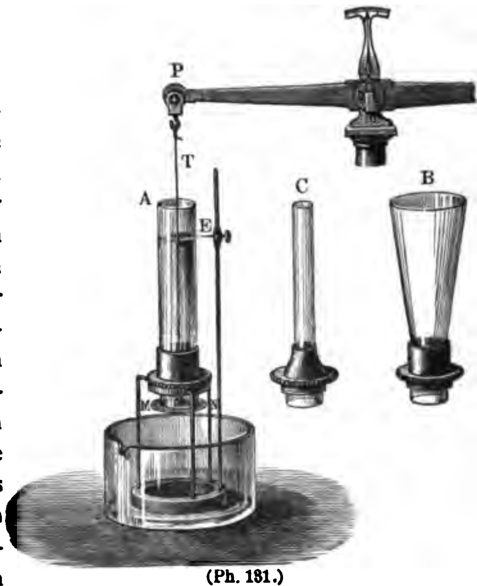
Diese Formel gilt auch für ein nichtcylindrisches Gefäss, wenn unter h allgemein die Tiefe der betrachteten Einheitsfläche unter der Oberfläche verstanden wird. Für eine beliebige Fläche F wird dann, wenn ein künstlicher Druck nicht ausgeübt wird,

$$P = Fhs.$$

Füllt man also Gefässe von der verschiendensten Form, aber der gleichen Bodenfläche bis zu gleicher Höhe mit derselben Flüssigkeit, so ist der Bodendruck in allen der nämliche (Fig. 130). Man ersieht hieraus, dass es für den Bodendruck auf die Menge der drückenden Flüssigkeit nicht ankommt. Dieser Satz ist schon von Pascal[1]) als das **hydrostatische Paradoxon** ausgesprochen worden. Ist z. B. die Bodenfläche $F = 100$ *qcm*, $h = 20$ *cm* und die Flüssigkeit Wasser, also $s = 1$ *gr*, so wird $P = 2000$ *gr* $= 2$ *k*. Man kann übrigens auch sagen: Der Druck, den der Boden eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefässes auszuhalten hat, ist, unabhängig von der Gestalt des Gefässes, gleich dem Gewicht einer vertikal cylindrischen Flüssigkeitssäule, deren Basis gleich der Bodenfläche und deren Höhe gleich der Tiefe des Bodens unter dem Flüssigkeitsspiegel ist.


(Ph. 130.)

Zur experimentellen Prüfung dieses Satzes sind zuerst von Pascal, später von Masson u. A. Apparate construirt worden, welche sämmtlich den Zweck verfolgen, den Bodendruck durch Gewichte zu equilibriren. Bei dem Masson'schen Apparat z. B. besteht der Boden aus einer Glasplatte MN, welche, mit einem durch das Gefäss geführten Faden T an dem Ende des einen Waagenbalkens P einer Waage aufgehängt, das Gefäss grade verschliesst. Wendet man nun verschieden geformte Gefässe A, B, C, deren Bodenfläche aber dieselbe ist, der Reihe nach an, so findet man, dass man auf die andere Waagschale in allen Fällen das gleiche Gewicht auflegen muss, um die Platte MN eben noch am Herabsinken zu verhindern. Bei einem andern Apparat dieser Art wird die Bodenplatte auf das Ende des einen Waagebalkens aufgesetzt und dann die Gefässe auf sie gestellt.

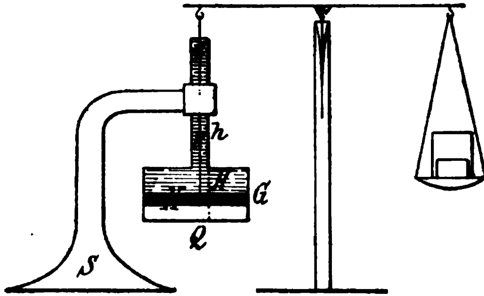


(Ph. 131.)

Den hiernach bestehenden charakteristischen Unterschied zwischen festen und flüssigen Körpern kann man sich durch das folgende interessante Experiment in sehr deutlicher Weise veranschaulichen. Das weite, aber in einen engen Cylinder auslaufende Gefäss G (Fig. 132) stelle man mittelst eines Stativs S fest auf und schliesse es unten durch den beweglichen Kolben K, der durch den

[1]) Pascal, Traité de l'équilibre des liqueurs etc. Paris 1662. (Oeuvres T. III.)

Faden F an einer Waage aufgehängt ist. Füllt man nun das Gefäss mit Wasser, so muss man zur Herstellung des Gleichgewichts auf die andre Waagschale sehr beträchtliche Gewichte legen; lässt man aber jetzt die Flüssigkeit gefrieren, so dass sie sich von den Wänden loslöst, so kann man den grössten Theil jener Gewichte wieder hinwegnehmen. Und zwar ergeben sich die Gewichte, wenn Q und q die Querschnitte, H und h die Höhen des unteren und oberen Theils des Gefässes sind, im ersten Falle zu $Q(H + h)$, im letzteren nur zu $QH + qh$, dort also gleich dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe der wirklichen, aber überall gleichen Querschnitt Q, hier gleich dem wirklichen Gewichte des auf dem Kolben lastenden Eises.



(Ph. 182.)

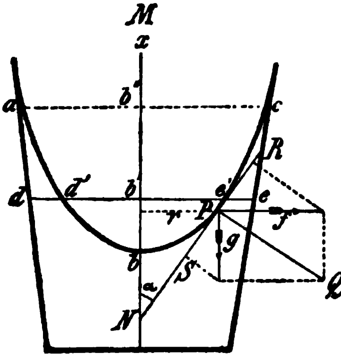
Es möge hier bemerkt werden, dass man in diesem und andern, das Gleichgewicht der Flüssigkeiten betreffenden Fällen sich in sehr einfacher Weise ein Verständniss der Erscheinungen verschafft, wenn man das Princip der virtuellen Verrückungen (s. Art. Allg. Mechanik, pag. 47) zur Anwendung bringt.

Auf dem hydrostatischen Paradoxon beruht eine Reihe praktischer Apparate, bei denen Nutzen davon gezogen wird, dass in Flüssigkeiten ein Druck, der von einem kleinen Querschnitt ausgeht, auf einen grösseren Querschnitt sich gewissermaassen in vergrössertem Maassstab überträgt. Hierher gehört z. B. die Real-sche Extraktpresse zum Auslaugen pflanzlicher Stoffe unter starkem Flüssigkeitsdruck.

Oberflächengestalt. Eine Flüssigkeitsmasse ist entweder überall von festen Wänden eingeschlossen, oder sie grenzt theilweise oder ganz an andere Flüssigkeiten oder Gase, z. B. an Luft. Man nennt diese letzteren Grenzen freie Oberflächen, weil die Beweglichkeit der Grenztheilchen hier ungehindert ist. Soll also Gleichgewicht stattfinden, so müssen die verschiedenen wirksamen Kräfte sich gegenseitig aufheben. Als eine dieser Kräfte hat man den von innen her fortgepflanzten Druck zu betrachten; derselbe steht auf der Oberfläche senkrecht. Es muss also auch die Resultante aller äusseren Kräfte auf der Oberfläche senkrecht stehen, sonst würde eine tangentiale Kraft übrig bleiben, und es müsste eine entprechende Bewegung eintreten. Zwei dieser Kräfte, die Schwere und der Druck der unter gewöhnlichen Umständen auf der Flüssigkeit lastenden Luftsäule, wirken vertikal nach unten; sind sie die beiden einzigen wirkenden Kräfte, so muss also die Oberfläche eine horizontale Ebene sein. Zu demselben Resultat kann man auch gelangen, indem man von der anderen, von einer freien Oberfläche zu erfüllenden Bedingung, nämlich von der Gleichheit des Druckes in allen ihren Punkten, ausgeht. Wäre diese Gleichheit nicht vorhanden, so würden ebenfalls seitliche Bewegungen die nothwendige Folge sein. Soll nun $p = const$ sein, so muss nach Gleichung (3), wenn nur die Schwere (oder noch andere Vertikalkräfte) wirkt, für alle Punkte der Oberfläche $h = const$ sein, d. h. die Oberfläche ist eine horizontale Ebene. Flächen gleichen Druckes nennt man Niveauflächen; eine dieser Niveauflächen ist die Oberfläche, die übrigen verlaufen im Innern der Flüssigkeit. Wirken nur Vertikalkräfte, so sind alle Niveauflächen horizontale Ebenen; in allen anderen Fällen haben sie eine verwickeltere Gestalt.

Die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ist, falls letztere sich nicht im leeren Raume befindet, zugleich die Grenzfläche zwischen einer Flüssigkeit und einem Gase oder zwischen zwei Flüssigkeiten; auch eine solche Grenzfläche ist hiernach stets eine Niveaufläche, und zwar, wenn nur die Schwere wirkt, eine horizontale Ebene. Dabei sind noch zwei verschiedene Gleichgewichtszustände zu unterscheiden, nämlich der stabile, bei welchem die schwere Flüssigkeit unterhalb der leichteren sich befindet, und der labile, bei welchem die Anordnung die umgekehrte ist; in letzterem Falle genügt die leiseste Störung des Gleichgewichtes, um die Anordnung umzukehren und das stabile Gleichgewicht herzustellen. Uebrigens ist auch die stabile Anordnung an die Bedingung geknüpft, dass sich die an einander grenzenden Flüssigkeiten nicht mit einander zu mischen vermögen; thun sie dies, so tritt erst nach vollständiger Mischung Gleichgewicht ein. Quecksilber, Wasser und Oel liefern ein Beispiel für die geschichtete Gleichgewichtsanordnung, Wasser und Alkohol für die Mischung.

Befindet sich eine Flüssigkeitsmasse im Zustande einer gleichförmigen Rotation um eine vertikale Axe, z. B. um ihre geometrische Axe, so kann man (s. Art. »Dynamik«, pag. 75) von der Bewegung absehen und die Erscheinung als eine Gleichgewichtserscheinung behandeln, wenn man zur Schwerkraft noch die Centrifugalkraft hinzufügt. Das ist also ein Fall, in welchem nicht ausschliesslich Vertikalkräfte wirken, und die Niveauflächen, also auch die Oberfläche der Flüssigkeit, werden daher nicht horizontale Ebenen sein. Um die Oberflächengestalt für eine Flüssigkeitsmasse, welche die Form eines Rotationskörpers hat, zu berechnen, genügt es einen axialen Vertikalschnitt (Fig. 133) zu betrachten und in diesem die Grenzkurve abc zu bestimmen. Nun wirken in irgend einem Punkte P der Kurve, dessen Axenabstand r und in welchem der Winkel der Tangente mit der Axe $MNR = \alpha$ ist, die Kraft g vertikal nach unten und die Fliehkraft $f = w^2 r$ (w Winkelgeschwindigkeit) horizontal nach aussen; ihre Resultante muss, um dem inneren Flüssigkeitsdruck das Gleichgewicht zu halten, normal zur Tangente nach innen in der Richtung PQ wirken; ihre Componenten PS und PR in der Richtung der Tangente müssen sich also aufheben. Hieraus ergiebt sich



(Ph. 133.)

$$w^2 r \sin \alpha = g \cos \alpha,$$

also

$$\tang \alpha = \frac{g}{w^2 r}.$$

Diese Gleichung charakterisirt die durch

$$r^2 = \frac{2g}{w^2} x$$

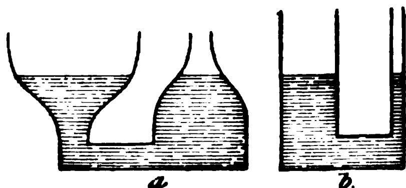
x Vertikal-Coordinate) dargestellte Parabel; die Oberfläche der Flüssigkeit ist also ein Rotationsparaboloid. Ist ferner de das ursprüngliche Niveau der Flüssigkeit, so muss das gehobene Flüssigkeitsvolumen, welches in unserem Schnitt durch die beiden Flächen add' und cee' sich darstellt, gleich dem Hohlraum, dessen Schnitt $d'be'$ ist, sein. Für ein cylindrisches Gefäss ergiebt sich hieraus die interessante Beziehung, dass die Senkung des tiefsten Punktes gerade gleich der Hebung der höchsten ist (im Falle der Figur ist bb' nicht gleich $b'b''$).

Befinden sich mehrere Flüssigkeiten, über einander geschichtet, in einem Gefäss und wird die gleichförmige Rotation eingeleitet, so ordnen sich dieselben von aussen nach innen an, derart, dass die schwerste Flüssigkeit zu äusserst, die leichteste zu innerst sich befindet, und die Grenzflächen, so weit es die Wände des Gefässes gestatten, Rotationsparaboloide sind. Alle die angeführten Erscheinungen lassen sich durch Aufsetzen der Gefässe auf die Schwungmaschine (s. Art. »Dynamik«, pag. 76) experimentell verfolgen.

Ein anderer hierher gehöriger Fall ist der, wo ein Gefäss mit Flüssigkeit um eine horizontale, ausserhalb gelegene Axe derart rotirt, dass sein Boden stets mehr oder weniger horizontal bleibt (wie z. B. bei gewissen Wasserrädern). Die Flüssigkeitsoberfläche ist dann stets ein Theil einer Cylinderfläche mit kreisbogenförmigem Querschnitt.

Auch im Zustande der Ruhe einer Flüssigkeit ist die Oberfläche resp. Grenzfläche derselben an Gase oder andere Flüssigkeiten erfahrungsgemäss niemals in allen ihren Theilen, und zuweilen, nämlich bei geringer Ausdehnung dieser Oberfläche, in keinem ihrer Theile eine horizontale Ebene. Beispiele bieten die Tropfen und die Flüssigkeitssäulen in engen Röhren. Man muss nach dem Obigen zum Verständniss dieser Erscheinung eine schief gerichtete Kraft annehmen, welche man Cohäsions- oder Adhäsionskraft oder allgemein Kapillarität nennt; die Erscheinungen der Kapillarität bilden eine besondere Klasse von Erscheinungen für sich (s. d.).

Eine selbständige Gestalt, also auch eine charakteristische und ringsum freie Oberfläche kann eine Flüssigkeit nur dann annehmen, wenn sie der Wirkung äusserer Kräfte, also auch der Schwere, gänzlich entzogen ist. Unter natürlichen Verhältnissen kann dieser Fall nur bei Weltkörpern eintreten, welche, soweit sie nicht noch flüssig sind, nach der KANT-LAPLACE-schen Theorie es wenigstens früher waren; auf künstlichem Wege kann man jedoch auch irdische Flüssigkeitskörper der Schwere entziehen, indem man sie in eine gleich schwere, mit ihnen nicht mischbare Flüssigkeit bringt. Man sehe hierüber weiter unten in der »Mathematischen Theorie«.

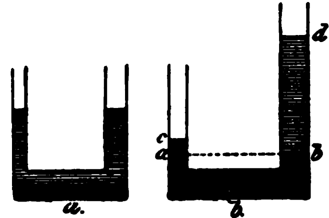


(Ph. 134.)

Kommunicirende Röhren. Jede Flüssigkeit hat, wenn nur Vertikalkräfte wirken, nach dem Obigen eine horizontale Ebene zur Oberfläche, welches auch die Gestalt des Gefässes, in dem sie sich befindet, sein möge, also auch dann, wenn man den Zusammenhang dieser Oberfläche durch Eintauchen fester Körper oder durch die Wahl der Gefässform theilweise oder völlig unterbricht. Letzteres tritt insbesondere ein, wenn das Gefäss eine U-förmige Gestalt hat oder wenn man, was im Wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, zwei vertikale oder geneigte Gefässe oder Röhren durch eine horizontale Röhre oder durch Eintauchen in ein grösseres Gefäss verbindet. Man nennt solche Einrichtungen allgemein communicirende Röhren, und es folgt aus dem Gesagten unmittelbar, dass, wenn man dieselben über das Verbindungsstück hinaus mit Flüssigkeit füllt, die beiden getrennten alsdann vorhandenen Oberflächen in den beiden Schenkeln Theile einer und derselben horizontalen Ebene sind; dabei können diese Schenkel jede beliebige, und zwar jeder eine andere Gestalt haben, insbesondere bei cylindrischer Gestalt eine beliebige und verschiedene Weite (Fig. 134). Wie man sieht, unterscheidet sich ein solcher Apparat bei aller Analogie mit einer gleicharmigen Waage doch gerade im Wesentlichen von ihr,

insofern bei der Waage gleiche Gewichte, bei den communicirenden Röhren aber gleiche, auf die Flächeneinheit wirkende Drucke (in diesem Falle also gleiche Höhen), also oft sehr ungleiche Gewichte sich äquilibriren; die Ursache ist eben die allseitige gleichförmige Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten.

Auch wenn man in den Apparat zwei verschiedene, sich nicht mischende Flüssigkeiten füllt, tritt noch Niveaugleichheit in beiden Schenkeln ein, falls man die schwerere Flüssigkeit zuerst, und zwar nur so viel von ihr eingiesst, dass sie die Verbindungsröhre nur theilweise ausfüllt, der noch zur Verfügung bleibende Füllraum also noch immer ein einziger zusammenhängender Raum ist; die zweite Flüssigkeit wird dann den Rest des Verbindungsstückes füllen und sich in beiden Schenkeln gleich weit erheben (Fig. 135 *a*). Füllt dagegen die erste Flüssigkeit nicht nur das Verbindungsstück voll aus, sondern reicht sie auch noch ein wenig in jeden Schenkel hinauf, und giesst man nun eine specifisch leichtere Flüssigkeit in einen Schenkel nach, so wird zwar (Fig. 135 *b*) die schwere in dem andern Schenkel aufsteigen und in dem ersten dem zufolge sinken, aber nur so weit, bis die über das Niveau *ab* emporragende Säule der schwereren Flüssigkeit *ac* denselben Einheitsdruck ausübt, wie die Säule *bd* der leichteren Flüssigkeit; die Höhen h_1 und h_2 der beiden Säulen werden also, wiederum ganz unabhängig vom Querschnitt der Röhren, den specifischen Gewichten der Flüssigkeiten s_1 und s_2 der Flüssigkeiten umgekehrt proportional sein, in Formel



(Ph. 185.)

$$p_1 = h_1 s_1 \qquad p_2 = h_2 s_2 \qquad p_1 = p_2$$

folglich

$$h_1 : h_2 = s_2 : s_1 .$$ [1]

Man kann diesen Satz benutzen, um durch Vergleichung irgend einer Flüssigkeit mit Wasser deren specifisches Gewicht zu bestimmen; in der That sind zu diesem Zwecke verschiedene einschlägige Apparate construirt worden; da man aber die Höhen von Flüssigkeitssäulen bei Weitem nicht so genau messen kann wie Gewichte, wird die Methode nur selten benutzt (s. Art. »Dichte«, pag. 145 u. f.). [2]

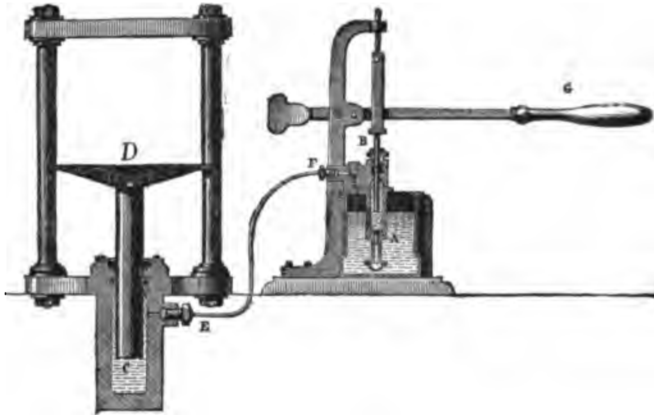
Hydraulische Presse. Auf der Idee der kommunicirenden Röhren mit Schenkeln von sehr ungleichem Querschnitt, also in letzter Instanz auf der allseitigen Ausbreitung des Druckes beruht die 1795 von BRAMAH erfundene und bald darauf von MONTGOLFIER in Frankreich und NEUBAUER in Deutschland verbesserte hydraulische oder BRAMAH'sche Presse, welche seitdem in Folge der kolossalen Drucke, welche sie zu erzeugen im Stande ist, einer der wichtigsten Apparate der Technik geworden ist. Ihre wesentlichen Theile sind folgende: Die enge Röhre *B* ist die Druckröhre einer kleinen Druckpumpe (s. »Pumpen«), welche dazu dient, die Flüssigkeit *A*, meist Wasser oder Oel, durch das Verbindungsstück *FE* in die weite Röhre *C* zu pumpen; der dieselbe dicht verschliessende Kolben und folglich auch die grosse Endplatte *D*, welche derselbe trägt, erfährt somit einen Druck, welcher in demselben Verhältniss grösser ist, als der auf *B* ausgeübte, in welchem der Querschnitt von *C* grösser ist als der-

---

[1]) Interessant, aber verwickelter und in seinem Verlauf von den Verhältnissen des Apparats abhängig ist der Grenzfall, in welchem die schwerere Flüssigkeit gerade die Verbindungsröhre ausfüllt, aber nicht in die vertikalen Röhren hinaufreicht.

[2]) Die meisten Erscheinungen und Gesetze der kommunicirenden Röhren sind schon von STEVIN und PASCAL abgeleitet worden.

jenige von B; man kann ohne Schwierigkeit das Querschnitts- also Druckverhältniss von 1 : 1000 herstellen, also, wenn man überdies noch an dem zehnmal so langen Hebelarm G angreift, mit einem Aufwande von 10 Kilo einen Druck von 100 000 Kilo, mit Dampfbetrieb aber noch viel grössere Drucke erzielen; schon mittelst Handbetrieb seitens eines Arbeiters kann man z. B. starke, auf D gebrachte Stämme zerbrechen, aus Früchten den Saft austreiben

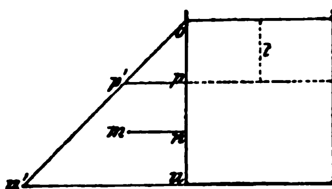


(Ph. 136.)

u. s. w. Uebrigens kann selbstverständlich bei der hydraulischen Presse ebenso wenig wie bei den einfachen Maschinen der Mechanik Arbeit gewonnen werden; von den beiden Faktoren, deren Produkt die Arbeit ist, wird zwar der eine, der Druck, stark vervielfältigt, aber auf Kosten des anderen, der durch den Druck bewirkten Verschiebung; der von dem Hebelende G zurückzulegende Gesammtweg ist in demselben starken Verhältnisse grösser, als die Hebung der Platte D. Im Gegentheil, es geht sogar bei dieser wie bei jeder Maschine ein Theil der aufgewandten Arbeit durch Reibung verloren, und auf diesen Verlust ist bei der obigen Druckberechnung Rücksicht zu nehmen.

In umgekehrter Weise kann man das der hydraulischen Presse zu Grunde liegende Princip anwenden, um grosse Drucke durch verhältnismässig niedrige Quecksilbersäulen zu messen; man braucht zu diesem Zwecke nur den grossen Druck auf die kleine Stirnfläche eines metallischen Stempels wirken zu lassen, dessen grosse Endfläche dann den Druck auf das Quecksilber eines weiten, mit einer engen, calibrirten Röhre communicirenden Gefässes überträgt. Ist die Endfläche z. B. 100 mal so gross wie die Stirnfläche, so giebt eine Quecksilbersäule von 76 *cm* (s. Art. Luftdruck) schon einen Druck von 100 Atmosphären an; das hiermit angedeutete Princip liegt z. B. dem Manometer von DESGOFFE [1]) zu Grunde.

Seitendruck. Die Grösse des Druckes auf die Seitenwände eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefässes ergiebt sich aus der gleichmässigen Fortpflanzung dieses Druckes nach allen Seiten ohne Schwierigkeiten; für die Rechnung aber kommt es auf die Gestalt und Lage der Fläche an. Ist die Fläche eben und vertikal gestellt (Fig. 137), so erfährt irgend einer ihrer Punkte p den seiner Horizontalschicht entsprechenden Druck, also, wenn nur Flüssigkeitsdruck vorhanden ist, s das specifische Gewicht und $op = t$ die Tiefe unter der Oberfläche ist, den



(Ph. 137.)

Druck st. Für die verschiedenen Punkte der Wand (oder vielmehr ihres Vertikalschnittes) kann man hiernach den Druck, von dem constanten Factor s abgesehen, darstellen, indem man in irgend einem Punkte, z. B. p, die horizontale Linie

[1]) Siehe WÜLLNER, Lehrb. d. Physik, 4. Aufl. Bd. 1, pag. 284.

$pp' = po$ zieht und durch o und p' die Linie $op'u'$ legt; der Druck im untersten Punkte u der Wand ist dann beispielsweise gleich uu'. Ferner giebt das so entstandene Dreieck ouu' durch seine Grösse den Gesammtdruck auf die Wandlinie ou an; derselbe ist also für Wasser $P = \frac{1}{2}(ou)^2$, für eine andere Flüssigkeit durch Wiedereinführung von s: $P' = \frac{s}{2}(ou)^2$. Hieraus erhält man den Druck auf die Wandfläche durch Multiplication mit deren auf der Figurebene senkrechter Breite b, also, wenn $ou = a$ gesetzt wird, $P = \frac{1}{2}a^2 b$ und $P' = \frac{s}{2}a^2 b$, oder endlich, wenn die Grösse der Wandfläche $ab = f$ eingeführt wird,

$$P' = \tfrac{1}{2} s a \cdot f,$$

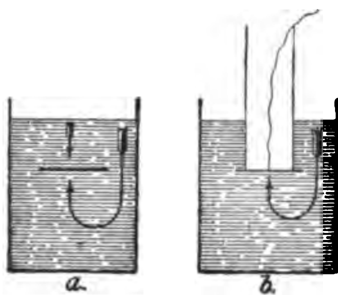
in Worten: der Druck auf die gesammte Wandfläche ist gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich der Grösse jener Fläche, und deren Höhe gleich der Tiefe ihres Mittelpunktes unter der Oberfläche ist. Oder auch: der Druck auf die Wand ist gerade so gross, als ob die ganze Wand horizontal im Niveau ihres Mittelpunktes läge. Diese Betrachtung lässt sich in drei Richtungen mit Leichtigkeit verallgemeinern: 1) braucht es sich nicht um die ganze Wandfläche vom Flüssigkeitsspiegel bis zum Boden, sondern nur um einen Streifen derselben zwischen zwei Niveaus zu handeln; 2) braucht das betrachtete Wandstück nicht rechteckig, also von constanter Breite b, sondern kann z. B. dreieckig sein; 3) braucht die Wand, welcher das betrachtete Stück angehört, keine vertikale, sondern kann eine geneigte Ebene sein. Das Ergebniss der Betrachtungen bleibt ungeändert dasselbe, nur muss in den letzteren Fällen an die Stelle des Mittelpunktes der Schwerpunkt der Fläche gesetzt werden.

Uebrigens darf die Rolle, welche hierbei der Mittelpunkt resp. Schwerpunkt der Wandfläche spielt, nicht missverstanden werden. Dieser Punkt dient nämlich zwar seiner Lage nach zur Berechnung der Grösse des Gesammtdruckes, ist aber nicht der Angriffspunkt desselben. Da nämlich die Drucke auf die Flächentheile unterhalb des Schwerpunktes grösser sind, als die Drucke auf die Theile oberhalb desselben, so würde die im Schwerpunkt befestigte, sonst aber beweglich eingerichtete Wandfläche unten nach auswärts, also oben nach innen ausweichen; der Punkt, dessen Befestigung sie ins Gleichgewicht bringt, ist also ein anderer. Man nennt ihn den **Mittelpunkt des Druckes** und kann ihn nach den Formeln der allgemeinen Mechanik ohne weiteres aus der Bedingung bestimmen, dass die Drehungsmomente der oberen und unteren Drucke gleich sein müssen. Er liegt natürlich stets tiefer als der Schwerpunkt, und man kann sich seine Lage sehr anschaulich vergegenwärtigen, wenn man sich die Wandfläche nicht gleichförmig, sondern an jeder Stelle in einer dem dortigen Druck entsprechenden Stärke mit Masse belegt und sich dann von dieser Fläche den Schwerpunkt denkt. Construiren kann man ihn z. B. für eine vertikale, rechteckige Wand wieder mit Hilfe des Dreiecks ouu' (Fig. 137), und zwar einfach, indem man den Schwerpunkt desselben m aufsucht und mn horizontal zieht. Man findet so, dass der Mittelpunkt des Druckes beim vertikalen Rechteck in $\frac{2}{3}$ der ganzen Tiefe, beim Dreieck mit der Basis nach unten in $\frac{3}{4}$, beim Dreieck mit der Basis nach oben in $\frac{1}{2}$ der Tiefe liegt. Man hat diese Verhältnisse u. a. bei der Anbringung von Stützreifen an Gefässen zu berücksichtigen.

Verwickelter ist die Berechnung des Druckes von Flüssigkeiten auf **gekrümmte** Flächen. Man muss dann den gegen die Fläche normalen Druck in drei aufeinander rechtwinklige Komponenten zerlegen, eine vertikale und zwei horizontale. Der erstere ergiebt sich gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule,

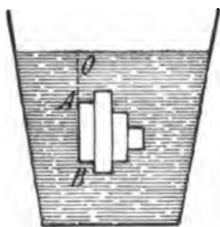
welche sich über der krummen Fläche bis zur Oberfläche der Flüssigkeit erhebt, die letzteren sind gleich den Drucken, welche die Flüssigkeit ausüben würde auf zwei zu einander senkrechte Verticalprojektionen der krummen Fläche. Es ist aber im allgemeinen unmöglich, diese Druckkomponenten wieder zu einer einzigen Kraft vereinigt darzustellen. Möglich ist dies nur bei gewissen speciellen Klassen von Flächen; zu einer derselben gehört z. B. die Kegelfläche. Bei anders geformten Gefässen von krummer Oberfläche, z. B. bei kugeligen, muss man sich darauf beschränken, den Vertikaldruck und den Horizontaldruck je für sich zu betrachten.[1]).

Das Schwimmen der Körper. Irgend eine horizontale Fläche in einer ruhenden Flüssigkeit befindet sich im Gleichgewicht, weil auf ihre obere und untere Seite gleiche und entgegengesetzte Drucke wirken. Dasselbe wird also auch von einer horizontal in der Flüssigkeit schwimmenden Platte gelten, falls von deren eigenem Gewicht abgesehen wird (Fig. 138*a*). Dass der Druck auf die untere Fläche, dank der allseitigen Ausbreitung des Flüssigkeitsdruckes, wirklich existirt, zeigt ein einfacher Versuch (Fig. 138*b*), bei welchem man eine unten abgeschliffene Glasröhre unten durch eine Metallplatte schliesst, die man an einem durch die Röhre hindurchgesteckten Faden oben hält; taucht man diese ganze Vorrichtung in eine Flüssigkeit, so dass der obere Röhrenrand noch etwas herausragt und lässt man, die Röhre festhaltend, den Faden los, so sinkt die Platte trotzdem nicht herunter. Ein in eine Flüssigkeit vollständig eingetauchter Körper erfährt von allen Seiten her Flüssigkeitsdruck, und dieser Druck steht in jedem Punkte seiner Oberfläche auf dieser senkrecht. Da die Oberfläche im allgemeinen gekrümmt ist, muss man sich darauf beschränken, die horizontalen und die vertikalen Druckcomponenten für sich zu betrachten.



(Ph. 188.)

Die ersteren sind, wie angeführt wurde, so gross, als ob sie auf die Vertikalprojektion der Oberflächentheile des Körpers wirkten; bei einer geschlossenen Oberfläche, wie sie ein völlig untergetauchter Körper besitzt, gelangt man durch diese Projektion für irgend eine beliebige horizontale Druckrichtung zu zwei gegenüberliegenden Vertikalebenen von gleicher Lage und gleicher Grösse, so dass die beiden auf sie wirkenden Drucke sich aufheben. Da dies für alle horizontalen Richtungen gilt, erhält man den Satz: Ein in eine Flüssigkeit getauchter Körper erfährt durch den Druck derselben nach keiner seitlichen Richtung einen Antrieb.



(Ph. 189.)

Anders verhält es sich hinsichtlich des Vertikaldruckes. Denkt man sich den untergetauchten Körper in lauter vertikale Parallelepipeda von sehr kleinem Querschnitt getheilt (Fig. 139), und betrachtet man eines derselben *AB*, so findet man den Vertikaldruck auf dasselbe, indem man von dem auf *B* nach oben wirkenden Druck den auf *A* nach unten wirkenden Druck, also vom Gewicht einer Flüssigkeitssäule gleich *OB* das einer solchen gleich *OA* abzieht; die

[1]) Das Weitere über Seitendruck, die daraus sich ergebende Stärke, welche man den Wänden von Gefässen, Röhren, Kesseln geben muss, und ähnliche Fragen gehören in die technische Hydrostatik.

Differenz, der sogen. Auftrieb, ist also gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule vom Volumen des Parallelepipedons *AB*. Verfährt man ebenso für alle andern Parallelepipeda des Körpers, so gelangt man zu dem Satz: Jeder Körper verliert, in Flüssigkeit getaucht, durch den Auftrieb so viel an seinem Gewicht, als die verdrängte Flüssigkeit wiegt. Dieser Satz ist schon von ARCHIMEDES gefunden worden und heisst nach ihm das Archimedische Princip.

Experimentell kann man sich von der Giltigkeit des archimedischen Prinzipes durch folgenden Versuch überzeugen: An den einen Balken einer Waage hängt man einen Hohlcylinder, an diesen wiederum einen Vollcylinder, welcher gerade in die Höhlung des ersteren passen würde und stellt durch Auflegen von Gewichten auf die an dem andern Waagebalken hängende Schale das Gleichgewicht her. Taucht man nun den Vollcylinder in eine Flüssigkeit, so ist das Gleichgewicht gestört, und man muss, um es wiederherzustellen, den Hohlcylinder mit der Flüssigkeit gerade füllen.

Wenn ein Körper in einer Flüssigkeit einen Gewichtsverlust erleidet, so wird man sich naturgemäss die Frage vorlegen, wo dieses Gewicht hingekommen und wo es wieder aufzufinden ist. Die Frage ist sehr einfach dahin zu beantworten, dass die Flüssigkeit, wie sie vor dem Eintauchen des Körpers das Gewicht der früher seinen Raum einnehmenden Flüssigkeitsmenge trug, sie jetzt einen Theil des Körpergewichtes trägt, und zwar gerade einen Theil gleich dem Gewichtsverluste. Um denselben Betrag, um den der Körper leichter, muss also die Flüssigkeit schwerer geworden sein. Um dies ebenfalls zu zeigen, stellt man das gefüllte Gefäss, in welches man vorhin den Vollcylinder eintauchte, auf eine an den Waagebalken angehängte Schale und äquilibrirt es durch Gewichte auf der andern Schale. Hält man jetzt mittelst der Hand oder mittelst eines Statives den Hohlcylinder mit dem daran hängenden Vollcylinder über das Gefäss und senkt es, bis letzterer ganz eintaucht, so ist das Gleichgewicht gestört und erst wieder hergestellt, wenn man so viel Flüssigkeit aus dem Gefäss geschöpft hat, dass es, in den Hohlcylinder gegossen, diesen gerade ausfüllt. Es verhält sich hier ganz ähnlich wie in dem Falle zweier Menschen, welche zusammen einen schweren Körper halten, und von denen einer auf einer Waage steht; um denjenigen Theil des Gewichtes des Körpers, den er trägt, ist er schwerer als sonst.

Das Verhältniss des Gewichtes eines Körpers zu seinem Gewichtsverluste in Wasser ist offenbar das specifische Gewicht des Körpers. Hierauf beruhen einige der wichtigsten Methoden zur Bestimmung des specifischen Gewichts fester Körper. Ferner ist das Verhältniss des Gewichtsverlustes eines Körpers in einer bestimmten Flüssigkeit zu seinem Gewichtsverluste in Wasser gleich dem specifischen Gewicht jener Flüssigkeit. Dieser Satz dient in ähnlicher Weise zur Ermittelung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten (s. Art. »Dichte«). Andererseits kann man die Gewichtszunahme der einen Körper tragenden Flüssigkeit praktisch anwenden, und zwar entweder zur Volumenbestimmung oder zum Wägen ohne Gewichte. Im ersteren Falle äquilibrirt man das Gefäss mit Wasser, taucht dann den an einem Stativ hängenden Körper, dessen Volumen zu bestimmen ist, hinein und fügt auf der anderen Seite die nötigen Gewichte hinzu; soviel Gramme dies sind, so viel *ccm* misst der Körper (falls die Wassertemperatur 4° C. beträgt; sonst ist eine Korrektion anzubringen). Im zweiten Falle äquilibrirt man zunächst das Gefäss mit Wasser durch Schrotkörner oder dergleichen, legt dann zu diesen den zu wägenden Körper und senkt nun einen an einem Stativ befestigten dicken Stab, der mit einer Volumentheilung versehen ist, so weit in die Flüssigkeit hinab, bis das Gleichgewicht wieder hergestellt ist; so viel

ccm eintauchen, so viel Gramme (ev. mit der obigen Korrektion) wiegt der Körper (s. auch Art. »Gewicht und Waage«).

Hinsichtlich des Verhältnisses eines festen Körpers zu der Flüssigkeit, in welche man ihn bringt, sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem seine Dichte grösser, ebenso gross oder kleiner als die Dichte der Flüssigkeit ist, je nachdem also sein Gewicht grösser, ebenso gross oder kleiner ist als das der verdrängten Flüssigkeit ist. Im ersten Falle überwiegt die Schwere den Auftrieb und der Körper sinkt unter, bis er den Boden erreicht, im zweiten Falle heben sich Schwere und Auftrieb auf, und der Körper ist in jedem beliebigen Niveau im Gleichgewicht, er schwebt in der Flüssigkeit; im dritten Falle endlich steigt er in Folge überwiegenden Auftriebes in die Höhe, bis er auf der Flüssigkeit schwimmt.

Der erste dieser Fälle bietet keine Besonderheiten dar.

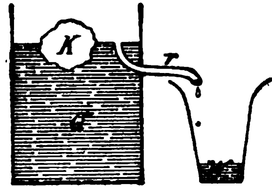
Der zweite Fall, das Schweben eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, lässt sich mit einfachen Körpern, z. B. von Holz, nur mit einiger Mühe verwirklichen, weil bei dem geringsten Unterschied der Dichten der Körper, wenn auch äusserst langsam, steigt oder fällt. Man muss daher entweder den schwimmenden festen Körper oder die Schwimmflüssigkeit durch Mischung zweier verschieden specifisch schwerer Stoffe herstellen. Ein Beispiel für ersteres ist eine Mischung von 1 Theil Zinnober auf 225 Theile weisses Wachs, welche in Wasser schwebt; Beispiele für letzteres sind Salzlösungen, die man stets so herstellen kann, dass Körper (z. B. Eier), die in Wasser untersinken, in der gesättigten Lösung auftauchen, in der Mischung gerade schweben; ferner eine Mischung von Wasser und Alkohol, in welcher Oeltropfen schweben. Noch leichter macht es sich mit dem folgenden, unter dem Namen des cartesianischen Tauchers bekannten Apparat. Eine Glaskugel ist theils mit Wasser, theils mit Luft gefüllt und hat unten eine feine Oeffnung. Sie schwimmt auf der Wasseroberfläche eines Glascylinders, der oben mit einer Membran verschlossen ist. Drückt man auf dieselbe, so treibt man etwas mehr Wasser in die Kugel, sie wird schwerer und sinkt; ermässigt man den Druck, so dehnt sich die Luft in der Kugel aus und treibt wieder etwas Wasser heraus. Man kann nun leicht den Druck auf die Membran so reguliren, dass die Kugel in jeder Lage schwebt.

Das Schweben in der Luft findet in der Luftschiffahrt Anwendung (s. das.)

Der letzte Fall, das oberflächliche Schwimmen der Körper, bietet in theoretischer und practischer Hinsicht ein besonderes Interesse dar, ersteres, weil der Körper sich hier theilweise ausserhalb, theilweise in der Flüssigkeit befindet, letzteres insofern er bei den Schiffen Verwirklichung findet. Jeder Körper, der specifisch leichter ist, als eine Flüssigkeit, taucht infolge des Auftriebs in dieser empor. Dass der Auftrieb wirklich die Veranlassung ist, zeigt die Thatsache, dass, wenn man einen solchen Körper mit der ebenen Bodenfläche auf den ebenfalls ebenen Boden des Gefässes fest aufsetzt, er nicht emportaucht, sondern im Gegentheil mit beträchtlicher Kraft auf den Boden gedrückt wird. Hier kann eben der Auftrieb nicht angreifen, und der Druck auf die obere Fläche des Körpers kommt allein zur Geltung.

Frägt man nun ferner, wie weit der Körper emportauchen werde, so ist zunächst klar, dass der Körper, dessen specifisches Gewicht also geringer als das der Flüssigkeit ist, soweit über die Oberfläche emportauchen wird, bis das Gewicht der noch verdrängten Flüssigkeit nur noch seinem Gewichte gleichkommt. Führt man z. B. in ein mit Wasser gefülltes Gefäss *G* (Fig. 140) ein Röhrchen *r* seitlich ein, derart, dass es gerade in der Wasseroberfläche mündet und fängt man das

beim vorsichtigen Auflegen eines oberflächlich schwimmenden Körpers K abfliessende Wasser W auf, so zeigt die Wägung, dass es dem Körper an Gewicht gleich ist. Ist nun V das ganze, v das noch eintauchende Körpervolumen, G sein Gewicht, s sein specifisches Gewicht und S das der Flüssigkeit, so hat man alsdann



(Ph. 140.)

$$G = Vs \quad \text{und} \quad G = vS, \quad \text{also} \quad Vs = vS,$$

und somit die Proportion

$$v : V = s : S;$$

in Worten: Der eintauchende Theil verhält sich zum ganzen Volumen wie das specifische Gewicht des Körpers zu dem der Flüssigkeit. Speziell für Wasser giebt das specifische Gewicht eines Körpers selbst an, welcher Bruchtheil seines Volumens eintaucht ($s = v/V$). Zwei verschiedene Körper von gleichem Volumen V, aber verchiedenen specifischen Gewichten s_1 und s_2 werden in einer Flüssigkeit mit solchen Bruchtheilen v_1 und v_2 eintauchen, dass

$$Vs_1 = v_1 S \quad \text{und} \quad Vs_2 = v_2 S$$

ist, also die Proportion

$$v_1 : v_2 = s_1 : s_2$$

besteht; in Worten: Die in dieselbe Flüssigkeit eintauchenden Theile zweier fester Körper verhalten sich wie ihre specifischen Gewichte. Das specifische Gewicht der Flüssigkeit spielt, wie man sieht, hier keine Rolle: für Wasser tritt also kein besonderer Fall ein.

Taucht man endlich denselben Körper in zwei verschiedene Flüssigkeiten von den specifischen Gewichten S_1 und S_2, so sinkt er bis zu solchen Volumina v_1 und v_2 ein, dass

$$G = v_1 S_1 \quad \text{und} \quad G = v_2 S_2, \quad \text{also} \quad v_1 S_1 = v_2 S_2$$

ist, also die Proportion

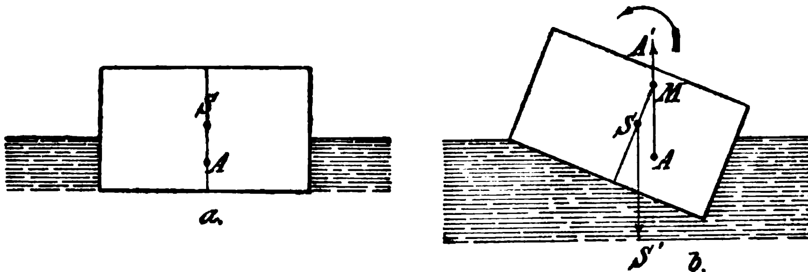
$$v_1 : v_2 = S_2 : S_1$$

besteht; in Worten: Die eintauchenden Theile verhalten sich umgekehrt wie die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten. Für Wasser als eine der beiden Flüssigkeiten ($S_1 = 1$) giebt das specifische Gewicht der anderen an, wie viel Mal kleiner das eintauchende Volumen bei ihr als bei Wasser ist.

Will man in einer Flüssigkeit einen Körper von geringerem specifischem Gewicht zum Schweben oder Untersinken bringen, so muss man ihn mit einem schwereren, z. B. mit Bleigewichten verbinden. Will man umgekehrt einen specifisch schwereren Körper zum Schwimmen auf der Oberfläche bringen, so muss man ihn mit einem leichteren verbinden. Es kann dies entweder ein specifisch leichterer Körper von festem Aggregatzustand, z. B. Kork, sein oder ein an sich specifisch schwererer, aber hohler Körper, dessen Hohlraum nur Luft, oder auch diese nicht enthält. Man kann auch, wenn dies angängig ist, den Körper selbst, um den es sich handelt, mit einem Hohlraum versehen, der sogar oben offen sein darf, wenn nur die Wände eine zur Verhinderung des Eindringens der Flüssigkeit ausreichende Höhe und Beschaffenheit haben. Endlich kann selbst ein Körper, welcher specifisch schwerer ist als eine Flüssigkeit und keine Hohlräume enthält, trotzdem bei geeigneter Gestalt auf der Oberfläche schwimmen; es ist hierzu nur erforderlich, dass seine horizontale Oberfläche gross gegen sein absolutes Gewicht sei und dass diese Oberfläche nicht durch stürmische Bewegungen der Flüssigkeit eine beträchtliche Neigung erhalte; die Ursache, welche alsdann das Untersinken verhindert, ist die mit der Cohäsion zusammenhängende Oberflächenspannung der Flüssigkeiten (s. Art. »Kapillarität«).

Hierher gehörige Einrichtungen sind die verschiedenen Arten von Schwimmern, Bojen, Aräometern (s. Art. »Dichte«), Schwimmgürteln, Schiffen, Flössen u. s. w. Der Mensch ist in normalem Zustande specifisch schwerer als Wasser, so dass er sich bewegen, d. h. arbeiten muss, um an der Oberfläche zu bleiben (in dem specifisch schwereren Meerwasser ist die erforderliche Arbeit geringer); bei starker Lufteinathmung fällt aber diese Differenz der specifischen Gewichte fort oder kehrt sich selbst zu Gunsten des Menschen um, und man schwimmt ohne Arbeit, freilich mit möglichst vollständig eingetauchtem Körper.

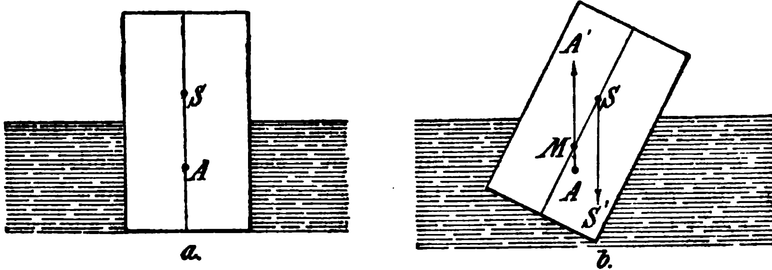
Stabilität des Gleichgewichts. Wenn ein Körper specifisch leichter ist als Wasser, so muss ein bestimmter Bruchtheil seines Volumens eintauchen, damit er in vertikaler Richtung im Gleichgewicht sei, d. h. damit er weder weiter sinke noch auch wieder steige. Das hindert aber nicht, dass er noch Drehungen ausführe. Damit auch diese wegfallen, damit er also vollständig im Gleichgewicht sei, muss noch die weitere Bedingung erfüllt werden, dass die beiden Kräfte, Schwere und Auftrieb, welche von gleicher und entgegengesetzter Grösse sind, auch gleiche und entgegengesetzte Drehungsmomente haben. Kräfte, welche entgegengesetzte Richtung haben, haben aber stets dem Vorzeichen nach gleiche Drehungsmomente, das resultirende Drehungsmoment kann also nur null sein, wenn jedes einzelne es ist, wenn also jeder der beiden



(Ph. 141.)

Hebelarme null ist, d. h. die Verbindungslinie ihrer beiden Angriffspunkte muss in die Kraftrichtung selbst fallen, hier also vertikal sein. Der Angriffspunkt der Schwere ist der Schwerpunkt des festen Körpers, der Angriffspunkt des Auftriebes ist der Schwerpunkt des verdrängten Wassers; diese beiden Punkte müssen also in einer vertikalen Linie liegen. Wie man sieht, spielt der Angriffspunkt des Auftriebes hier eine ähnliche Rolle wie bei Körpern, die nur der Schwere unterworfen sind, der Drehpunkt. Aber diese Analogie hört auf, wenn man zu der auch hier zutreffenden Unterscheidung zwischen stabilem, labilem und indifferentem Gleichgewicht übergeht. Dort ist nämlich die hinreichende und nothwendige Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichtes die, dass der Schwerpunkt unter dem Drehpunkte liegt; hier ist das Entsprechende wohl die hinreichende, aber nicht die nothwendige Bedingung, d. h. wenn der Schwerpunkt des Körpers unter dem der verdrängten Wassermasse liegt, ist das Gleichgewicht immer stabil; aber es giebt auch Fälle, wo ersterer über letzterem liegt und doch das Gleichgewicht stabil ist. Es rührt dies daher, dass, wenn der Körper sich neigt, die Gestalt des eintauchenden Theiles, also auch die Lage des Angriffspunkts des Auftriebs sich ändert. Fällt nun, wenn in der Gleichgewichtslage (Fig. 141*a*) S über A liegt, bei der Drehung A auf die, von der neuen Schwerlinie SS' gerechnet, gesunkene Seite des Körpers (Fig. 141*b*), so bilden die Kräfte SS' und AA' ein Kräftepaar, welches den Körper wieder aufrichtet; im entgegen-

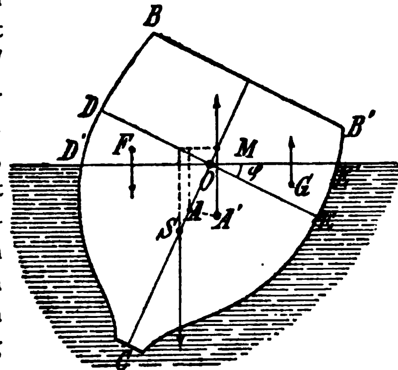
gesetzten Falle (Fig. 142 *a* und *b*) ein Kräftepaar, welches ihn weiter umkippt. Man kann diese beiden Fälle dadurch charakterisiren, dass man den Schnittpunkt M von AA' mit der ursprünglichen Schwerlinie, das sogen. Metacentrum, ein-



(Ph. 142.)

führt und sagt: Das Gleichgewicht ist stabil, wenn der Schwerpunkt unter dem Metacentrum, labil, wenn er über ihm liegt, indifferent, wenn beide Punkte zusammenfallen.

Für die Praxis kommt es nicht nur auf die Existenz des stabilen Gleichgewichts an, sondern auch auf den Grad der Stabilität, also auf das, was man bei stehenden Körpern die Standfestigkeit nennt (s. Art. »Statik«, pag. 60). Dieselbe hängt, wie man einsieht, von zahlreichen Grössen ab, nämlich von Gestalt und Massenvertheilung des schwimmenden Körpers, der Tiefe des Eintauchens u. s. w. Vereinfacht wird die bezügliche Formel für Körper, deren Querschnitt ein constanter ist, wie es bei Schiffen (von den Enden abgesehen) im Wesentlichen der Fall ist. Ist alsdann $BB'C$ der ganze, ODD' und OEE' der bei der Neigung um den Winkel φ aufgetauchte resp. untergetauchte Querschnitt, sind ferner S, F, G die bezüglichen Schwerpunkte, $e = SA$ der Abstand zwischen Schwerpunkt und ursprünglichem Angriffspunkt des Auftriebs, a der horizontale Abstand zwischen F und G, ist endlich A' die neue Lage von A, M das Metacentrum, F der ursprünglich eingetaucht gewesene, f der durch die Neigung neu eingetauchte Querschnitt und G das Gewicht des Schiffes, so kann man die Stabilität



(Ph. 143.)

$$\Sigma = G \cdot SM \cdot \sin\varphi = G\left(\frac{fa}{F} + e \sin\varphi\right)$$

setzen; bei kleinem Neigungswinkel wird einfacher, wenn b die Schiffsbreite im Wasserniveau ist,

$$\Sigma = G\varphi\left(\frac{b^3}{12F} + e\right),$$

so dass also die Stabilität desto grösser ist, je grösser das Gewicht, je breiter das Schiff und je tiefer sein Schwerpunkt, bei gleicher Tiefe des Eintauchens, gelegen ist; liegt S über A, ist also e negativ, so findet Stabilität nur noch bis zum Grenzwerth $e = b^3/12F$ statt.

Compressibilität der Flüssigkeiten. Dass die Zusammendrückbarkeit der tropfbaren Flüssigkeiten eine ausserordentlich kleine ist, ist eine aus den verschiedensten alltäglichen Erfahrungen sich ergebende Thatsache. Aber es hat sehr exakter Versuche bedurft, um nachzuweisen, dass sie nicht, wie die

idealen Flüssigkeiten der Theorie, völlig incompressibel sind, und noch exakterer, um diese Compressibilität mit Genauigkeit zu messen. Bei den älteren Versuchen dieser Art scheiterte man entweder daran, dass die die Flüssigkeit enthaltenden Gefässe in Folge des angewandten Drucks zersprangen, oder daran, dass die Flüssigkeit durch die Poren der Gefässwandung hindurchsickerte — so bei den Versuchen von BACON mit einer Hohlkugel von Blei, bei denen der Mitglieder der Accademia del Cimento in Florenz[1]) mit einer silbernen, später sogar stark vergoldeten Hohlkugel; oder endlich daran, dass das Gefäss selbst sich in einer nicht näher zu bestimmenden Weise ausdehnte oder zusammendrückte. Bei den späteren Versuchen wurde daher das Augenmerk wesentlich darauf gerichtet, die Entstehung eines starken einseitigen Drucks auszuschliessen.

Exakt constatirt wurde die Compressibilität der Flüssigkeiten zuerst von CANTON[2]). Bei seinen ersten Versuchen bestimmte er die Höhe der Quecksilbersäule in einem thermometerähnlichen, aber oben offenen Gefässe, und zwar bei einer bestimmten Temperatur. Dann wurde erhitzt, das in Folge dessen völlig mit Quecksilber gefüllte Gefäss oben zugeschmolzen und wieder auf die ursprüngliche Temperatur abgekühlt. Es ergab sich alsdann ein etwas höherer Stand des Quecksilbers. Das konnte nun daran liegen, dass vorher, wo der Luftdruck gewirkt hatte, das Quecksilber etwas zusammengedrückt worden war; es konnte aber auch daran liegen, dass im jetzigen geschlossenen Zustande die Gefässwand durch den äusseren Luftdruck zusammengedrückt wurde. Als nun aber derselbe Versuch mit Wasser angestellt wurde, ergab sich eine grössere Differenz; kam also die Differenz beim Quecksilber zum Theil oder selbst gänzlich auf die zweite Ursache, so konnte doch die Mehrdifferenz bei Wasser nur eine Folge seiner Compressibilität sein.



(Ph. 144.)

Bei seiner zweiten Versuchsreihe liess CANTON den Luftdruck gleichzeitig innen und aussen variiren, indem er das offene Gefäss unter die Glocke einer Luftpumpe brachte; freilich übersah er, dass auch hier eine Correktion wegen des Glases anzubringen ist. Auch hier zeigte sich eine entschiedene Abnahme des Volumens bei Zunahme des Drucks, und zwar bei verschiednen Flüssigkeiten eine sehr verschieden starke. Aehnliche Versuche stellte später PERKINS[3]) an.

Einen wesentlichen Fortschritt machte OERSTED[4]) durch die Construktion seines Piëzometers (Fig. 144). Die zu comprimirende Flüssigkeit befindet sich in dem Glasgefäss G vom Volumen V, reicht eine Strecke weit in die dasselbe fortsetzende enge Röhre hinauf, die nach Volumentheilen (1 Theilstrich $= v$) kalibrirt ist, und wird durch einen kurzen Quecksilberfaden abgeschlossen; das kleine Thermometer L dient zur Bestimmung der Temperatur, die graduirte, unten offene, oben geschlossene Röhre K zur Druckmessung. Wird nun die ganze Vorrichtung in den mit Wasser gefüllten starken Glascylinder E gebracht und nun durch Hineindrehen der Schraube C ein Druck ausgeübt, der sich bis

[1]) Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento. N. Ediz. Firenze 1841. Abschnitt VI.: Esp. int. alla compressione dell'aqua (1692). —

[2]) CANTON, Philos. Transactions of the R. Soc. 1762 und 1764 (auch POGG. Ann. 12, pag. 39).

[3]) PERKINS, Phil. Trans. R. Soc. Bd. 72 (1820) und POGG. Ann. 9, pag. 547 (1827).

[4]) OERSTED, Denkschr. k. Dän. Ak. Bd. 9 (1822). POGG. Ann. 9, pag. 603 (1827).

zu einem solchen von etwa 50 Atmosphären steigern lässt, so erfährt das Gefäss G von innen und aussen genau den gleichen Druck, und es gelangt daher die Compression der Flüssigkeit, wie es scheint, ganz rein zum Ausdruck. Eine Modifikation des Verfahrens besteht darin, dass man (Fig. 145) das Gefäss G umkehrt und, mit der Röhre nach unten, ganz mit Flüssigkeit gefüllt in das Schälchen S mit Quecksilber taucht; Thermometer und Druckmesser muss man dann an einem besondern Brettchen befestigt in den Glascylinder bringen. Bei steigendem Drucke sieht man nun das Quecksilber bei der erstgenannten Anordnung fallen, bei der letztgenannten steigen; die Flüssigkeit in G wird also comprimirt, und zwar, wenn der ursprüngliche Stand beim Theilstrich m war, der jetzige bei n ist, um



(Ph. 145.)

$$\frac{(m-n)v}{V+mv}$$

in Theilen des ursprünglichen Volumens, gleichzeitig ist das Wasser eine bestimmte Anzahl von Theilstrichen in den Druckmesser eingedrungen, und hieraus ergiebt sich der herrschende Druck (s. Art. »Luftdruck«). Nennt man diesen Druck, in Atmosphären ausgedrückt, P und dividirt hiermit obigen Ausdruck, so erhält man die relative Volumenverminderung durch die Einheit des Drucks, d. h. den sogen. Compressibilitätscoëfficienten k. Es ist jedoch zu beachten, dass an der so erhaltenen Formel noch eine wesentliche Correktion anzubringen ist. Obgleich nämlich auf das Gefäss G von innen und von aussen derselbe Druck wirkt, erleidet dasselbe doch, entgegen der Annahme OERSTED's, eine Veränderung. Durch allseitig gleichen Druck wird nämlich ein fester Körper comprimirt, derart, dass er sich selbst ähnlich bleibt, aber alle seine Dimensionen kleiner werden; ist der Körper ein Gefäss, so erfährt folglich auch der Hohlraum desselben eine Verkleinerung, deren Maass der Compressionscoëfficient k' des Glases ist; ohne diese Fehlerquelle wäre die beobachtete Aenderung des Standes entsprechend grösser gewesen, und man findet folglich

$$k = k' + \frac{(m-n)v}{P(V+mv)}.$$

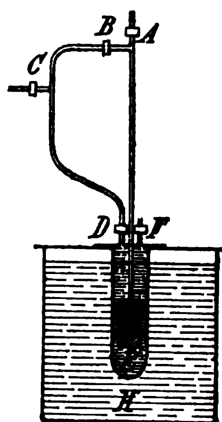
Den hiernach sich ergebenden Uebelstand, dass man den Coëfficienten des betreffenden Glases kennen muss, um den von Flüssigkeiten zu ermitteln, hat man auf verschiedene Weise zu beseitigen gesucht. COLLADON und STURM[1]), welche zuerst auf diese Fehlerquelle aufmerksam machten, und die bei ihrem Apparate im Uebrigen durch manche Verbesserung die Genauigkeit wesentlich erhöhten, versuchten es dadurch, dass sie durch Zugversuche an Glasstäben die Compressibilität zu ermitteln suchten, was jedoch mit grossen Schwierigkeiten verknüpft ist (s. Art. »Elasticität«). Andere wiederum dadurch, dass sie in das Gefäss des Piëzometers einige Glasstücke brachten und nun einen zweiten Versuch anstellten, um gewissermaassen eine zweite Gleichung zu erhalten und so die Unbekannte k' eliminiren zu können; in Wahrheit ist aber die zweite Gleichung mit der ersten identisch, nur dass, wegen des kleineren V, alle Glieder jener in demselben Verhältniss kleiner sind; man erfährt, also auf diese Weise nichts Neues.

Erst REGNAULT[2]) ist es gelungen, das Problem im Wesentlichen zu lösen. Vermittelst seines Apparates (Fig. 146) lässt sich nämlich auf das die Flüssigkeit enthaltende Gefäss ganz nach Willkür entweder nur äusserer oder nur innerer

[1]) COLLADON u. STURM, Ann. chim. phys. (2) 36, pag. 113 (1827); POGG. Ann. 12, pag. 93 (1828).

[2]) REGNAULT, Mém. de l'Ac. Franç. 21, pag. 429 (1847).

oder gleichzeitig äusserer und innerer Druck ausüben. Die beiden Fälle, in welchen der Druck einseitig ist, setzen freilich voraus, dass das Material des Gefässes homogen und seine Gestalt von einfacher Regelmässigkeit sei, Bedingungen, die man am besten durch Metallkugeln oder Metallcylinder mit ebenen oder halbkugeligen Enden, deren innere und äussere Dimensionen genau gemessen sind, erfüllen kann. Die drei genannten Fälle lassen sich mit Hilfe der Hähne *A*, *B*, *C*, *D*, *F* verwirklichen, von denen *A* und *F* mit der freien Luft, *C* mit einem mit comprimirter Luft gefüllten Gefässe communiciren. Sind *A*, *C*, *D* offen, aber *B* und *F* geschlossen, so wird *G* von aussen gedrückt; dies giebt die Compression des Metalles. Sind *A* und *F* geschlossen, *B*, *C* und *D* geöffnet, so findet doppelseitiger Druck statt; es ergiebt sich die Differenz der Compressionen von Metall und Flüssigkeit. Die Combination beider Versuche führt zur Kenntniss von *k*. Wenn man schliesslich noch *A* und *D* schliesst, *B* und *C* öffnet, so erhält man nur inneren Druck und kann dies zur Controle der beiden ersten Versuche benutzen. Es sei noch bemerkt, dass der ganze Apparat zur Constanterhaltung der Temperatur in dem Bade *H* steht.



(Ph. 146.)

Die Methoden von CANTON, REGNAULT und OERSTED sind theils mit den Apparaten dieser Forscher selbst, theils mit modificirten Apparaten von GRASSI[1]), AMAGAT[2]), AMAURY und DESCAMPS[3]), CAILLETET[4]), QUINCKE[5]), PAGLIANI und VICENTINI[6]), M. SCHUMANN[7]), RÖNTGEN und SCHNEIDER[8]), F. BRAUN[9]), PAGLIANI und PALAZZO[10]) u. A. m. zu zahlreichen Bestimmungen, und zwar für verschiedene Flüssigkeiten, benutzt worden, wobei es sich um Bestimmung theils der wahren Compressibilität, theils der scheinbaren Compressibilität (d. h. ohne Correction für die Volumenänderung des Gefässes), theils endlich der relativen scheinbaren Compressibilität, d. h. der scheinbaren Compressibilität verschiedener Flüssigkeiten, bezogen auf die des Wassers bei gleichem Druck und Temperatur als Einheit, handelte. Bei dieser letzten, von RÖNTGEN und SCHNEIDER ausgeführten Bestimmungsweise erspart man den sonst erforderlichen voluminösen Druckmessungsapparat; man bringt vielmehr einfach in den Glascylinder zwei ganz gleiche Piëzometer, und zwar eins mit Wasser, eins mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, wobei ersteres auch gleichzeitig als Thermometer dienen kann. Kennt man dann die absolute scheinbare Compressibilität des Wassers, so kann man offenbar die der Flüssigkeiten berechnen.

Die Beobachter beschränkten sich ferner nicht auf einfache Messungen der

---

1) GRASSI, Ann. chim. phys. (3) 31, pag. 438. 1851.

2) AMAGAT, Ann. chim. phys. (5) 11 (1877).

3) AMAURY u. DESCAMPS, Compt. rend. 68, pag. 1564 (1869).

4) CAILLETET, Compt. rend. 75, pag. 77 (1872).

5) QUINCKE, WIED. Ann. 19, pag. 401 (1883).

6) PAGLIANI u. VICENTINI, N. Cim. (3) 16, pag. 27 (1884).

7) M. SCHUMANN, WIED. Ann. 31, pag. 14 (1887).

8) RÖNTGEN u. SCHNEIDER, WIED. Ann. 29, pag. 165 (1886); 31, pag. 1000 (1887); 33, pag. 644 (1888).

9) BRAUN, Sitz.-Ber. bayr. Akad. 1886, pag. 208; WIED. Ann. 30, pag. 264 (1887).

10) PAGLIANI u. PALAZZO, Atti R. Acc. Torino 19 (1884). (Gemische von Aethylalkohol und Wasser).

Compressibilität, sondern verfolgten auch deren Aenderungen für verschiedene Temperaturen und Drucke. Bei höheren Drucken mussten begreiflicher Weise einige Abänderungen getroffen werden; so bestimmte z. B. CAILLETET den Punkt, bis zu welchem das Quecksilber vorgedrungen war, dadurch, dass er die Innenwand der engen Röhre vergoldete und nachträglich bestimmte, bis zu welcher Stelle das Gold aufgelöst worden war; ferner den Druck mit dem DESGOFFE'schen Manometer (s. ob.) Aber auch bei gewöhnlichen Drucken weisen die Apparate der verschiedenen Beobachter manche Eigenthümlichkeiten auf. So diente z. B. bei RÖNTGEN und SCHNEIDER nicht Quecksilber, sondern Luft zur Absperrung der in den Piëzometern enthaltenen Flüssigkeiten. Die CANTON'sche Methode der Aenderung des Luftdrucks wurde von QUINCKE ganz wesentlich verbessert u. s. w.

Endlich ist noch der Methode von WERTHEIM [1]), aus der Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten deren Compressibilität zu berechnen, Erwähnung zu thun, — einer Methode, die aber nach WERTHEIM selbst besser in umgekehrter Weise Anwendung findet.

Im Folgenden sind einige der wichtigeren Ergebnisse dieser Untersuchungen zusammengestellt; *k* bedeutet die wahre, *k'* die scheinbare, *c* die relative scheinbare Compressibilität.

Tabelle der Compressibilität der Flüssigkeiten.

Flüssigkeit	Temperatur	*k*	Beobachter
Wasser	—	0·000046	OERSTED
„	—	0·0000478	RÉGNAULT
„	—	0·0000513	COLLADON
„	0°	0·0000503	GRASSI u. QUINCKE
„	0°	0·0000512	RÖNTGEN u. SCHNEIDER
Meerwasser	17·5°	0·0000436	GRASSI
Quecksilber	—	0·0000027	OERSTED
„	—	0·0000050	COLLADON
„	0°	0·0000029	GRASSI
Aether	0°	0·000111	„
„	0°	0·0001156	QUINCKE
Alkohol	—	0·0000966	COLLADON
„	7·3°	0·0000828	GRASSI
„	0°	0·0000828	QUINCKE
Methylalkohol	13·5°	0·0000913	GRASSI
Ammoniak	—	0·0000347	COLLADON
Terpentin	—	0·000073	„
„	0°	0·0000582	QUINCKE
Chloroform	8·5°	0·0000625	GRASSI
Kochsalz, schwache Lösung	18·5°	0·0000321	„
„ starke Lösung	18°	0·0000257	„
Jodkaliumlösung	15·5°	0·0000260	„
Sodalösung	16·6°	0·0000297	„
Salpetersäure	—	0·000032	COLLADON
Schwefelsäure	—	0·000032	„
$SO_3 + 2HO$	13·6°	0·0000242	GRASSI
$SO_3 + 5HO$	14·7°	0·0000279	„
$SO_3 + 10HO$	14·6°	0·0000315	„

[1]) WERTHEIM, Ann. chim. phys. (3) 23, pag. 434 (1848).

Wasser.

Grassi		Pagliani u. Vicentini		Röntgen u. Schneider	
Temp.	$k \times 10^7$	Temp.	$k \times 10^7$	Temp.	$k \times 10^7$
0·0	503	0·0	503	0·0	512
1·5	515	2·4	496	9·0	481
4·8	499	15·9	450	18·0	462
10·1	480	49·3	403		
13·4	477	61·0	389		
18·0	462	66·2	389		
25·0	456	77·4	398		
34·5	453	99·2	409		
43·0	442				
53·0	441				

Aether.

Temp.	k
0·0	0·000111 (Grassi)
14·0	0·000140 „
13·7	0·000168 (Amagat)
100	0·000560 „

Methylalkohol.

Temp.	k
14·7	0·000104 (Amagat)
100	0·000221 „

Aethylalkohol.

Temp.	k
14	0·000101 (Amagat)
99·4	0·000202 „

Amylalkohol.

Temp.	k
13·8	0·000082 (Amagat)
99	0·000154 „

Schwefelkohlenstoff.

Temp.	k
15·6	0·000087 (Amagat)
100	0·000174 „

Aceton.

Temp.	k
14	0·000110 (Amagat)
99	0·000280 „

Oele und andere Flüssigkeiten (QUINCKE).

Substanz	$k \cdot 10^7$ für $t = 0$	$k \cdot 10^7$ für $t = t'$	t'	Temp.-Coëfficient m
Glycerin	252·4	251·0	19·0	— 0·000292
Rüböl	480·2	581·8	17·8	+ 0·01189
Mandelöl	482·1	563·0	19·7	0·008519
Olivenöl	485·9	617·4	18·3	0·01479
Wasser	503·0	456·3	22·9	— 0·004049
Schwefelkohlenstoff	539·2	637·8	17·0	+ 0·01076
Terpentinöl	581·7	779·3	18·6	0·01830
Benzol aus Benzoesäure	597·0	661·0	16·8	0·009945
Benzol	585·3	628·4	16·1	0·004581
Steinöl	649·9	745·0	19·2	0·007607
Alkohol	828·2	959·5	17·5	0·01113
Aether	1155·7	1342·3	14·3	0·01127
„	—	1477·2	21·4	0·01302

Schwefelsäurelösungen (RÖNTGEN und SCHNEIDER).

Proc.-Geh.	0·00	6·57	12·70	35·76	47·58	62·37	76·57	80·33	84·49	95·40	98·70
c	1·000	0·969	0·921	0·726	0·681	0·619	0·568	0·567	0·596	0·682	0·755

Relative scheinbare Compressibilität c von Lösungen bei 18° C. (RÖNTGEN und SCHNEIDER).

Anmerkung. Bei I. kamen auf 1 g Wasser 1500, bei II. 700 Molekeln der gelösten Substanz; die Lösung, auf welche sich eine Zahl bezieht, erhält man durch Vereinigung der betr. Kopf-Ueberschrift mit der betr. Seiten-Ueberschrift.

I.

	H	Am	Li	K	Na
J	—	0·910	0·888	0·869	0·863
NO_3	0·958	0·908	0·870	0·863	0·853
Br	0·960	0·910	0·869	0·862	0·851
Cl	0·949	0·901	0·858	0·848	0·837
OH	1·000	0·972	0·793	0·777	0·770
SO_4	0·920	0·741	0·655	—	—
CO_3	—	—	—	0·638	0·631

II.

	H	Am	Li	K	Na
J	—	0·954	0·940	0·932	0·924
NO_3	0·981	0·954	0·934	0·930	0·922
Br	0·981	0·953	0·934	0·930	0·923
Cl	0·974	0·945	0·928	0·919	0·917
OH	1·000	0·992	0·895	0·884	0·881
SO_4	0·970	0·853	0·813	0·804	0·803
CO_3	—	—	—	0·798	0·797

Wahre Compressibilität k von Chloridlösungen bei 15° C. nebst dem Temperaturcoëfficienten m für 1° C. (M. SCHUMANN).

Anmerkung. Der Procentgehalt p bedeutet die Gewichtsmengen von wasserfreiem Salz in 100 Gewichtstheilen der Lösung.

Chlornatriumlösungen.

p	$k \cdot 10^7$	m
1·32	453	— 0·005912
3·51	440	—
13·53	339	— 0·003358
18·18	333	+ 0·000859
22·16	282	+ 0·000654
26·21	255	+ 0·001614

Chlorcalciumlösungen.

p	$k \cdot 10^7$	m
3·86	488	+ 0·000593
8·01	458	+ 0·007360
14·08	365	+ 0·000805
22·50	308	— 0·001349
23·06	304	+ 0·000630
28·23	280	+ 0·006908

Chlorkaliumlösungen.

p	$k \cdot 10^7$	m
2·52	481	+ 0·000145
5·35	424	— 0·004772
10·68	400	— 0·005267
16·81	354	— 0·002283

Chlorbariumlösungen.

p	$k \cdot 10^7$	m
2·11	458	— 0·005640
4·52	441	— 0·003864
10·84	418	— 0·002801
18·44	386	— 0·000654
20·16	362	— 0·001542

Chlorammoniumlösungen.

p	$k \cdot 10^7$	m
2·29	459	— 0·006604
11·62	415	— 0·002847
17·58	411	— 0·000764
21·58	365	— 0·000891

Chlorstrontiumlösungen.

p	$k \cdot 10^7$	m
1·24	460	— 0·009482
6·43	431	— 0·003797
17·70	370	+ 0·002599
27·26	319	+ 0·002790

Zusammenstellung für 0° und 15°, interpolirt für ganze Procente.

Lösung von	bei 0°					bei 15°				
	$p = 5$	10	15	20	25	$p = 5$	10	15	20	25
Na Cl	455	397	348	306	258	425	375	337	309	263
K Cl	460	437	386	351	—	431	403	367	354	—
Am Cl	487	447	424	400	—	446	423	413	383	—
$CaCl_2$	464	395	355	328	283	480	427	358	325	295
$BaCl_2$	465	440	411	372	—	440	421	400	364	—
$SrCl_2$	479	425	381	344	317	439	412	385	358	331

Lösungen nach Braun.

Lösung	spec. Gew.	$k \cdot 10^6$
NH_4Cl	1·073	38
Alaun	1·030	46
Na Cl	1·212	27
Na_2SO_4 + 10 aq. . .	1·045	43

Einfluss des Drucks auf die Compressibilität der Flüssigkeiten.

Wasser.

Temp.	Druck in Atm.	k
8	3	0·0000475 (P. u. V.)
8	705	0·0000469 (Cailletet)

Schwefelkohlenstoff.

15	> 10	0·000087 (Cailletet)
8	607	0·000100 „

Aethylalkohol.

14	> 10	0·000101 (Cailletet)
11	680	0·000075 „

Aether (Amagat).

bei 14°		bei 100°	
Druck	k	Druck	k
8·5—13·7	0·000168	8·5—13·9	0·000560
13·7—19·5	0·000169	13·9—19·6	0·000540
19·5—25·4	0·000169	19·6—25·6	0·000525
25·4—30·6	0·000162	25·6—30·6	0·000489
30·6—36·5	0·000152	30·6—36·7	0·000474
630	0·000146		

(bei 10°) (Cailletet).

Aus diesen Zahlenangaben sind folgende Schlüsse abzuleiten:

1) Die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten ist eine überaus geringe; die Compression pro Atmosphäre Ueberdruck beläuft sich im Durchschnitt nur auf wenige Hunderttausendtel des ursprünglichen Volumens, und selbst durch die grössten verfügbaren Drucke kann man letzteres nur um wenige Procent verringern.

2) Die Compressibilität ist am kleinsten bei Quecksilber, am grössten (unter den obigen Flüssigkeiten) bei Aether.

3) Die Compressibilität von wässrigen Lösungen von Salzen ist kleiner als diejenige des Wassers und desto kleiner, je concentrirter die Lösung ist. Nach SCHUMANN giebt es einige Ausnahmen von dieser Regel, nach RÖNTGEN und SCHNEIDER nicht.

4) Zwischen der Compressibilität der Salzlösungen und ihrer chemischen und sonstigen physikalischen Natur bestehen gewisse, hier nicht näher zu erörternde Beziehungen.

5) Bei Schwefelsäurelösungen nimmt die Compressibilität mit wachsender Concentration bis zu 78% ab, dann wieder zu.

6) Die Compressibilität der Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur bei fast allen Flüssigkeiten beträchtlich zu (zwischen 0° und 100° auf das 2 bis 5fache); ausgenommen sind: 1) Wasser, wo sie mit steigender Temperatur, wenn auch weniger beträchtlich, abnimmt; nach GRASSI würde sie hier zwischen 0° und 4° ein Maximum, nach PAGLIANI und VICENTINI zwischen 61° und 66° ein Minimum haben. 2) Wässrige Lösungen, die sich verschieden, aber überwiegend wie das Wasser verhalten. 3) Glycerin, dessen Compressibilität mit wachsender Temperatur ein wenig abzunehmen scheint.

7) Die Compressibilität der Flüssigkeiten ändert sich mit dem Druck; als feststehend kann jedoch hier nur bezeichnet werden, dass sie beim Aether mit steigendem Druck abnimmt, und diese Abnahme ist bei höherer Temperatur eine grössere und beginnt hier schon bei kleineren Drucken sich zu zeigen, als bei niederer Temperatur.

In der letzteren Hinsicht ist noch eine aus Versuchen von ANDREWS[1]) sich ergebende Tabelle über die Zusammendrückbarkeit der flüssigen Kohlensäure bei 13° anzuführen.

Druck in Atm.	50	60	70	80	90
k	0·00590	0·00174	0·00096	0·00066	0·00044

Die flüssige Kohlensäure ist also verhältnissmässig sehr stark zusammendrückbar; aber die Zusammendrückbarkeit nimmt mit steigendem Druck rapide ab, wobei allerdings zu berücksichtigen ist, dass ein Theil dieser grossen Compressibilität und ihrer Abnahme auf Rechnung der der Kohlensäure beigemengten Spuren von Luft zu setzen ist.

Der Versuch, die obigen Zahlen zu einer Formel zu vereinigen, welche die Compressibilität einer Flüssigkeit in ihrer Abhängigkeit von Druck und Temperatur angiebt, ist bisher nur für Wasser, und zwar von TAIT[2]) gemacht worden, aber auch hier mit so beschränktem Erfolge, dass die Wiedergabe der Formel nicht nöthig erscheint.

---

[1]) ANDREWS, Phil. Trans. R. Soc. 1869.

[2]) TAIT, Proc. R. Soc. Edinburgh 1883/84; Properties of matter, deutsche Ausg. Wien 1888, pag. 191.

Mathematische Theorie des Gleichgewichts der Flüssigkeiten[1]).

Diese Theorie geht aus von den Gleichungen der allgemeinen Mechanik, indem sie in dieselben zunächst die Verallgemeinerung einführt, dass der Körper nicht nur als Ganzes, sondern dass auch seine Theile gegeneinander den Ort ändern können, und indem sie dann die Specialisirung einführt, dass jene relativen Theilbewegungen in der für die tropfbaren Flüssigkeiten charakteristischen Weise erfolgt. Das erstere geschieht, indem zu den äusseren, auf die Massentheile der Flüssigkeit wirkenden Kräfte die auf die Oberfläche derselben, aber auch auf jedes Flächentheilchen im Innern wirkenden Druckkräfte hinzugefügt werden, das letztere geschieht dadurch, dass alle diese Druckkräfte auf einen einzigen von Ort zu Ort variirenden, aber an jedem Ort für alle Richtungen gleichen und senkrechten Druck reducirt werden.

Es seien xyz die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes und folglich, wenn t die Zeit ist, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ die Componenten seiner Beschleunigung; ferner seien XYZ die Componenten der äusseren, auf die Masseneinheit der Flüssigkeit wirkenden Kraft und folglich, wenn ρ die Dichte und $d\tau$ ein Volumenelement der Flüssigkeit ist, $\rho X d\tau$, $\rho Y d\tau$, $\rho Z d\tau$ die Componenten der auf das Massenelement wirkenden äusseren Kraft; endlich seien $X_n\, Y_n\, Z_n$ die Componenten der auf ein Oberflächenelement ds, dessen Normale nach innen die Richtung n hat, wirkenden Druckkraft. Das D'ALEMBERT'sche Princip (s. Art. »Dynamik«, pag. 68) ist dann in den Gleichungen

$$\int\rho\frac{d^2x}{dt^2}d\tau = \int\rho X d\tau + \int X_n ds, \quad \int\rho\frac{d^2y}{dt^2}d\tau = \int\rho Y d\tau + \int Y_n ds$$
$$\int\rho\frac{d^2z}{dt^2}d\tau = \int\rho Z d\tau + \int Z_n ds \tag{1}$$

ausgesprochen. Die Grössen $X_n\, Y_n\, Z_n$ sind zwar Componenten, trotzdem aber wegen des Index n noch von einer Richtung abhängig, und dasselbe gilt von den Flächenelementen ds, deren jedem eine andere Richtung zukommt; man muss also diese Grössen durch reine Zahlengrössen ersetzen, ehe man mit den Gleichungen (1) weiter operiren kann. Dies erreicht man auf folgende Weise. An dem Orte xyz denke man sich 3 Flächenelemente, deren Normalen die 3 Coordinatenaxen sind; in Consequenz der bisherigen Bezeichnungen sind die Componenten der auf dieselben wirkenden Drucke mit $X_x\, Y_x\, Z_x$ für das erste, mit $X_y\, Y_y\, Z_y$ für das zweite, und mit $X_z\, Y_z\, Z_z$ für das dritte Flächenelement zu bezeichnen. Es lassen sich dann, wie eine einfache Betrachtung lehrt, die auf das beliebige Flächenelement mit der Normalenrichtung n wirkenden Druckcomponenten durch die eben eingeführten ausdrücken, und zwar, wenn (nx) der Winkel zwischen der Normale und der X-Axe u. s. w. ist, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \\ Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) \\ Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz). \end{aligned} \tag{2}$$

Diese Gleichungen dienen nicht nur zur Fortschaffung der Grössen $X_n\, Y_n\, Z_n$, sondern, vermöge der bekannten, für irgend eine Funktion $F(x, y, z)$ bestehenden Relation

[1]) Hiervon kann an dieser Stelle nur eine kurze Uebersicht gegeben werden; näheres s. in SCHELL, Th. d. Bew. u. Kräfte, Leipz. 1880, Bd. 1, pag. 609 ff. F. NEUMANN, Vorl. üb. d. Th. d. Potentials, Leipz. 1887, pag. 86 ff. KIRCHHOFF, Vorl. üb. Mechanik, u. in andern Lehrbüchern.

$$\int F(x, y, z) \cos(nx)\, ds = -\int \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} d\tau,$$

welche man auf jede der 9 Grössen X_x u. s. w. anwenden kann, auch zur Fortschaffung der Oberflächenintegrale in den Gleichungen (1). Dieselben verwandeln sich dann in Gleichungen zwischen lauter Raumintegralen, die für die ganze Flüssigkeit, aber auch für irgend einen Theil derselben, also auch für das Raumelement $d\tau$ Geltung haben; man kann folglich die Integrale weglassen und erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 x}{dt^2} &= \rho X - \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) \\ \rho \frac{d^2 y}{dt^2} &= \rho Y - \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) \\ \rho \frac{d^2 z}{dt^2} &= \rho Z - \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Hiermit ist die Verallgemeinerung der allgemeinen Bewegungsgleichungen starrer Körper auf beliebige Körper durchgeführt. Nun gehen wir an die Specialisirung, und zwar einmal für Flüssigkeiten, sodann für den Zustand des Gleichgewichts. Bei idealen Flüssigkeiten (s. Art. »Aggregatzustände«, pag. 211) ist der Druck überall normal auf der gedrückten Fläche; ein Flächenelement, dessen Normale die Richtung der X-Axe hat, erfährt also einen Druck, dessen Richtung ebenfalls die der X-Axe ist, d. h. seine beiden andern Componenten Y_x und Z_x sind null. Ebenso ist offenbar $X_y = 0$, $Z_y = 0$ und $X_z = 0$, $Y_z = 0$. Ferner ist bei idealen Flüssigkeiten der Druck in allen Richtungen der gleiche; es ist also $X_x = Y_y = Z_z = p$, wenn p der Druck ist. Endlich sind im Zustande des Gleichgewichts die Componenten der Beschleunigung gleich null. Somit werden die Gleichungen des Gleichgewichts einer idealen Flüssigkeit folgende:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ Y &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ Z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichungen zeichnen sich, zumal da ρ bei tropfbaren Flüssigkeiten so gut wie konstant ist, durch grosse Einfachheit aus. Auch in Worten kann man sie sehr einfach aussprechen, wenn man sich rechts den Faktor $\frac{1}{\rho}$ unter die Differentialquotienten gebracht denkt und sich daran erinnert, dass man, wenn man die drei Kraftcomponenten aus einer und derselben Grösse durch Differentiation nach x, y, z ableiten kann, diese Grösse das Potential nennt. Man kann dann sagen: Gleichgewicht von Flüssigkeiten kann nur bestehen, wenn die Kräfte ein Potential U haben, und es besteht dann zwischen ihm, dem Druck und der Dichte die Beziehung $U = p/\rho$ oder, da eine Constante p_0 beliebig hinzugefügt werden kann:

$$p = \rho U + p_0. \tag{5}$$

Zu den für die ganze Masse der Flüssigkeit geltenden Gleichungen (4) und (5) treten nun noch die Grenzbedingungen, welche an der Oberfläche der Flüssigkeit resp. in den Flächen, in welchen sie an Flüssigkeiten oder Gase grenzt, erfüllt sein müssen. Dieselben beschränken sich hier auf die eine, dass der Druck stetig sein, also zu beiden Seiten eines Punktes der Grenze denselben Werth haben muss. Das ist nur möglich, wenn sich der Druck auch längs der Grenz-

fläche nicht ändert; denn sonst gelangte man, von einem die Bedingung erfüllenden Punkte ausgehend, vermöge der Gleichungen $dp_1 = \rho_1 dU$ und $dp_2 = \rho_2 dU$ schon für einen benachbarten Punkt der Grenzfläche zu beiderseits verschiedenen Drucken; es muss also $dp_1 = dp_2 = 0$, also $p = const$ und folglich nach Gleichung (5) auch $U = const$ sein, woraus weiter folgt, dass die Kraft überall auf der Grenze senkrecht steht. Die Flächen gleichen Drucks und gleichen Potentials heissen Niveauflächen (s. o. pag. 344); zu denselben gehört hiernach die Oberfläche, genauer gesagt die freie Oberfläche (im Gegensatz zu der Fläche, in welcher die Flüssigkeit an feste Körper grenzt, und in welcher für das Gleichgewicht eine besondere Bedingung zu erfüllen ist).

Aus den Gleichungen und Grenzbedingungen lassen sich die meisten hydrostatischen Erscheinungen in so einfacher Weise ableiten, dass es nicht nothwendig ist, hier des näheren darauf einzugehen. Wirkt z. B. nur die Schwere, so muss die Oberfläche der Flüssigkeit eine horizontale Ebene sein, ausser wenn sie so ausgedehnt ist, dass die Krümmung der Erde in Betracht kommt. Von den Gleichungen (4) bleibt dann nur eine, etwa die letzte, übrig und giebt

$$g = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}, \quad \text{also} \quad p = g\rho z + p_0,$$

wo g die Schwere und p_0 der auf der Oberfläche lastende Druck ist; für $p_0 = 0$ wird $p = g\rho z$, d. h. der Druck auf irgend ein Flächenelement im Innern gleich dem Gewichte der darüber lastenden Flüssigkeitssäule. Aehnlich ergeben sich die Gesetze des Seitendrucks, des Auftriebs u. s. w.

Gleichgewichtsfiguren rotirender Flüssigkeitsmassen. Man kann nun aber auch gewisse Bewegungserscheinungen der Flüssigkeiten nach statischen Principien behandeln, wenn nur der Zustand ein stationärer ist und keine Beschleunigungen vorkommen. Bei der gleichförmigen Rotation um eine Axe z. B. braucht man, wie schon wiederholt erwähnt, zu diesem Zwecke nur die Centrifugalkraft einzuführen. In dem schon oben (pag. 345) behandelten Falle, wo die Axe vertikal und zugleich Figuraxe der Flüssigkeit ist, und diese sich in einem Gefäss befindet, wird, da das Potential der Schwere $U_1 = gz$, das der Centrifugalcomponenten ($X_2 = w^2 x$ und $Y_2 = w^2 y$) aber $U_2 = \frac{1}{2} w^2 (x^2 + y^2)$ ist (w Winkelgeschwindigkeit), das gesammte Potential

$$U = U_1 + U_2 = gz + \tfrac{1}{2} w^2 (x^2 + y^2),$$

sodass man für die Oberfläche, für welche doch $U = const$ sein muss,

$$z = -\frac{w^2}{2g}(x^2 + y^2) + const$$

erhält, d. h. ein mit dem Scheitel nach unten gekehrtes Rotationsparaboloid.

Ist die Flüssigkeit auf irgend eine Weise der Schwere entzogen und bloss ihrer eignen Anziehung nach dem NEWTON'schen Gesetze unterworfen, was bei den Weltkörpern, soweit sie flüssig waren oder sind, der Fall ist, sich aber auch künstlich z. B. mit Oeltropfen in einer gleich schweren Wasser-Alkoholmischung verwirklichen lässt, so handelt es sich um die Ermittelung nicht nur eines Theiles sondern ihrer gesammten Oberfläche, und somit schliesslich um Ermittelung ihrer Gestalt; d. h. es ist zu fragen: Welches sind die Gestalten, welche, der Flüssigkeit ursprünglich gegeben, Bestand haben, wenn die Flüssigkeit gleichförmig und mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit rotirt? Thatsächlich wird ja eine dieser Gleichgewichtsgestalten erst nach begonnener Rotation sich allmählich herstellen; man muss aber die Aufgabe in der obigen Weise fassen, um sie hydrostatisch behandeln zu können; und selbst in dieser Fassung kann man es nur

nach der Methode des Probirens, d. h. indem man eine bestimmte Gestalt annimmt und frägt, ob und unter welchen Umständen sie Gleichgewichtsfigur sein kann.[1])

Es liegt nahe, mit dem Ellipsoid die Probe zu machen. Die überall gleiche Dichte sei ρ, die Gravitationsconstante, d. h. die Anziehung, welche zwei Theilchen der Flüssigkeit je von der Masse 1 im Abstande 1 aufeinander ausüben, sei ε, die Halbaxen seien abc, w die Winkelgeschwindigkeit, C eine Constante, s eine Integrationsvariable und zur Abkürzung

$$W = \sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)} \tag{6}$$

gesetzt. Dann ist das Potential des Ellipsoids auf einen seiner eigenen Punkte

$$U_1 = \pi\varepsilon\rho\int_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{W},$$

ferner das Potential der Centrifugalkräfte wie oben $U_2 = \frac{1}{2}w^2(x^2+y^2)$, wenn die Z-Axe Drehungsaxe ist. Also wird die Oberflächengleichung

$$\left(\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)W}-\frac{w^2}{2\pi\varepsilon\rho}\right)x^2+\left(\int_0^\infty\frac{ds}{(b^2+s)W}-\frac{w^2}{2\pi\varepsilon\rho}\right)y^2$$

$$+\left(\int_0^\infty\frac{ds}{(c^2+s)W}-\frac{w^2}{2\pi\varepsilon\rho}\right)z^2=\int_0^\infty\frac{ds}{W}-C.$$

Soll diese Gleichung mit der Ellipsoidgleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{7}$$

übereinstimmen, so müssen die Coëfficienten von x^2, y^2, z^2 für sich übereinstimmen. Man erhält also drei Gleichungen, und aus diesen durch Elimination von C und nach einigen Umformungen die beiden Gleichungen

$$(b^2-a^2)\left[\int_0^\infty\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)W}-\int_0^\infty\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{c^2}\right)W}\right]=0 \tag{8}$$

$$\frac{w^2}{2\pi\varepsilon\rho}=\frac{a^2-c^2}{a^4c^2}\int_0^\infty\frac{s\,ds}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)W}=\frac{b^2-c^2}{b^4c^2}\int_0^\infty\frac{s\,ds}{\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)W}. \tag{9}$$

Die Gleichung (8) wird offenbar am einfachsten durch die Annahme $b^2=a^2$ befriedigt, und da hiermit aus (9) sich

$$\frac{w^2}{2\pi\varepsilon\rho}=\frac{a^2-c^2}{a^4c^2}\int_0^\infty\frac{s\,ds}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)^2\left(1+\frac{s}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

also ein reelles w ergiebt, so giebt es in der That Rotationsellipsoide, welche mit der Figuraxe als Drehungsaxe der Flüssigkeit, Gleichgewichtsfiguren sind, und zwar sind es nothwendig abgeplattete, da w nur für $a>c$ reell wird. Führt man die »quadratische Abplattung« λ[2]) und andre Abkürzungen durch die Gleichungen

[1]) Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren wurde namentlich ausgeführt durch CLAIRAUT in dem Buche »Théorie de la figure de la terre« Paris 1743 (Neue Ausg. 1808), durch LAGRANGE (in verschiedenen seiner Schriften) und durch JACOBI (s. u.).

[2]) »Quadratische Abplattung« im Gegensatz zu der schlechthin als »Abplattung« bezeichneten »linearen Abplattung« $\lambda'=\frac{a-c}{c}$; für kleine Abplattungen wird $\lambda^2=\frac{(a-c)(a+c)}{c^2} = 2\frac{a-c}{c}$, also $\lambda'=\frac{\lambda^2}{2}$; s. w. u.

$$u = \frac{s}{c^2} \qquad \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}} = \lambda \qquad v = \frac{w^2}{2\pi\varepsilon\rho} \tag{10}$$

ein, so erhält man

$$v = \lambda^2 \int_0^\infty \frac{u\,du}{(1 + \lambda^2 + u^2)(1 + u)^{3/2}} = \frac{3 + \lambda^2}{\lambda^3}\left(arc\, tang\,\lambda - \frac{3\lambda}{3 + \lambda^2}\right)$$

oder auch noch einfacher

$$v = \frac{(3 + \lambda^2)\, arc\, tang\,\lambda - 3\lambda}{\lambda^3}. \tag{11}$$

Aus dieser Gleichung kann man mittelst des graphischen Verfahrens die einem gegebenen v, also nach der dritten Gleichung (10) einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit entsprechenden Abplattungen, d. h. Gestalten der Rotationsellipsoide bestimmen. Das Ergebniss ist folgendes: Zwischen den Grenzen $v = 0$ und $v_{max.} = 0{\cdot}2246$, d. h. bis zu einer Winkelgeschwindigkeit $w_{max.} = \sqrt{0{\cdot}4492\,\pi\varepsilon\rho}$ giebt es zwei verschiedene Rotationsellipsoide als Gleichgewichtsfiguren; für $w = 0$, d. h. sehr kleine Winkelgeschwindigkeit ist das eine nahezu eine Kugel, das andre nahezu eine kreisförmige Scheibe; mit wachsendem w nimmt die Abplattung der Kugel ab, die der Scheibe zu, und für $w = w_{max.}$ werden sie identisch, und die Abplattung $\lambda = 2{\cdot}5293$. Bei grösserer Winkelgeschwindigkeit endlich kann kein Rotationsellipsoid Gleichgewichtsfigur sein.[1])

Die Gleichung (8) zeigt, da ihre linke Seite ausser dem Faktor $b^2 - a^2$ noch einen zweiten enthält, die Möglichkeit, dass auch für $b \gtrless a$ eine Lösung existire, d. h. dass auch ein dreiaxiges Ellipsoid Gleichgewichtsfigur sei. Setzt man wieder $s/c^2 = u$ und führt die neuen Zeichen s und t für die Axenverhältnisse $s = c^2/b^2$, $t = c^2/a^2$ ein, so kann man aus den Gleichungen (8) und (9) Gleichungen ableiten, deren erste in der That durch ein dreiaxiges Ellipsoid, aber auch nur durch eines erfüllt wird, falls nur die kleinste Axe die Drehungsaxe ist, und falls nicht nur $s < 1$ und $t < 1$, sondern sogar $s + t < 1$ ist. Die zweite der neuen Gleichungen lehrt dann wieder, dass die konstatirte Existenz auf gewisse Grenzen von w beschränkt ist, und zwar kann ein dreiaxiges Ellipsoid nur Gleichgewichtsfigur sein, wenn $v < 0{\cdot}1871$, also die Winkelgeschwindigkeit kleiner als $\sqrt{0{\cdot}1871 \cdot 2\pi\varepsilon\rho}$ ist. Ist sie sehr klein, so ist $s = 1$, $t = 0$, d. h. die kleinere der äquatorialen Axen gleich der Drehungsaxe, die grössere sehr lang, die Figur ist also ein Kreiscylinder, der sich um seine senkrecht zur Figuraxe gelegte Mittellinie dreht. Nimmt die Geschwindigkeit zu, so wird die kleinere äquatoriale Axe grösser, die grosse kleiner, und für $v = v_{max.}$ sind sie einander gleich und das Ellipsoid mit einem der beiden diesem v entsprechenden Rotationsellipsoide identisch geworden. Das dreiaxige Gleichgewichtsellipsoid heisst nach seinem Entdecker das JACOBI'sche Ellipsoid[2]).

Endlich hat MATTHIESSEN[3]) gezeigt, dass es zwischen $v = 0$ und $v = 0{\cdot}5$ noch zwei Cylinder, deren Axe die Drehungsaxe ist, giebt, nämlich einen mit

---

[1]) Das Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur fand MACLAURIN (Treatise on fluctions, Lond. 1742, also schon vor CLAIRAUT's Schrift). Eine Tabelle, welche die Beziehungen zwischen λ und w darstellt, sehe man bei THOMSON u. TAIT, Hdb. d. th. Phys. 2, pag. 318.

[2]) C. G. J. JACOBI, POGG. Ann. 33, pag. 229 (1834); ferner ist zu verweisen auf LIOUVILLE, J. de l'école polyt. 23, pag. 289 (1835); C. O. MEYER, CRELLE's J. 24, pag. 44 (1842), und TODHUNTER, Prc. R. S. Lond. 19, pag. 42 (1870—71).

[3]) MATTHIESSEN, Ueb. d. Gleichgewichtsfiguren rotirender Flüssigkeiten. Kiel 1857. — Weitere Untersuchungen des Verf. Kiel 1860; Z. f. Math. u. Phys. 16, pag. 290. 1871, und 28, pag. 31. 1883.

kreisförmigem und einen mit elliptischem Querschnitt; zwischen $v = 0{\cdot}5$ und $v = 1$ dagegen nur den ersteren; unter Umständen kann der Cylinder auch hohl sein.

Das Gesammtergebniss lautet also: bis zu $v = 0{\cdot}1871$ giebt es drei Ellipsoide als Gleichgewichtsfiguren, zwei Rotations- und ein dreiaxiges, und ausserdem zwei Cylinder; von $v = 0{\cdot}1871$ bis $v = 0{\cdot}2246$ giebt es nur noch zwei, beides Rotationsellipsoide und die beiden Cylinder; für $v = 0{\cdot}2246$ giebt es nur noch ein Rotationsellipsoid (Abplattung $\lambda = 2{\cdot}52293$) und die beiden Cylinder; für noch grössere Drehgeschwindigkeiten kann kein Ellipsoid, sondern nur noch die beiden Cylinder, für $v = 0{\cdot}5$ sogar nur noch der Kreiscylinder und für $v = 1$ auch dieser nicht mehr Gleichgewichtsfigur sein.

Die abgeleiteten Formeln müssen zum Zwecke der numerischen Berechnung noch auf eine geeignete Gestalt gebracht werden; dies ist für die Rotationsellipsoide von verschiedenen Seiten, namentlich von Kostka[1]) geschehen, für die Jacobi'schen Ellipsoide in neuester Zeit von Darwin[2]), welcher in einer Tabelle die zusammengehörigen Werthe der Winkelgeschwindigkeit, der Axenverhältnisse, der Excentricitäten, des Bewegungsmomentes und der Energie zusammengestellt hat.

Die Anwendung der erhaltenen Resultate auf die Himmelskörper ist naheliegend. Was zunächst die Erde betrifft, so kann es sich, da deren Gestalt thatsächlich nur wenig von der Kugel abweicht, nur um ein Rotationsellipsoid handeln, und zwar um dasjenige, welches sich bei abnehmender Drehgeschwindigkeit der Kugel nähert. Man kann dann v als so klein betrachten, dass die Gleichung (11) durch ein sehr kleines λ befriedigt wird, findet durch Entwicklung des $arc\ tang\,\lambda$ die Lösung $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{15\,v}$ und folglich, wenn man in dem Ausdrucke (10) für v die für die Erde giltige Gravitationskonstante (pag. 209) einführt, $\lambda^2 = \frac{1}{116}$. Für kleine λ ist nun nach der zweiten Gleichung (10): $\frac{\lambda^2}{2} = \frac{a - c}{c}$, d. h. die »lineare Abplattung«. Dieselbe würde sich hiernach zu $\frac{1}{232}$ ergeben, gegenüber dem durch die Gradmessungen gefundenen Werthe $\frac{1}{300}$. Die Differenz liegt daran, dass die Dichte als überall gleich angenommen wurde, während sie thatsächlich nach innen zunimmt. Dieser Fall ist nun theoretisch zu verwickelt; man kann aber einen zweiten extremen Fall behandeln, nämlich den, dass die ganze Anziehung vom Mittelpunkt ausgeht; ist dann G die Anziehung für irgend eine festgewählte Entfernung R, z. B. den Polarradius, und r irgend ein Radius vektor, so ist das Anziehungspotential $U_1 = GR^2/r$ und somit die Oberflächengleichung

$$\frac{GR^2}{r} + \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2) = const,$$

woraus sich durch Einführung der Poldistanz φ und unter Annahme kleiner w

$$r = R\left(1 + \frac{w^2 R}{2G}\cos^2\varphi\right) = R\left(1 + \frac{1}{582}\cos^2\varphi\right)$$

findet. In diesem Falle ergiebt sich also in der That eine zu kleine lineare Abplattung, wie zu erwarten war.

Bei andern Himmelskörpern ist die Abplattung zum Theil beträchtlich grösser, z. B. beim Jupiter $\frac{1}{17}$, beim Saturn sogar $\frac{1}{9}$; es ist dies mit der sehr viel grösseren Winkelgeschwindigkeit dieser Planeten im Einklange. Eine besonders interessante

---

[1]) Kostka, Berl. Mon. 1870, pag. 116.

[2]) Darwin, Proc. R. Soc. Bd. 41, pag. 319 (1886).

Erscheinung sind die Ringe des Saturn. Ringe können, wie MAXWELL und Andre gezeigt haben, unter gewöhnlichen Umständen nicht Gleichgewichtsfiguren sein, und der genannte Forscher nimmt demgemäss an resp. weist durch Untersuchung aller Bedingungen des Gleichgewichts nach, dass der Ring durch Millionen kleiner Körper gebildet wird, die sich um den Saturn bewegen und durch ihren gegenseitigen Einfluss in ihren Lagen erhalten werden.

Bringt man einen grossen Oeltropfen in ein Gefäss mit einer Wasser-Alkoholmischung von gleicher Dichte wie das Oel derart hinein, dass er sich um die durch die Mitte hindurchgehende Drehaxe herumlegt, und leitet man nun mittels einer Kurbel die Drehung ein, so erhält man, in Uebereinstimmung mit der Theorie, ein Rotationsellipsoid, dessen Abplattung mit der Drehgeschwindigkeit wächst. Nicht so übereinstimmend mit der obigen Theorie verlaufen die übrigen mit dem Oeltropfen zu erzielenden Erscheinungen. Es liegt dies an der Oberflächenspannung und Zähigkeit des Oels, weshalb hinsichtlich des näheren über diese sogen. PLATEAU'schen Versuche auf den Art. »Kapillarität« zu verweisen ist.

Auch der Fall von zwei um einander rotirenden Flüssigkeitsmassen, die auf sich selbst und auf einander anziehend wirken, ist theoretisch behandelt worden, namentlich von DARWIN [1]) und POINCARÉ [2]). Es sei aus dieser complicirten Untersuchung nur angeführt, dass gleiche Massen die Gestalt von Eiern mit den schmalen Enden gegen einander annehmen, dass dieselben bei zunehmender Annäherung sich schliesslich zu einer Hantel vereinigen, und dass sich interessante Beziehungen zwischen dieser Figur und dem JACOBI'schen Ellipsoid aufstellen lassen. Ferner zeigt sich, dass zwei verschiedene Massen nahe bei einander nur getrennt bestehen können, wenn die kleinere $\frac{1}{80}$ der grösseren übersteigt. Bei der Ablösung der Monde von ihren Planeten müssen also, da hier das Verhältniss viel kleiner ist, unbekannte Einflüsse oder Vorgänge mitgespielt haben.

F. AUERBACH.

Hydrodynamik.

Uebersicht. Die Hydrodynamik ist die Lehre von den Bewegungserscheinungen, welche Flüssigkeiten darbieten. Das Wort Flüssigkeiten kann dabei in einem weiteren und in einem engeren Sinne verstanden werden; im ersteren umfasst es auch die Gase, im letzteren nur die tropfbaren Flüssigkeiten. In dem vorliegenden Abschnitte soll es sich lediglich um tropfbare Flüssigkeiten handeln; das hindert aber nicht, dass zuweilen die Erscheinungen resp. die Rechnungen auch für Gase giltig sind. Besonders häufig tritt es ein, dass die Rechnung bis zu einem gewissen Punkte gemeinsam für Flüssigkeiten und Gase durchgeführt werden kann; die an diesem Punkte dann nothwendigen Specialisirungen sollen aber hier die auf tropfbare Flüssigkeiten bezüglichen sein. Eine weitere Einschränkung soll dadurch gemacht werden, dass, mit einigen durch

1) DARWIN, Phil. Trans. R. Soc. Lond. 178 (A), pag. 379 (1887).
2) POINCARÉ, Acta math. 7 (1885).

die Natur der Sache begründeten Ausnahmen, nur ideale Flüssigkeiten (pag. 211) betrachtet werden; der Reibung, durch welche sich die wirklichen Flüssigkeiten von jenen unterscheiden, ist ein besonderer Artikel gewidmet. Bei den wirklichen Flüssigkeiten spielt auch die Capillarität häufig eine hervorragende Rolle; auch sie wird besonders abgehandelt. Endlich ist bekanntlich die Incompressibilität der Flüssigkeiten keine absolute (pag. 355), und es giebt Bewegungserscheinungen, bei denen ihre Zusammendrückbarkeit sich geltend macht, z. B. ihre Fortleitung des Schalles (s. Akustik). Immerhin giebt es noch eine grosse Zahl von Erscheinungen, bei welchen weder Reibung noch Capillarität noch Compressibilität sich in erheblichem Grade oder überhaupt geltend macht, bei denen sich also wirkliche Flüssigkeiten fast oder ganz wie ideale verhalten; diese sind es, welche den Gegenstand der Hydrodynamik ausmachen. Bei dem Umfange dieses Gebietes erscheint es zweckmässig, die Untersuchung zu gliedern, indem einige in sich abgerundete Klassen von Erscheinungen (Ausfluss und Strahlbildung, Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten, Wirbelbewegung) besonders betrachtet werden. Der vorliegende Artikel enthält daher nur die Grundlagen der Theorie und die Erscheinungen der Flüssigkeitsbewegung im allgemeinen, der Strömung, der Schwingungen und Wellen — letztere beiden, in Anbetracht ihrer Behandlung in der allgemeinen Wellenlehre (s. w. u.) nur, in so weit sie des Zusammenhanges wegen hierher gehören. Die Grundlage der Betrachtungen bietet hierbei wiederum die Stetigkeitshypothese; die ihr entgegenstehende Molekularhypothese hat für tropfbare Flüssigkeiten noch keine nennenswerthen Erfolge aufzuweisen.

Hydrodynamische Grundgleichungen. Sind XYZ die auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte und $X_n\ Y_n\ Z_n$ die auf die Oberflächeneinheit wirkenden Druckkräfte (pag. 213), ist ρ die Dichte, $d\tau$ das Raumelement, ds das Oberflächenelement, so nehmen die Gleichungen (1) der Dynamik (pag. 67) ebenso wie bei festen Körpern [Elasticität, pag. 229, Gleichung (16)] die Gestalt

$$\int\rho\frac{d^2x}{dt^2}d\tau=\int\rho X\,d\tau+\int X_n\,ds \qquad \int\rho\frac{d^2y}{dt^2}d\tau=\int\rho Y\,d\tau+\int Y_n\,ds$$
$$\int\rho\frac{d^2z}{dt^2}d\tau=\int\rho Z\,d\tau+\int Z_n\,ds \tag{1}$$

an. Statt der auf die Einheit von ds wirkenden Druckkräfte $X_n\ Y_n\ Z_n$ kann man wie dort die Druckcomponenten einführen, welche ebenfalls am Orte von ds, aber nicht auf dieses, sondern auf seine drei Projektionen auf die Coordinatenebenen wirken: $X_xX_yX_z$, $Y_xY_yY_z$, $Z_xZ_yZ_z$. Da nun, bei idealen Flüssigkeiten (pag. 213) der Druck senkrecht und nach allen Richtungen in gleicher Grösse wirkt, fallen X_yX_z, Y_xY_z, Z_xZ_y fort, und es werden

$$X_x=Y_y=Z_z=p,$$

wo p schlechthin der Druck ist. Drückt man hiernach $X_n\ Y_n\ Z_n$ durch p aus und benutzt man eine bekannte Formel zur Umwandlung von Flächenintegralen in Raumintegrale, so hat man

$$\int X_n\,ds=\int p\cos(nx)\,ds=\int\frac{\partial p}{\partial x}d\tau \qquad \int Y_n\,ds=\int p\cos(ny)\,ds=\int\frac{\partial p}{\partial y}d\tau$$
$$\int Z_n\,ds=\int p\cos(nz)\,ds=\int\frac{\partial p}{\partial z}d\tau.$$

Setzt man dies in (1) ein, wodurch man Gleichungen zwischen lauter Raumintegralen erhält, und erwägt man, dass, bei der Willkürlichkeit von $d\tau$, auch die Faktoren von $d\tau$ die entsprechenden Gleichungen erfüllen müssen, so erhält man

$$\rho\frac{d^2x}{dt^2}=\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\rho\frac{d^2y}{dt^2}=\rho Y-\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (2)$$
$$\rho\frac{d^2z}{dt^2}=\rho Z-\frac{\partial p}{\partial z}.$$

EULER'sche Gleichungen[1]). Die Gleichungen (2) sind zur unmittelbaren Anwendung nicht geeignet, weil die Grössen $x\,y\,z$ in ihnen gleichzeitig als abhängige und als unabhängige Variable auftreten. Um diesen Uebelstand zu beseitigen, kann man zwei Wege einschlagen. Man kann nämlich entweder fragen: Was geht an einem bestimmten Punkte des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes im Laufe der Zeit vor? Oder man kann fragen: Was geht mit einem bestimmten Flüssigkeitstheilchen im Laufe der Zeit vor? Mathematisch ausgedrückt lautet die erste Frage: Welche Functionen von $x\,y\,z$ und t sind die die Bewegung charakterisirenden Grössen, d. h. die Geschwindigkeitscomponenten

$$u=\frac{dx}{dt} \qquad v=\frac{dy}{dt} \qquad w=\frac{dz}{dt}? \qquad (3)$$

Man behält also $x\,y\,z$ als unabhängige Variable[2]) bei, eliminirt sie dagegen als abhängige Variable und findet, da

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

ist (analog für v und w), die sogen. EULER'schen Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (4)$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

LAGRANGE'sche Gleichungen[3]). Die zweite der obigen Fragen andererseits lautet in mathematischer Fassung: Welche Functionen der Zeit und des Ortes sind diejenigen Grössen, welche ein bestimmtes Flüssigkeitstheilchen charakterisiren? Für diese Grössen $a\,b\,c$ liegt es am nächsten die Anfangscoordinaten des Theilchens zu wählen. In diesem Falle behält man $x\,y\,z$ als abhängige Variable bei, eliminirt sie dagegen als unabhängige Variable. Durch eine einfache Operation erhält man so die sogen. LAGRANGE'schen Gleichungen

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}=0$$
$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial b}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial b}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b}=0 \qquad (5)$$
$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial c}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial c}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c}=0.$$

---

[1]) EULER, Princ. gén. du mouvement des fluides. Hist. de l'Ac. de Berl. 1755.

[2]) DIRICHLET (CRELLE's Journ. 55, pag. 181. 1858) hat darauf hingewiesen, dass, da der von der Flüssigkeit erfüllte Raum sich mit der Zeit ändert, $x\,y\,z$ thatsächlich nicht ganz unabhängige Grössen sind, und dass hierdurch in manchen Fällen eine Complication herbeigeführt wird.

[3]) Auch diese Methode rührt, wie RIEMANN (H. HANKEL, Z. allg. Th. d. Bew. d. Flüss. Gött. 1861, pag. 3) hervorgehoben hat, von EULER her: De princ. motus fluidorum, N. Comm. Ac. Petrop. 14 (1), pag. 358 (1759). LAGRANGE hat sie dann in eleganterer Form reproducirt Méc. analyt. 3. éd. 2, pag. 250. (Erste Ausgabe 1788.)

Dichtegleichung und Continuitätsgleichung. Zur Bestimmung der 5 gesuchten Grössen $u\,v\,w\,\rho\,p$ bei der ersten resp. $x\,y\,z\,\rho\,p$ bei der zweiten Methode sind ausser den drei aufgestellten Gleichungen noch zwei weitere erforderlich. Die eine derselben ist die Dichtegleichung, d. h. die aus der Erfahrung zu entnehmende Beziehung

$$\rho = f(p) \tag{6}$$

zwischen Druck und Dichte. Für incompressible Flüssigkeiten lautet dieselbe

$$\rho = const;$$

es bleiben also für diese nur 4 Variable übrig, und folglich ist ausser den drei Bewegungsgleichungen nur noch eine weitere erforderlich. Dies ist die sogen. Continuitätsgleichung, welche aussagt, dass ein Flüssigkeitstheilchen im Laufe der Zeit seine Masse nicht ändert (Princip der Erhaltung des Stoffes). Sie lautet:

$$\frac{d(\rho\, d\tau)}{dt} = 0.$$

Um sie in $u\,v\,w$ auszudrücken, muss man eine unendlich kleine Veränderung, die ein Theilchen erfahren kann, betrachten. Zwischen flüssigen und festen Körpern besteht aber in dieser Hinsicht kein Unterschied, es kann daher auf die bei den festen Körpern gemachten Angaben (Art. Elasticität, pag. 226) verwiesen werden, die dort gefundene räumliche Dilatation (Gleichung 14, pag. 229) gilt auch hier, und die Continuitätsgleichung wird

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \tag{7}$$

also für incompressible Flüssigkeiten

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Um dieselbe Gleichung in der LAGRANGE'schen Form zu erhalten, setze man zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = D; \tag{9}$$

sie lautet dann

$$\frac{d(\rho D)}{dt} = 0, \quad \text{also} \quad D = \frac{const}{\rho},$$

und für incompressible Flüssigkeiten

$$D = const;$$

diese Gleichung ist von HANKEL[1]) abgeleitet worden.

Einführung des Kräftepotentials. Die Kraftcomponenten $X\,Y\,Z$ lassen sich fast immer als Differentialquotienten einer Grösse V nach $x\,y\,z$

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z} \tag{10}$$

darstellen, d. h. sie besitzen ein Potential V. Führt man dieses und analog die Grösse

$$P = \int \frac{dp}{\rho} \tag{11}$$

[1]) H. HANKEL, Z. allg. Th. d. Bew. d. Flüss. Gött. 1861.

ein, wo zwischen p und ρ die Beziehung (6) besteht, also speciell für incompressible Flüssigkeiten

$$P = \frac{p}{\rho} \tag{12}$$

ist, so erhält man die EULER'schen Gleichungen in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial(V-P)}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial(V-P)}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial(V-P)}{\partial z}, \end{aligned} \tag{13}$$

die LAGRANGE'schen in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{\partial(V-P)}{\partial a} \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{\partial(V-P)}{\partial b} \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{\partial(V-P)}{\partial c}. \end{aligned} \tag{14}$$

WEBER'sche Gleichungen. H. WEBER[1]) hat den Versuch gemacht, Gleichungen aufzustellen, welche die Vortheile der EULER'schen mit denen der LAGRANGE'sche verbinden. Sind $u_0\ v_0\ w_0$ die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit und der Kürze halber

$$\lambda = \int_0^t \left(V - P + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] dt\right),$$

so lauten dieselben

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial a} - u_0 &= \frac{\partial\lambda}{\partial a} \\ \frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial b} - v_0 &= \frac{\partial\lambda}{\partial b} \\ \frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial c} - w_0 &= \frac{\partial\lambda}{\partial c}. \end{aligned}$$

Princip der kleinsten Wirkung. Dasselbe ist, wenn zur Abkürzung

$$V - P = \Omega$$

gesetzt wird, durch die Gleichung

$$\iiint \rho\, da\, db\, dc \left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - \delta\Omega\right) = 0 \tag{15}$$

ausgesprochen, die sich leicht auf die Form

$$\delta \iiint \rho\, da\, db\, dc \int dt \left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2\Omega\right] = 0 \tag{16}$$

bringen lässt, wo ds das Bahnelement des Punktes xyz ist. In Worten: Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Grundgleichungen ist die, dass das obige Integral ein Minimum werde. Dieser Satz rührt von CLEBSCH[2]), in dem obigen Zusammenhange von HANKEL[3]) her.

Oberflächenbedingungen. Zu den aufgestellten, für die ganze Masse der Flüssigkeit giltigen Gleichungen treten nun noch besondere Bedingungen für

1) H. WEBER, CRELLE's Journ. 68, pag. 287 (1868).
2) CLEBSCH, CRELLE's J. 54, pag. 301 (1857).
3) HANKEL, a. a. O.

die Begrenzung. Die eine derselben lautet: Die Oberfläche ist stets aus denselben Theilchen zusammengesetzt. Zuerst ausgesprochen wurde dieser Satz von LAGRANGE; SVANBERG und EDLUND[1]) haben gezeigt, dass er in nahem Zusammenhange mit der Continuitätsgleichung steht; noch einfacher ergiebt er sich aber aus der Betrachtung der Veränderungen, welche die unendlich kleinen Theile eines beliebigen Körpers erfahren können (Elasticität, pag. 226). Dieselbe lehrt nämlich, dass ein kleines Ellipsoid stets ein solches bleibt; ein Punkt im Innern kann aber stets als Mittelpunkt eines solchen Ellipsoids aufgefasst werden, bleibt also stets im Innern, womit obiger Satz bewiesen ist. Analytisch lautet derselbe, wenn $F(x, y, z, t) = 0$ die Oberflächengleichung ist:

$$\frac{dF(x, y, z, t)}{dt} = 0, \quad \text{also:}\ u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \qquad (16a)$$

Für feste Wände geht sie in die einfachere

$$u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{oder} \quad ul + vm + wn = 0$$

über, wo $l\,m\,n$ die Richtungscosinus der Flächennormale bedeuten; d. h. die Componente der Geschwindigkeit senkrecht zur Wand ist null, was ja auch an sich einleuchtet. An der freien Oberfläche gilt für jede der beiden daselbst aneinander stossenden Flüssigkeiten resp. Gase eine Gleichung von der Form der Gleichung (16a); durch Subtraction und Einsetzen von $l\,m\,n$ wird dann:

$$(u_1 - u_2)\,l + (v_1 - v_2)\,m + (w_1 - w_2)\,n = 0,$$

d. h. die Normalcomponente der Geschwindigkeit muss beim Durchgange durch die freie Grenze stetig sein.

Transformation der Grundgleichungen. In zahlreichen Fällen ist es erforderlich, die hydrodynamischen Gleichungen von rechtwinkligen auf andere Coordinaten zu transformiren; hierzu ist die Gleichung (16) besonders geeignet, da man nur nöthig hat, in ihr ds^2, statt durch xyz, durch die neuen Coordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$ auszudrücken und dann durch Zerlegung die neuen Gleichungen zu bilden. Setzt man zur Abkürzung

$$N_1 = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 \qquad n_1 = \frac{dx}{d\eta}\frac{dx}{d\zeta} + \frac{dy}{d\eta}\frac{dy}{d\zeta} + \frac{dz}{d\eta}\frac{dz}{d\zeta}$$

$$N_2 = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2 \qquad n_2 = \frac{dx}{d\zeta}\frac{dx}{d\xi} + \frac{dy}{d\zeta}\frac{dy}{d\xi} + \frac{dz}{d\zeta}\frac{dz}{d\xi}$$

$$N_3 = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2 \qquad n_3 = \frac{dx}{d\xi}\frac{dx}{d\eta} + \frac{dy}{d\xi}\frac{dy}{d\eta} + \frac{dz}{d\xi}\frac{dz}{d\eta}$$

und sind $\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0$, N_1^0 u. s. w. die speciellen Werthe für $x = a$, $y = b$, $z = c$, so wird das zu variirende Integral

$$\iiint \rho\, da\, db\, dc \int dt \Big[N_1 \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + N_2 \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + N_3 \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$
$$+ 2n_1 \frac{d\eta}{dt}\frac{d\zeta}{dt} + 2n_2 \frac{d\zeta}{dt}\frac{d\xi}{dt} + 2n_3 \frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt} + 2\Omega \Big],$$

und die Continuitätsgleichung wird

$$\begin{vmatrix} \frac{d\xi}{d\xi_0} & \frac{d\xi}{d\eta_0} & \frac{d\xi}{d\zeta_0} \\ \frac{d\eta}{d\xi_0} & \frac{d\eta}{d\eta_0} & \frac{d\eta}{d\zeta_0} \\ \frac{d\zeta}{d\xi_0} & \frac{d\zeta}{d\eta_0} & \frac{d\zeta}{d\zeta_0} \end{vmatrix} = \Delta = \left\{ \begin{vmatrix} N_1^0 & n_3^0 & n_2^0 \\ n_3^0 & N_2^0 & n_1^0 \\ n_2^0 & n_1^0 & N_3^0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} N_1 & n_3 & n_2 \\ n_3 & N_2 & n_1 \\ n_2 & n_1 & N_3 \end{vmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

[1]) SVANBERG u. EDLUND, Nov. Acta Soc. Ups., in versch. Bdn., z. B. 13 (1847).

Die drei Bewegungsgleichungen selbst werden in dieser Allgemeinheit natürlich sehr complicirt. Gewöhnlich wird man orthogonale Coordinaten wählen, für welche

$$n_1 = n_2 = n_3 = 0$$

und

$$N_1 = \frac{1}{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2} \qquad N_2 = \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2}$$

$$N_3 = \frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2}$$

ist. Folglich werden die den Gleichungen (2) entsprechenden Bewegungsgleichungen

$$2\frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{2d\left(N_1\frac{d\xi}{dt}\right)}{dt} - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\frac{dN_1}{d\xi} - \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\frac{dN_2}{d\xi} - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\frac{dN_3}{d\xi}$$

$$2\frac{d\Omega}{d\eta} = \frac{2d\left(N_2\frac{d\eta}{dt}\right)}{dt} - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\frac{dN_1}{d\eta} - \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\frac{dN_2}{d\eta} - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\frac{dN_3}{d\eta}$$

$$2\frac{d\Omega}{d\zeta} = \frac{2d\left(N_3\frac{d\zeta}{dt}\right)}{dt} - \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\frac{dN_1}{d\zeta} - \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\frac{dN_2}{d\zeta} - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\frac{dN_3}{d\zeta},$$

woraus sich leicht die EULER'sche und die LAGRANGE'sche Form ergiebt, welche der Raumersparniss wegen nicht hingeschrieben werden sollen. Die Continuitätsgleichung wird

$$\Delta = \sqrt{\frac{N_1^0}{N_1}\frac{N_2^0}{N_2}\frac{N_3^0}{N_3}}.$$

Beispielsweise erhält man die hydrodynamischen Gleichungen in elliptischen Coordinaten durch Einsetzen der Werthe

$$N_1 = \frac{1}{4}\frac{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}{(\xi+\varkappa^2)(\xi+\lambda^2)(\xi+\mu^2)}$$
$$N_2 = \frac{1}{4}\frac{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}{(\eta+\varkappa^2)(\eta+\lambda^2)(\eta+\mu^2)} \tag{17}$$
$$N_3 = \frac{1}{4}\frac{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}{(\zeta+\varkappa^2)(\zeta+\lambda^2)(\zeta+\mu^2)},$$

wo $\varkappa\,\lambda\,\mu$ durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\varkappa^2+\varepsilon} + \frac{y^2}{\lambda^2+\varepsilon} + \frac{z^2}{\mu^2+\varepsilon} = 1 \tag{18}$$

definirt sind, deren 3 Wurzeln nach ε die elliptischen Coordinaten des Punktes xyz sind. Für Polarcoordinaten

$$x = r\cos\vartheta \qquad y = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad z = r\sin\vartheta\sin\varphi$$

werden die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{d\Omega}{dr}$$

$$d\left\{\frac{r^2\frac{d\vartheta}{dt}}{dt}\right\} - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r^2\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{d\Omega}{d\vartheta} \tag{19}$$

$$\frac{d\left(r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\Omega}{d\varphi},$$

und die Continuitätsgleichung wird

$$D = \frac{r_0^2 \sin\vartheta_0}{r^2 \sin\vartheta},$$

wo die Determinante D aus den Differentialquotienten der $r\vartheta\varphi$ nach den $r_0\vartheta_0\varphi_0$ gebildet ist. Endlich werden für cylindrische Coordinaten

$$x = r\cos\vartheta \qquad y = r\sin\vartheta \qquad z = z$$

die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{d\Omega}{dr} \qquad \frac{d\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\Omega}{d\vartheta} \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dz} \tag{20}$$

und die Continuitätsgleichung

$$D_{r\vartheta z} = \frac{r_0}{r}.$$

Von den verschiedenen in neuerer Zeit gemachten Transformationsvorschlägen sei hier nur der von Paci[1]) erwähnt. Die z-Axe sei die Tangente an die Richtung der Bewegung, die x- und y-Axe Tangenten an die Krümmungslinien der auf der Bewegungsrichtung senkrechten Fläche, r und r' deren Krümmungsradien, σ und σ' die Bogen der betr. Krümmungslinien; ω die Geschwindigkeit, $\alpha\beta\gamma$ ihre Richtungswinkel, R der Krümmungsradius der Stromlinie s (s. w. u. pag. 381), $\xi\eta$ ihre Richtungswinkel, endlich ϑ und φ durch die Gleichungen $\cos\alpha = \sin\vartheta\cos\varphi$, $\cos\beta = \sin\vartheta\sin\varphi$, $\cos\gamma = \cos\vartheta$ definirt; dann werden die Gleichungen:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\sigma} = X - \omega\cos\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \frac{\omega^2}{R}\cos\xi$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\sigma'} = Y - \omega\sin\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \frac{\omega^2}{R}\cos\eta$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = Z - \frac{\partial\omega}{\partial t} - \omega\frac{\partial\omega}{\partial s}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\omega\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) + \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial s} = 0.$$

In gewissen Fällen scheint die Anwendung dieser Gleichungen nicht ohne Vortheile zu sein.

Transformationen von Clebsch[2]). 1) Clebsch hat die Bemerkung gemacht, dass die Gleichung (8) identisch ist mit derjenigen, welche von den Unterdeterminanten der Functionaldeterminante dreier Grössen $a\,a_1\,a_2$ nach $x\,y\,z$ in Bezug auf eine derselben, z. B. a, erfüllt wird. Mit Rücksicht hierauf erhält man, wenn die Bewegung von t unabhängig, d. h. stationär ist (s. w. u.), $T = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$, also die kinetische Energie der Masseneinheit und F eine Funktion von $a_1\,a_2$ ist, aus den Euler'schen Gleichungen die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial\frac{\partial a_1}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial\frac{\partial a_1}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial\frac{\partial a_1}{\partial z}} + \frac{\partial F(a_1, a_2)}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial\frac{\partial a_2}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial\frac{\partial a_2}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial\frac{\partial a_2}{\partial z}} + \frac{\partial F(a_1, a_2)}{\partial a_2} = 0,$$

und diese Gleichungen haben den Vortheil, dass man die Integrale

$$a_1 = const \qquad a_2 = const$$

[1]) Paci, N. Cim. (3) 9, pag. 49 (1881).

[2]) Clebsch, Crelle's Journ. 56, pag. 1 (1859).

sofort angeben kann. In den Schnittcurven der hierdurch dargestellten Flächen geht die Bewegung vor sich, und der Druck ist bestimmt durch die Gleichung

$$p = \rho(V - T) + F.$$

2) Wenn die Bewegung nicht stationär ist, wird die erste Methode sehr complicirt. Für diesen Fall hat aber CLEBSCH eine andere Substitution angegeben, welche allgemein von grosser Bedeutung ist. Sie lautet

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{21}$$

giebt also die Gleichungen

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + u \frac{\partial \chi}{\partial x} + v \frac{\partial \chi}{\partial y} + w \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

und führt, in Verbindung mit (8), zu den Integralen

$$\chi = const \qquad \psi = const.$$

Die Bedeutung der Gleichungen (21) wird sofort deutlich hervortreten[1]), und es sei hier nur noch auf die Beziehung dieser Darstellung zu derjenigen von PACI (pag. 377) aufmerksam gemacht.

Die beiden Arten von Flüssigkeitsbewegung. Bei der Mannigfaltigkeit der Bewegungserscheinungen, welche Flüssigkeiten darbieten, ist die Erlangung eines obersten Eintheilungsprincips von besonderer Wichtigkeit. Mit hierhergehörigen Betrachtungen haben sich schon LAGRANGE und EULER beschäftigt, vollständig gelöst wurde aber die Aufgabe erst durch v. HELMHOLTZ[2]). Schon die Gleichungen (21) zeigen, dass man verhältnissmässig einfache Flüssigkeitsbewegungen erhalten wird, wenn man nur je das erste Glied beibehält, also

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{22}$$

setzt; die Componenten der Geschwindigkeit sind dann also die Differentialquotienten einer und derselben Funktion φ, die v. HELMHOLTZ demgemäss Geschwindigkeitspotential nennt, nach den Coordinatenaxen; und die Continuitätsgleichung (8) wird

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{oder kurz} \quad \Delta \varphi = 0, \tag{23}$$

übereinstimmend mit der Gleichung des Kräftepotentials für ausserhalb gelegene Massen. Nun erfordern die Gleichungen (22) das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{24}$$

und diese Grössen sind, wie schon bei der Betrachtung fester Körper gezeigt wurde [pag. 228, Gleichung (13)], die doppelten Drehungsgeschwindigkeiten $\xi \eta \zeta$ des betreffenden Theilchens. Man erhält also das Ergebniss: In den Theilen einer Flüssigkeit, in welchen ein Geschwindigkeitspotential existirt, finden keine Drehungen der Elementartheilchen (Rotationen, Wirbel) statt. Man kann hiernach unterscheiden:

1) Potentialbewegung der Flüssigkeiten,
2) Wirbelbewegung der Flüssigkeiten.

---

1) Ueber diese Transformation s. auch HILL, Quart. J. of Math. 17 (1880) und Proc. R. Soc. 36, pag. 279 (1884). —

2) v. HELMHOLTZ, CRELLE's J. 55, pag. 25 (1858). Wiss. Abh. 1, pag. 101.

Nach CRAIG[1]) kann man diese Eintheilung fortsetzen und folgendermaassen klassificiren: 1) Die Geschwindigkeitscomponenten $u_0\, v_0\, w_0$ haben ein Potential φ_0. 2) Dies ist nicht der Fall, wohl aber haben die Wirbelcomponenten $u_1\, v_1\, w_1$ ein Potential φ_1. 3) Beides findet nicht statt, aber die aus $u_1\, v_1\, w_1$ ebenso wie diese aus $u_0\, v_0\, w_0$ gebildeten Grössen $u_2\, v_2\, w_2$ haben ein Potential φ_2 u. s. w. Dabei bestehen die Beziehungen $u_2 = \Delta u_0$ etc., $u_3 = \Delta u_1$ etc., $u_4 = \Delta\Delta u_0$ etc.

Durch Einführung von $\xi\,\eta\,\zeta$ kann man die Bewegungsgleichungen, wenn man zur Abkürzung die Geschwindigkeit gleich ω und

$$\int\frac{dp}{\rho} - V + \frac{1}{2}\omega^2 = R$$

setzt, auf die von LAMB[2]) angegebene Form

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\eta - v\zeta) + \frac{\partial R}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\zeta - w\xi) + \frac{\partial R}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\xi - u\eta) + \frac{\partial R}{\partial z} = 0
\end{aligned}\tag{24a}$$

bringen, welche für Potentialbewegung in die einfachere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \tag{24b}$$

übergeht.

Ihre volle Berechtigung und Bedeutung erhält die Eintheilung der Hydrodynamik in Potentialbewegung und Wirbelbewegung erst durch die folgende, übrigens auch an sich wichtige Betrachtung. Wenn man die zweite der LAGRANGE'schen Gleichungen (14) nach c, die dritte nach b differencirt, sie dann von einander abzieht und analog mit der dritten und ersten, sowie mit der ersten und zweiten verfährt, so erhält man, wenn $A'\, B'\, C'$ von der Zeit unabhängige Grössen, also lediglich Funktionen von $a\, b\, c$ sind:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\right) = 2A'\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}\right) = 2B'\\
&\left(\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right) = 2C'.
\end{aligned}$$

Es möge darauf hingewiesen werden, dass die Gleichungen gewissermaassen den Flächensätzen entsprechen (pag. 74). Multiplizirt man jetzt die erhaltenen Gleichungen zuerst mit $\partial x/\partial a$, $\partial x/\partial b$, $\partial x/\partial c$, dann mit $\partial y/\partial a$, $\partial y/\partial b$, $\partial y/\partial c$, endlich mit $\partial z/\partial a$, $\partial z/\partial b$, $\partial z/\partial c$ und addirt sie jedesmal, so erhält man, wenn $A\,B\,C$ neue, von der Zeit unabhängige Grössen sind:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = A\frac{\partial x}{\partial a} + B\frac{\partial x}{\partial b} + C\frac{\partial x}{\partial c}\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = A\frac{\partial y}{\partial a} + B\frac{\partial y}{\partial b} + C\frac{\partial y}{\partial c}\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = A\frac{\partial z}{\partial a} + B\frac{\partial z}{\partial b} + C\frac{\partial z}{\partial c}.
\end{aligned}\tag{25}$$

---

[1]) CRAIG, United States Coast and Geod. Survey 1881. — Siehe auch: ROWLAND, Amer. J. Math. 3, pag. 226 (1881).

[2]) LAMB, Einl. in die Hydrodynamik, deutsch von REIFF, Tüb. 1884, pag. 27.

Setzt man hierin für $x y z$ ihre Anfangswerthe $a b c$, so sieht man, dass ABC die Anfangswerthe der Drehungscomponenten sind, und die Gleichungen (25) zeigen, welche Werthe diese Grössen im Laufe der Zeit annehmen. Für Punkte $a b c$ der Flüssigkeit, für welche $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ ist, sind, wie man sieht, die Drehungscomponenten jederzeit gleich null; man erhält also den Satz: Ein Flüssigkeitstheilchen, welches zu irgend einer Zeit nicht rotirt, rotirt niemals[1]). Damit ist gezeigt, dass Potentialbewegung niemals in Wirbelbewegung übergehen kann und umgekehrt, dass dies also in der That zwei streng geschiedene Klassen von Flüssigkeitsbewegung sind. Natürlich gilt dies nur für ideale Flüssigkeiten; in den wirklichen Flüssigkeiten können in Folge der Reibung (oder auch anderer Einwirkungen) Wirbel entstehen und vergehen, wie man dies thatsächlich fast alltäglich beobachtet.

Relative Bewegung der Flüssigkeitstheilchen. Die für feste Körper auf pag. 226 bis 229 durchgeführte Analyse der Bewegungsvorgänge lässt sich natürlich auch auf Flüssigkeiten übertragen und es ist zugleich einleuchtend, dass sich hier zahlreiche, den Flüssigkeiten eigenthümliche oder für sie mindestens eine besondere Bedeutung erlangende Sätze und Beziehungen ergeben werden. Es ist, nächst v. HELMHOLTZ[2]), das Verdienst BELTRAMI's[3]), diese Untersuchungen durchgeführt zu haben. Auf etwas anderem, mehr synthetischem Wege hat neuerdings REIFF[4]) das Problem behandelt. Es muss jedoch hier an diesen Hinweisen genügen.

Potentialbewegung. Führt man in die EULER'schen Gleichungen (13) das Geschwindigkeitspotential ein, multiplicirt sie mit dx, dy, dz, so erhält man eine Gleichung, welche sich integriren lässt und damit zu folgender, dem Satze von der Erhaltung der Energie (pag. 71) entsprechenden Gleichung führt:

$$f(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] = V - P, \tag{26}$$

oder kurz, wenn ω die Geschwindigkeit ist:

$$f(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\omega^2 = V - P; \tag{26a}$$

$f(t)$ ist hierin lediglich eine Funktion der Zeit, kann aber unter Umständen auch eine Constante werden. Wie man sieht, stellt diese Gleichung, bei gegebenem V, eine Beziehung zwischen dem in P enthaltenen Druck p (s. Gleichungen 11 und 12) und der Geschwindigkeit dar. Man nennt diesen Druck den hydrodynamischen oder hydraulischen Druck; er ist von dem hydrostatischen, bei ruhenden Flüssigkeiten stattfindenden Druck wesentlich verschieden und desto kleiner, je grösser die Geschwindigkeit wird.

Die Gleichung (26) in Verbindung mit der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt zur Bestimmung der beiden Unbekannten p und φ; und da man aus φ unmittelbar $u\ v\ w$ findet, so enthalten die beiden angegebenen Gleichungen die vollständige Grundlage für die Potentialbewegung incompressibler Flüssigkeiten.

Die wichtigsten Eigenschaften, welche φ hat, und welche zum Theil mit den Eigenschaften des Kräftepotentials analog sind, sind folgende. Seine Differential-

---

[1]) Ueber die Geschichte dieses Satzes, an welcher insbesondere CAUCHY, STOKES, v. HELMHOLTZ und Sir W. THOMSON betheiligt sind, s. LAMB, Einleitung in die Hydrodynamik, übers. v. REIFF, Tüb. 1884, pag. 29 u. s. w.

[2]) v. HELMHOLTZ, CRELLE's J. 55, pag. 25 (1858). Wiss. Abh. 1, pag. 101.

[3]) BELTRAMI, Mem. di Bologna, 1, pag. 431; 2, pag. 381; 3, pag. 349 (1871—73).

[4]) REIFF, Ueb. d. Princ. d. neueren Hydrodynamik. Tüb. 1882.

quotienten nach x, y, z, t sind eindeutige Funktionen; für die ersten drei ist dies nach ihrer Bedeutung als Geschwindigkeitscomponenten an sich klar, für $\partial\varphi/\partial t$ folgt es aus Gleichung (26), wo alle übrigen Grössen eindeutig sind. Ob φ selbst eindeutig ist, hängt dagegen von der Natur des Raumes ab, den die Flüssigkeit erfüllt. In einem einfach zusammenhängenden Raume lässt sich eine Linie zwischen zwei Punkten in jede andere Linie zwischen denselben beiden Punkten stetig überführen, und jede geschlossene Linie lässt sich durch stetige Verkleinerung auf einen ihrer Punkte reduziren. In einem einfach zusammenhängenden Raume muss daher φ eindeutig sein. Dagegen kann es in einem mehrfach zusammenhängenden Raume, z. B. in einem Ringe, mehrdeutig sein.

Wie das Kräftepotential, so führt auch das Geschwindigkeitspotential zu einer bestimmten geometrischen Vortellung. Die Flächen

$$\varphi = const \tag{27}$$

sind die Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentials und können der Analogie halber, wenn eine Verwechslung mit den Flächen $V = const$ ausgeschlossen ist, Niveauflächen genannt werden. Auf ihnen senkrecht stehen die durch die Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial z} = dx : dy : dz \tag{28}$$

bestimmten »Stromlinien«, welche überall mit der Bewegungsrichtung zusammenfallen, aber im allgemeinen nicht mit den Bahnlinien der Theilchen identisch sind; letzteres geht schon daraus hervor, dass die Stromlinien sich mit der Zeit ändern, während doch die Bahnlinien ganz bestimmte Linien sind. Man kann die beiden Arten von Curven am besten so unterscheiden: Die Bahnlinie enthält die Bahnelemente eines und desselben Theilchens zu verschiedenen Zeiten, die Stromlinie enthält die Bahnelemente verschiedener Theilchen in einem bestimmten Augenblicke. Identisch werden beide Curven nur in dem Falle werden, wo die Bewegung an jedem Orte von der Zeit unabhängig ist. Derartige Bewegungen, wie sie näherungsweise von Flüssen, Wasserfällen, Springbrunnen u. s. w. dargestellt werden, heissen stationäre Bewegungen. Man kann sie auch durch den Ausspruch charakterisiren, dass, während bei den übrigen Bewegungen die materiellen Flüssigkeitstheilchen die Träger der Erscheinungen sind, diese als solche bei den stationären Bewegungen gar keine Rolle spielen; die Erscheinungen sind lediglich an den Ort gebunden, und die Theilchen, die nacheinander an denselben Ort gelangen, setzen an diesem die Bewegungen fort, die sie dort vorgefunden haben.

Die Componente der Geschwindigkeit in irgend einer Richtung s ist $\partial\varphi/\partial s$; versteht man also unter n die in einem Punkte einer Niveaufläche errichtete Normale, so ist $\partial\varphi/\partial n$ die Geschwindigkeit in diesem Punkte selbst. Stellt man sich vor, dass von den unendlich vielen Niveauflächen solche ausgewählt sind, für welche φ eine constante Differenz von Fläche zu Fläche hat, so findet man, dass die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte umgekehrt proportional ist dem Abstande zweier benachbarter Niveauflächen in der Nähe dieses Punktes.

Durch unendlich viele unendlich benachbarte Stromlinien wird ein »Stromfaden« abgegrenzt. Ein solcher Stromfaden kann, wie man leicht einsieht, nicht innerhalb der Flüssigkeit plötzlich enden; er läuft daher entweder in sich zurück, was nach dem obigen nur in mehrfach zusammenhängenden Räumen möglich ist, oder er endigt in der Begrenzung der Flüssigkeit und zwar, da die feste Wandung ausgeschlossen ist, in der freien Oberfläche. Schon hieraus, noch deutlicher aber aus folgender Betrachtung, ergiebt sich ein für die Potentialbewegung

wichtiger Satz. Ist nämlich eine Flüssigkeit ringsum von festen Wänden begrenzt, so muss für diese Begrenzung offenbar $\partial\varphi/\partial n = 0$ sein. Nun ergiebt eine bekannte Beziehung zwischen Raum- und Oberflächenintegralen die Gleichung

$$\int d\tau \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = -\int ds\, \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

Man findet also, da hiernach auch im ganzen Innern die Differentialquotienten von φ, d. h. die Geschwindigkeitscomponenten verschwinden, den Satz: Innerhalb eines von festen Wänden vollständig begrenzten, einfach zusammenhängenden Raumes ist eine Potentialbewegung einer incompressiblen Flüssigkeit nicht möglich. Ist die Oberfläche der Flüssigkeit theils fest begrenzt, also $\partial\varphi/\partial n = 0$, theils frei und hier $\partial\varphi/\partial n$ überall gegeben, so ist in einem einfach zusammenhängenden Raume die Flüssigkeitsbewegung eindeutig bestimmt; in einem mehrfach zusammenhängenden Raume hingegen können dann immer noch verschiedene Bewegungen möglich sein.

Das Geschwindigkeitspotential genügt für einen Theil der incompressiblen Flüssigkeit, deren Oberflächenelement do die Normale n hat, offenbar der Gleichung

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial n} do = 0, \tag{29}$$

da in den betreffenden Raum nothwendig eben so viel Flüssigkeit ein- wie austritt. Wendet man dies auf ein von zwei Querschnitten begrenztes Stück eines Stromfadens an, so findet man den Satz

$$q\omega = const, \tag{30}$$

in Worten: Das Produkt der Geschwindigkeit in den Querschnitt ist längs des ganzen Stromfadens constant. Die Anwendung der Gleichung (29) auf einen von einer Kugel begrenzten Theil einer Flüssigkeit zeigt ferner, dass der Mittelwerth von φ auf der Oberfläche der Kugel gleich dem Werthe in ihrem Mittelpunkte ist. Hieraus folgt, dass im Innern einer Flüssigkeit das Geschwindigkeitspotential weder ein Maximum noch ein Minimum werden kann. Die Geschwindigkeit selbst kann im Innern wohl ein Minimum, aber kein Maximum werden; die grössten vorkommenden Geschwindigkeiten treten also stets in der Oberfläche auf (wohlverstanden für einfach zusammenhängende Räume).

Schliesslich sind noch die von Sir W. Thomson[1]) eingeführten und namentlich von englischen Forschern benutzten Ausdrücke »Strömung« und »Circulation« zu erwähnen. Erstere bezeichnet den Werth des Integrals

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int ds \left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds}\right) = \int ds\,u_s,$$

wo ds das Element einer beliebigen Linie in der Flüssigkeit und u_s die Geschwindigkeit längs ds ist. Ist die Linie geschlossen, so heisst der Werth des Integrals die Circulation in dieser geschlossenen Curve. Für den Fall der Potentialbewegung in einem einfach zusammenhängenden Raume ist die Cirkulation offenbar gleich null, und die Strömung längs zweier dieselben beiden Punkte verbindenden Linien gleich gross.

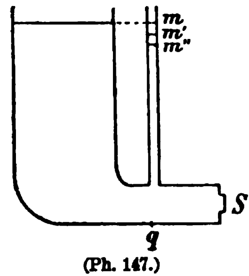
Spezielle Fälle von Potentialbewegung. Von der stationären Bewegung ist schon gelegentlich die Rede gewesen. Die Gleichung (26a) geht für sie in die einfachere

$$P = V - \tfrac{1}{2}\omega^2 \tag{31}$$

über, welche zeigt, dass für einen bestimmten Punkt die Grösse P, also auch der

[1]) W. Thomson, Trans. Edinb. Soc. 25, pag. 219 (1867).

Druck p lediglich eine Funktion der Geschwindigkeit ω ist. Schon DANIEL BERNOUILLI[1]) hat dies experimentell bestätigt, indem er ein Gefäss von der beistehenden Form (Fig. 147) mit Flüssigkeit füllte und, mittelst eines in dem Querschnitte q eingesetzten Manometers, zunächst den hydrostatischen Druck m bei verschlossenem Gefäss, dann den hydrodynamischen Druck m', m'' u. s. w. bei mehr und mehr herausgezogenem Stöpsel S maass. Je grösser die Geschwindigkeit, desto kleiner war der Druck, und zwar näherungsweise übereinstimmend mit der obigen Formel.



(Ph. 147.)

Hiervon abgesehen reducirt sich für stationäre Bewegungen das theoretische Problem im wesentlichen auf die Lösung der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$, wodurch man φ als Funktion von xyz und somit, da es von t nicht abhängt, vollständig erhält. Die Schwierigkeit liegt nur darin, die Lösungen zu finden, welche zugleich gegebenen Grenzbedingungen befriedigen, und es ist dies bisher nur in ganz vereinzelten Fällen gelungen. Andererseits liegt es nahe, den umgekehrten Weg einzuschlagen, d. h. Lösungen jener Gleichung zu errathen, und diesen dann die Grenzbedingungen anzupassen, d. h. zu untersuchen, unter welchen Umständen, bei welcher Begrenzung der Flüssigkeit u. s. w. diese Lösung gültig ist. Auf diese Weise gelangt man jedoch meist zu Erscheinungen, welche thatsächlich entweder nicht realisirbar oder ohne Interesse sind. Das gilt z. B. von der Lösung

$$\varphi = ax + by + cz,$$

welche die einfache gradlinige Bewegung mit constanter Geschwindigkeit darstellt. Andere Lösungen findet man durch Transformation in orthogonale Coordinaten, wodurch die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\frac{N_2 N_3}{N_1}}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{\frac{N_3 N_1}{N_2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_3}}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right) = 0$$

erhält ($N_1 N_2 N_3$ s. ob. pag. 375). Wählt man z. B. elliptische Coordinaten (Gleichungen 17), so kann man diese Gleichung, indem man statt $\xi\eta\zeta$ die neuen Grössen

$$\xi_1 = \int\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+\varkappa^2)(\xi+\lambda^2)(\xi+\mu^2)}} \qquad \eta_1 = \int\frac{d\eta}{\sqrt{(\eta+\varkappa^2)(\eta+\lambda^2)(\eta+\mu^2)}}$$

$$\zeta_1 = \int\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta+\varkappa^2)(\zeta+\lambda^2)(\zeta+\mu^2)}}$$

einführt, in die einfachere

$$(\eta-\zeta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1^2} - (\zeta-\xi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_1^2} + (\xi-\eta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta_1^2} = 0$$

überführen, welche die Lösungen

$$\varphi = \xi_1 \qquad \varphi = \eta_1 \qquad \varphi = \zeta_1$$

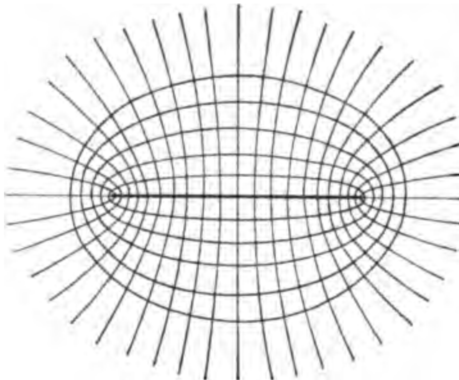
hat. Es giebt daher Flüssigkeitsbewegungen, bei welchen die Niveauflächen gewisse Flächen zweiten Grades und die Stromlinien die Schnittlinien der beiden zugehörigen Schaaren von Flächen zweiten Grades sind. Denkt man sich z. B. in der Flüssigkeit eine von der Ellipse

$$z = 0 \qquad \frac{x^2}{\varkappa^2-\mu^2} + \frac{y^2}{\lambda^2-\mu^2} = 1$$

---

[1]) D. BERNOUILLI, Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii. Argentorati 1738.

begrenzte Fläche, welche auf beiden Seiten Flüssigkeit ausströmen lässt oder Flüssigkeit aufsaugt, so sind die Stromlinien die Schnittlinien der confocalen einschaligen und zweischaligen Hyperboloide; einen Schnitt durch die Flüssigkeit veranschaulicht Fig. 148.



(Fig. 148.)

Es muss übrigens darauf hingewiesen werden, dass, nachdem eine stationäre Bewegung angenommen worden ist, nun erst noch zu untersuchen ist, ob dieselbe auch thatsächlich auf die Dauer möglich, d. h. ob sie stabil ist. Mit dieser Frage, welche zu den schwierigsten der Hydrodynamik gehört, hat sich namentlich Sir W. THOMSON[1]) beschäftigt; jedoch muss es hier an diesem Hinweis genügen.

Endlich giebt es zahlreiche Fälle, in denen die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen stets kleine Werthe behalten. Für stationäre Bewegungen führt dies keine Vereinfachungen herbei, da alsdann (Gleichung 31) das Quadrat der Geschwindigkeit das einzige überhaupt vorkommende Bewegungsglied ist. Handelt es sich dagegen um kleine, nicht stationäre Bewegungen, z. B. um Schwingungen oder Wellen, bei denen die Theilchen nur langsam sich bewegen, so kann man in Gleichung (26a) das Quadrat der Geschwindigkeit vernachlässigen und erhält, wenn man die Funktion $f(t)$ mit in φ hineinnimmt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = V - P; \tag{32}$$

diese Gleichung in Verbindung mit der zweiten $\Delta\varphi = 0$ bildet dann die Grundlage des Problems.

Die praktisch wichtigsten Fälle der Potentialbewegung der Flüssigkeiten können folgendermaassen gruppirt werden:

A) Fortschreitende Bewegung oder Strömung.
   1) Strömung in Röhren (ringsum feste Wandung).
   2) Strömung in Flüssen, Canälen, Meeren (theilweise feste Wandung, theilweise Nachbarschaft anderer Flüssigkeiten oder Gase).
   3) Strahlen (gar keine feste Wandung).
   4) Ausfluss (Uebergang der beiden ersten Erscheinungen in die dritte).

B) Hin- und hergehende Bewegung.
   5) Scheinbar fortschreitende Bewegung, d. h. fortschreitende Wellen.
   6) Stehende Wellen oder Schwingungen.

Ueber 3) und 4) s. Art. »Ausfluss und Strahlbildung«.

Strömung in Röhren[2]). Zunächst werde von der Reibung der Flüssigkeitstheilchen an der Röhrenwand und an einander abgesehen. Der einfachste und wichtigste Fall ist der der stationären Strömung, den man verwirklichen kann entweder streng, indem man den Wasserstand in dem die Röhre speisenden Reservoir constant erhält, oder für eine kurze Zeit näherungsweise, indem man den Querschnitt des Reservoirs sehr gross gegen den der Röhre wählt. Im Anfangs-

[1]) W. THOMSON, in zahlreichen Bänden des Phil. Mag.

[2]) In Bezug auf die Details dieses Problems muss auf die technische Fachlitteratur verwiesen werden.

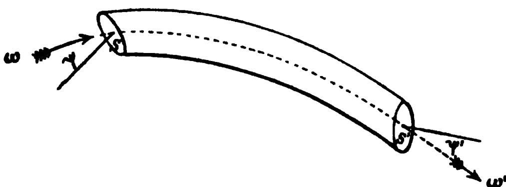
querschnitt q_0 sei der Druck p_0, die Geschwindigkeit ω_0, in einem beliebigen Querschnitte q ersterer p, letztere ω; das Potential der Schwere ist, wenn z vertikal abwärts gerechnet wird, gleich gz. Die Grundgleichung wird also durch Subtraktion für die Querschnitte q und q_0,

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2gz - 2\frac{p - p_0}{\rho}, \qquad (33)$$

und speciell für den Endquerschnitt Q, für den $p = P$, $\omega = \Omega$ sei:

$$\Omega^2 - \omega_0^2 = 2gh - 2\frac{P - p_0}{\rho},$$

wo h der senkrechte Höhenunterschied zwischen den Röhrenenden ist. Wie man sieht, hängt die Geschwindigkeit in irgend einem Querschnitte von der Anfangsgeschwindigkeit, der Tiefe und dem Ueberdruck ab, nicht aber von der Gestalt der Röhre und dem innerhalb des Querschnitts q betrachteten Orte; alle Stromfäden haben also dieselbe Geschwindigkeit und ein zu irgend einer Zeit ebener Querschnitt bleibt stets ein solcher.



(Ph. 149.)

Die Continuitätsgleichung lautet hier, wenn s irgend ein Schnitt, ψ der Winkel seiner Normalen gegen die Axe und A die in der Zeiteinheit durch s hindurchtretende Flüssigkeitsmenge ist, und wenn $s'\psi'A'$ analoge Bedeutung haben

$$\int \omega \cos\psi \, ds + \int \omega' \cos\psi' \, ds' = A + A' = 0,$$

also, da ω von ds unabhängig ist, und wenn man die Anwendung auf die Querschnitte q macht:

$$q_0 \, \omega_0 = q \, \omega = Q \, \Omega; \qquad (34)$$

die Geschwindigkeit in irgend einem Querschnitte ist also mit dessen Grösse umgekehrt proportional. Für eine Stelle, an welcher Ueberdruck nicht stattfindet, ($p = p_0$), ist

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2gz},$$

d. h. die Resultante aus der ursprünglichen Geschwindigkeit und derjenigen, welche ein durch die betreffende Höhe frei gefallener Körper besitzt (pag. 109, Gleichung 2c); ein specieller Fall hiervon ist das TORRICELLI'sche Theorem (s. w. u.). Setzt man aus (34) den Werth von ω_0 in (33) ein, so erhält man:

$$\omega = \sqrt{\frac{2gz - 2\frac{p - p_0}{\rho}}{1 - \left(\frac{q}{q_0}\right)^2}}.$$

Andererseits erhält man für den Druck p, je nachdem man ihn durch ω oder durch die Ausflussgeschwindigkeit Ω oder durch die Druckdifferenz an den Röhrenenden $P - p_0$ ausdrückt

$$p = p_0 + \rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2 \left[1 - \left(\frac{q}{q_0}\right)^2\right]$$

$$p = p_0 + \rho g z - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 \left[\left(\frac{Q}{q}\right)^2 - \left(\frac{Q}{q_0}\right)^2\right]$$

$$p = p_0 + \rho g z - [\rho g h - (P - p_0)] \frac{\left(\frac{q_0}{q}\right)^2 - 1}{\left(\frac{q_0}{Q}\right)^2 - 1}.$$

Wie man sieht, sind die Formeln nur anwendbar, wenn der Querschnitt der Röhre sich verengert, nicht aber wenn er sich erweitert (denn dann wird ω imaginär), und auch nicht in dem besonders wichtigen Falle wo der Querschnitt constant bleibt. Stationäre Bewegung ist dann also ohne Reibung nicht möglich; letztere ist sonach ein wesentlicher Faktor und muss in Rechnung gezogen werden. Indem im Uebrigen auf den Art. Reibung verwiesen wird, folgen hier nur die für das vorliegende Problem wesentlichen Angaben.

Zunächst werde, wie es von technischer Seite zu geschehen pflegt, als einziger Widerstand, den die strömende Flüssigkeit zu überwinden hat, der sogen. »Röhrenwiderstand« R, d. h. die Reibung der Flüssigkeit an der Röhrenwand, eingeführt. Derselbe hängt, ausser von der Natur der Flüssigkeit und der inneren Röhrenwand, jedenfalls noch von anderen Grössen ab. Schon eine ungefähre Ueberlegung lehrt, dass R der Röhrenlänge l und dem Umfange des Querschnitts u direkt der Grösse des letzteren aber umgekehrt proportional ist; es wird also, wenn $\varkappa$ ein die specifische Reibung zwischen Flüssigkeit und Röhrenwand darstellender Zahlenfaktor ist, für beliebige Formen des Querschnitts:

$$R = \varkappa \frac{lu}{q},$$

und insbesondere für kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d:

$$R = \varkappa \frac{4l}{d}.$$

Die Strömungsgeschwindigkeit wird also jetzt:

$$\omega = \sqrt{\frac{2gz - 2\dfrac{p - p_0}{\rho}}{1 - \left(\dfrac{q}{q_0}\right)^2 + R}},$$

bleibt also auch für überall gleichen Querschnitt endlich und wird in diesem Falle der Wurzel aus dem Röhrenwiderstand umgekehrt proportional. Um diesen Fall handele es sich zunächst.

Was die Constante $\varkappa$ betrifft, so fand z. B. EYTELWEIN[1] (in rheinischen Fuss) etwa $\varkappa = 0{\cdot}031$. Indessen haben spätere Versuche gezeigt, dass $\varkappa$ selbst wieder noch von der Geschwindigkeit und dem Durchmesser abhängt. Einige Hydrauliker setzten

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta}{\omega},$$

und zwar fand (wieder in Fuss)

PRONY	$\alpha = 0{\cdot}00684$	$\beta = 0{\cdot}001116$
D'AUBUISSON	$0{\cdot}00673$	$0{\cdot}001211$
EYTELWEIN	$0{\cdot}00549$	$0{\cdot}00143$;

dagegen stellte WEISBACH seine Versuche durch die Formel

$$\varkappa = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{\omega}} = 0{\cdot}003598 + \frac{0{\cdot}004289}{\sqrt{\omega}}$$

dar. Nach DARCY endlich, welcher die genauesten und zahlreichsten Versuche ausführte, ist für kreisförmigen Querschnitt

$$\varkappa = \alpha + \frac{\alpha_1}{d} + \frac{\beta + \dfrac{\beta_1}{d^2}}{\omega},$$

und hierin ist für neue Röhren

[1]) EYTELWEIN, Abh. Berl. Ak. 1814.

$$\alpha = 0{\cdot}001262 \qquad \alpha_1 = 0{\cdot}000833 \qquad \beta = 0{\cdot}00206 \qquad \beta_1 = 0{\cdot}00001042,$$

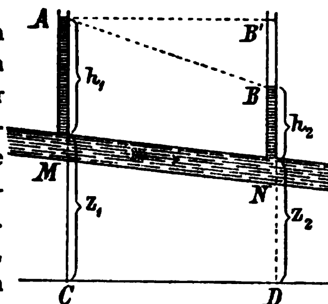
während für abgenutzte Röhren etwa die doppelten Werthe gelten[1]). In neuester Zeit hat HAMILTON SMITH[2]) diese Versuche im grössten Maassstabe wieder aufgenommen, l zwischen 3 *m* und 13000 *m*, d zwischen 13 *mm* und 1220 *mm* variirt und auf die obige Bezeichnungsweise umgerechnet den Ausdruck

$$\varkappa = 0{\cdot}0033 + \left(0{\cdot}00225 + \frac{0{\cdot}000035}{d}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

gefunden. Um hiernach die Durchflussgeschwindigkeit für eine gegebene Leitung zu berechnen, wird man am besten thun, ein Näherungsverfahren anzuwenden, indem man mittelst eines ungefähren Werthes von $\varkappa$ nach der Formel

$$\omega = \sqrt{\frac{g h d}{2 \varkappa l}}$$

(h Druckhöhe, mit der nöthigen Correktur wegen der Contraktion, s. Art. Ausfluss) ω berechnet, hiermit ein genaueres $\varkappa$ u. s. w.



(Ph. 150.)

Der Einfluss des Röhrenwiderstandes lässt sich in folgender Weise bequem veranschaulichen (Fig. 150). *MN* sei ein bestimmtes Stück der Röhre, von $z = z_1$ bis $z = z_2$ reichend (entsprechend $p = p_1$ und $p = p_2$); in *M* und *N* denke man sich Manometer eingesetzt, welche die Druckhöhen $h_1 = p_1/(g\rho)$ und $h_2 = p_2/(g\rho)$ anzeigen. Die Höhendifferenz *MN* stellt das wahre Gefälle, die von *AB* das virtuelle Gefälle dar; dieselben Grössen durch *CD* dividirt, heissen relatives Gefälle (wahres resp. virtuelles). Die Strömungsgleichung ist

$$\varkappa \frac{\omega^2}{2g} = \frac{1}{l}\left[(z_1 + h_1) - (z_2 + h_2)\right]\frac{q}{u};$$

für $\varkappa = 0$ wäre $z_1 + h_1 = z_2 + h_2$, also das virtuelle Gefälle null, AB' horizontal; BB' ist also die durch den Röhrenwiderstand verlorene Druckhöhe.

Bisher wurde angenommen, dass sich ein Flüssigkeitsfaden wie der andere bewegt. Thatsächlich wird das aber nicht der Fall sein, da die peripherischen Theilchen am meisten, die axialen am wenigsten durch den Röhrenwiderstand aufgehalten werden, ein ursprünglich ebener Querschnitt wird sich daher mehr und mehr nach vorn ausbauchen. Um dies darzustellen, muss man den Abstand r eines Theilchens von der Röhrenaxe einführen (für die Wand wird $r = R$, dem Radius) und, unter der Annahme, dass für ein und dasselbe Theilchen r constant bleibt, $\varkappa$ als Funktion von r darstellen. Theoretisch hat MOSELEY[3]) die Formel

$$\omega = \omega_0 e^{-\varepsilon r + R}$$

abgeleitet, so dass für $r = 0: \omega = \omega_0 e^R$, für $r = R/\varepsilon: \omega = \omega_0$ und für $r = R$: $\omega = \omega_0 e^{R(1-\varepsilon)}$ wird; dagegen hat DARCY[4]) seine Versuche durch die Formel

$$\omega = \omega_0\left[1 - m\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}\right]$$

dargestellt, und ähnliche Formeln haben später BAZIN u. A. benutzt. Die theoretische Formel stimmt mit der praktischen, wie CUNNINGHAM[5]) gezeigt hat, nur

---

1) Noch andre Formeln resp. Werthe rühren von DUBUAT, GERSTNER und GERARD her.

2) HAMILTON SMITH, DINGL. Polyt. J. 252, pag. 89 (1884).

3) MOSELEY, Phil. Mag. (4) 42, pag. 184 (1871) und 44, pag. 30 (1872).

4) DARCY, Mém. prés. à l'Ac. de Paris 15. (1858). — DARCY-BAZIN, ebenda 19, pag. 1.

5) CUNNINGHAM, Phil. Mag. (5) 14, pag. 110 (1882).

innerhalb sehr enger Grenzen überein; indessen scheint es bis jetzt nicht gelungen zu sein, diese Lücke auszufüllen.

Ueberhaupt wird man den hier in Rede stehenden Vorgängen in weit wissenschaftlicherer Weise gerecht, wenn man ausser der äusseren Reibung $\varkappa$ auch die innere Reibung η der Flüssigkeitstheilchen an einander als maassgebend für die Abnahme des Drucks und der Geschwindigkeit einführt. Für ganz enge, sogen. Capillarröhren, hat POISEUILLE[1]) die als sein Gesetz bekannte empirische Formel für die Ausflussmenge A

$$A = \frac{\pi}{8}\frac{pR^4}{\eta l}$$

aufgestellt. Die Ausflussmenge ist nämlich diejenige Grösse, welche sich am einfachsten direkt messen lässt, sei es durch Auffangen der in einem bestimmten Zeitraume ausfliessenden Flüssigkeitsmenge in einem calibrirten Gefässe, sei es durch Wägung. Durch Division mit dem Querschnitte (eventuell in gewissen Fällen unter Anbringung von Correctionen) erhält man alsdann rückwärts die mittlere Geschwindigkeit aller Fäden. Theoretisch ergiebt sich als Geschwindigkeit eines Fadens

$$\omega = \frac{p}{4\eta l}(R^2 - r^2) + \frac{p}{2\varkappa l}R,$$

folglich als mittlere Geschwindigkeit aller Fäden

$$[\omega] = \frac{p}{8\eta l}R^2 + \frac{p}{2\varkappa l}R,$$

und somit als Ausflussmenge

$$A = \frac{\pi}{8}\frac{p}{\eta l}\left(R^4 + \frac{4\eta}{\varkappa}R^3\right).$$

Die POISEUILLE'sche Formel geht hieraus hervor, wenn $\varkappa$ sehr gross gegen η ist.

Für nicht mehr capillarartige aber noch sehr enge Röhren hat HAGEN[2]) durch zahlreiche Versuche die Beziehung für die Druckhöhe

$$h = \alpha\omega^2 + \beta\omega$$

gefunden; man bestätigt dieselbe aus der Theorie, indem man in der obigen Strömungsgleichung das der inneren Reibung entsprechende Glied hinzufügt, wobei sich zugleich die HAGEN'schen Constanten bestimmen, nämlich

$$\alpha = \frac{1}{g} \qquad \beta = \frac{8\eta l}{g\rho R^2}.$$

Auf die Betrachtungen, zu denen diese Werthe Anlass geben, kann hier nicht näher eingegangen werden. Nur sei darauf aufmerksam gemacht, dass hier für $\eta = 0$ nicht mehr, wie bei POISEUILLE, $\omega = \infty$ wird, sondern endlich bleibt.

Was endlich weitere Röhren betrifft ($d = \frac{1}{2}\,cm$ und mehr), deren Länge aber in entsprechendem Maasse gross ist, so hat O. E. MEYER[3]) die folgende Formel für die Ausflusszeit t als die Versuche gut darstellend gefunden:

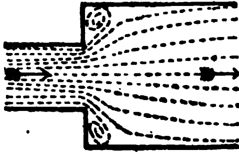
$$t = \frac{A}{\sqrt{p}} + B\frac{l}{p} + C\frac{l^2}{p^2},$$

deren erstes Glied der reibungsfreien Strömung, deren zweites dem POISEUILLE-schen Gesetz entspricht, deren drittes dagegen neu ist; es wäre zu prüfen, ob die Versuche von HAMILTON SMITH (s. o.) sich ebenfalls hierdurch darstellen lassen.

Viel complicirter werden Theorie und Beobachtung, wenn der Querschnitt der Röhre veränderlich ist, und ganz besonders dann, wenn er plötzliche Ver-

[1]) POISEUILLE, Mém. prés. à l'Ac. de Paris 9, pag. 523 (1847). Ann. Ch. Phys. 21.
[2]) HAGEN, POGG. Ann. 46, pag. 423 (1839). Abh. Berl. Akad. 1854, pag. 12.
[3]) O. E. MEYER, POGG. Ann. Jubelband pag. 1 (1874).

änderungen erfährt, wenn also z. B. auf eine weitere Röhre eine engere folgt, oder wenn das Umgekehrte stattfindet. Es treten dann nämlich ausser der axialen auch transversale Geschwindigkeiten auf, und man muss an Stelle von ω die drei Componenten $u\, v\, w$ in die Rechnung einführen. Diese Strömungen hat namentlich STEFAN[1]) von allgemeinen Gesichtspunkten aus untersucht und u. a. Sätze aufgestellt, welche den bisher betrachteten Röhren von constantem Querschnitt solche von constantem Längsschnitt gegenüberstellen. Uebrigens erfahren hier die Erscheinungen eine weitere Complikation dadurch, dass in vielen Fällen, z. B. bei plötzlicher Zunahme des Querschnittes Wirbel auftreten, welche der fortschreitenden Bewegung einen Theil des kinetischen Energie entziehen, sowie dadurch, dass zuweilen die Flüssigkeit sich von der Wandung loslöst und innerhalb der Röhre einen freien Strahl bildet.


(Ph. 151.)

Schliesslich ist noch auf eine Reihe specieller hierher gehöriger Probleme hinzuweisen: Strömung durch sich verzweigende Röhren, Strömung durch scharf gebogene oder gebrochene Röhren (SARTORI, Bresl. In.-Diss. 1884), Strömung durch elastische Röhren (Schläuche) u. s. w. Dieselben sind, soweit sie sich auf weite Röhren beziehen, wesentlich technischen Interesses, soweit sie sich auf Capillarröhren beziehen, unter »Reibung« berücksichtigt. Nur auf ein sehr merkwürdiges Resultat einer neueren Untersuchung muss noch hingewiesen werden, dass nämlich das Maximum des Ausflusses aus einer geneigten Röhre nicht dann stattfindet, wenn das Wasser sie gänzlich erfüllt, sondern wenn es nur einen Theil, nämlich 308° des Umfangs benetzt, also nur bis zu $\frac{19}{20}$ des vertikalen Durchmessers reicht. Es fliesst dann, bei Anwendung der DARCY'schen Formel, fast um 7% mehr aus, und die Ausflussgeschwindigkeit ist sogar um 10% grösser[2]).

Strömung in Canälen und Flüssen. Auch dieses vorwiegend der Technik einerseits und der Erdkunde andererseits angehörige Problem kann hier nur kurz skizzirt werden. Von streng wissenschaftlicher Seite bietet dasselbe ausserordentliche und durch die Untersuchungen namentlich englischer und französischer Forscher nur zum Theil überwundene Schwierigkeiten dar. Die Strömung kann entweder veränderlich oder stationär sein, und in letzterem Falle erhebt sich die weitere Frage nach der principiellen oder thatsächlichen Stabilität der betreffenden Flüssigkeitsbewegung[3]). Hiervon abgesehen haben zahlreiche Physiker und Techniker Formeln aufgestellt, welche die Strömungsgeschwindigkeit v als Funktion der Dimensionen des Canals (F Querprofil, b Spiegelbreite, p benetzter Umfang) und des relativen Gefälles J angenähert darstellen und theils empirischen Charakters, theils aus einfachen Betrachtungen abgeleitet sind. So ist:

nach EYTELWEIN . . . . . $v = c\sqrt{\frac{F}{p}J}$

nach HUMPHREYS und ABBOT $v = c\sqrt{\frac{F}{p+b}}\sqrt{J}$

nach HAGEN . . . . $v = c\sqrt{\frac{F}{p}}\sqrt{J}$

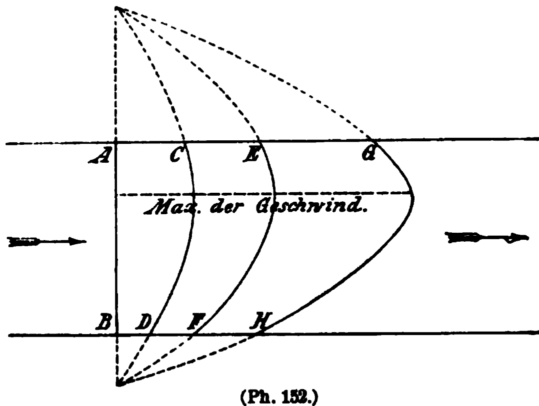
nach BAZIN . . . . $v = \sqrt{\frac{RJ}{\alpha + \beta/R}}$, wo $R = \frac{F}{p}$,

1) STEFAN, Wien. Ber. 37 (2), pag. 420 (1859).

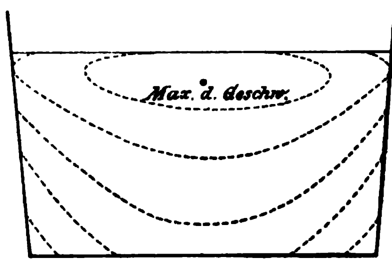
2) HENNESSY, Proc. R. Soc. 45, pag. 145. 1888.

3) Ueber die Stabilität derartiger Flüssigkeitsbewegungen s. namentlich W. THOMSON, in versch. Bdn. d. Phil. Mag. (1888—89).

und hierin sind c, sowie α und β Constanten, die von der Wandung abhängen; beispielsweise ist für Erde etwa $\alpha = 0{\cdot}00028$ und $\beta = 0{\cdot}00035$. Die neueste Studie über diese Beziehungen rührt von HARDER[1]) her und führt, wie es scheint, zu recht brauchbaren Formeln für Bodengeschwindigkeit, Durchschnittsgeschwindigkeit und für die Geschwindigkeit in irgend einem Stromfaden. Fasst man diese Formeln zusammen, so findet man — was sich aus der Zusammenwirkung von Bodenreibung und Luftreibung erklärt und mit den Beobachtungen im Einklange steht — dass die grösste Geschwindigkeit nicht in der Oberfläche, sondern etwas unter ihr liegt und dass man somit, wenn man die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen durch Horizontalen darstellt, eine parabelähnliche Curve (Fig. 152) erhält; ein ursprünglich gradliniger Flüssigkeitsfaden AB baucht sich allmählich immer mehr nach vorn aus (CD, EF u. s. w.). Bei seitlicher Begrenzung kommt hierzu noch eine horizontale Verschiedenheit der Geschwindigkeit in Folge der Reibung an den Wänden; und wenn man, beide Einflüsse zusammenfassend, die einem Querschnitt angehörigen Punkte gleicher Geschwindigkeit verbindet, so erhält man eine andere Klasse von Curven, die ihrer Gestalt nach von den Umständen abhängigen, im allgemeinen aber ähnlich den Kettenlinien von den Wänden nach der Mitte herabhängenden Isotachen (Fig. 153).



(Ph. 152.)



(Ph. 153.)

Der experimentelle Theil des vorliegenden Problems, der den Namen Hydrometrie erhalten hat, beruht auf der Anwendung zahlreicher Apparate zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit (Stromquadrant, WOLTMANN'scher Flügel, PITOT-sche Röhre u. s. w.)[2]).

Eine wesentliche Modifikation und Complikation erfährt die Theorie der Strömung durch den Hinzutritt einer Wellenbewegung der Flüssigkeit, welche häufig zugleich mit Wirbelbewegung verknüpft ist. Nach REYNOLDS ist dies stets der Fall, wenn die Strömungsgeschwindigkeit einen gewissen kritischen Werth übersteigt. Mit Problemen dieser Art hat sich namentlich BOUSSINESQ beschäftigt; jedoch kann hierauf an dieser Stelle nicht eingegangen werden (s. w. u.). Auch in Bezug auf die Meeresströmungen muss es hier genügen auf die Literatur hinzuweisen[3]).

---

[1]) HARDER, Theorie d. Bew. d. Wassers in Flüssen und Canälen, Hamb. 1878. Daselbst auch die ältere Literatur.

[2]) S. hierüber BAUERNFEIND, Elemente d. Vermessungskunde, Stuttg. 1879, Bd. 1; GÜNTHER, Lehrb. d. Geophysik 2, pag. 597 u. s. w.

[3]) Die gegenwärtig zumeist geltende Theorie, wonach die Meeresströmungen die Folge regelmässiger, durch Reibung sich ins Wasser fortpflanzender Luftströmungen sind, ist von ZÖPPRITZ (WIED. Ann. 3, pag. 582. 1878) entwickelt worden. Die specielle Literatur s. bei GÜNTHER, Lehrb. d. Geophysik, Stuttg. 1885. Bd. 2, pag. 400.

Ebbe und Fluth. Mit den Ausdrücken »Gezeiten« oder »Ebbe und Fluth« bezeichnet man die Erscheinung des nach complicirten Gesetzen verlaufenden, aber im Grossen und Ganzen periodischen Steigens und Fallens des Meeresspiegels. Diese Erscheinung ist schon seit STEVIN und KEPLER als Folge siderischer Einflüsse, speciell der Anziehung des Mondes und der Sonne erkannt worden, und schon von NEWTON rührt die erste, die sogen. statische Theorie der Gezeiten her. In dieser Theorie wird angenommen, dass die Figur des Ozeans in jedem Augenblick eine durch die Gegenwirkung von Erdschwere und Fluthanziehung bedingte Gleichgewichtsfigur sei. Die Anziehung eines Weltkörpers von der Masse M in der Entfernung R vom Erdmittelpunkt ist für diesen selbst bis auf einen Faktor M/R^2, dagegen für den zugewandten resp. abgewandten Oberflächenpunkt, wenn ρ der Erdradius ist, $M/(R \pm \rho)^2$; die Differenz dieser und jener Grösse ist, bei der Kleinheit von ρ im Vergleich zu R, $2M\rho/R^3$. Eine abstossende Kraft von dieser Grösse wird man sich, vom Erdmittelpunkt weggerichtet, an den genannten beiden Gegenpunkten vorzustellen haben, und die Beweglichkeit in Verbindung mit dem Zusammenhange des Wassers wird demgemäss ein Zuströmen desselben nach jenen Punkten hin zur Folge haben, derart dass die Oberfläche der flüssigen Erdhülle eine andere Gestalt annimmt. Die gedachten beiden Gegenpunkte haben hohes Wasser oder Fluth, die gerade dazwischen liegenden Punkte haben niedriges Wasser oder Ebbe. Da nun Erde, Mond und Sonne sich bewegen, also jeder Oberflächenpunkt der Erde seine Lage zu Mond und Sonne ändert, wird die Gleichgewichtsfigur des Wassers in jedem Augenblicke eine andere Lage und Gestalt besitzen, und für jeden Punkt derselben wird sich der Wasserstand unter allmählichem Uebergange von Fluth zu Ebbe und umgekehrt ändern. Das Gesetz dieser Aenderung muss offenbar ein sehr verwickeltes sein, da die Zahl der bedingenden Einflüsse eine grosse ist: Rotation der Erde um ihre Axe, Rotation der Erde um die Sonne, Rotation des Mondes um die Erde, periodische Aenderungen in der Declination von Mond und Sonne, Schwankungen in der Entfernung des Mondes und der Sonne von der Erde u. s. w.[1]). Der stärkste dieser Einflüsse und folglich der, welcher der Erscheinung das Gepräge verleiht, ist die Axendrehung der Erde; jeder Punkt hat in Folge derselben alle 24 Stunden zweimal Fluth und zweimal Ebbe, diese Schwankung heisst die halbtägige Fluth. Sie ist aber insofern keine einfache Erscheinung, als man halbtägige Mondfluth und halbtägige Sonnenfluth zu unterscheiden hat. Wären diese wirklich beide genau halbtägig, so würden sie, auch wenn sie zeitlich nicht zusammenfielen, doch eine einfache Erscheinung ergeben, indem in regelmässigen Intervallen Mondfluth, Sonnenfluth, Mondebbe, Sonnenebbe u. s. w. sich folgen würde. Die Erddrehung des Mondes verzögert nun aber bekanntlich seinen Meridiandurchgang täglich um 50 Minuten, die Periode der halbtägigen Mondfluth ist also genauer 12 Stunden und 25 Minuten, und dadurch modificirt sich die Gesammterscheinung wesentlich. Zur Zeit von Voll- und Neumond fallen nämlich Mondfluth und Sonnenfluth zusammen und verstärken sich zur »Springfluth«, beim ersten und letzten Viertel dagegen fällt die Fluth des einen Weltkörpers mit der Ebbe des andern zusammen, und es bleibt nur die schwache »Nippfluth« übrig. Diese Grössenänderung, mit der übrigens auch eine zeitliche Aenderung verknüpft ist, heisst die halbmonatliche Ungleichheit. Für das Grössenverhältniss von Sonnenfluth und Mond-

[1]) Eine Tabelle der wichtigsten Fluthen (mehr als 30) siehe bei DARWIN und BAIRD, Proc. R. Soc. 1885, pag. 137.

fluth ergiebt die obige Formel 1 : 2·2 und folglich wird das Verhältniss zwischen Springfluth (2·2 + 1) und Nippfluth (2·2 — 1) ungefähr 2·7 : 1. Von den beiden ein und demselben Tage angehörigen Fluthen, sowohl denen des Mondes als denen der Sonne, ist in Folge der Deklination dieser Körper stets die eine grösser als die andere; und wenn diese Ungleichheit so stark wird, dass die eine der beiden Fluthen ganz verschwindet, erhält man die Erscheinung der eintägigen Fluth. Zu diesen drei Klassen von Gezeiten kommen nun noch zahlreiche andre hinzu, von eintägiger, halbmonatlicher, monatlicher, halbjähriger, ganzjähriger und selbst noch längeren Perioden, und bedingt durch die astronomischen Elemente der Erd- und Mondbahn.

Die skizzirte Theorie stimmt mit den Beobachtungen jedoch in den meisten Punkten nur ungenau, und in einigen, zum Theil gerade wesentlichen, überhaupt nicht überein; erstens treten Fluth und Ebbe im allgemeinen zu andern Zeiten ein, und zweitens sind die Niveauschwankungen sehr viel grössere, wenigstens in der Nähe der Continente. Die beiden Ursachen dieser Widersprüche liegen klar zu Tage. Einmal ist die Erde nicht, wie hier angenommen, vollständig mit Wasser bedeckt, sondern dieses bildet Ozeane, kleinere Meere und Canäle — Verhältnisse, die man natürlich in eine Theorie nur schwer einführen kann[1]). Wie sehr dieselben aber für die Erscheinung maassgebend sind, zeigt die ebenfalls schon von Newton ersonnene Vorstellung eines um den Aequator laufenden Canals und die hierauf von neueren Forschern, besonders Airy, basirte Canaltheorie der Gezeiten. Dieselbe liefert durchaus andere Ergebnisse, als die Ozeantheorie. Zweitens ist das Problem gar nicht, wie angenommen, ein statisches, sondern ein dynamisches. Die dynamische Theorie der Gezeiten, von Laplace begründet, und namentlich von Airy, Sir W. Thomson und G. H. Darwin zu einem hohen Grade der Vollkommenheit geführt, betrachtet demgemäss die Gezeiten als eine Art von durch äussere periodische Kräfte erzwungenen Schwingungen des Wassers. Solche Schwingungen haben, wie die Mechanik zeigt, nachdem die ursprünglich vielleicht ausserdem vorhandenen freien Schwingungen erloschen sind, gleiche Periode mit den erzeugenden Kräften, dagegen abweichende Phasen und Amplituden; und bei der complicirten Gestaltung der Erdoberfläche können diese letzteren Grössen nur aus den Beobachtungen durch sogen. harmonische Analyse abgeleitet und zur Aufstellung von »Fluthtafeln« benutzt werden. Einige Resultate der nach diesen beiden Richtungen modifizirten Theorie, deren Entwickelungen und Formeln hier nicht angegeben werden können, sind folgende: 1) Die halbtägige Fluth hat ihr Maximum nicht genau im Momente der oberen oder unteren Kulmination des wirkenden Körpers, sondern etwas früher oder später; ihre Höhe ist eine verwickelte Funktion der geographischen Breite und ausserdem von der geographischen Länge abhängig. 2) Bei der täglichen Fluth findet höchster oder niedrigster Wasserstand (je nach dem Vorzeichen der Deklination) nicht genau beim Meridiandurchgang statt, sondern, und zwar oft beträchtlich, vorher oder nachher; die Fluthhöhe hängt ebenfalls von Breite und Länge ab, und ist z. B. nicht wie bei der statischen Theorie, am Aequator und den Polen gleich null. 3) Was endlich die vierzehntägigen Mond- und halbjährlichen Sonnenfluthen betrifft, so giebt es zwar nach beiden Theorien eine Breite, in welcher dieselbe fortfällt, während sie in jeder anderen Breite φ einen constanten Werth hat, und ihr Werth daselbst ist nach beiden Theorieen proportional der Abweichung des Quadrates des Sinus

[1]) Ueber dieses Problem s. Darwin und Turner, Proc. R. Soc. 1886, pag. 303.

dieser Breite von dem Quadrate des Sinus derjenigen Breite φ_0, wo die Fluth null ist; aber diese letztere ist hier nicht gleich $arc\,sin\sqrt{1/3} = 35° 16'$, wie wenn die Erde gleichförmig mit Wasser bedeckt wäre, sondern gleich $arc\,sin\sqrt{(1+\vartheta)/3}$, wo ϑ der Mittelwerth von $3\,sin^2\varphi - 1$ für den mit Wasser bedeckten Theil der nördlichen resp. südlichen Halbkugel ist; für erstere wird etwa $\varphi_0 = 32°$, für letztere $\varphi_0 = 37°$.

Vom experimentellen und praktischen Standpunkte bietet das Gezeitenproblem im Wesentlichen drei Aufgaben dar: die Anstellung der Beobachtungen, die Analyse derselben und die Vorhersagung der zu erwartenden Erscheinungen. Zu ersterem Zwecke dienen die sogen. Fluthmesser, deren Construktion gegenwärtig eine grosse Vollkommenheit erlangt hat. Ein gewöhnlicher Pegel ist offenbar nicht brauchbar, weil er die Fluthbewegungen von den übrigen Bewegungen des Wassers nicht sondert und weil seine Ablesung, zumal man ihn in einigem Abstande von der Küste aufstellen müsste, unbequem und ungenau sein würde. Man verwendet daher das Princip der communicirenden Röhren, lässt eine möglichst weit ins Meer hinausragende Horizontalröhre sowohl draussen als auch an der Küste in ein Vertikalrohr münden und setzt auf den Wasserspiegel in letzterem einen Schwimmer; verbindet man diesen noch mit Hilfe eines feinen Drahtes mit einem Mechanismus zur graphischen Aufzeichnung auf einer rotirenden Trommel, und giebt man dem ganzen Apparat eine so grosse Schwere und Trägheit, dass alle nicht zur Sache gehörigen Bewegungen wirkungslos bleiben, so hat man den W. THOMSON-schen[1]) selbstregistrirenden Fluthmesser, der häufig noch mit einem Integraphen zur Angabe des mittleren Wasserstandes verbunden wird und in verschiedenen Ausführungen (NEWMAN, STAHLBERGER, REITZ u. s. w.) in Hafenplätzen und an Inseln aufgestellt ist. Die Curven, welche die Instrumente liefern, sind von grosser Feinheit und Gleichmässigkeit, haben im Grossen und Ganzen natürlich Wellenform, lassen aber im Einzelnen die verschiedenen Einflüsse von Mond- und Sonnenstellung deutlich erkennen. Auch für den zweiten Theil der Aufgabe, die Reduction der Beobachtungen, d. h. die Zerlegung der Curven in Sinuscurven von bestimmten Perioden und Amplituden, haben J. und W. THOMSON[2]) einen genialen mechanischen Apparat erfunden, den »harmonischen Analysator«, dessen Spitze man nur längs der vom Fluthmesser gelieferten Curve hinzuführen braucht, um die bezüglichen Zahlencoëfficienten zu erhalten. Hat man keine derartige Maschine, so muss man die Coëfficienten als FOURIER'sche Integrale von der bekannten Form darstellen und ausrechnen. Endlich hat W. THOMSON[3]) auch die Idee und Theorie eines seitdem in der Construction von ROBERTS vielfach in Gebrauch gekommenen »Fluthankündigers« gegeben, welcher im Wesentlichen aus Systemen von Rollen (festen und beweglichen) besteht, für jede Art von Gezeiten ein besonderes derartiges System hat und folglich die zu erwartenden Erscheinungen der Zeit und Stärke nach um so genauer vorhersagt, je mehr Rollen er besitzt; das indische Instrument z. B. hat deren 20.

Die Ergebnisse der skizzirten Untersuchungen können entweder in Form von Fluthtafeln oder in der von Fluthkarten zur Darstellung gebracht werden; beide müssen Angaben über zeitlichen Eintritt und Stärke der Erscheinungen enthalten. Einige besonders wichtige Ergebnisse sind folgende: Es giebt nur wenige Orte, für welche am Tage von Voll- und Neumond das Hochwasser im Augenblicke der Culmination des Mondes eintritt; für die meisten haben die beiden

[1]) S. u. A. Proc. Inst. Civ. Eng. 95, pag. 10 (1872).

[2]) J. THOMSON, Proc. R. Soc. 1876, pag. 262. — W. THOMSON, Proc. R. Soc. 1878, pag. 371.

[3]) W. THOMSON, Proc. Inst. Civil Engin. 95, pag. 10 (1872).

besprochenen Einflüsse (Trägheit des Wassers und feste Landmassen) eine Verzögerung zur Folge, und diese heisst die **Hafenzeit** des Ortes (gewöhnlich in Greenwicher Zeit ausgedrückt); für einen andern Tag findet man dann die Zeit des Hochwassers, wenn man zur Culminationszeit des Mondes die Hafenzeit addirt und wegen der halbmonatlichen Ungleichheit (s. o.) folgende aus zahlreichen Beobachtungen abgeleitete Correction vornimmt:

Culmination	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Uhr
Correction	−13	−28	−43	−55	−63	−63	−44	−15	+9	+16	+11	Minuten.

Verbindet man alle Punkte mit gleichen Hafenzeiten, so erhält man die **Fluthwellenlinien** oder Isorachien, welche erkennen lassen, wie sich das Hochwasser aus den Ozeanen in die Canäle und Binnenmeere fortpflanzt. Im folgenden sind für einige deutsche Orte Hafenzeit und mittlerer Fluthwechsel (Höhendifferenz zwischen mittlerer Fluth und mittlerer Ebbe) in Metern angegeben:

Nordsee			Elbe			Ostsee		
Norderney	10 *h* 53 *m*	2·4	Cuxhafen	0 *h* 49 *m*	2·8	Fehmarn	5 *h* 45 *m*	0·060
Helgoland	11 *h* 30 *m*	2·1	Glückstadt	2 *h* 52 *m*	2·9	Arcona	8 *h* 35 *m*	0·020
Emden	0 *h* 17 *m*	2·8	Hamburg	5 *h* 10 *m*	1·9	Swinemünde	11 *h* 30 *m*	0·018
Wilhelmshafen	0 *h* 50 *m*	3·5						
Bremerhafen	1 *h* 4 *m*	3·3						

In der Mitte der grossen Ozeane beträgt der Fluthwechsel nur Bruchtheile eines Meters, andererseits im Golf von Bristol bis zu 10 und in der Fundy Bai bis zu 15 Meter. Ausserdem erhält man bei Springfluth überall fast die doppelten der obigen Werthe[1]).

Schliesslich ist noch in Kürze auf zwei Erscheinungen hinzuweisen. Die eine ist die sogen. **Fluthreibung**, welche für die Eigenschaften der Erde als Weltkörper von Einfluss ist[2]), insofern sie die Axendrehung so lange zu verlangsamen strebt, bis sie der Dauer der Umdrehung um den Centralkörper gleich geworden sein wird (bei dem Mond, dem Saturnmond Japetus und, wie es scheint, dem Merkur, ist dies schon jetzt der Fall); Fluth und Ebbe haben dann ihr Ende erreicht, alles Wasser sich auf einer Hälfte des Weltkörpers (meist der Aussenseite) angesammelt. Die andere Erscheinung betrifft die Fluthen des festen Erdkörpers selbst[3]). W. Thomson hat theoretisch gezeigt, dass letzterer der Gezeitenwirkung in erheblichem Grade nachgeben muss, und dass wir daher nur die Differenz zwischen den Deformationen des Ozeans und des Erdkerns beobachten. Wäre die Erde vollkommen starr, so müssten sich in den Gezeiten alle Bewegungen

1) Ausser den grundlegenden Quellen (Newton, Phil. nat. princ. math. Buch I.; Laplace, Méc. céleste; Whewell, Phil. Trans. 1836—50; Airy, Tides and Waves, Lond. 1846) können hier nur einige zusammenfassende neuere Darstellungen, in denen man auch die moderne Original-Literatur zusammengestellt findet, angegeben werden: Thomson und Tait, Hdb. d. theoret. Phys. Bd. 2, pag. 398 ff. — Thomson und Tait, Nat. Philosophy 2, ed. § 838—848 (Additions by G. H. Darwin). — Darwin (G. H.), Artikel »Tides« in der Encycl. Britannica, 9. Aufl., Bd. 23. — Lentz, Von Fluth und Ebbe des Meeres, Hamburg 1874. — Günther, Lehrb. d. Geophysik, 2. Bd. pag. 381. — Houzeau und Lancaster, Bibliogr. de l'Astron. Brüssel 1882, Bd. 2. — Zur Bearbeitung der Beobachtungen durch harmonische Analyse hat die Brit. Assoc. eine Commission ernannt, für welche G. H. Darwin eine Anzahl Berichte (Reports of Brit. Ass.) veröffentlicht hat.

2) G. H. Darwin, »Tides« (Encycl. Brit.), pag. 374. — Phil. Trans. 1881, II, pag. 491.

3) Sir W. Thomson, Phil. Trans. 1863, pag. 573 und im Hdb. d. theor. Phys. Bd. 2. — G. H. Darwin, Phil. Trans. 1879, I, pag. 1; II, pag. 447 und 539, 1880; II, pag. 713.

von Sonne und Mond wiederspiegeln; andernfalls müssten die Gezeiten langer Periode, z. B. die 18jährigen, ganz fehlen (den kürzeren kann der Erdkörper der Trägheit halber möglicher Weise nicht folgen). Diese Frage ist jedoch noch nicht abgeschlossen, da es noch nicht gelungen ist, die An- und Abwesenheit derartiger Fluthen sicher nachzuweisen.

Wellenbewegung der Flüssigkeiten. Vom streng wissenschaftlichen Standpunkte zerfällt die Aufgabe, die dieses Problem stellt, in drei Theile: 1. Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials mit Rücksicht auf die Grundgleichungen und die Continuitätsgleichung. 2. Bestimmung der an den Wänden des Gefässes, welches die Flüssigkeit enthält, zu erfüllenden Grenzbedingungen, nämlich, wenn n die Richtung der Normale bedeutet, der Gleichung $\partial\varphi/\partial n = c$, wo c eine Constante und zwar speciell gleich null ist, wenn das Gefäss ruht. 3. Bestimmung der Bedingungen, welche erfüllt werden müssen, damit die freie Oberfläche eine Fläche gleichen Druckes sei, oder allgemeiner, damit die Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten keine Unstetigkeit des Druckes aufweise. Für kleine Geschwindigkeiten, und wenn nur die Schwere g wirkt, gilt demgemäss für die Oberfläche die Gleichung

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = const,$$

und speciell für eine freie Oberfläche kann man sie, wenn l die Länge des der Wellenbewegung correspondirenden einfachen Pendels ist, auf die Form bringen

$$l\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \varphi \quad \text{für} \quad z = h$$

(h Werth von z für die Oberfläche). Wirkt ausser der Schwere noch die Oberflächenspannung T (s. Art. Capillarität), so ist letztere Gleichung durch die neue

$$l\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{Tl}{g\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \varphi$$

zu ersetzen. Bei der Behandlung dieser Gleichungen kommt man auf die sogen. hyperbolischen Funktionen:

$$cos\,hyp\,v = \frac{1}{2}(e^v + e^{-v}) \qquad sin\,hyp\,v = \frac{1}{2}(e^v - e^{-v}) \qquad tang\,hyp\,v = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}$$

welche resp. hyperbolischer Cosinus, Sinus und Tangens von v heissen. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen in gleichförmig tiefem, ruhigem Wasser erhält man dann, wenn λ die Wellenlänge ist

$$V^2 = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}\right) tang\,hyp\,\frac{2\pi h}{\lambda},$$

also speciell, wenn die Oberflächenspannung klein ist,

$$V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\,tang\,hyp\,\frac{2\pi h}{\lambda};$$

für Wellen, welche gegen die Wassertiefe gross sind, wird daher

$V = \sqrt{gh}$ [Kelland[1]), Scott Russel[2]), Green[3])];

für Wellen dagegen, welche gegen die Wassertiefe klein sind:

$V = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ [Gerstner[4]) (1802), Rankine[5]) (1862)].

Eine dritte Klasse von Wellen erhält man, wenn, was nach der allgemeinen V-Gleichung bei kleinen Wellenlängen leicht eintreten kann, g gar nicht mehr,

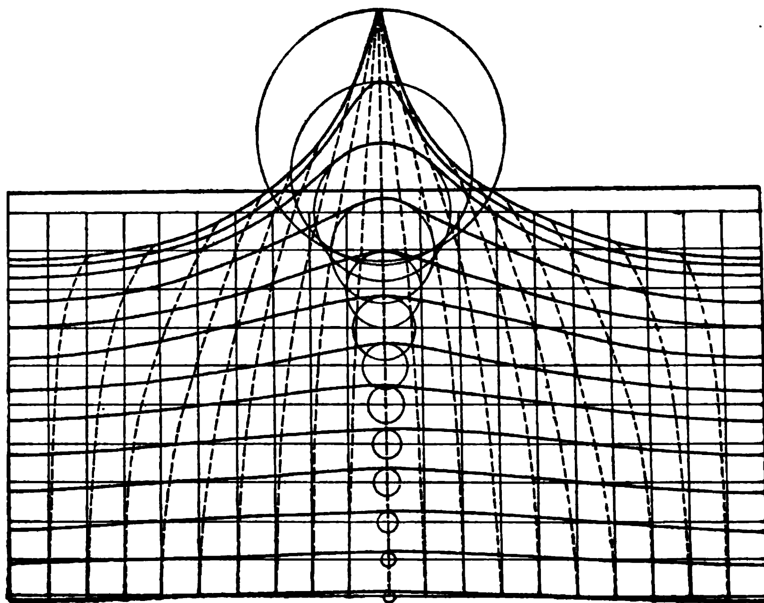
---

1) Kelland, Trans. Ed. Soc. 15, pag. 121.
2) Scott Russel, Rep. of the Brit. Ass. 1844.
3) Green, Cambr. Phil. Trans. 6, pag. 457. 1837.
4) Gerstner, Theorie der Wellen, Prag 1804. Gilb. Ann. 32, pag. 412.
5) Rankine, Phil. Trans. R. Soc. 1863, I, pag. 227.

sondern ausschliesslich die Oberflächenspannung T die Erscheinung bestimmt[1]); es wird dann

$$V^2 = \frac{2\pi T}{\rho\lambda} \, tang\, hyp \frac{2\pi h}{\lambda};$$

schon bei $\lambda = 2\pi\sqrt{T/g\rho}$ ist der Einfluss von T so gross wie der von g, für kleinere Werthe von λ überwiegt er; man kann derartige kleine Wellen Kräuselungen nennen. Auch hinsichtlich der Gestalt der Wellen sowie der Bahnen der einzelnen Theilchen unterscheiden sich die betrachteten Fälle, was namentlich Stokes[2]) nachgewiesen hat. Die Kelland'sche Welle ist in erster Annäherung sinusförmig, nähert sich aber bei wachsender Wellenhöhe mehr und mehr der



(Ph. 154.)

Trochoidenform und damit der Form der Gerstner'schen Welle, bei welcher die Thäler sanft, die Gipfel stark gekrümmt sind. Damit werden zugleich die Bahnen der Theilchen Kreise. Verfolgt man die Bewegung nach unten, so erhält man, von der mit Spitzen versehenen Cycloide ausgehend, immer sanftere Trochoiden, und als Bahnen Kreise mit abnehmendem Radius (Fig. 154); natürlich brauchen nach oben hin nicht alle Trochoiden bis zur Cycloide ausgebildet zu sein, wie in der Figur der Vollständigkeit halber angenommen ist. In anderen Fällen sind die Bahnen Ellipsen, die nach unten zu immer länglicher werden und am Boden in gerade Linien übergehen. In der Praxis ist jedoch meist die der Fig. 154 entsprechende Trochoidentheorie in Gebrauch. Endlich kann die Wellenlänge so gross und die Wassertiefe so klein sein, dass die Bahnen aller Theilchen nahezu horizontale Geraden sind; dann muss aber, wie Rayleigh[3]) gezeigt hat, die Wellenhöhe selbst im Vergleich zur Wassertiefe sehr klein sein.

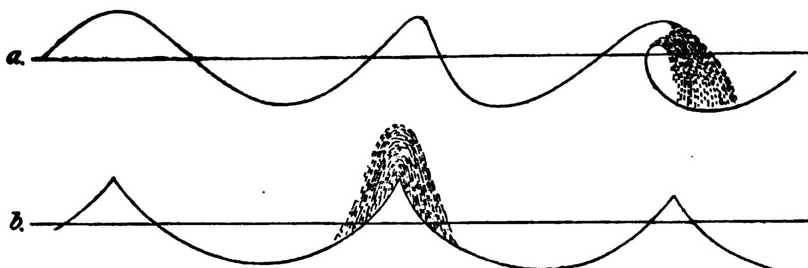
Aenderungen muss man an obigen Formeln vornehmen, wenn über der

[1]) Die Wirkung der Oberflächenspannung auf die Wellenbewegung ist zuerst von Sir W. Thomson, Phil. Mag. (4) 42, pag. 368 (1871) und von Kolaczek, Wied. Ann. 5, pag. 425 (1878), in Betracht gezogen worden.

[2]) Stokes, in zahlr. Bdn. d. Cambr. Phil. Tr. sowie in den Math. and Phys. Papers, Bd. 1.

[3]) Rayleig , Phil. Mag. (5) 1, pag. 257 (1876).

Flüssigkeit eine zweite, z. B. Luft und insbesondere bewegte Luft, also Wind sich befindet; die Formeln werden dann natürlich sehr verwickelt. Auch die Form der Wellen wird dann in Folge der nach unten zu abnehmenden Geschwindigkeit eine andere und zwar von unsymmetrischem, eventuell sogar überhängendem Charakter (Schaumwelle auf offener See); an der Küste wirkt die Bodenreibung



(Ph. 155.)

ebenfalls im Sinne einer starken Geschwindigkeitsabnahme von oben nach unten, und hier tritt daher »Brandung« besonders leicht und auch ohne Wind auf. Dieser unsymmetrischen Schaumwelle (Fig. 155a) steht übrigens auch eine symmetrische, aus der Cycloiden- resp. Hypocycloidenform (Fig. 155b) sich ergebende gegenüber.

Ein anderer Einfluss auf die Wellenbewegung der Flüssigkeiten rührt von den mit diesen häufig gleichzeitig auftretenden Strömungen derselben her; jedoch kann auf diesen, wesentlich für die Geophysik wichtigen Einfluss hier nicht eingegangen werden.

Bei variabler Tiefe des Wassers kann man die Formel von KELLAND (pag. 395) durch die allgemeinere

$$V = \sqrt{gQ/b}$$

(Q Querschnitt, b Breite am Spiegel) ersetzen. Für den Fall eines Canals von gleichförmigem, durch zwei unter 45° geneigte Böschungen gebildeten Querschnitt ist nach KELLAND die allgemeine Lösung (x eine der Benetzungslinien, y horizontal, z vertical)

$$\varphi = A \cos hyp\, m(y + h) \cos hyp\, m(z - h) \cos \sqrt{2}(mx - nt),$$

wo $m = 2\pi/\lambda$ und $n = 2\pi V/\lambda$ ist. Für beliebigen Böschungswinkel α hat dies STOKES[1]) erweitert.

Bisher wurde angenommen, dass die Wellen sich endlos folgen und den ganzen Raum erfüllen. Diesem Fall extrem gegenüber steht der Fall der sogen. Einzelwelle, welche z. B. durch Eintauchen oder Herausziehen einer Platte entsteht und nur einen einzigen Berg resp. nur ein einziges Thal aufweist. Eine solche Einzelwelle zeigt besondere Eigenthümlichkeiten in Bezug auf Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Form und Stabilität; sie ist von RUSSELL eingeführt und von ROBERTSON[2]), BOUSSINESQ[3]), RAYLEIGH[4]) u. A. untersucht worden. Die Brücke zwischen beiden Wellenarten bildet schliesslich der begrenzte Wellenzug, wie er z. B. durch periodische Eingriffe in die Wasseroberfläche entsteht. Man nimmt dann wahr, dass die Wellenhöhe von der Mitte nach vorn und hinten abnimmt, und dass, während vorn eine Welle nach der andern erlischt, hinten neue entstehen. Demgemäss ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Zuges

1) STOKES, Papers Bd. 1, pag. 167.
2) ROBERTSON, Phil. Mag. (3) 37 u. (4) 1 u. 5.
3) BOUSSINESQ, Liouv. J. (2) 17, pag. 55. 1872; Compt. rend. 94, pag. 71 u. 127 (1882).
4) RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 1, pag. 262. 1876.

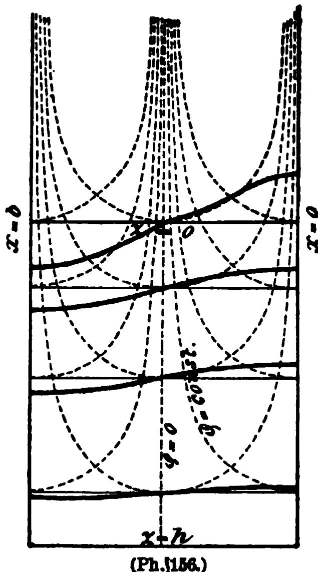
geringer als die der einzelnen Welle, und zwar bei bestimmten Annahmen, wie REYNOLDS[1]) durch Betrachtung der potentiellen und kinetischen Energie gezeigt hat, halb so gross. Allgemeiner erhält man, wenn man mit RAYLEIGH[2]) den begrenzten Zug durch Interferenz zweier unbegrenzter von etwas verschiedener Wellenlänge entstanden denkt, die Beziehung (V Zug-, v Wellengeschwindigkeit, $k = 2\pi/\lambda$)

$$V = \frac{d(kv)}{dk} = \frac{v}{2}\left(1 + \frac{4kh}{e^{2kh} - e^{-2kh}}\right),$$

also für kleine h oder kleine λ wie bei REYNOLDS $V = \frac{1}{2}v$.

Wesentlich andere Erscheinungen als die bisher betrachteten fortschreitenden Wellen bieten die stehenden Schwingungen oder stehenden Wellen dar (s. Art. Wellenlehre). Ebene Wellen dieser Art sind für gleichmässige Tiefe, also horizontalen Boden des die Flüssigkeit enthaltenden Gefässes oder Canals (dessen Axe die Wellenkämme parallel sein sollen) von ST. VENANT[3]) und Andern, für geneigte Böschungen von KIRCHHOFF[4]) und in etwas anderer Art von GREENHILL[5]) behandelt worden; auch sehe man eine nach MERIAN von VONDERMÜHLL bearbeitete Untersuchung[6]). Die Gleichungen führen in diesen Fällen zu Werthen für φ, welche einen willkürlichen ganzzahligen Parameter enthalten und somit eine ganze Reihe möglicher Schwingungen (entsprechend Grundton und Obertönen in der Akustik) darstellen. Für den rechteckigen Trog (ST. VENANT) ergiebt sich, wenn n der Parameter ist, allgemein (z vertikal vom Spiegel aus, x quer)

$$\varphi = \Sigma\left(A_n \cos\frac{t}{T_n} 2\pi + B_n \sin\frac{t}{T_n} 2\pi\right)\left(e^{\frac{n(h-z)}{b}\pi} + e^{\frac{-n(h-z)}{b}\pi}\right)\cos\frac{nx}{b}\pi,$$



(Ph. 156.)

wo h und b Tiefe und Breite des Troges, T_n die Schwingungsdauer und die A und B Coëfficienten sind, die sich als FOURIER'sche Integrale aus dem gegebenen Anfangszustande bestimmen. Für $n = 1$ und $A_1 = 0$ erhält man den Werth von φ für die Grundschwingung

$$\varphi_1 = C \sin\frac{t}{T} 2\pi \left(e^{\frac{h-z}{b}\pi} + e^{-\frac{h-z}{b}\pi}\right)\cos\frac{x}{b}\pi,$$

und hieraus die Erhebung, also auch die Gestalt der Oberfläche nach der Formel $1/g\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. In Fig. 156 sind die Wellen-, Niveau- und Stromlinien zu irgend einer Zeit dargestellt. Für den KIRCHHOFF'schen Fall, und zwar für eine Böschung von 45° Neigungswinkel ergiebt sich, wenn $a^2 = \frac{n^2\pi^2}{g}$ gesetzt wird, für die durch n charakterisirte Schwingung:

$$\varphi = C\left[e^{-az}(\cos ax - \sin ax) + e^{-ax}(\cos az - \sin az)\right]\sin n\pi t.$$

Sind zwei Böschungen vorhanden, jede von 45° Neigung, so erhält man den Fall eines keilförmigen Troges und als Grundschwingung:

---

1) REYNOLDS, Nature 16, pag. 343. 1877.

2) RAYLEIGH, Lond. Math. Soc. 9, Nr. 125. 1879.

3) ST. VENANT, Compt. Rend. 73, pag. 521 u. 589. 1871.

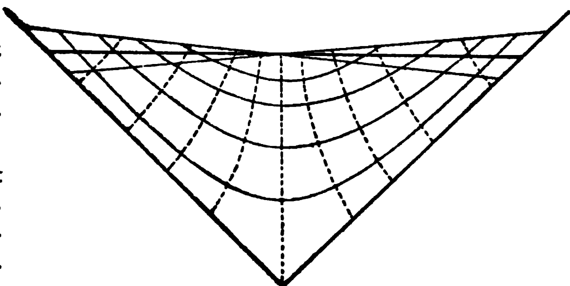
4) KIRCHHOFF, Berl. Ber. 1879. Ges. Abh., pag. 428.

5) GREENHILL, Am. J. Math. 9, pag. 62. 1887.

6) VONDERMÜHLL, Math. Ann. 27, pag. 575. 1886.

$$\varphi_1 = [1 - a(z + x) + a^2 zx] \sin \sqrt{ag}\, t;$$

die Oberfläche bleibt also eben und neigt sich nur hin und her; die Stromlinien und die Niveaulinien sind gleichseitige Hyperbeln (Fig. 157). Für Böschungen, die um 30° gegen die Horizontale geneigt sind, verwandelt sich der Spiegel bei den Grundschwingungen in einen parabolischen Cylinder u. s. w.


(Ph. 157.)

Die relative Einfachheit der Theorie ebener Wellen beruht darauf, dass dieselben nur von zwei Coordinaten, einer vertikalen und einer horizontalen, abhängen und die deshalb geltende Gleichung $\partial^2\varphi/\partial z^2 + \partial^2\varphi/\partial x^2 = 0$ sich mit Hilfe von Funktionen complexer Argumente lösen lässt (s. Art. Ausfluss und Strahlbildung). Bei anderen Wellen, wie sie z. B. in Cylindern, Trichtern u. s. w. auftreten, ist dies nicht möglich; es ist aber, wie hier wenigstens erwähnt werden möge, trotzdem gelungen, einige solche Fälle zu behandeln; insbesondere seien die Schwingungen von Flüssigkeiten in kreisförmigen Cylindern und in rechteckigen Gefässen erwähnt, jene von KOLACZEK[1]), diese neuerdings von LECHAT[2]) untersucht; es treten hier natürlich zwei Parameter auf.

Noch complicirter gestaltet sich die Theorie der Schwingungen von flüssigen Massen, die nicht der Erdschwere, sondern, wie flüssige Weltkörper, ihrer eigenen Gravitation unterworfen sind; es kann aber hier auf diese Theorien nicht eingegangen werden.[3]).

Die Wellenbewegung von Flüssigkeiten ist, seit der klassischen Untersuchung von E. H. und W. WEBER[4]), auch experimentell sehr eingehend verfolgt worden, in besonders grossartigem Maassstabe von HAGEN[5]), BAZIN, SCOTT, RUSSEL u. A. Einzelne Theile der Theorie sind durch Detailversuche geprüft und meist wenigstens qualitativ, z. Th. aber auch quantitativ bestätigt worden. Mit kleinen Wellen haben sich AHRENDT[6]) (Prüfung der Formel von THOMSON und KOLACZEK, pag. 396), BAZZI[7]) (Einzelwelle), FARADAY, MATTHIESSEN, RAYLEIGH[8]) (Kräuselwellen) u. s. w. beschäftigt. Wellen grössten Charakters liefert andererseits die Natur in den sogen. »Seiches« von Binnenseen[9]), in den Sturmfluthen, den Erdbebenwellen[10]) u. s. w. Endlich sind von den Beobachtungen über stehende Schwingungen aus neuerer Zeit namentlich die von KIRCHHOFF und HANSEMANN[11]) anzuführen.

---

1) KOLACZEK, Beibl. z. WIED. Ann. 4, pag. 177. 1880.

2) LECHAT, J. de Phys. 9, pag. 185 u. 244. Ann. Ch. Phys. (5) 19, pag. 289. 1880.

3) DIRICHLET, Gött. Abh. 1860. KIRCHHOFF, Mechanik, pag. 350 u. 362.

4) E. H. u. W. WEBER, Wellenlehre, auf Experimente gegründet. Lpz. 1825.

5) HAGEN, Berl. Abh. 1861, pag. 1 u. anderwärts.

6) AHRENDT, Rep. Phys. 24, pag. 318. 1888.

7) BAZZI, N. Cim. (3) 6, pag. 98. 1879.

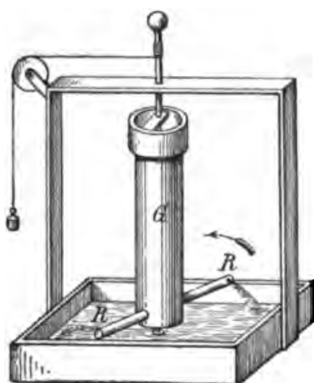
8) FARADAY, Phil. Trans. 1831. MATTHIESSEN, POGG. Ann. 134 u. 141; RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 16, pag. 50. 1883. In letzterer Abh. wird die allg. Formel $n^{1 \cdot 5}\lambda = const$ für Schwingungszahl und Wellenlänge aufgestellt und für verschiedene Flüssigkeiten geprüft.

9) FOREL, Phil. Mag. (5) 2, pag. 447. 1876. Nat. 17, pag. 281.

10) Die Beobachtungen der berühmten Krakatoa-Welle des Jahres 1884 haben die KELLAND-sche Formel $V = \sqrt{gh}$ (pag. 395) sehr gut bestätigt.

11) KIRCHHOFF u. HANSEMANN, WIED. Ann. 10, pag. 337. 1880.

Wirkungen bewegter Flüssigkeit. Man kann dieselben in vier Klassen theilen. Die erste Wirkung besteht in dem Widerstande, den die Flüssigkeiten der Bewegung fester Körper, die sich in oder mit ihnen bewegen, entgegensetzen, und welcher theils Trägheitswiderstand (s. Art. Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten) theils Reibungswiderstand (s. Art. Reibung) ist. Die drei anderen Wirkungen sind mehr activer Natur und beruhen: 1) auf dem Druck (potentielle Energie) 2) auf dem Stoss (actuelle Energie) und 3) auf der Reactionswirkung, und letztere kann wieder Druck- oder Stosswirkung sein. Die Druckwirkung hängt von dem Gewichte der drückenden Flüssigkeitssäule ab und ist mit diesem proportional. Die Stosswirkung hängt ausserdem von der Geschwindigkeit der stossenden Flüssigkeitsmassen ab; sie ist, wenn gleiche Massen betrachtet werden, der Geschwindigkeit, in gleichen Zeiten dagegen, wie hieraus folgt, dem Quadrate derselben proportional; gewöhnlich hat diese Flüssigkeit ihre Geschwindigkeit durch Fall von einer gewissen Höhe erlangt, und aus den Fallgesetzen folgt somit für gleiche Zeiten die Proportionalität der Wirkung mit der Fallhöhe. Ist der Stoss schief, so hat man Normalstoss, Parallelstoss und Seitenstoss zu unterscheiden und diese, wie eine einfache, unter gewissen Voraussetzungen durchgeführte Betrachtung zeigt, resp. dem Sinus, dem Quadrat des Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des doppelten Einfallswinkels proportional zu setzen. Die Reactionswirkung endlich tritt ein, wenn, statt dass die Flüssigkeit plötzlich einen Stoss oder Druck ausübt, umgekehrt der ursprünglich symmetrisch vertheilte und darum wirkungslose Druck oder Stoss plötzlich an einer oder einigen Stellen aufhört und damit die Symmetrie gestört wird. Die einfachste Demonstration des Vorganges bietet das sogen. Segner'sche Reactionsrad (Fig. 158) dar. Giesst man in das Gefäss G Wasser und lässt es aus Oeffnungen, die an den Enden der horizontalen Röhre RR seitlich angebracht sind, ausfliessen, so rotirt der Apparat im Sinne des Pfeiles. Eine scharfe Grenze zwischen Stossapparaten und Reactionsapparaten lässt sich, wie man einsieht, gar nicht ziehen, da man auch bei ersteren das Wasser abfliessen lassen muss und zwar naturgemäss nach einer der beabsichtigten Stosswirkung mehr oder weniger entgegengesetzten Seite.



(Ph. 158.)

Auf den skizzirten Wirkungen beruhen einige in der Technik vielfach angewandte Apparate, nämlich:

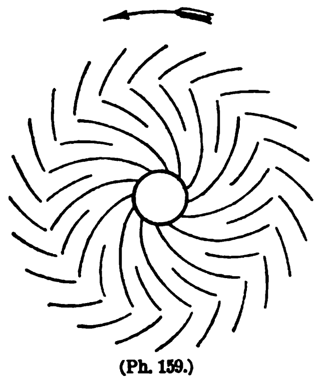
1) Die oberschlächtigen Wasserräder, in deren Schaufeln das Wasser nahe dem Scheitel eintritt, also durch Druck und Stoss zugleich, hauptsächlich aber durch ersteren wirkt.

2) Die unterschlächtigen Wasserräder, bei denen das Wasser nahe der Sohle eintritt und somit lediglich durch seine Geschwindigkeit wirkt. Es giebt auch Räder, die, wie die mittelschlächtigen und die rückenschlächtigen, eine Mittelstellung einnehmen.

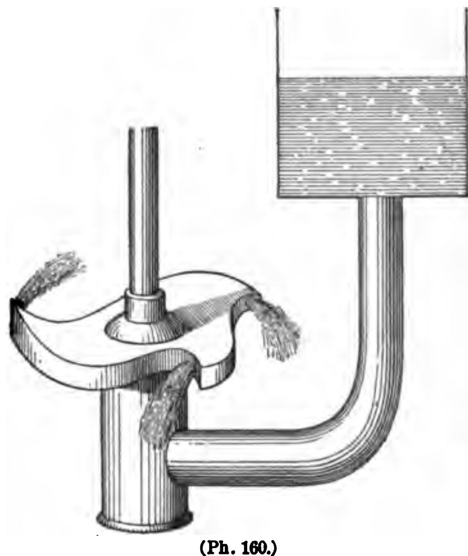
3) Die Turbinen, deren Drehaxe nicht, wie dei den Wasserrädern, horizontal, sondern vertikal steht, bei denen also lediglich die Geschwindigkeit des eintretenden Wassers wirkt; je nach der Construction wirkt sie mehr direkt oder mehr durch Reaction.

Der Wirkungsgrad dieser Maschinen, der praktisch zwischen 30 und 90% der aufgewandten Energie schwankt, hängt von den verschiedensten Umständen ab;

der Verlust kommt theils auf die Reibung, theils auf das aus den Schaufeln herausgeschleuderte Wasser, theils auf die doch immer noch vorhandene, unbenutzt gebliebene Geschwindigkeit des abfliessenden Wassers. Am geringsten scheint derselbe zu sein bei den FOURNEYRON'schen Turbinen (Fig. 159) einerseits, wo das Wasser durch die passend gestellten Leitkammern des innern festen Rades in der geeignetsten Weise auf die Schaufeln des äusseren, drehbaren dirigirt wird, und bei den schottischen Reactionsturbinen (Fig. 160), die sich von dem SEGNER'schen Apparat im wesentlichen nur dadurch unterscheiden, dass das Wasser von unten eintritt, drei oder mehr Oeffnungen vorhanden und die Strahlen gekrümmt sind. Besonders interessant ist sonst noch die Schraubenturbine, die gewissermaassen die Umkehrung der Schiffsschraube darstellt.



(Ph. 159.)

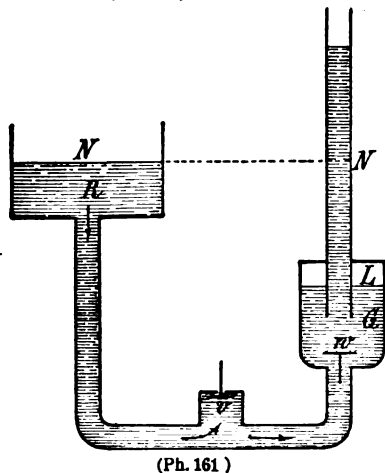


(Ph. 160.)

4) Die Wassersäulenmaschinen, welche durch Wasserdruck eine hin- und hergehende Bewegung liefern, gerade wie die Dampfmaschinen durch den Druck des Dampfes.

5) Der hydraulische Widder oder Stossheber zeichnet sich dadurch aus, dass er Flüssigkeit theilweise auf ein höheres Niveau als das des speisenden Reservoirs hebt. Die Fig. 161 giebt ein Schema dieser interessanten Maschine. Das aus dem Reservoir R herabfliessende Wasser würde im stationären Zustande, wenn sowohl das nach unten gehende Ventil v als auch das nach oben gehende w offen sind, das Wasser in der Steigröhre S bis zum Niveau N treiben; sobald es aber durch seinen Druck v schliesst, stösst es mit erhöhter Wucht auf w und die in G enthaltene Luft L und treibt dadurch das Wasser über N hinaus. Wie man sieht, ist die Maschine keine rein hydraulische, sondern, wegen der Mitwirkung der comprimirten Luft, zugleich eine pneumatische (aërodynamische)[1].

F. AUERBACH.



(Ph. 161)

[1]) Näheres über die hydraulischen Maschinen sehe man z. B. in WEISBACH's Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, Bd. 2. Eine interessante wissenschaftliche Untersuchung der Turbinen hat neuerdings WOODBRIDGE, Phil. Mag. (5) 22, pag. 313, 1886, geliefert.

Ausfluss und Strahlbildung.

Hat ein Gefäss, welches Flüssigkeit enthält, eine oder mehrere Oeffnungen, welche tiefer liegen als Theile der Flüssigkeit, so fliesst diese aus und bildet einen oder mehrere Strahlen. Hierüber sind zahlreiche experimentelle und theoretische Untersuchungen angestellt worden, über welche der vorliegende Artikel einen kurzen Ueberblick geben soll.

Ausflussgeschwindigkeit. Die erste Frage ist die, mit welcher Geschwindigkeit die Flüssigkeitstheilchen durch die Oeffnung ins Freie treten. Die Antwort hierauf giebt das schon von TORRICELLI[1]) gefundene und nach ihm benannte TORRICELLI'sche Theorem: Die Geschwindigkeit des Ausflusses aus einer Oeffnung, welche in der Tiefe h unter dem Flüssigkeitsspiegel liegt, ist gleich der Geschwindigkeit eines Körpers, welcher die Höhe h frei durchfallen hat. Die Ausflussgeschwindigkeit ist also (pag. 109)

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{1}$$

Die Grösse h wird die Druckhöhe genannt.

Die Methoden, mittelst deren TORRICELLI, GUGLIELMINI und neuere Forscher, unter denen besonders WEISBACH zu nennen ist, diesen Satz abgeleitet resp. geprüft haben, sind sehr verschiedenartig; sie haben aber grösstentheils das gemeinsam, dass nicht die Geschwindigkeit selbst, sondern die Ausflussmenge in der Zeiteinheit gemessen und hieraus jene berechnet wurde, was, wie sich zeigen wird, in den meisten Fällen nicht erlaubt ist. Handelt es sich nur um relative Beobachtungen zur Prüfung der Gleichung (1), so kann man sich mit Vortheil eines von L. WEBER[2]) angegebenen Apparates, im wesentlichen aus einer graduirten Glasröhre bestehend, bedienen. Um die Geschwindigkeit direkt zu messen, thut man am besten sie mit einer andern, auf ihr senkrechten, zu combiniren. Ist z. B. die Oeffnung im Boden des Gefässes angebracht, sodass die Bewegung der austretenden Theilchen vertikal nach unten gerichtet ist, so kann man durch momentane Beleuchtung auf einem horizontal bewegten Schirm ein Bild in Gestalt einer geneigten Linie erhalten und aus der Neigung und der Geschwindigkeit des Schirmes die Ausflussgeschwindigkeit ableiten, eine Methode, welche in der Ausführung freilich complicirte Hilfsmittel erfordert. Hier ist namentlich auf die umfangreiche Untersuchung von VAUTIER[3]) hinzuweisen, welcher die Methode in zwei Weisen verwandte, nämlich einmal unter Zwischenschaltung eines rotirenden Spiegels zwischen Flüssigkeit und Schirm, zweitens unter Anwendung einer photographischen Platte als Schirm. Als Objekte dienten Tröpfchen eines Gemisches von Nitrobenzol und Terpentinöl, die in das ausfliessende Wasser gebracht wurden. Das Resultat war, soweit es hierher gehört, eine Bestätigung der Gleichung (1) bis auf $\frac{1}{3}$ Procent Genauigkeit. Einfacher ist es, die Combination der beiden auf einander senkrechten Bewegungen der Flüssigkeit selbst zu überlassen, was man am besten bei Benutzung einer in einer vertikalen

[1]) TORRICELLI, Opera geometrica, Florenz 1644, Abschn. 2: de motu gravium naturaliter descendentium. Uebrigens fand TORRICELLI nur die Proportionalität mit $\sqrt{h}$, den Factor $\sqrt{2g}$, also das Gesetz in obiger Form, hat erst JOH. BERNOULLI angegeben.

[2]) L. WEBER, Rep. d. Phys. 15, pag. 50, 1879.

[3]) VAUTIER, Compt. R. 102, pag. 165. 1886. — Thèse prés. à la Fac. d. Scienc. Paris 1888. Ann. Ch. Phys. (6) 15, pag. 433. 1888.

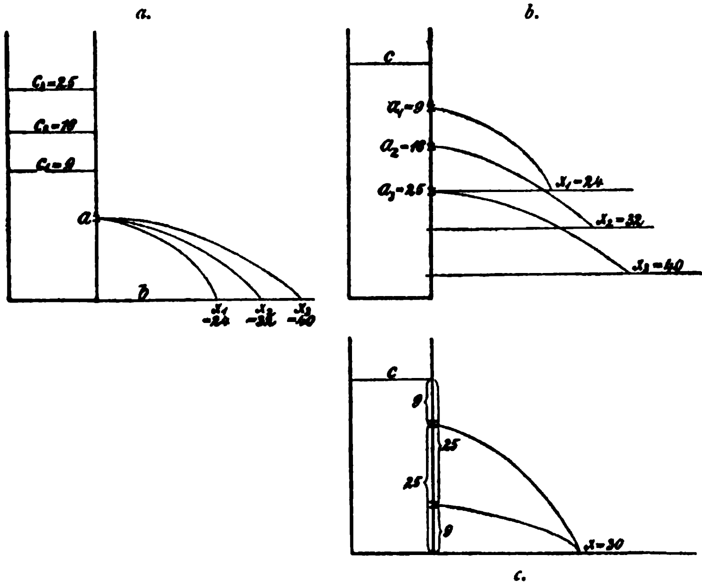
Seitenwand des Gefässes angebrachten Oeffnung erreicht. Die Ausflussbewegung ist dann nämlich horizontal (x) gerichtet, hierzu kommt die vertikal nach unten (z) gerichtete Bewegung des freien Falles, dem die Theilchen unterliegen, und somit muss die Bahn, die ein Theilchen beschreibt, mit der eines mit der horizontalen Geschwindigkeit v geworfenen Körpers übereinstimmen, d. h. eine Parabel sein; in der That erhält man durch Elimination der Zeit t aus den Gleichungen

$$x = vt = \sqrt{2gh} \cdot t \qquad z = \frac{g}{2} t^2$$

die Gleichung

$$x^2 = 4hz. \tag{2}$$

Sorgt man überdies für Constanterhaltung des Spiegels im Gefässe durch ständigen Zufluss und macht damit die Erscheinung stationär, so beschreiben alle Theilchen nach einander dieselbe Parabel, bilden diese also auch gleichzeitig mit einander. Man kann nun die Formel (2), also auch das TORRICELLI'sche Theorem prüfen, indem man untersucht, ob für constantes z wirklich x^2 mit h proportional ist, d. h. ob die Quadrate der Entfernungen von der Gefässwand, in welchen die Strahlen aufschlagen, den Druckhöhen proportional sind; und zwar entweder indem man (Fig. 162a) für eine und dieselbe Oeffnung a und dasselbe Aufschlagsniveau b den Spiegel variirt (c_1, c_2, c_3), oder indem man bei gleichem Spiegel c (Fig. 162b) verschiedene Oeffnungen a_1, a_2, a_3 und dementsprechend verschiedene Aufschlagniveaus b_1, b_2, b_3 anwendet. Endlich kann man zur Bestätigung noch den interessanten Satz heranziehen, dass x nur von dem Produkt hz abhängt, dass also, wenn (Fig. 162c) von zwei Oeffnungen a_1 und a_2 die eine ebenso tief unter dem Spiegel wie die andere über dem Boden liegt, die beiden aus ihnen fliessenden Strahlen sich im Niveau des Bodens treffen.



(Ph. 162.)

Wendet man der Reihe nach verschiedene Flüssigkeiten an, so erhält man die Bestätigung des im TORRICELLI'schen Theorem gleichfalls schon enthaltenen Satzes: Die Ausflussgeschwindigkeit bei gleicher Druckhöhe ist für alle Flüssigkeiten dieselbe. Dieser Satz entspricht völlig dem von der gleichen Fallgeschwindigkeit aller Körper. Es ist aber zu beachten, dass sich der Satz auf die Druckhöhen, nicht auf die Drucke p bezieht; es ist nämlich, unter ρ die Dichte verstanden,

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}},$$

bei gleichen Drucken also die Ausflussgeschwindigkeit verschiedener Flüssigkeiten der Wurzel aus deren Dichte umgekehrt proportional.

Von geringerem Interesse ist der letzte in der Gleichung (1) enthaltene Satz, wonach v auch von g abhängig ist, also von Ort zu Ort ebenso wie Fallraum, Pendellänge u. s. w. variirt.

Theoretisch hat man sich das TORRICELLI'sche Theorem auf verschiedene Weise durch elementare Betrachtungen, welche die Analogie mit dem freien Fall benutzen, begreiflich zu machen gesucht, ohne dass dieselben jedoch auf Strenge Anspruch erheben könnten; am befriedigendsten ist noch die zuerst von D. BERNOUILLI gegebene Ableitung[1]) aus dem Satz von der lebendigen Kraft, d. h. durch Ansatz der Gleichung, dass die Arbeit beim Sinken des Spiegels um einen gewissen Betrag gleich der kinetischen Energie der gleichzeitig ausgeflossenen Flüssigkeit ist. Dagegen führen die hydrodynamischen Grundgleichungen ohne weiteres zum Ziel, und zwar zu einem solchen, welches weit allgemeiner ist, als das genannte Theorem. Schreibt man nämlich die Gleichung (26) (Art. Hydrodynamik, pag. 380), indem man sie auf stationäre Bewegung anwendet, die Dichte constant setzt und von Kräften nur die Schwere annimmt, in der Form

$$\frac{v^2}{2} - gz + \frac{p}{\rho} = const, \tag{3}$$

und bildet man sie einmal für den Spiegel, wo $z = 0$ und der Druck p_0 sei, andererseits für die freie Strahloberfläche (unverändert), so erhält man durch Subtraktion

$$v_1^2 - v_0^2 = 2gz + \frac{2}{\rho}(p_0 - p)$$

oder, wenn q_0 der Querschnitt im Spiegel, q der in der Oeffnung oder besser der des Strahls ist (s. u.), mit Benutzung der Gleichung $vq = v_0 q_0$:

$$v_2 = \frac{2gz - \frac{2}{\rho}(p - p_0)}{1 - \frac{q^2}{q_0^2}} \tag{4}$$

Diese allgemeine Formel[2]) liefert als speciellen Fall das TORRICELLI'sche Theorem, wenn der Druck im Spiegel gleich dem in der Strahloberfläche und die Oeffnung klein gegen den Spiegel ist. Ist letzteres auch der Fall, der Ueberdruck aber so gross, dass man die Wirkung der Schwere vernachlässigen kann, oder fällt die Schwere überhaupt weg, was stattfindet, wenn die Flüssigkeit in einen nicht mit Luft, sondern mit einer gleich schweren Flüssigkeit (z. B. ihr selbst) erfüllten Raum ausfliesst, so wird

$$v^2 = \frac{2}{\rho}(p_0 - p);$$

die Ausflussgeschwindigkeit ist also dann der Quadratwurzel aus dem Ueberdruck direkt und der Quadratwurzel aus der Dichte umgekehrt proportional.

Wird nicht für Erhaltung des Niveaus im Spiegel gesorgt, so hört die Erscheinung auf, stationär zu sein, und das Gefäss entleert sich allmählich, und zwar ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Spiegel sinkt, also die Flüssigkeitshöhe abnimmt:

---

1) S. z. B. MACH, Die Mechanik u. s. w., pag. 379.
2) VOIGT, Elementare Mechanik, Leipz. 1889, pag. 361.

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{q}{q_0} v = \frac{q}{q_0} \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{q^2}{q_0^2}}},$$

letzteres, wenn kein Ueberdruck vorhanden ist; die Geschwindigkeit der Entleerung ist also bei einem cylindrischen Gefässe stets der Wurzel aus der Flüssigkeitshöhe proportional. Ferner ist, wie man durch Integration findet, die zur Entleerung erforderliche Zeit das doppelte derjenigen, in welcher bei constant erhaltenem Niveau die gleiche Flüssigkeitsmenge ausfliessen würde. Bei nicht cylindrischen Gefässen hat man zu beachten, dass auch q_0 variabel ist, und man kann sich die Frage vorlegen, wie es sich ändern müsse, welche Gestalt also das Gefäss erhalten müsse, damit das Niveau mit constanter Geschwindigkeit u sinke; die Antwort liegt in der Formel:

$$q_0 = q \sqrt{\frac{2gh}{u^2} + 1}.$$

Hierauf kann man die Construktion einer Wasseruhr gründen. Solange q klein gegen q_0, verhalten sich, wie man sieht, die Querschnitte wie die Wurzeln aus den Wasserhöhen, also, wenn die Querschnitte einander ähnlich sind, die linearen Querdimensionen, z. B. bei kreisförmigen Querschnitten die Durchmesser, wie die vierten Wurzeln aus den Wasserhöhen; das Gefäss erhält dadurch eine tulpenförmige Gestalt. Man kann auch die erforderliche Abnahme des Querschnittes auf Rechnung der einen der beiden Querdimensionen allein setzen, so dass die andere constant und der Querschnitt z. B. stets ein Rechteck bleibt; das Gefäss erhält dann die Gestalt eines durch parabolische Bögen begrenzten Troges[1]).

Von besonderen Fällen und Fragen, die sich in Bezug auf die Ausflussgeschwindigkeit noch darbieten können, seien hier nur folgende kurz erwähnt:

1) Liegt die Oeffnung in horizontaler Ebene, also z. B. im Boden eines Gefässes, und sind ihre Verhältnisse im Vergleich zu Grösse und Gestalt des Gefässes nicht besonders eigenthümlich, so haben alle austretenden Fäden dieselbe Druckhöhe, also, vorbehaltlich des weiter unten zu Bemerkenden, dieselbe Geschwindigkeit. Befindet sich dagegen die Oeffnung in einer Seitenwand, so haben die tiefer austretenden Fäden grössere Werthe von h und v, als die höher austretenden. Als mittlere Ausflussgeschwindigkeit kann man dann bei sehr kleinen Oeffnungen diejenige des mittleren, d. h. aus dem Schwerpunkt der Oeffnung austretenden Fadens ansehen, bei grösseren Oeffnungen ist dies jedoch, wie die, für jede Lage und Form der Oeffnung besonders durchzuführende Rechnung zeigt, nicht mehr richtig; für einen sogen. Ueberfall z. B., d. h. eine rechteckige Oeffnung, welche nach oben zu keinen Rand hat, sondern bis an den Spiegel reicht, ist die mittlere Ausflussgeschwindigkeit zwei Drittel von derjenigen an der unteren Kante.

2) Beim Ausfluss aus einem oben geschlossenen Gefässe entsteht infolge Auftretens eines luftleeren oder luftverdünnten Raumes ein Gegendruck, welcher den Ausfluss verlangsamt und unter Umständen sogar gänzlich verhindert; Erscheinungen, deren nähere Betrachtung in die Aëromechanik gehört (s. Art. Luftdruck).

3) Ausfluss aus einem Gefässe, welches selbst bewegt wird. Liegt die Oeffnung im Boden und bewegt sich das Gefäss gleichförmig auf- oder

[1]) F. Neumann, Einl. i. d. th. Physik, hrsg. v. Pape, Leipz. 1883, pag. 232.

abwärts, so wird der Ausfluss davon nicht berührt; wohl aber, wenn eine nach oben oder unten gerichtete Beschleunigung γ vorhanden ist; es wird dann $v = \sqrt{2(g+\gamma)h}$ resp. $v = \sqrt{2(g-\gamma)h}$; lässt man das Gefäss frei herabfallen, so wird hiernach $v = 0$, die Flüssigkeit fliesst überhaupt nicht aus. Aehnlich verhält es sich bei seitlichem Ausfluss und horizontaler Bewegung. Dass eine solche, und zwar entgegengesetzt der Ausflussrichtung, bei frei beweglichem Gefässe durch Reaktionswirkung von selbst eintritt, ist schon oben angegeben worden (s. Art. Hydrodynamik, pag. 400).

4) Befindet sich in einem Gefäss über der ausfliessenden Flüssigkeit noch eine andere, so muss man deren Höhe, um die Druckhöhe zu erhalten, auf das specifische Gewicht der ausfliessenden reduziren und zur Höhe dieser addiren. Hieraus folgt, dass in dem Momente, wo die obere Flüssigkeit auszufliessen beginnt, wo man also ihre Höhe ohne Reduktion als Druckhöhe einzuführen hat, die Ausflussgeschwindigkeit plötzlich sich ändert, so dass es, entgegen dem thatsächlichen Verhalten, den Anschein gewinnt, als wäre die Ausflussgeschwindigkeit für verschiedene Flüssigkeiten verschieden.

5) Fliesst eine Flüssigkeit aus einem Gefässe durch mehrere, in verschiedenem Niveau gelegene Oeffnungen gleichzeitig aus, so hat man es mit verwickelten Bewegungsverhältnissen zu thun, und die Erscheinung wird sich in der Mitte halten zwischen den beiden extremen Erscheinungen, welche sich ergeben würden, wenn für jede Oeffnung einmal die ganze über ihr lastende Flüssigkeit, das andere Mal nur die zwischen ihr und der nächst höheren Oeffnung befindliche Flüssigkeitsschicht in Rechnung gezogen würde; bei im Vergleich zum Querschnitt des Gefässes (des Rohrs) kleinen Oeffnungen wird die Erscheinung sich mehr dem ersteren, im andern Falle mehr dem letztern Extrem nähern.

6) Die unter verschiedenen Umständen ausgeführten Messungen von v haben ergeben, dass es nicht immer genau den aus Gleichung (1) folgenden Werth hat, und man hat daher diese Gleichung durch die modificirte

$$v = \zeta\sqrt{2gh}$$

ersetzt, wo ζ der Geschwindigkeitscoëfficient heisst und zwischen 0·95 und 1·1 schwankt. Indessen sind die Beobachtungen bei weitem nicht so genau und die Vernachlässigungen, welche die Gleichung (1) den wirklichen Verhältnissen gegenüber macht, zu mannigfaltig, als dass auf obige Schlussfolgerung erhebliches Gewicht zu legen wäre; umsomehr als die genaueste der Methoden, die von Vautier benutzte, auch die geringsten Abweichungen von Gleichung (1) ergiebt.

Ausflussmenge und Contraktion des Strahls. Aus der Ausflussgeschwindigkeit v erhält man durch Multiplikation mit der Grösse q der Oeffnung die »theoretische Ausflussmenge« $V = qv = q\sqrt{2gh}$. Die Beobachtungen haben indess gezeigt, dass die wirkliche Ausflussmenge geringer ist, und dass man daher, wenn k ein Bruch ist,

$$V = kqv = kq\sqrt{2gh}$$

setzen muss; k heisst der Ausflusscoëfficient. Im rohen Durchschnitt ist ungefähr $k = 0{\cdot}62$; es variirt aber je nach der Druckhöhe, der Form und Grösse der Oeffnung, der Form und Grösse des Gefässes, der Wandstärke und andern Einflüssen zwischen sehr weiten Grenzen. So fand für runde Oeffnungen Weisbach[1]):

[1]) Ueber diese und die weitere Literatur s. u. A. Weisbach, Experimentelle Hydraulik, u. Ingenieur- u. Maschinen-Mechanik, Bd. 1.

Durchmesser der Oeffnung	Druckhöhe	k	Durchmesser der Oeffnung	Druckhöhe	k
1 *cm*	8·7 *cm*	0·649	2 *cm*	8·7 *cm*	0·632
1 „	89·9 „	0·617	2 „	89·9 „	0·615

also eine Abnahme von k mit wachsender Druckhöhe und wachsender Höhe der Oeffnung. Für rechteckige, 20 *cm* breite Oeffnungen in der Seitenwand fanden Poncelet und Lesbros für verschiedene Druckhöhen h und Oeffnungshöhen a in *cm*:

h	$a =$ 1	2	3	5	10	20
1	0·705	0·685	—	—	0·600	0·572
10	0·666	0·654	0·637	0·630	0·611	0·592
100	0·632	0·633	0·628	0·626	0·615	0·605
200	0·611	0·612	0·612	0·613	0·607	0·601
300	0·609	0·610	0·608	0·606	0·603	0·601

Mit abnehmender Höhe der Oeffnung nimmt also k zu, dagegen verhält es sich den Druckhöhen gegenüber verschieden: bei niedrigen Oeffnungen nimmt k mit wachsendem Druck ab, hei hohen Oeffnungen zu.

Hier ist auch anzuführen, dass die Aussflussmenge von der Temperatur abhängt. Nach den Versuchen von Emery, die Isherwood[1]) mitgetheilt hat, nimmt die Geschwindigkeit (auf gleiche Volumina berechnet), um 12$\frac{0}{0}$ zwischen 0° und 100° zu; nach Unwin[2]) ist der Einfluss viel kleiner und unter Umständen überhaupt nicht vorhanden.

Das Verständniss für die angegebene Erscheinung gewinnt man zunächst schon aus der Untersuchung der Gestalt des ausfliessenden Strahls in der Nähe der Oeffnung. Dass der Strahl in der ganzen Länge seines zusammenhängenden Stückes nicht von genau cylindrischer Gestalt sein kann, sondern sich von oben nach unten zusammenziehen muss, folgt schon daraus, dass wie beim freien Fall die Geschwindigkeit wächst, also der Querschnitt kleiner und kleiner werden muss; betrachtet man jedoch nur ein kurzes Stück des Strahles unmittelbar unter der Oeffnung, so müsste diese Zusammenschnürung eine sehr geringe sein. Thatsächlich ist sie aber eine beträchtliche, und zwar ist der sogen. »contrahirte Querschnitt«, d. h. derjenige, unterhalb dessen eine wesentliche Contraktion nicht mehr stattfindet, nur etwa 0·62 mal so gross wie der Querschnitt der Oeffnung, das Verhältniss, der sogen. »Contraktionscoëfficient« ε ist im übrigen in derselben Weise von den Umständen abhängig wie k. Man wird also schliessen, dass sich k aus den beiden Grössen ε und ζ zusammensetzt, in Formel $k = \varepsilon\zeta$; und da ζ nicht erheblich von 1 abweicht, sind k und ε ziemlich identisch; in der That sind zahlreiche Werthe von k durch Messungen von ε ermittelt worden.

Die Ursache der starken, unter dem Namen »Contractio venae« berühmt gewordenen Zusammenziehung des Strahls unmittelbar unter der Oeffnung ist naheliegend. Die Bewegung der Theilchen im Gefässe ist keine ausschliesslich vertikal nach unten resp. (wenn die Oeffnung eine seitliche ist) senkrecht gegen die Oeffnung zu gerichtete, es drängen sich vielmehr von allen Seiten die Theilchen gegen einander, gewinnen so auch seitliche Geschwindigkeiten und behalten diese auch nach dem Austritt aus dem Gefässe noch so lange bei, bis dieselben sich gegenseitig vernichtet haben.

---

[1]) Isherwood, J. of the Franklin Inst. 1878.

[2]) Unwin, Phil. Mag. (5) 6, pag. 281. 1878.

Zur theoretischen Ableitung von ε resp. k selbst sind verschiedene Versuche gemacht worden. Der älteste derselben, der zu dem Werth $\varepsilon = 1/\sqrt{2} = 0{\cdot}707$ führt, rührt von D. BERNOULLI, ein anderer von BAYER[1]) her. Letzterer nimmt an, dass die Theilchen im Innern des Gefässes, welche zu einer bestimmten Zeit auf einer um den Mittelpunkt der Oeffnung beschriebenen Halbkugel liegen, diese Eigenschaft zunächst auch noch bei ihrer Annäherung an die Oeffnung beibehalten, und dass sich demgemäss ihre Geschwindigkeiten verhalten umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen von der Oeffnung; in der Nähe der Oeffnung jedoch nimmt die axiale Componente der radialen Geschwindigkeit immer mehr zu, die transversale immer mehr ab, bis schliesslich, nämlich im contrahirten Querschnitt, nur noch erstere übrig ist. BAYER findet auf diese Weise $\varepsilon = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{\cdot}617$, in guter Uebereinstimmung mit den Beobachtungen; ferner wird das Verhältniss der axialen zur transversalen Geschwindigkeit in der Oeffnung $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1$, der Grenzwinkel etwa 58° und der Abstand des contrahirten Querschnitts von der Oeffnung gleich deren Radius.

Zu etwas andern Ergebnissen kommt GAUKLER[2]). Für einen unendlich langen Spalt zwischen zwei gegen die Vertikale um je ϑ^0 geneigten Ebenen findet er

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta}{\sin\vartheta} + \cos\vartheta\right), \tag{5}$$

also für einen Spalt in horizontaler Wand $\varepsilon = \pi/4$. Denkt man sich nun eine quadratische Oeffnung als Durchschnitt zweier derartiger Spalte, so findet man für sie $\varepsilon = (\pi/4)^2 = 0{\cdot}617$, also wie BAYER für eine kreisförmige Oeffnung; für eine solche wird dagegen hier $\varepsilon = 2/3$.

Die Ideen von BAYER sind in neuerer Zeit von BOUSSINESQ[3]) und ST. VENANT[4]) mathematisch formulirt worden. Das Geschwindigkeitspotential φ hat, wenn man sich das Gefäss zunächst seitlich unbegrenzt vorstellt, folgenden Bedingungen zu genügen: 1) Allgemein $\Delta\varphi = 0$; 2) für kleine Oeffnungen in endlichem Abstande von der Oeffnung $\partial\varphi/\partial r$ proportional mit $1/r^2$, also φ selbst mit $1/r$; 3) für $z = 0$ (Boden, in dem die Oeffnung sich befinde): $\partial\varphi/\partial z = 0$, ausser für die Oeffnung selbst, wo $\partial\varphi/\partial z$ gleich einer Function $F(x, y)$ ist. Die Lösung ist nach BOUSSINESQ

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(x, y)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}. \tag{6}$$

Eine flüssige Halbkugel im Gefässe (Radius a) bleibt Halbkugel; aber nachdem der Bruchtheil m der von ihr umgrenzten Flüssigkeit ausgeflossen ist, hat sie nur noch den Radius

$$r = a\sqrt[3]{1-m},$$

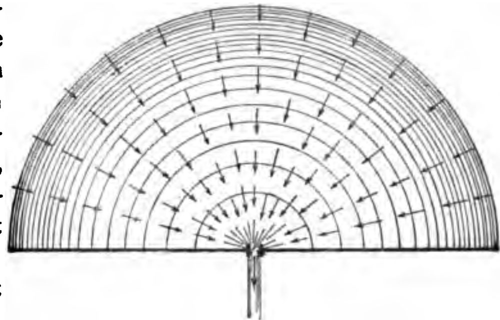
z. B. für $a = 64\ mm$:

$m =$	0	2/64	4/64	6/64	....	56/64	60/64	63/64	1
$r =$	64	63·3	62·6	61·9	....	32	25·4	16	0;

---

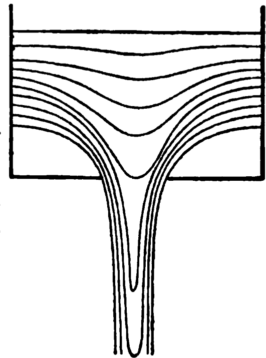
[1]) BAYER, CRELLE's J. f. Baukunst 25, und Compt. rend. 26. 1848.
[2]) GAUKLER, Mém. prés. à l'Ac. d. Sc. de Paris, T. 10.
[3]) BOUSSINESQ, Compt. rend. 70, pag. 33, 117, 1279 (1870).
[4]) ST. VENANT, Compt. rend. 94, pag. 904, 1004, 1139 (1882). — ST. VENANT u. FLAMANT, Compt. rend. 97, pag. 1027 u. 1105 (1883).

die Abnahme erfolgt also anfangs sehr langsam und dann immer schneller (Fig. 163). Eine ursprünglich horizontale Gerade verwandelt sich nach und nach in immer stärker nach unten ausgebauchte Curven, welche die gegebene Gerade beiderseits zu Asymptoten haben (s. w. u. Fig. 164). Um schliesslich zu dem Fall eines seitlich begrenzten Gefässes zu gelangen, kann man sich der sogen. Bildermethode bedienen; allerdings erhält man dadurch nur ebene Grenzwände, aber vom Sechseck kann man leicht zum Kreis, d. h. zum cylindrischen Gefäss übergehen.



(Ph. 163.)

Um die Bahnen der Flüssigkeitstheilchen im Gefässe und dann weiter bis zum contrahirten Querschnitt beobachtend zu verfolgen, kann man, wie von verschiedenen Seiten geschehen ist, feste oder flüssige, durch Farbe oder sonst sich bemerklich machende Körperchen (s. ob.) in der Flüssigkeit suspendiren und findet dann die obigen Vorstellungen bestätigt. Noch bequemer einerseits und interessanter andererseits, wenn auch nicht streng hierhergehörig, ist jedoch ein von TRESCA[1]) ersonnenes und später auch von OBERMAYER[2]) benutztes Verfahren. Die Fähigkeit zu fliessen ist nämlich zwar bei kleinen Drucken auf Flüssigkeiten beschränkt; durch Anwendung grösserer Drucke kann man jedoch auch weichere feste Stoffe, wie Thon, Lehm, Eis u. s. w., kurz sogen. plastische Körper, und bei genügend gesteigertem Druck selbst Metalle zum Fliessen zwingen. Füllt man nun ein cylindrisches Gefäss, dessen Boden eine Oeffnung hat, mit einer Anzahl übereinander geschichteter Scheiben aus einem derartigen Stoff, und lässt man mittelst einer hydraulischen Presse (pag. 347) einen starken Druck (etwa 10000 Kilo für Thon u. s. w., 100000 für Metalle) auf die oberste Scheibe wirken, so sieht man die Masse in Gestalt eines festen, unter der Oeffnung sich zusammenziehenden, weiterhin cylindrischen Strahls austreten, und beim Zerschneiden desselben sieht man, dass er sich aus lauter in einander gesteckten Röhren zusammensetzt, deren jede einer ursprünglichen Scheibe entspricht, und die sich unten successive schliessen (Fig. 164). Bei einem Eisstrahl kann man dies, da er durchsichtig ist, sogar von aussen sehen, und man nimmt dann ausserdem zahlreiche, in Folge der Ausdehnung der Schichten entstandene Querrisse wahr. Untersuchungen dieser Art sind übrigens auch von praktischem Interesse, z. B. für das Verständniss der Gletscher, für das Ziehen, Schmieden, Walzen der Metalle u. s. w.



(Ph. 164.)

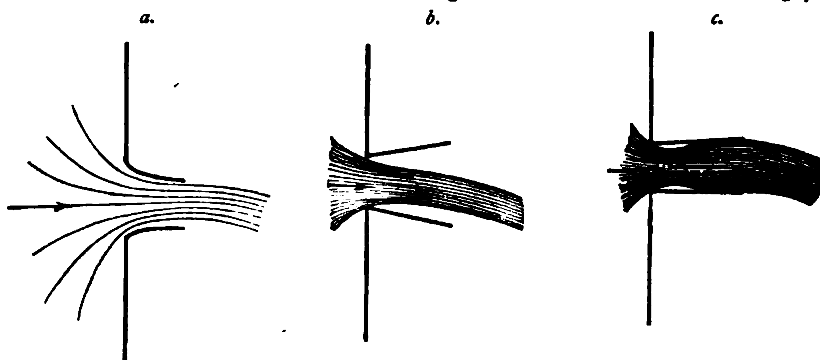
Zur weiteren Bestätigung der obigen Anschauungen über den Ausfluss kann auch die Untersuchung des Einflusses dienen, welchen an die Oeffnung angesetzte Ränder und Ansatzröhren auf die Ausflussmenge ausüben. Am einfachsten verhält es sich, wenn die Wand derartig nach aussen umgebogen ist, dass die

---

1) TRESCA, Compt. rend. 59, pag. 754 (1864); 60, pag. 398 (1865); 64, pag. 809 (1867).

2) v. OBERMAYER, Wien. Ber. (2) 58, pag. 737 (1869).

Ränder der Oeffnung sich wie in Fig. 165a der Gestalt des Strahls gerade anschmiegen; versteht man dann unter q die Grösse der wirklichen Austrittsöffnung, so findet man, entsprechend dem Umstande, dass hier schon alle Theilchen nur noch die axiale Geschwindigkeit haben, $k = 1$ und $V = q\sqrt{2gh}$.



(Ph. 165.)

Unter Umständen, die hier nicht näher erörtert werden sollen, kann man sogar k über 1 hinaus steigern, d. h. eine grössere als die theoretische Ausflussmenge erzielen. Bei den meisten Formen der Ränder und Ansatzröhren findet jedoch nur eine partielle Steigerung von k auf einen Werth zwischen 0·62 und 1 statt und auch dies nur dann, wenn der Strahl nicht schon in diesem Rohr eine freie Oberfläche hat (Fig. 165b), sondern an dasselbe sich anschmiegt (Fig. 165c). Ob das eine oder das andere eintritt, hängt einmal davon ab, ob das Ansatzrohr cylindrisch, convergent conisch oder divergent conisch ist, sodann davon, wie leicht die Flüssigkeit die Ränder benetzt, und endlich von der Druckhöhe: bei grosser Druckhöhe ist der Strahl frei, bei kleiner anhängend, während es bei mittleren Drucken zweifelhaft bleibt und ein kleines Hinderniss genügend ist, um ihn anhängend, ein schwacher Stoss, um ihn frei zu machen. Bei freiem Strahl bleibt k unverändert, wie zu erwarten. Bei anhängendem fand z. B. BIDONE für eine quadratische Oeffnung, die er durch kleine Seitenwände begrenzte:

Seitenwände . .	0	1	2	3	4
k	0·619	0·639	0·662	0·694	0·820.

Bei Anbringung einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre fand DANIEL BERNOUILLI $k = 0·81$, und für konische Ansatzröhren fand WEISBACH bei verschiedenen Convergenzwinkeln mit der Axe:

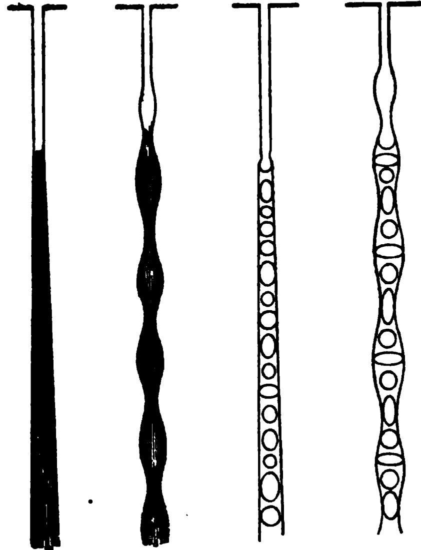
Winkel	0°	22½°	45°	67½°	90°
k	0·966	0·902	0·753	0·684	0·632;

einen noch kleineren Werth, nämlich 0·541, lieferte ein kurzes, nach innen gekehrtes Rohr.

Beschaffenheit des Strahls[1]). Um diese zu beobachten, wendet man wieder die Methode der momentanen Beleuchtung an, da man auf diese Weise die Einzelheiten viel besser wahrnimmt als bei dauernder Beleuchtung. Man kann sich dabei entweder der mit einem peripherischen Loch versehenen, rasch rotirenden Scheibe oder der elektrischen Funken, der GEISLER'schen Röhren u. s. w.

[1]) SAVART, Ann de Ch. et Phys. (2) 53, pag. 337. 1833. — MAGNUS, POGG. Ann. 95, pag. 1. 1858; 106, pag. 1. 1859. — BUFF, LIEBIG's Ann. 78, pag. 162. 1850; POGG. Ann. 100. 1857. — MATTEUCCI, Compt. rend. 22, pag. 260. 1846. — IZARN, Compt. rend. 106, pag. 543. 1888.

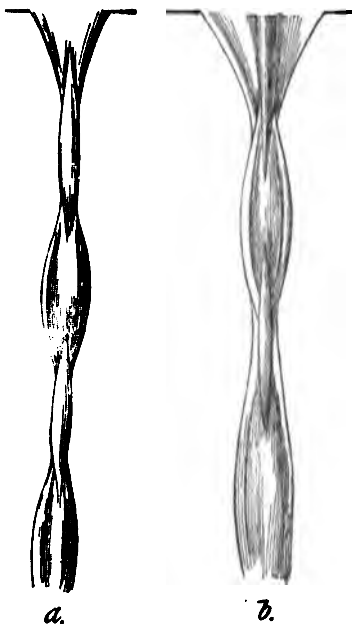
bedienen. Bei **kreisförmiger Oeffnung** ist die Beschaffenheit des Strahls verhältnissmässig am einfachsten, aber immerhin noch complicirt genug. Bei gewöhnlicher Beleuchtung erscheint der Strahl entweder in seinem oberen Theile cylindrisch, in dem unteren schwach konisch oder durchweg aus dickeren und schlankeren Theilen, »Bäuchen« und »Knoten« zusammengesetzt, und in beiden Fällen ist das obere Stück des Strahls klar, das untere trübe. Diese Trübung erklärt sich, wie die momentane Beleuchtung lehrt, dadurch, dass in diesem Theile der Strahl gar kein zusammenhängendes Ganze mehr bildet, sondern aus einzelnen Tropfen besteht. In dem ersteren Falle zeigen die Tropfen unregelmässig, im letzteren dagegen regelmässig wechselnde Gestalten. Dass sich überhaupt Tropfen bilden, die Flüssigkeit also zerreist, ist offenbar eine Folge der Zunahme der Geschwindigkeit von oben nach unten; je grösser die Oeffnung und je grösser die Ausflussgeschwindigkeit, also die Druckhöhe ist, desto länger erhält sich der Strahl zusammenhängend, und bei sehr kleinem Druck kann sich überhaupt kein Strahl bilden, vielmehr verlässt die Flüssigkeit das Gefäss unmittelbar in Form von Tropfen. Je grösser der Druck, desto länger wird hiernach der Strahl zusammenhängend bleiben. Hinsichtlich des weiteren Verlaufs kann man nun zwei Fälle unterscheiden. Häufig nämlich werden in Folge der gewöhnlich vorhandenen, unregelmässig wirkenden äusseren Erschütterungen die Tropfen in regelloser Folge abreissen und damit die ganze Erscheinung einen unbestimmten Durchschnittscharakter erhalten, so dass man eben nichts als eine Trübung beobachtet. Unter gewissen Umständen dagegen wird eine regelmässige Periodicität eintreten. Hierher gehört der von SAVART und MAGNUS[1]) studirte Fall, dass durch einen von aussen angegebenen Ton die Ränder der Oeffnung in Mitschwingungen versetzt werden, so dass die Ausflussgeschwindigkeit zwischen einem grösseren und einem kleineren Werthe hin und her schwankt. Indessen kommt derartigen, durch äussere Einflüsse hervorgerufenen Erzitterungen der Oeffnungsränder jedenfalls nicht die allgemeine Bedeutung zu, welche ihnen jene Forscher beilegten. Viel häufiger liegt vielmehr die Ursache, welche die Periodicität bewirkt, in der Ausflusserscheinung selbst. In dem Augenblick nämlich, in welchem von dem Strahl ein Tropfen sich loslöst, treten in Folge der dem Zerreissen vorangehenden Längszerrung zwei Schwingungserscheinungen auf: eine, deren Träger der bei seiner Entstehung längliche Tropfen ist, und die in abwechselnden Abplattungen und Wiederverlängerungen besteht, und eine zweite, deren Träger der Strahl ist, und welche sich als eine in ihm nach oben laufende Welle, mit abwechselnden Ausbauchungen und Einschnürungen, darstellt. Es ist klar, dass es von den Druck-, namentlich aber von den Längenverhältnissen des


(Ph. 166.)

[1]) SAVART, a. a. O. — MAGNUS, a. a. O.

continuirlichen Strahlstücks abhängen wird, in welchem Grade sich diese Schwingungen ausbilden und regulär erhalten werden; sie können aber unter günstigen Umständen so rasch erfolgen und so energisch werden, dass sie zu einem Ton Veranlassung geben. Diese »Ausflusstöne« sind von SAVART[1]) entdeckt worden, und MARTINI[2]), der sich neuerdings eingehend mit ihnen beschäftigte, hat gefunden, dass die Töne immer auftreten, wenn die Zahl der Pulsationen ganz oder sehr nahe übereinstimmt mit der Schwingungszahl des Tones, den die Flüssigkeitssäule, von aussen erregt, geben würde, oder mit einem seiner harmonischen Obertöne; auf die weiteren von MARTINI gefundenen Beziehungen kann hier nicht eingegangen werden. Vom theoretischen Standpunkte aus hat RAYLEIGH[3]) die schwankende Gestalt von Flüssigkeitsstrahlen mit Rücksicht auf die hydrodynamischen und die capillaren Wirkungen untersucht; ein Auszug lässt sich jedoch hiervon nicht wohl geben.

Bei nicht kreisförmigen Oeffnungen verwickelt sich die Erscheinung dadurch, dass zu den geschilderten noch andere periodische Gestaltsänderungen hinzukommen. Ist die Oeffnung ein Spalt, d. h. ein Rechteck von erheblich grösserer Länge als Breite, so ist der Querschnitt des Strahls dicht unterhalb derselben ein Rechteck mit entsprechender Richtung der längeren und kürzeren Kante; weiter unten kehren sich jedoch diese Richtungen um, und der Strahl erhält im Ganzen die Gestalt Fig. 167a; an den Uebergangsstellen ist der Querschnitt ein Quadrat mit nach innen gekrümmten Seiten. Bei kreuzförmiger Oeffnung ist der Querschnitt des Strahls zunächst auch gleichgerichtet kreuzförmig, weiterhin erscheint aber das Kreuz um 45° gedreht, dann wieder in der ursprünglichen Lage u. s. w. (Fig. 167b). Aehnlich verhält es sich bei quadratischen, dreieckigen und anderen Oeffnungen. Die Erklärung wird von den Einen in dem Umstande gesucht, dass sich in den Richtungen, in welchen die Oeffnung ausgedehnter ist, mehr Theilchen von den Seitengebieten des Gefässes zusammendrängen, und dass der so entstehende, nach der Mitte des Strahls gerichtete Druck eine Verkürzung dieser und ein Ausweichen, d. h. eine Verbreiterung der ursprünglich kürzeren Dimensionen, also die obige Umkehrung der Verhältnisse zur Folge hat; Andere ziehen die Oberflächenspannung (s. Art. Capillarität) heran, welche in den stärker gekrümmten Theilen der Oberfläche des Strahls stärker wirkend, in der That den gleichen Effekt haben muss. Vermuthlich wirken beide Umstände zusammen.



(Ph. 167).

Besondere Erscheinungen, die bei Flüssigkeitsstrahlen auftreten, sind u. a. folgende:

1) Mitreissen von Theilen des umgebenden Mediums, also unter gewöhnlichen Umständen der umgebenden Luft. Die Ursache ist eine doppelte:

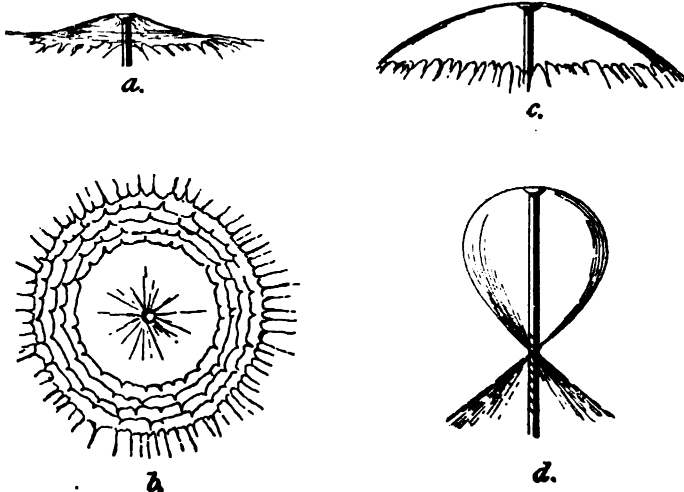
1) SAVART, Compt. rend. 37, pag. 208. 1854.

2) MARTINI, Atti Ist. Veneto (5) 7, pag. 961 (1882); (6) 2, pag. 109 (1884).

3) RAYLEIGH, Proc. Lond. Math. Soc. 10, pag. 4. 1879.

einmal die oberflächliche Reibung zwischen Flüssigkeit und Luft, und sodann die zunehmende Geschwindigkeit, welche, indem sie den Strahl in Tropfen auflöst, in sein Inneres Luft hineinzieht. Hierauf beruht z. B. die Wasserluftpumpe (s. Art. Pumpen). Fällt ein durch Luft gegangener Strahl auf Wasser auf, so reisst er, wie MAGNUS beobachtete, Luftblasen mit in das Innere hinein, jedoch, wie TYNDALL[1]) zeigte, auch in diesem Falle nur dann, wenn der schon aufgelöste, nicht aber wenn der continuirliche Theil des Strahls die Wasserfläche trifft. Zugleich unterscheiden sich beide Fälle dadurch, dass um den auffallenden Strahl herum sich dort eine Vertiefung, hier eine Erhöhung des Wassers bildet — Erscheinungen, welche man mit Benutzung der auftretenden kaustischen Figuren sehr gut studiren kann.

2) Auftreffen von Strahlen auf feste Körper[2]). Die Gestalten, welche in solchen Fällen die Flüssigkeit annimmt, und die zuerst von SAVART und später vielfach untersucht worden sind, zeichnen sich durch grosse Mannigfaltigkeit aus; es genüge hier die Formen anzugeben, die sich darbieten, wenn ein vertikal nach unten fliessender Strahl eine horizontale Kreisscheibe central trifft; Fig. 168a und 168b gelten für starken Druck (von der Seite resp. von oben gesehen), Fig. 168c für mittleren, 168d für kleinen Druck. Verwickelter sind die Erscheinungen beim schiefen Stoss; sie sind aber besonders interessant, insofern sie zeigen, wie anders sich flüssige Strahlen im Vergleich zu festen Körpern verhalten (s. Art. Stoss), und insofern sie das auch praktisch wichtige Problem der Stromtheilung berühren (s. w. u.). Schliesslich sei noch auf bezügliche theoretische Untersuchungen von BOUSSINESQ[3]) und F. NEUMANN resp. VOIGT[4]) hingewiesen.



(Ph. 168.)

3) Zusammentreffen verschiedener Flüssigkeitsstrahlen. Auch

---

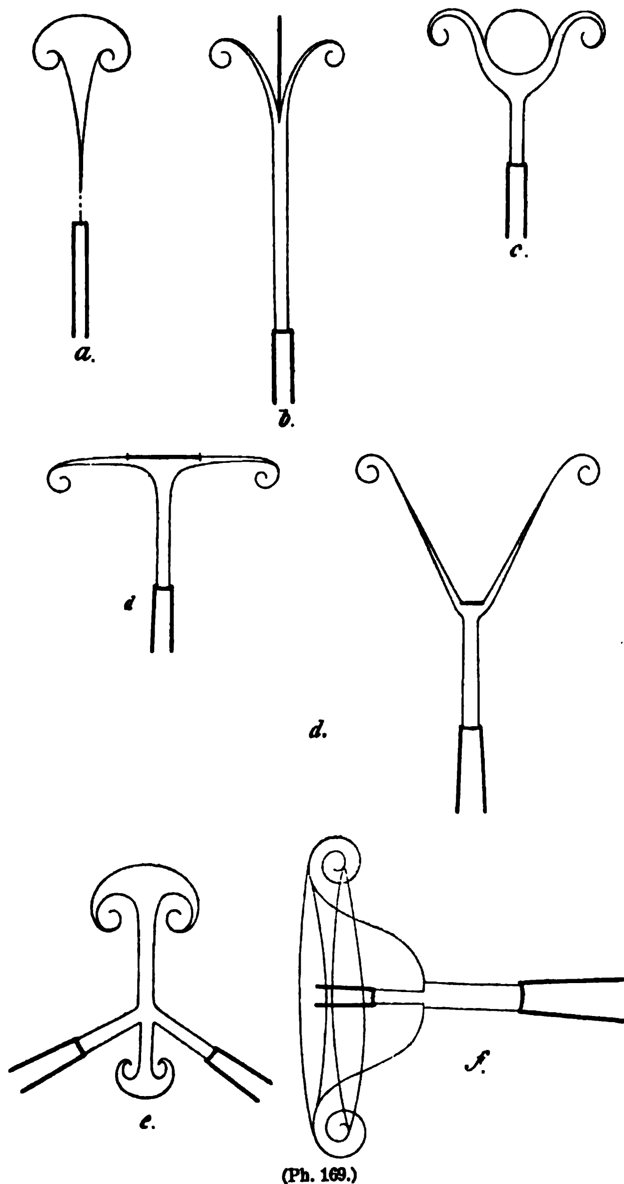
1) TYNDALL, Phil. Mag. (4) 1, pag. 105. 1850.

2) SAVART, Ann. Chim. Phys. (2) 54, pag. 55 u. 113; 55, pag. 257. 1833. — MAGNUS, POGG. Ann. 80, pag. 1. 1849; 95, pag. 1. 1855.

3) BOUSSINESQ, Compt. rend. 69, pag. 45. 1869.

4) F. NEUMANN, Einleitung i. d. theor. Physik, pag. 238. — VOIGT, Elementare Mechanik, pag. 364. — NEUMANN berechnet daselbst auch die Stosskraft von Strahlen, die auf Platten auftreffen und findet sie ($P = 2kq\rho gh$ für horizontale Strahlen, complicirter für vertikale) mit den Versuchsergebnissen älterer Hydrauliker (MICHELOTTI, BOSSUT, D'AUBUISSON u. s. w.) übereinstimmend, ausser wenn die Platte nicht viel grösser als die Strahlbreite ist oder wenn sie der Oeffnung zu nahe liegt; im ersteren Falle ist die mangelhafte Anschmiegung des abfliessenden Wassers an die Platte der Grund der Abweichung, im letzteren Falle wirken wahrscheinlich mehrere Umstände zusammen.

hier treten sehr mannigfaltige Gebilde auf. Zwei in gleicher Richtung einander entgegenkommende Strahlen bilden bei gleichem Druck und Durchmesser eine ebene Scheibe, bei verschiedenem Druck eine convexe Schale, welche sich schliesslich eiförmig schliesst. Bilden die Strahlen einen Winkel miteinander, so bilden sich durch den Zusammenstoss im allgemeinen zwei neue Strahlen; es kommt aber auf die näheren Umstände an, ob die Strahlen einander abstossen oder durcheinander hindurchgehen. Zum experimentellen Studium dieser Erscheinungen empfiehlt es sich, die beiden Strahlen durch Färbung zu unterscheiden. Ueber eine theoretische Studie von VOIGT sehe man weiter unten.



(Ph. 169.)

4) **Wasserstrahlen in Wasser.** Lässt man einen Strahl von mit Anilin gefärbtem Wasser in farbloses Wasser treten, so tritt in Folge von Reibung sehr bald Wolkenbildung und schliesslich völlige Mischung ein, mit Ausnahme des Falles sehr kleiner Drucke. Diesen Fall haben OBERBECK[1]) und im Anschlusse an ihn KÖTSCHAU[2]) studirt und sehr merkwürdige Bildungen beobachtet. Man nimmt am besten ein prismatisches Glassgefäss mit farblosem Wasser, stellt daneben eine mit gefärbtem Wasser gefüllte Röhre auf und führt von dieser ein dünnes, gebogenes Rohr in die centrale Bodenöffnung des Gefässes. Am besten eignen sich Ueberdrucke von 2 bis 50 *mm*; ausserdem ist nothwendig, dass bei Beginn des Versuches das Gefässwasser völlig ruhig und von überall gleicher Temperatur sei. Die Fig. 169a zeigt eine Phase der Erscheinung. Ferner zeigt Fig. 169b—d die Gestalten bei Auftreffen auf eine scharfe Kante, auf eine Kugel

1) OBERBECK, WIED. Ann. 2, pag. 1. 1877.
2) KÖTSCHAU, WIED. Ann. 26, pag. 530. 1884.

und auf eine kleine oder grosse Scheibe. Durch Einsetzen gegabelter Rohrstücke in die Bodenöffnung kann man dann auch das Zusammentreffen verschiedener Strahlen untersuchen und findet Gebilde, die mit den in Luft auftretenden manche Aehnlichkeit haben, sich aber doch in vieler Hinsicht von ihnen unterscheiden; Fig. 169e gilt für schief zusammenstossende, gleich dicke, Fig. 169f für einander entgegenkommende, verschieden dicke Strahlen. Wie man sieht, sind die Strahlbildungen mit Wirbelbildungen verknüpft; es wird darauf später (s. Art. Wirbelbewegung) zurückgekommen werden.

5) Der Springbrunnen besteht in einem senkrecht nach oben gerichteten Strahl. Die Verbindung des TORRICELLI'schen Theorems mit den Wurfgesetzen lehrt, dass die Höhe, bis zu welcher der Strahl sich erhebt, gleich der Druckhöhe sein müsste; in Wahrheit ist sie kleiner, erstens wegen des von 1 häufig etwas abweichenden Geschwindigkeitscoëfficienten ζ (pag. 406), zweitens wegen der Reibung an der Luft und drittens wegen des Aufpralls der herabfallenden Theilchen; letzteres kann man durch schwache Neigung des Mundstückes und somit des Strahls wenigstens theilweise beseitigen. Im Durchschnitt kann man nach MARIOTTE die zur Erzielung der Steighöhe s erforderliche Druckhöhe h (in pariser Fussen) etwa

$$h = s\left(1 + \frac{s}{300}\right)$$

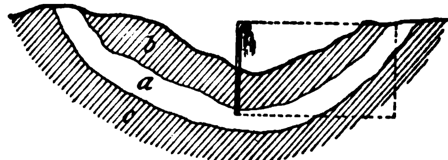
setzen; allgemeiner gültig ist aber die WEISBACH'sche Formel

$$s = \frac{h}{a + bh + ch^2},$$

wo abc von Grösse und Gestalt der Oeffnung abhängen. Was die Gestalt des Strahls betrifft, so muss seine Dicke, solange er zusammenhängend bleibt, der abnehmenden Geschwindigkeit halber nach oben hin wachsen, sodass in der Höhe H der Querschnitt

$$Q = q\frac{v}{v - \sqrt{2gH}} = q\frac{\zeta\sqrt{2gD}}{\zeta\sqrt{2gD} - \sqrt{2gH}}$$

ist (q Oeffnungsquerschnitt, D Druckhöhe). Bei der Verwendung des Springbrunnens als Zierrath finden häufig die oben geschilderten Erscheinungen beim Anprall an feste Körper resp. beim Zusammenprall verschiedener Strahlen Anwendung.



(Ph. 170.)

Zu den Springbrunnen gehören auch die sogen. artesischen Brunnen, die man erhält, wenn man ein Bohrloch in eine wasserführende, zwischen zwei für Wasser undurchlässige Schichten b und c eingeschlossene Schicht a führt, und zwar an einer Stelle, wo nicht nur diese Schicht, sondern auch die Erdoberfläche tiefer liegt als andere Theile der Schicht.

Discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen: Theorie der Strahlbildung. Die Theorie der Flüssigkeitsstrahlen hat vor allen Dingen die auffallende Thatsache verständlich zu machen, dass, obgleich die Differentialgleichungen der Flüssigkeitsbewegung im allgemeinen dieselben sind, wie diejenigen der Wärmebewegung und der Elektricitätsbewegung, dennoch beim Austreten in einen weiteren Raum entgegengesetze Erscheinungen auftreten, insofern nämlich Wärme und Elektricität sich in der Regel ausbreiten, eine Flüssigkeit dagegen einen Strahl bildet. Das Charakteristische der letzteren Erscheinung ist

die Discontinuität der Geschwindigkeit; an der Oberfläche des Strahles gleitet eine Schicht mit endlicher Geschwindigkeit an der benachbarten, ruhenden vorüber, oder, allgemeiner gesagt, diese beiden Schichten gleiten mit endlicher relativer Geschwindigkeit an einander vorbei. Dass eine derartige Unstetigkeit der Bewegung entstehen kann, und zwar ohne dass unstetige Kräfte wirken, liegt an dem Umstande, dass gemäss der Gleichung

$$p = c - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] \tag{7}$$

mit zunehmender Geschwindigkeit der Druck abnimmt, bis er schliesslich bei einem von c, also von den äusseren Bedingungen abhängigen Werthe negativ wird. Wenn dies eintritt, oder (in Anbetracht der Cohäsion einer wirklichen Flüssigkeit) spätestens wenn der Druck einen gewissen negativen Werth überschreitet, zerreisst die Flüssigkeit, und es bildet sich eine Trennungsfläche der beschriebenen Art. Von diesem Gedanken ausgehend war v. HELMHOLTZ[1]) der Erste, welcher das Problem in Angriff nahm. Die von ihm begründete, von KIRCHHOFF[2]), RAYLEIGH[3]), VOIGT[4]), BOBYLEFF[5]) u. A. fortgeführte Methode macht ausser den Voraussetzungen, die der Gleichung (7) zu Grunde liegen, nämlich dass 1) die Flüssigkeit eine ideale, 2) die Bewegung stationär ist, 3) ein Geschwindigkeitspotential φ existirt, 4) keine Kräfte, auch nicht die Schwere, wirken, noch die beiden weiteren, dass 5) die Dichte $\rho = 1$ und 6) φ nur von x und y abhängig sei, die Bewegung also überall parallel zu einer Ebene und in allen diesen Ebenen in gleicher Weise erfolge, so dass man nur die Bewegung in einer dieser Ebenen zu untersuchen braucht. Die Gleichung (7) und die Continuitätsgleichung werden dann einfacher

$$p = c - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right], \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{9}$$

und sie werden ergänzt durch die Grenzbedingungen, dass die festen Grenzen Stromlinien seien, die freien Grenzen ebenfalls Stromlinien, zugleich aber Linien gleichen Drucks, also auch gleicher Geschwindigkeit, etwa $v = 1$, seien; endlich finde, gewissermassen als Ersatz für die fehlenden Kräfte, in gewissen Linien der betrachteten Ebene ein Einströmen resp. Ausströmen von Flüssigkeit statt. Eigentlich müsste man nun, um das Problem zu lösen, die festen Wände, d. h. die Gestalt des Gefässes als gegeben betrachten und daraus die freien Grenzen, d. h. die Gestalt des Strahls und die Ausströmung berechnen. Der methodischen Schwierigkeiten halber muss man jedoch anders verfahren, gar nichts als gegeben betrachten, mögliche Fälle aufsuchen und dann zusehen, welchen concreten Verhältnissen, d. h. welcher Gestalt des Gefässes, welcher Einströmung, welcher Gestalt des Strahls und welcher Ausströmung sie entsprechen.

Die Methode beruht auf der Einführung complexer Grössen und der sogen. conformen oder in den kleinsten Theilen ähnlichen Abbildung. Setzt man $\sqrt{-1} = i$, ferner

$$z = x + iy, \qquad w = \varphi + i\psi, \qquad \frac{dz}{dw} = \zeta = \xi + i\eta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

---

[1]) HELMHOLTZ, Berl. Mon. Ber. 1868, pag. 215. Ges. Abh. 1, pag. 146.

[2]) KIRCHHOFF, CRELLE's J. Bd. 70, pag. 289. Ges. Abh. pag. 416.

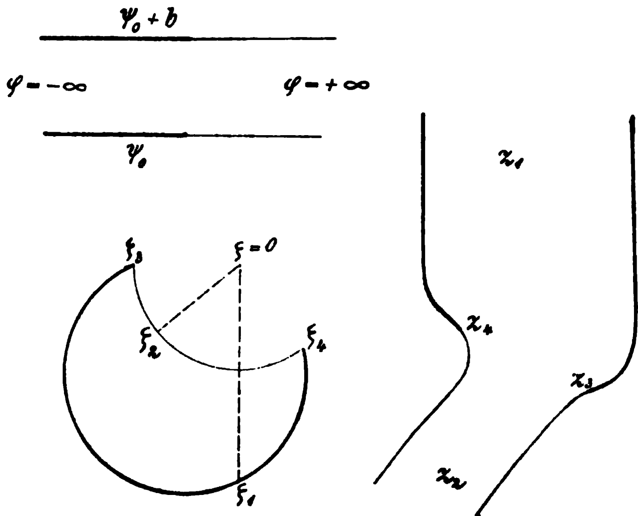
[3]) Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 2, pag. 441. 1876.

[4]) VOIGT, Gött. Nachr. 1885, 285.

[5]) BOBYLEFF, J. russ. phys. Ges. 13, pag. 63. 1881; Beibl. z. WIED. Ann. 1882, pag. 163.

betrachtet man x und y, φ und ψ, ξ und η resp. als rechtwinklige Coordinaten in der z-Ebene, w-Ebene, ζ-Ebene, und bestimmt man w als Funktion von z den gegebenen Bedingungen gemäss — der Gleichung (9) genügt jede Funktion von z —, so hat man in φ ein mögliches Geschwindigkeitspotential, in den Linien $\psi = const$ die zugehörigen Stromlinien, die z-Ebene, ζ-Ebene und w-Ebene sind conform auf einander abgebildet, der Radiusvector ρ stellt die Richtung und den reciproken Werth der Geschwindigkeit dar, so dass an den freien Grenzen $\rho = 1$ ist, und wenn man in der w-Ebene bestimmte Linien willkürlich wählt, erhält man in den entsprechenden z-Linien die festen und freien Grenzen der Flüssigkeit; das ζ-Gebiet dient dabei zur Vermittelung, und es kann in demselben, wie die Theorie der conformen Abbildung lehrt, noch eine gewisse Anzahl von Punkten beliebig zugeordnet werden.

Erster Fall. Das w-Gebiet sei begrenzt durch die Linien $\psi = \psi_0$ und $\psi = \psi_0 + b$, $\varphi = -\infty$ und $\varphi = +\infty$, sei also ein gerader und unendlich langer Streifen von der Breite b. Ein solcher Streifen ist ein specieller Fall einer von zwei Kreisbögen begrenzten Sichel, und es kann auch im ζ-Gebiet eine Sichel gewählt werden; es werde die gewählt, welche von dem Kreisbogen $\rho = 1$ und einem zweiten, nach der Seite von $\rho > 1$ gelegenen, begrenzt ist. Es können dann w und ζ als einwertige Funktionen von einander bestimmt und dabei noch drei Punkte der Begrenzungen beider Gebiete willkürlich zugeordnet werden; dem Punkte $\varphi = +\infty$ entspreche der Punkt ζ_2 auf dem Kreisbogen $\rho = 1$, dem Punkte $\varphi = -\infty$ der Punkt ζ_1 auf dem andern Kreisbogen, das dritte Punktpaar bleibe noch unbestimmt. Ohne auf die Gleichung zwischen w und ζ näher einzugehen, kann man dann schon durch Diskussion der Bedingungen die Gestaltung des z-Gebietes in grossen Zügen feststellen (Fig. 171). Dem schwachen Kreisbogen $\rho = 1$ werden nothwendig die Strahlgrenzen, dem andern die Gefässwände, also den Spitzen ζ_3 und ζ_4 der Sichel die Ränder z_3 und z_4 der Ausflussöffnung entsprechen; im oberen Theil z des Gefässes wird die Bewegung die Richtung des vom ζ-Nullpunkte nach ζ_1 gezogenen, im unteren Theil des Strahles die Richtung des nach ζ_2 gezogenen Radiusvectors haben, woraus für Gefäss und Strahl selbst analoge Begrenzungen folgen; die Gefässränder selbst werden Inflexionspunkte. Da die Abbildung in den kleinsten Theilen ähnlich, das Vergrösserungsverhältniss ρ und an der Strahloberfläche $\rho = 1$ ist, wird der untere Theil des Strahls sogar ein congruentes Bild des entsprechenden Theils des w-Streifens, also die Strahlbreite b sein, während sie an der Oeffnung grösser ist; es tritt also eine Contraction ein.



(Ph. 171.)

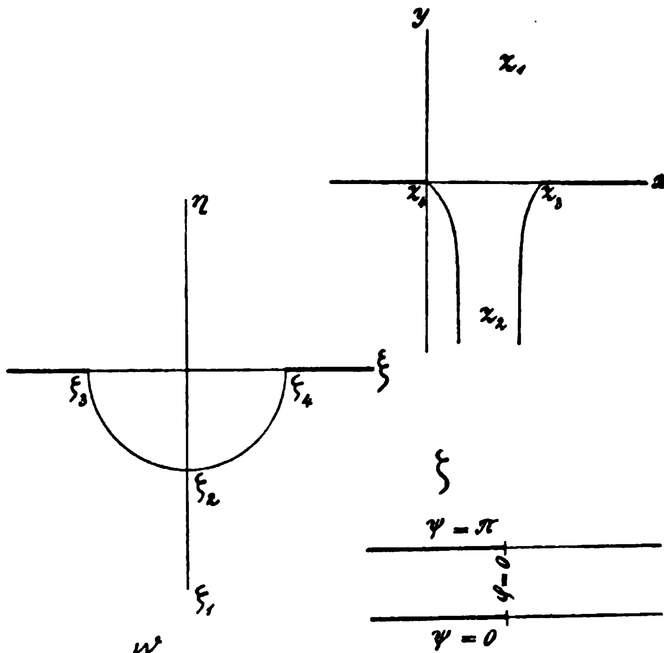
Erster Specialfall. Die Grenzen des Streifens seien $\psi = 0$ und $\psi = \pi$. Der Bogen $\rho = 1$ sei ein Halbkreis, der andere habe unendlich grossen Radius,

ζ_1 und ζ_2 sollen in der Mitte der Bögen liegen. Ordnet man als drittes Punktpaar $w = 0$ und $\zeta = 1$ einander zu, so wird die Abbildungsgleichung zwischen w und ζ:

$$\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = \frac{1 - e^w}{1 + e^w},$$

und folglich, wenn $\zeta - 1$ und $z = 0$ zugeordnet werden und der kleinste arcus genommen wird

$$z = \int \zeta\, dw = \int (e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1})\, dw = 1 - e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - 1} + arctg \sqrt{e^{-2w} - 1}.$$



(Ph. 172.)

Diese Gleichung ergiebt, wie Fig. 172 zeigt, den Ausfluss aus einem Spalt in unendlicher Ebene; die Einströmung erfolgt in einem Halbkreise (s. o. Boussinesq und St. Venant), die Spaltbreite ist $2 + \pi$, die Strahlbreite tief unten π, also die Contraktion

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2 + \pi} = 0{\cdot}61.$$

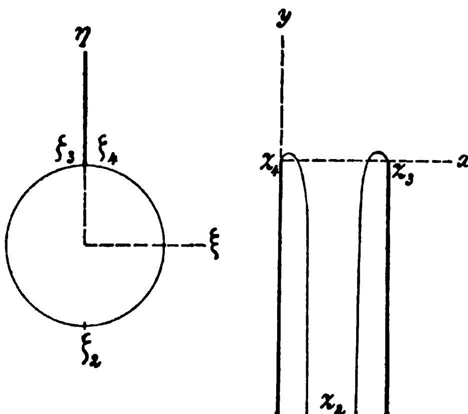
Dass dies mit dem experimentellen Werthe so gut übereinstimmt, ist wohl mehr Zufall, da hier die Contraktion nur in einer, bei einem wirklichen Strahl aber in beiden Querdimensionen erfolgt. Dagegen darf das Ergebniss auf den Ausfluss aus Spalten, wie Rayleigh[1]) und Kötter[2]) gezeigt haben, auch dann übertragen werden, wenn die Schwere wirkt.

Zweiter Spezialfall. Das w-Gebiet sei wie vorhin, das ζ-Gebiet durch den fast vollen Kreis $\rho = 1$, die beiden benachbarten Endradien und den unendlich grossen Kreis begrenzt (Fig. 173), mit der Zuordnung $\zeta = \infty$ für $\varphi = -\infty$, $\zeta = -i$ für $\varphi = +\infty$ und $\zeta = i$ für $w = 0$. Die Abbildungsgleichung wird dann:

$$\left(\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{i}}\right)^2 = \frac{1 - e^w}{1 + e^w},$$

und man erhält:

$$z = -i\left[e^{-2w} + w - 1 + e^{-w} \sqrt{e^{-2w} - 1} - log(e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1})\right].$$



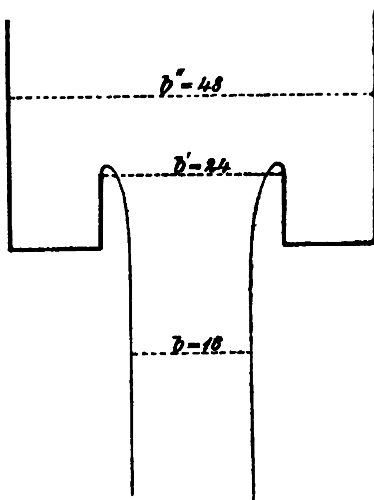
(Ph. 173.)

[1]) Lord Rayleigh, a. a. O.

[2]) Kötter, Verh. Berl. physik. Ges. 1887, pag. 40.

Dieser schon von v. Helmholtz behandelte Fall stellt den Erguss einer Flüssigkeit aus dem unendlichen Raum in einen zwischen zwei parallelen Wänden eingeschlossenen Canal dar; die Breite des Canals ist 2π, die Breite des Strahls in einiger Tiefe ist π, die Contraktion also $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Es sei bemerkt (Fig. 174), dass man dies Resultat leicht erweitern kann auf den Fall, dass der äussere Raum die Breite b'', der Canal die Breite b' und der Strahl die Breite b hat; es gilt dann die Relation

$$\frac{2}{b'} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b''}.$$

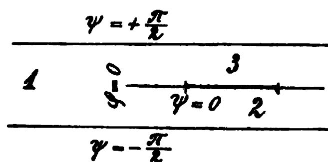


(Ph. 174.)

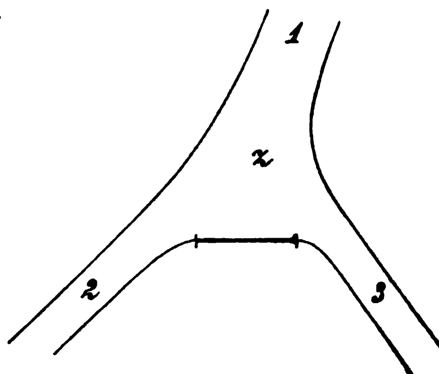
Zweiter Fall: Verzweigung von Strahlen. Das w-Gebiet sei durch die Linien

$$\psi = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\infty, \quad \psi = +\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = +\infty,$$

ausserdem aber durch die beiden Seiten der Linie $\psi = 0$, $\varphi > 0$, d. h. der positiven reellen Axe begrenzt. Bei geeigneter Zuordnung des ζ-Gebietes, wie sie in Fig. 175 durch Zahlen markirt ist, erhält man dann die in dieser Figur in grossen Zügen angedeutete Erscheinung im z-Gebiete, also die Theilung eines aus der Unendlichkeit kommenden Strahls resp. Stroms 1 in zwei







(Ph. 175.)

Strahlen resp. Ströme 2 und 3, in Folge Auftreffens auf eine ebene Platte (Stromtheilung, s. oben, pag. 413); in dieser giebt es einen, dem Punkte $w = 0$ entsprechenden Punkt, wo die Geschwindigkeit null ist und eine Stromlinie sich in zwei solche theilt.

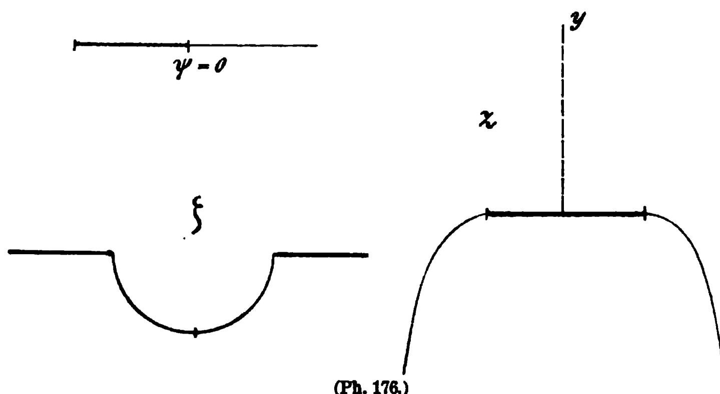
Specialfall. Rücken die beiden äusseren Grenzen des w-Gebietes nach oben und unten in unendliche Ferne, und wählt man $\zeta = -i$ für $w = \infty$, $\zeta = \pm 1$ für die beiden Werthe $w = 1$, welche der oberen und der unteren Seite der reellen Axe entsprechen, so wird die Abbildungsgleichung

$$\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{w}}{1+\sqrt{w}}$$

und folglich

$$z = 2\sqrt{w} + w\sqrt{\frac{1}{w} - 1} + arc\,sin\,\sqrt{w},$$

wo im letzten Gliede der kleinste Bogenwerth zu wählen ist. Die Flüssigkeit kommt hier, wie Fig. 176 zeigt, in unendlicher Breite an, trifft eine Wand von



(Fig. 176.)

der Breite $4 + \pi$ und fliesst zu deren beiden Seiten symmetrisch ab. Der Druck, den die Wand erleidet, ist gleich π oder, wenn man verallgemeinert und die Breite der Wand b, die Dichte der Flüssigkeit ρ und die Geschwindigkeit an der freien Grenze v nennt, gleich $\rho v^2 \frac{b\pi}{4 + \pi}$.

Diesen Fall hat BOBYLEFF (a. a. O.) verallgemeinert, indem er den Strom auf die Kante eines Prismas (Keil) treffen lässt. Ist 2α der Winkel des Prismas, die Breite jeder Seite b, und die Stromrichtung mit der Halbirungslinie des Keilwinkels identisch, so wird der Druck

$$P = \rho v^2 \cdot 2b\frac{2\alpha^2}{\pi L},$$

wo L den Werth

$$L = 1 + \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4\alpha^2}{\pi^2}\int_0^1 \frac{z^{-\alpha/\pi}}{1 + z}\,dz$$

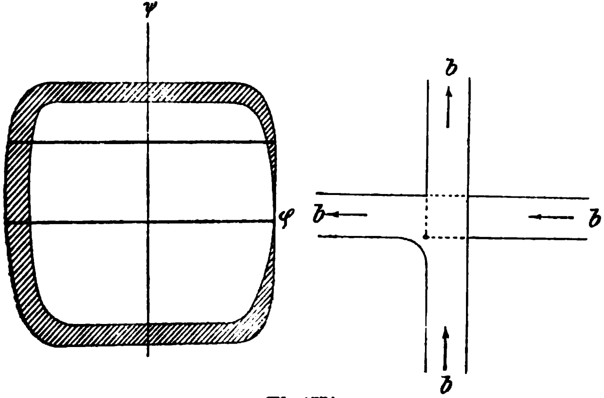
hat. Für $\alpha = 90°$ erhält man wieder die ebene Wand, und setzt man den Druck auf diese gleich 1, so erhält man für den Druck auf verschiedene Keile folgende Verhältnisszahlen:

$\alpha =$	10°	20°	45°	90°	100°	110°	135°	170°
$P : P_{90} =$	0·039	0·140	0·512	1	1·016	0·995	0·780	0·197.

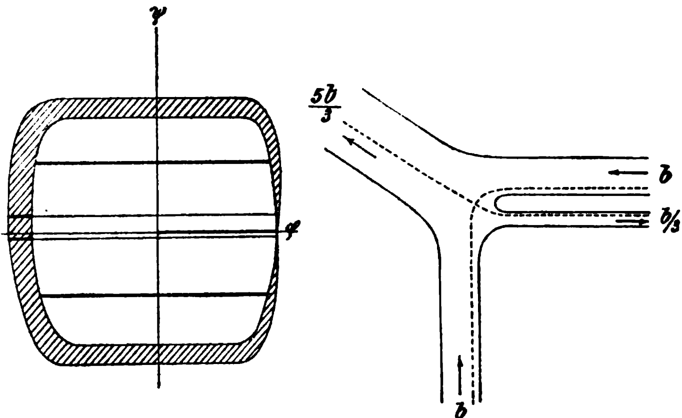
Für einen Keil vom Winkel $2\alpha = 200°$ ist also der Druck noch etwas grösser als für die ebene Platte.

Dritter Fall. Zusammenstoss mehrerer Strahlen (VOIGT, a. a. O.). Aus dem für ideale Flüssigkeiten giltigen Grundsatz, dass die Flüssigkeitstheilchen, die sich einmal in der Oberfläche befinden, immer in derselben bleiben (pag. 375), folgt, dass Strahlen nie zusammenfliessen können. Stossen also zwei Strahlen zusammen, so fliessen auch wieder zwei solche ab, von denen der eine in den Raum zwischen den beiden Stossrichtungen, der andere in den gegenüberliegenden fällt. Dieselben vier Stromlinien, welche die Grenzen der stossenden Strahlen bilden, begrenzen in anderer Combination auch die resultirenden Strahlen. Von den im Innern der beiden stossenden Strahlen liegenden Stromlinien muss je eine sich in zwei Zweige theilen, welche nach dem Zusammenstoss die Grenze zwischen der ursprünglich den verschiedenen Strahlen angehörigen Flüssigkeit bilden.

Man kann sie die singulären Stromlinien und die Stelle, wo sie sich verzweigen und die Geschwindigkeit null wird, das Stosscentrum nennen. Schon der vorige Fall lieferte hierfür ein Beispiel. Kommen n Strahlen zusammen, so ist die Anzahl der Stosscentren $n - 1$; die w-Ebene wird n-blättrig und in den Stosscentren zusammenhängend. Beschränkt man sich auf zwei Strahlen, so wird es sich wesentlich darum handeln, aus dem gegebenen Breitenverhältniss $B_1 : B$ und dem Winkel β_1 der stossenden Strahlen die Breiten A_1 und A_2 und die Richtungen α_1 und α_2 der resultirenden Strahlen abzuleiten. Es zeigt sich aber, dass diese Aufgabe unendlich viele Lösungen zulässt, so lange nicht über die Lage des Stosscentrums verfügt wird; die stationäre Bewegung beim Zusammentreffen von Strahlen muss also von den Umständen beim ersten Beginn dieser Bewegung abhängig sein. Da die Verfügung über das Stosscentrum das Problem bedeutend complicirt, thut man besser, noch eine der gesuchten Grössen willkürlich zu wählen. Als Beispiel diene der Fall $B_1 = B$, also der Zusammenstoss zweier gleich breiter Strahlen. Wählt man α_1 unendlich klein, so erhält man Fig. 177; für $\alpha_2 = \pi$ Fig. 178.



(Ph. 177.)



(Ph. 178.)

Die Methode der conformen Abbildung unter Benutzung der complexen Grössen ist principiell auf Flüssigkeitsbewegungen beschränkt, die nur von zwei Coordinaten abhängen. Von hohem theoretischem Interesse ist es daher, dass PLANCK[1]) und im Anschlusse an ihn MOLENBROEK[2]) Methoden gefunden haben, welche diesen Mangel nicht haben. Da es aber weder ihnen selbst noch Andern bisher gelungen ist, neue Fälle von Strahlbildung mittelst dieser Methoden zu untersuchen, so wird es genügen, auf die bezüglichen Abhandlungen verwiesen zu haben.

F. AUERBACH.

[1]) PLANCK, WIED. Ann. 21, pag. 499. 1884.
[2]) MOLENBROEK, WIED. Ann. 35, pag. 62. 1888.

Gemeinschaftliche Bewegung fester und flüssiger Körper.

Einleitung. Eines derjenigen Kapitel der Hydromechanik, welche von den Theoretikern mit Vorliebe bearbeitet worden sind, das aber auch in praktischer Hinsicht hervorragendes Interesse darbietet, ist die Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten. Wenn ein fester Körper in einer Flüssigkeit sich bewegt, so treten zwei Erscheinungen auf: die eine besteht in der Abweichung der Bewegung, welche der Körper in der Flüssigkeit ausführt, von derjenigen, welche er im leeren Raume ausführen würde; die andere besteht in der Bewegung der Flüssigkeit, welche durch die Bewegung des festen Körpers hervorgerufen wird. Zwischen beiden Erscheinungen besteht ein inniger Zusammenhang, der sich schon durch Heranziehung des Principes von der Erhaltung der Energie ergiebt, insofern ein Theil der Energie, welche der Bewegung des festen Körpers entzogen wird, auf die Bewegung der Flüssigkeit übergeht. Man kann sich dies sehr anschaulich so vorstellen, dass durch den Körper ein Theil der ihn umgebenden Flüssigkeit gezwungen wird, an der Bewegung theilzunehmen, dass sich also die bewegte Masse vergrössert und demgemäss die Geschwindigkeit der Bewegung verkleinert. Mit andern Worten: die Flüssigkeit setzt der Bewegung des festen Körpers einen Widerstand entgegen. Bei wirklichen Flüssigkeiten (oder Gasen) kommt freilich zu dieser Wirkung noch eine zweite hinzu: die Reibung der Flüssigkeit an dem festen Körper und in ihrem Innern, und eben diese Reibung hat zur Folge, dass nur ein Theil der kinetischen Energie, welche der feste Körper abgiebt, in der Flüssigkeit sich als solche wiederfindet, der Rest dagegen sich in andere Energie (Wärme) verwandelt. Indessen soll von diesem Theile der Wirkung hier abgesehen und darum alle diejenigen Erscheinungen ausgeschlossen werden, bei welchen er beträchtlich ist, also Erscheinungen, bei welchen entweder die Form des festen Körpers (Scheibe, Platte, kleine Körperchen) oder die Natur der Flüssigkeit (Oel, Glycerin u. s. w.) oder endlich die Art der Bewegung eine starke Reibungswirkung bedingt (s. Art. Reibung). Die Flüssigkeit wird vielmehr als eine ideale (pag. 211) betrachtet, und der einzige Widerstand, den sie der Bewegung entgegenstellt, ist dann der oben zuerst betrachtete, den man als hydrodynamischen oder Trägheitswiderstand bezeichnen kann. Uebrigens schliesst die Betrachtung nicht nur Fälle ein, in welchen ein fester Körper in einer Flüssigkeit, sondern auch solche, wo eine Flüssigkeit in einem festen Körper (Gefässe), oder wo Flüssigkeit um feste Körper herum oder zwischen ihnen hindurch, oder endlich ganz allgemein, wo feste und flüssige Körper sich gemeinschaftlich bewegen.

Zweidimensionale Bewegung. Findet die Bewegung nur nach zwei Dimensionen des Raumes statt, ist sie in allen auf der dritten Richtung senkrechten Ebenen die gleiche, und sieht man von äusseren Kräften und von Wirbeln ab, so kann man wieder, wie bei den Flüssigkeitsstrahlen (pag. 416), die Methode der complexen Funktionen $\varphi + i\psi$ anwenden, und auch hier wird alsdann φ das Geschwindigkeitspotential, ψ die Stromfunktion, d. h. die Funktion, welche, Constanten gleichgesetzt, die Stromlinien liefert. Die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials wird demgemäss im folgenden vorausgesetzt, Wirbelbewegungen bleiben ausgeschlossen; da bei idealen Flüssigkeiten niemals Wirbel entstehen können (s. Art. Wirbelbewegung), so genügt man jener Forde-

rung, wenn man annimmt, dass die zu untersuchenden Bewegungen aus dem Ruhezustand hervorgegangen sind.

Eine sehr allgemeine Formel für φ und ψ erhält man aus der Erwägung, dass, wenn eine Funktion $f(z)$ endlich, stetig, einwerthig und mit endlichen Differentialquotienten begabt ist, in allen Punkten zwischen zwei concentrischen Kreisen um den Anfangspunkt der Coordinaten diese Funktion in der Form

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots \\ + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots$$

dargestellt werden kann; für eine volle Kreisfläche kommt nur die erste Reihe, für die unbegrenzte Umgebung eines solchen Kreises nur die zweite Reihe zur Anwendung. Setzt man nun $f(z) = \varphi + i\psi$, führt Polarcoordinaten r und ϑ ein und ersetzt A durch $P + iQ$, B durch $R + iS$, so erhält man:

$$\varphi = P_0 + \sum_1^\infty r^n (P_n \cos n\vartheta - Q_n \sin n\vartheta) + \sum_1^\infty r^{-n} (R_n \cos n\vartheta + S_n \sin n\vartheta)$$

$$\psi = Q_0 + \sum_1^\infty r^n (Q_n \cos n\vartheta + P_n \sin n\vartheta) + \sum_1^\infty r^{-n} (S_n \cos n\vartheta - R_n \sin n\vartheta).$$

Mit Hilfe der FOURIER'schen Integrale kann man hiernach alle Probleme behandeln, bei welchen der Werth von φ resp. $\partial\varphi/\partial n$ über kreisförmige Grenzen gegeben ist. Der einfachste Fall ist offenbar der eines unendlich langen **Kreiscylinders, welcher sich mit gegebener Geschwindigkeit senkrecht zu seiner Axe durch eine in der Unendlichkeit ruhende Flüssigkeit bewegt.** Die Geschwindigkeit der Bewegung des Cylinders sei G, ihre Richtung die x-Axe, der Radius a; die Grenzbedingung lautet alsdann:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = G \cos\vartheta \quad \text{für} \quad r = a,$$

und das Resultat, d. h. die Bewegung der Flüssigkeit ist enthalten in den Formeln:

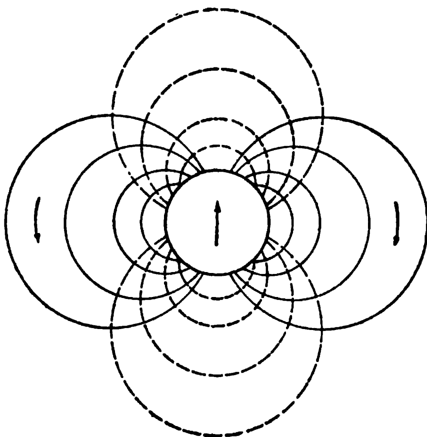
$$\varphi = -\frac{Ga^2}{r}\cos\vartheta, \qquad \psi = \frac{Ga^2}{r}\sin\vartheta;$$

der Druck in einem Punkte der Cylinderoberfläche ergiebt sich, soweit er von der Bewegung herrührt (hydrodynamischer Theil des Druckes)

$$p = \rho\left(\frac{dG}{dt}\cos\vartheta + G^2 \cos 2\vartheta - \tfrac{1}{2}G^2 + c\right)$$

und folglich der resultirende Druck auf den Mantel der Längeneinheit des Cylinders — dieser Druck P hat die Richtung der x-Axe —

$$P = -\pi\rho a^2 \frac{dG}{dt}.$$



(Ph. 179.)

Für einen mit constanter Geschwindigkeit sich bewegenden Cylinder ist also dieser Druck gleich null; ist die Bewegung des Cylinders eine beschleunigte, so drückt er auf die Flüssigkeit, bei verzögerter Bewegung drückt die Flüssigkeit auf ihn; mit dieser Beschleunigung resp. Verzögerung ist der Druck proportional, ausserdem aber ist er proportional der Masse der verdrängten Flüssigkeit. Niveaulinien resp. Stromlinien sind die in der Flüssigkeit gelegenen Theile der die y-Axe resp. x-Axe berührenden Kreise; in der Fig. 179 sind erstere durch unterbrochene, letztere durch volle Linien dargestellt[1]).

[1]) Analoge Zeichnungen lassen sich in zahlreichen der folgenden Fälle machen.

Auch für Cylinder, deren Querschnitt kein Kreis ist, kann man Lösungen des Problemes finden; man darf aber nicht darauf bestehen, die Form dieses Querschnittes von vorn herein anzugeben, sondern man muss, wie bei den Flüssigkeitsstrahlen (pag. 416), für φ resp. ψ irgend einen Werth wählen und dann zusehen, welche Form des Cylinderquerschnittes ihm entspricht. Dabei ergeben sich zwei Klassen von Fällen, die besonderes Interesse darbieten, nämlich solche, in denen der Cylinder eine fortschreitende, und solche, wo er eine drehende Bewegung ausführt[1]).

A) Bewegt sich der Cylinder gradlinig und senkrecht zu seiner Axe (also so, wie der oben betrachtete Kreiscylinder), so hat man, wenn die Bewegungsrichtung in die x-Axe, die Körperaxe in die z-Axe fällt, irgend einen Ausdruck für ψ zu wählen und dann die Gleichung

$$\psi = Gy + const$$

zu bilden; dies führt zur Bestimmung der festen Grenzen, also der Natur und der Constanten der Erscheinung. Hierdurch erhält man u. a. folgende Fälle:

1) Flüssigkeitsbewegung in einem gradlinig fortschreitenden cylindrischen Gefässe. Man wähle $\psi = Gy + const$, dann erhält man eine identische Gleichung und folglich den Satz: In einem Cylinder beliebiger Form, welcher parallel mit sich selbst fortschreitet, kann sich die Flüssigkeit bewegen wie ein fester Körper; falls der cylindrische Raum, den die Flüssigkeit erfüllt, einfach zusammenhängend ist, ist dies sogar die einzig mögliche Art der Bewegung. In der Wirklichkeit wird freilich die Flüssigkeit durch die Wirkung der Schwerkraft resp. der Trägheit in schwingende Bewegung versetzt werden.

2) Elliptischer Cylinder in einer Flüssigkeit. Man wähle

$$\varphi + i\psi = Cie^{i(\xi + i\eta)}, \quad \text{also} \quad \psi = Ce^{-\eta} \cos\xi,$$

wo ξ und η mit x und y durch die Gleichung $x + iy = c \sin(\xi + i\eta)$ zusammenhängen. Man findet dann, dass die Bewegung einer Flüssigkeit, hervorgebracht durch die Fortschreitung eines elliptischen Cylinders mit den Halbaxen a und b durch die Formeln

$$\psi = Gb\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\, e^{-\eta} \cos\xi \quad \text{oder} \quad \psi = -Ga\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\, e^{-\eta} \sin\xi$$

dargestellt wird, je nachdem der Cylinder parallel der grösseren oder der kleineren seiner Axen fortschreitet.

Es sei bemerkt, dass diese Probleme eine praktische Bedeutung gewinnen, sobald sich Querschnitte ergeben, welche denen von Schiffen ähnlich sind. Dies ist zuerst RANKINE gelungen, und durch seine Untersuchungen, sowie die seiner Nachfolger ist es möglich geworden, für die günstigste Construktion von Schiffen gewisse, wenn auch nur im grossen Ganzen giltige Anhaltspunkte zu gewinnen. Das wichtigste und interessanteste hierher gehörige Problem betrifft die Form, welche man dem horizontalen Schnitte des Fahrzeuges geben muss, um den hydrodynamischen Widerstand zu einem Minimum zu machen; und es hat sich gezeigt, dass man diesem Ziele nahe kommt, wenn man die Seitenlinien möglichst schwach krümmt, sie aber vorn und hinten möglichst scharf zusammenstossen lässt. Jedoch gilt dies nur für die Horizontalschnitte vom Spiegel bis zu einer gewissen Tiefe, der untere Theil der Oberfläche muss im Gegentheil möglichst abgerundet gestaltet werden, und damit hört das Problem auf, ein zweidimensionales zu sein.

---

[1]) LAMB, Einl. i. d. Hydrodynamik, deutsch v. REIFF, pag. 132 u. ff.

Zwei weitere Fälle fortschreitender zweidimensionaler Bewegung kann man leicht aus den oben (Art. »Ausfluss«, pag. 420) angeführten Fällen der Strömung gegen eine feste Wand (KIRCHHOFF) oder gegen einen Keil (BOBYLEFF) ableiten, wenn man sich umgekehrt den festen Körper bewegt, die Flüssigkeit ruhend vorstellt (s. w. u. Umkehrmethode).

B) Wenn sich der Cylinder mit der Winkelgeschwindigkeit w um seine Axe dreht, so hat man irgend einen erlaubten Werth von ψ zu wählen, diesen in die Gleichung

$$\psi = -\tfrac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + const$$

einzuführen und hierdurch die Natur und die Constanten des Problems zu bestimmen. Es sei bemerkt, dass dieses Problem in analytischer Hinsicht analog ist dem ST. VENANT'schen Problem der Torsion von Cylindern mit nicht kreisförmigem Querschnitt (pag. 272). Interessante Fälle:

1) Bewegung der Flüssigkeit in einem rotirenden, elliptisch cylindrischen Gefässe. Wählt man

$$\psi = Ar^2 \cos 2\vartheta = A(x^2 - y^2),$$

so ergiebt sich, wenn a und b die Halbaxen des Gefässes sind:

$$\psi = \tfrac{1}{2}\omega\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(x^2 - y^2) \qquad \varphi = \omega\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}xy.$$

Die Flüssigkeit ihrerseits übt auf den Cylinder eine Rückwirkung aus, und zwar rotirt letzterer so, als ob die Flüssigkeit ersetzt wäre durch einen festen Körper, dessen Trägheitsmoment in Bezug auf die Rotationsaxe

$$\tfrac{1}{2}M\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}$$

ist (M Masse der Flüssigkeit, bezogen ebenso wie das Trägheitsmoment auf die Längeneinheit derselben).

Rotirender elliptischer Cylinder in einer Flüssigkeit. Wählt man wieder die Werthe wie im Falle A2), so erhält man die Bewegung einer Flüssigkeit, in welcher ein elliptischer Cylinder (Halbaxen a und b) mit der Winkelgeschwindinkeit ω um seine Axe rotirt; und zwar ergiebt sich

$$\psi = \tfrac{1}{4}\omega(a + b)^2 e^{-2\eta} \cos 2\xi$$
$$\varphi = -\tfrac{1}{4}\omega(a + b)^2 e^{-2\eta} \sin 2\xi.$$

Die Curven verlaufen ähnlich wie die in Fig. 179 dargestellten.

3) Rotirendes dreikantiges Prisma in einer Flüssigkeit. Wählt man

$$\psi = Ar^3 \cos 3\vartheta = A(x^3 - 3xy^2),$$

so wird

$$\psi = \frac{1}{6}\frac{\omega}{a}r^3 \cos 3\vartheta \qquad \varphi = -\frac{1}{6}\frac{\omega}{a}r^3 \sin 3\vartheta,$$

und die hierdurch dargestellte Bewegung nimmt eine Flüssigkeit an, in welcher ein gleichseitig dreikantiges Prisma von der Seitenlänge $2\sqrt{3}a$ um seine Axe rotirt.

Dreidimensionale Bewegung. Potential- oder Umkehrmethode. Die Bewegung einer Flüssigkeit, in welcher ein fester Körper ruht, kann man ableiten, indem man erwägt, dass das Geschwindigkeitspotential φ dieselbe Gleichung $\Delta\varphi = 0$, und zwar in demselben Raume erfüllt, wie das Massenpotential dieses festen Körpers, nämlich in dem ganzen Raume ausserhalb des letzteren, d. h. in der ganzen Flüssigkeit. Beschränkt man sich daher auf stationäre Bewegungen, so dass φ von t unabhängig wird und durch die obige Gleichung (nebst den Grenzbedingungen) allein bestimmt ist, so erhält man durch Wahl irgend eines Massenpotentials zugleich ein Geschwindigkeitspotential. Die durch das-

selbe charakterisirte Flüssigkeitsbewegung ist jedoch meist von geringem physikalischem Interesse, und zwar hauptsächlich aus dem Grunde, weil in Anbetracht des Nullwerdens des Massenpotentials im Unendlichen, die Flüssigkeit dort als ruhend gedacht werden muss, während doch in Wirklichkeit die Flüssigkeit von gewissen Stellen herströmt und nach anderen Stellen abfliesst. Man gelangt somit nothwendig zu der Vorstellung, dass der Raum, dessen Massenpotential man benutzt hat, es ist, aus welchem die Flüssigkeit hervorquillt, resp. in welchem sie verschwindet. Ebenso verhält es sich, wenn man, was im übrigen offenbar erlaubt ist, nicht ein Massenpotential selbst, sondern einen seiner Differentialquotienten zum Geschwindigkeitspotential wählt. Immerhin ist eine diese Probleme behandelnde Theorie, welche insbesondere von englischen Physikern ausgebildet und von VOIGT[1]) sehr übersichtlich dargestellt ist, die Theorie der Quellen und Senken, interessant genug, um hier wenigstens angedeutet zu werden. Wählt man nämlich für φ das Potential einer beliebigen Anzahl von Massenpunkten, also den Ausdruck

$$\varphi = -\sum_k \frac{m_k}{r_k},$$

so muss man, da für diese Massenpunkte selbst $\varphi = \infty$ wird, was physikalisch nicht zulässig ist, das Gebiet der zu betrachtenden Flüssigkeit dadurch begrenzen, dass man alle diese Punkte oder, genauer, kleine Kugeln um sie als Mittelpunkte, ausschliesst. Diese Räume spielen für die Betrachtung nur insofern eine Rolle, als man sich aus ihnen Flüssigkeit in den der Betrachtung unterworfenen Raum einströmend oder aus letzterem in erstere ausströmend zu denken hat. Die Punkte der ersteren Art heissen Quellen, die der letzteren Art Senken, das während der Zeiteinheit gelieferte Flüssigkeitsvolumen die Ergiebigkeit. Besonders wichtig ist der Fall, dass zwei Quellpunkte von entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit einander unendlich nahe liegen; sie heissen dann ein Quellpaar und ihr Abstand ihre Axe. In diesem Falle erhält man nämlich als Geschwindigkeitspotential den Differentialquotienten des Massenpotentials einer Quelle nach der Axe des Quellpaares; und ebenso lassen sich die höheren Differentialquotienten durch complicirtere Verbindungen von Quellen und Senken verwirklichen. Endlich ist noch der Fall eines Quellpaares zu nennen, dessen Axe nicht unendlich kurz, sondern im Gegentheil unendlich lang ist.

Zu physikalisch wichtigeren Fällen gelangt man, wenn man, unter V ein Massenpotential verstanden,

$$\varphi = M\frac{\partial V}{\partial z} - z$$

wählt. In der Unendlichkeit ($z = \infty$) wird hier nämlich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -1;$$

man hat also die Erscheinung eines Flüssigkeitsstromes, dessen ursprünglich der Einheit gleiche und gradlinige Geschwindigkeit dadurch modificirt wird, dass sich ihm ein ruhender fester Körper in den Weg stellt. Nimmt man nun statt dessen an, die Flüssigkeit ruhe in der Unendlichkeit, dafür aber bewege sich der feste Körper mit der Geschwindigkeit 1 in entgegengesetzter Richtung, so bleibt die relative Bewegung dieselbe, und man erhält somit die Erscheinung der Bewegung, welche in einer ursprünglich ruhenden Flüssigkeit dadurch hervorgerufen wird, dass

[1]) VOIGT, Elementare Mechanik, Lpz. 1889, pag. 348.

ein fester Körper sich gradlinig und gleichförmig durch sie hindurchbewegt.

Die somit definirte Aufgabe ist (jedoch von verschiedenen Ausgangspunkten aus und in verschiedener Weise, s. w. u.) für den Fall einer Kugel von POISSON[1]), STOKES[2]) und DIRICHLET[3]), für den eines Ellipsoids von GREEN[4]) und CLEBSCH[5]) gelöst worden; aus letzterem ergiebt sich ersterer als Specialfall. Das Ellipsoid habe die gleichförmige Dichte 1, die Halbaxen abc und zur Abkürzung werde

$$C = \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

gesetzt. Es zeigt sich alsdann, dass man, damit an der Oberfläche des Ellipsoids die Normalcomponente der Geschwindigkeit, d. h. $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ überall null sei, was doch nothwendig ist, die bisher willkürliche Grösse

$$M = \frac{1}{4\pi - 2C}$$

setzen muss. Obgleich hiermit φ völlig bestimmt ist, ist die Aufgabe doch noch nicht gelöst, weil sich hier nicht, wie bei den zweidimensionalen Bewegungen, zugleich auch ψ ergiebt; man muss vielmehr, um die Stromlinien zu finden, hier noch die Gleichungen

$$dx : dy : dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

integriren. Für ein Rotationsellipsoid, dessen ungleiche Axe in die Bewegungsrichtung fällt, für das also $a = b$ ist, führt diese Integration auf Quadraturen, und die Gleichung der Stromlinien wird, wenn $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$ gesetzt wird:

$$\rho\left(M\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\rho}{2}\right) = const.$$

Geht das Ellipsoid in eine Kugel über (Radius R), so wird

$$M = \frac{3}{8\pi}, \quad \text{also} \quad \varphi = -\left(\frac{R^3}{2r^3} + 1\right)z.$$

Für eine ruhende Kugel in einem Flüssigkeitsstrome ergiebt sich daher folgendes: In grösserer Entfernung von der Kugel fliessen alle Flüssigkeitstheilchen gradlinig; im mittelsten Faden, d. h. in dem, welcher auf den vordersten Punkt der Kugel zugeht, nimmt die Geschwindigkeit bei Annäherung an denselben immer mehr ab und wird in ihm null; in den diesen Mittelfaden umgebenden Fäden verwandelt sich bei Annäherung an die Kugel die axiale Bewegung in eine erst zunehmend, dann wieder abnehmend schräge, am Aequator der Kugel ist sie wieder rein axial, und ihre Geschwindigkeit um die Hälfte grösser als in der Ferne; dann folgt das Spiel dieser Erscheinungen in der Umgebung der hinteren Hälfte der Kugel in umgekehrter Reihe. Es ist nicht schwer, hieraus den Verlauf der Umkehrerscheinung abzuleiten, d. h. die Bewegung, welche in der ursprünglich ruhenden Flüssigkeit durch die gradlinige Fortschreitung einer festen Kugel hervorgerufen wird: die den Kugelpolen angelagerten beiden Flüssigkeitstheilchen erhalten die volle Geschwindigkeit der Kugel, die daran sich an-

[1]) POISSON, Mém. Ac. Sc. Par. 11, pag. 521. 1832.
[2]) STOKES, Cambr. Phil. Trans. 8, pag. 105. 1843. — Papers 1, pag. 17.
[3]) DIRICHLET, Berl. Mon. Ber. 1852, pag. 12.
[4]) GREEN, Trans. R. Soc. Ed. 1833; Phys. Pap., pag. 315.
[5]) CLEBSCH, CRELLE's J. 52, pag. 103 u. 53, pag. 287. 1858.

schliessenden axialen Theilchen eine desto kleinere, je weiter sie von den beiden Kugelpolen abstehen, die den Aequator berührenden Theilchen fliessen mit der halben Kugelgeschwindigkeit rückwärts.[1])

Zerlegungsmethode. Kinematischer Theil der Aufgabe. Die Umkehrmethode ist offenbar nur anwendbar, wenn es sich um gradlinige gleichförmige Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten handelt. Ist diese Bewegung dagegen allgemeinen Charakters, so muss man direkt zu Werke gehen, also von den Gleichungen ausgehen, welche für die Bewegung eines starren Körpers gelten (pag. 86—88). Diese Gleichungen beruhen auf den Beziehungen zwischen einem im Raume und einem im Körper festen Coordinatensystem (Gleichung 1, pag. 86) und führen zu dem in den Gleichungen (9), pag. 87 enthaltenen Ergebniss, dass man jede kleine Verrückung des Körpers zerlegen kann in 6 Componenten, nämlich in 3 Componenten der Verschiebung und in 3 Componenten der Drehung. Wendet man dies auf die Geschwindigkeiten an, nennt die Componenten der Verschiebungsgeschwindigkeit uvw, die der Drehungsgeschwindigkeit pqr und (umgekehrt wie pag. 86) xyz die im Raume, $\xi\eta\zeta$ die im Körper festen Coordinaten, so erhält man

$$\frac{dx}{dt} = u + (z - c)\,q - (y - b)\,r$$

$$\frac{dy}{dt} = v + (x - a)\,r - (z - c)\,p$$

$$\frac{dz}{dt} = w + (y - b)\,p - (x - a)\,q.$$

Daher wird die Oberflächenbedingung, wonach die Normalcomponente der Geschwindigkeit hier für die Flüssigkeit und den festen Körper dieselbe sein muss:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = &[u + (z - c)\,q - (y - b)\,r]\cos(nx)\\ &+ [v + (x - a)\,r - (z - c)\,p]\cos(ny)\\ &+ [w + (y - b)\,p - (x - a)\,q]\cos(nz).\end{aligned}$$

Nun setze man nach Kirchhoff[2])

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6,$$

zerlege es also ebenfalls in 6 Theilpotentiale, bestimme diese gemäss der gemeinsamen Gleichung $\Delta\varphi = 0$ und gemäss den Oberflächenbedingungen

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \cos(nx) \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \cos(ny) \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \cos(nz)$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = (y - b)\cos(nz) - (z - c)\cos(ny) \quad \text{u. s. w.}$$

und setze endlich noch fest, dass φ stetig, im Unendlichen mit seinen Differentialquotienten null und überall eindeutig sei; der hierdurch ausgeschlossene Fall, dass die Flüssigkeit einen mehrfach zusammenhängenden Raum bildet, wird später betrachtet werden. Die Bewegung der Flüssigkeit in Folge der gegebenen Bewegung des festen Körpers ($uvwpqr$ gegebene Funktionen von t) ist dann vollständig bestimmt.

Ist der Körper eine Kugel (Radius R), so sind Drehungen offenbar ohne Einfluss, und man findet

$$\varphi = \frac{R^3}{2}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right),$$

---

[1]) Ueber die allgemeine Bewegung von Kugel und Ellipsoid in Flüssigkeit s. w. u.

[2]) Kirchhoff, Crelle's J. 71, pag. 237. 1869; Ges. Abh., pag. 376.

wo statt der ursprünglich auftretenden xyz die in diesem Falle ihnen stets parallel bleibenden $\xi\eta\zeta$ gesetzt wurden und wo $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ ist.

Für ein Ellipsoid erhält man, wenn C die obige Bedeutung (pag. 427) und A und B entsprechende Bedeutung haben:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi(2-A)}\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \varphi_2 = \frac{1}{2\pi(2-B)}\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \varphi_3 = \frac{1}{2\pi(2-C)}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\varphi_4 = \frac{b^2-c^2}{2\pi[2(b^2-c^2)+(B-C)(b^2+c^2)]}\left(y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad \text{u. s. w.}$$

Die Zerlegungsmethode lässt sich auch auf die Bewegung einer Flüssigkeit anwenden, in welcher sich mehrere Körper bewegen[1]). Nur lässt sich dann mit dem im Körper festen Coordinatensystem begreiflicher Weise nichts anfangen, und man muss die Untersuchung ausschliesslich auf das im Raume feste beziehen. Handelt es sich um zwei Körper, so zerfällt φ in 12 Bestandtheile, die 6 ersten Theilpotentiale müssen an der Oberfläche des einen Körpers den obigen Bedingungen genügen, während an der Oberfläche des andern ihre Differentialquotienten nach der Normale null sein müssen, für die 6 anderen Potentiale findet das Umgekehrte statt. Sind die beiden Körper Kugeln, so fallen 6 Potentiale weg und es bleiben nur 6 übrig. In diesem Falle lässt sich φ mit Hilfe der sogen. Kugelfunktionen als eine unendliche Reihe finden, welche stets und zwar um so schneller convergirt, je grösser der Abstand der beiden Kugeln im Verhältniss zu ihren Radien ist. In Bezug auf die Ausrechnung muss auf die von KIRCHHOFF[2]) gegebene Skizze verwiesen werden; hier sei nur angegeben, dass, wenn R und R' die Radien, abc und $a'b'c'$ die Mittelpunktscoordinaten und r_0 der Mittelpunktsabstand der beiden Kugeln ist, an der Oberfläche der ersten Kugel φ den angenäherten Werth

$$\varphi = -\frac{R}{2}[u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz)] + \frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial a} + v'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial b} + w'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial c}\right)$$

$$-\frac{RR'^3}{4}\left[\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\partial b} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\partial c}\right)\cos(nx)\right.$$

$$+\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\partial a} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\partial c}\right)\cos(ny)$$

$$\left.+\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\partial a} + v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\partial b} + w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\cos(nz)\right]$$

erhält, an der anderen Kugelfläche aber den Werth, welcher aus diesem durch Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben hervorgeht.

Von Fällen der Bewegung von Flüssigkeiten in Gefässen, die mit gegebenen Werthen von $uvw\ pqr$ sich bewegen, seien hier nur zwei erwähnt: der Fall eines ellipsoidischen Gefässes[3]), für welchen sich

$$\varphi = ux + vy + wz + p\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}yz + q\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}zx + r\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy$$

---

[1]) Die erste Berührung dieses Themas findet sich bei STOKES, Cambr. Phil. Trans. 8, pag. 105. 1843. — Papers 1, pag. 17.

[2]) KIRCHHOFF, Mechanik, pag. 226.

[3]) LAMB, Einl. i. d. Hydr., pag. 170. — W. THOMSON, Proc. R. Soc. Edinb. 13, pag. 370. 1885.

findet; und der Fall eines rechteckigen Parallelepipeds, welchen STOKES[1]) mit Hilfe von FOURIER'schen Reihen gelöst hat. In der betreffenden Abhandlung findet man übrigens noch weitere Fälle (Flüssigkeit zwischen zwei Cylindern, zwischen zwei Kugelflächen u. s. w.) behandelt, Fälle, die z. Th. in neuerer Zeit von verschiedenen Theoretikern wieder aufgenommen worden sind.

Dynamischer Theil der Aufgabe. Die bisherigen Betrachtungen über die Anwendung der Zerlegungsmethode erledigen nur den einen Theil des Problemes, welchen man als den kinematischen bezeichnen kann. Es wird nämlich aus der als gegeben betrachteten Bewegung des festen Körpers die dadurch hervorgerufene Bewegung der Flüssigkeit berechnet. Man hat nun noch den dynamischen Theil der Aufgabe hinzuzufügen, d. h. zu untersuchen, welche Bewegung die festen Körper und die Flüssigkeit ausführen, wenn gewisse gegebene Kräfte wirken. Für eine Kugel[2]) bedarf es hierzu keiner weitläufigen Rechnungen, und dieser Fall möge daher der allgemeinen Untersuchung vorangeschickt werden. Sieht man von äusseren Kräften zunächst ab, so handelt es sich nur um die Berechnung des Druckes, den die Flüssigkeit auf die Oberfläche der Kugel ausübt; nun ist auf Grund der hydrodynamischen Bewegungsgleichung (Gleichung 26, pag. 380, worin $V = 0$, $f(t) = c$ gesetzt wird)

$$p = c - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

und dies muss über die ganze Kugelfläche integrirt werden. Dabei heben sich die von dem ersten Theile obigen Ausdruckes herrührenden Glieder paarweise weg, da dieser Theil nur von dem Quadrate der Geschwindigkeit abhängt (vergl. den Werth von φ oben pag. 428); der Rest ergiebt zunächst:

$$p = -\frac{\rho}{2}R^3\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right).$$

Hierdurch ergiebt sich das merkwürdige DIRICHLET'sche Resultat, dass die Einwirkung der Flüssigkeit auf die Bewegung der Kugel eine homogene lineare Funktion der Beschleunigungscomponenten dieser Bewegung ist und folglich mit ihnen null wird. Bewegt sich also eine Kugel mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit ohne Einwirkung von Kräften in einer unendlichen, im Unendlichen ruhenden, idealen, nicht wirbelnden Flüssigkeit, so behält sie diese Geschwindigkeit der Grösse und Richtung nach bei, gerade als ob die Flüssigkeit nicht vorhanden wäre[3]).

Führt man nunmehr oben die Integration aus, indem man die z-Axe in die Richtung der augenblicklichen Beschleunigung legt, so erhält man

$$P = -\frac{2}{3}R^3\pi\rho\frac{dw}{dt},$$

in Worten: der Widerstand der Flüssigkeit gegen die beschleunigte Bewegung der Kugel ist gleich dem Produkte dieser Beschleunigung in die Hälfte der von

---

[1]) STOKES, Cambr. Phil. Trans. 8, pag. 105. 1843. — Papers 1, pag. 17.

[2]) DIRICHLET, a. a. O. — Es wird hier natürlich die Dichte der Kugel als constant vorausgesetzt. Für eine Kugel, deren Schwerpunkt excentrisch liegt, haben MICHAELIS (Arch. néerland. 3, pag. 163. 1868) und KÖTTER (Arch. Math. Phys. (2) 6, pag. 157. 1887) das Problem behandelt.

[3]) Bei einer nicht homogenen Kugel finden zwar selbstverständlich Drehungen statt, aber auch hier giebt es nach KÖTTER (s. o.) einen zwischen Mittelpunkt und Schwerpunkt gelegenen Punkt, welcher gradlinig und gleichförmig fortschreitet.

der Kugel verdrängten Flüssigkeitsmasse. Der erste Theil dieses Satzes stimmt mit dem oben (pag. 423) für den Cylinder abgeleiteten überein, der zweite unterscheidet sich durch den Factor $\frac{1}{2}$. Nimmt man jetzt an, dass auf den Kugelmittelpunkt die Kraft K wirke, welche ihr im leeren Raume eine gewisse Beschleunigung ertheilt, und nennt man M die Masse der Kugel, m die Masse der verdrängten Flüssigkeit, so muss man, um ihr in der Flüssigkeit dieselbe Beschleunigung zu ertheilen, auf den Mittelpunkt die Kraft

$$K' = K\frac{M + \frac{m}{2}}{M}$$

wirken lassen; oder umgekehrt: Unter dem Einflusse einer gegebenen Kraft bewegt sich eine Kugel in einer Flüssigkeit nur mit derjenigen Beschleunigung, welche sie unter Wirkung derselben Kraft im leeren Raume annehmen würde, wenn ihre Masse um die halbe Masse der verdrängten Flüssigkeit vergrössert würde. Ist die gedachte Kraft die Schwere und zieht man auch noch deren Wirkung auf die Flüssigkeit in Betracht, so muss man noch den Auftrieb (pag. 351) berücksichtigen. Die Beschleunigung ist also nicht g, sondern

$$g' = g\frac{M - m}{M + \frac{m}{2}},$$

wo man M und m auch als Dichten auffassen kann. Also speciell für Wasser, wenn d die Dichte des festen Körpers ist:

$$g' = g\frac{d-1}{d+\frac{1}{2}};$$

je nachdem also $d > 1$, $d = 1$, $d < 1$ ist, fällt die Kugel beschleunigt, gleichförmig oder verzögert durch das Wasser hinab[1]).

Um das Problem allgemein zu behandeln, könnte man in die Formeln für die Bewegung eines starren Körpers die auf die Oberfläche desselben wirkenden Drucke, berechnet in der obigen Weise, einsetzen. THOMSON und TAIT[2]) und in allgemeinerer und etwas abweichender Weise KIRCHHOFF[3]) haben aber gezeigt, dass man auf kürzerem Wege zum Ziele gelangt, wenn man von dem HAMILTON-schen Princip (pag. 69) ausgeht. In diesem Princip ist von der kinetischen Energie K und von der Arbeit der äusseren Kräfte L die Rede, und jede dieser beiden Grössen zerfällt hier in den auf den starren Körper und in den auf die Flüssigkeit bezüglichen Theil. Für den festen Körper ist K eine homogene Funktion zweiten Grades von $uvwpqr$, und man sieht leicht ein, dass für die Flüssigkeit dasselbe gilt. Von den Kräften soll angenommen werden, dass sie ein einwerthiges Potential haben. Aus den Eigenschaften des Potentials folgt dann (s. Art. Potentialtheorie), dass, wenn überall Flüssigkeit sich befände, die Arbeit gleich null wäre; die Arbeit der auf die wirklich vorhandene Flüssigkeit wirkenden Kräfte ist daher entgegengesetzt gleich der Arbeit der Kräfte, welche

---

1) Die Bewegung einer Kugel in Wasser hat auch RIECKE (Gött. Nachr. 1888, pag. 347), und zwar auf Grundlage der Theorie der Quellen und Senken (s. o., pag. 426) behandelt. Bewegt sich die Kugel gleichförmig und gradlinig, so beschreiben die Theilchen schleifenförmige Bahnen, welche eine der Abhandlung beigefügte Zeichnung veranschaulicht.

2) THOMSON u. TAIT, Nat. Phil. 1867, pag. 264; Handb. d. th. Ph. 1, pag. 293. — Grundlegende Abhandlungen von W. THOMSON sind ferner: Proc. R. Soc. Edinb. 7, pag. 384 u. 668. 1872.

3) KIRCHHOFF, CRELLE's Journ. 71, pag. 237. 1869; Ges. Abh., pag. 376.

auf die vom festen Körper verdrängte Flüssigkeit wirken würde. Das Ergebniss lautet also: Auf die Bewegung des Körpers in der Flüssigkeit dürfen die Gleichungen für die Bewegung im leeren Raume (pag. 90) mit zwei Modifikationen angewandt werden; es muss nämlich erstens K andere Coëfficienten erhalten, und zweitens müssen die auf den Körper wirkenden Kräfte vermindert werden um die Kräfte, welche auf die von ihm verdrängte Flüssigkeit wirken würden.

Wirken keine Kräfte (was z. B. auch angenommen werden darf, wenn nur die Schwere wirkt, der feste Körper aber dieselbe Dichte wie die Flüssigkeit hat), so vereinfachen sich die Gleichungen (13a) und (13b) (pag. 90) durch Fortfallen der letzten Glieder, man kann leicht 9 Integrale finden; und hat man $uvwpqr$ als Funktionen von t bestimmt, so erfordert die vollständige Lösung des Problems, d. h. die Bestimmung der 12 Grössen $\alpha\beta\gamma$ nur noch die Ausführung von Quadraturen. Vereinfachungen treten ein, wenn der Körper nach Oberfläche und Massenvertheilung symmetrisch in Bezug auf eine Ebene ist, weitere Vereinfachungen, wenn er es in Bezug auf zwei auf einander senkrechte Ebenen ist; es wird dann nämlich (z-Symmetrieaxe)

$$2K = c_{11}(u^2 + v^2) + c_{33}w^2 + c_{44}(p^2 + q^2) + c_{66}r^2.$$

Dieser Fall ist nicht nur bei Rotationskörpern verwirklicht, sondern auch bei manchen anderen, z. B. bei graden Prismen oder Pyramiden von quadratischem, sechseckigem u. s. w. Querschnitt (»Körper vom Charakter eines Rotationskörpers«). Fügt man eine dritte Symmetrieebene hinzu, so erhält man Körper wie Kugel, Würfel, Oktaëder u. s. w., und es wird

$$2K = c_{11}(u^2 + v^2 + w^2) + c_{44}(p^2 + q^2 + r^2).$$

In diesem Falle hat also K dieselbe Form, als ob nur der feste Körper vorhanden wäre, und nur seine Masse und seine Trägheitsmomente erscheinen durch die Flüssigkeit vergrössert. Bei der Kugel findet sogar nur eine Vergrösserung der Masse statt; um wie viel, ist oben bereits angegeben worden. Auch für Rotationskörper lassen sich die Bewegungsgleichungen integriren, und zwar, wie KIRCHHOFF[1]) gezeigt hat, für beliebige Bewegung des Körpers. Der specielle Fall, dass der Rotationskörper in der Richtung seiner Axe fortschreitet, ist schon von HOPPE[2]) im Anschluss an DIRICHLET gelöst worden; den allgemeineren Fall, dass der Körper um seine Axe nicht rotirt und diese Axe in einer festen Ebene bleibt (z. B. xz-Ebene, also $v = 0$, $p = 0$, $r = 0$) verdankt man THOMSON und TAIT[3]); einen dritten Fall, in welchem der Mittelpunkt des Körpers eine Schraubenline beschreibt, hat KIRCHHOFF[4]) hinzugefügt.

Hier ist es am Platze, eine schon in zwei Fällen constatirte Erscheinung in einen allgemeinen, schon von STOKES[5]) ausgesprochenen Satz zu formuliren: Wenn ein Körper mit zwei auf einander senkrechten Symmetrieebenen sich in einer Flüssigkeit parallel zur Axe ohne Kräfte bewegt, so leistet die Flüssigkeit keinen Widerstand. Bewegt er sich beschleunigt, so ist der Widerstand gleich einem Faktor mal der Beschleunigung mal der verdrängten Flüssigkeitsmasse, und dieser Faktor hängt nur von der Körperform ab; für den Cylinder (pag. 423) ist er 1, für die Kugel (pag. 431) ist er $\frac{1}{2}$, für die von HOPPE untersuchten Körper ist er 0·54 u. s. w. Noch allgemeiner als der STOKES'sche ist der KIRCH-

1) KIRCHHOFF, a. a. O.

2) HOPPE, POGG. Ann. 93, pag. 321. 1854.

3) THOMSON u. TAIT, a. a. O.

4) KIRCHHOFF, CRELLE's J. 71, pag. 251. 1869; Ges. Abh., pag. 401.

5) STOKES, Cambr. Phil. Trans. 8, pag. 105. 1843. — Papers I, pag. 50.

HOFF'sche, als partikuläre Lösung ($p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $u:v:w = dK/du:dK/dv:dK/dw$) der Bewegungsgleichungen sich ergebende Satz, dass es für jeden beliebigen Körper drei Richtungen, nämlich die Axen des Ellipsoids $K = const$ giebt, in denen er gleichförmig und gradlinig fortschreiten kann[1]). Hiervon sind dann die obigen Fälle Specialisirungen.

Die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit ist in neuerer Zeit noch für zahlreiche andere Fälle und nach anderen Richtungen hin studirt worden; es muss aber hier genügen, auf die bezügliche Literatur zu verweisen[2]).

Die Bewegung von Rotationskörpern in Wasser oder in Luft wird in zahlreichen Fällen von eminent praktischer Wichtigkeit. Es kann hier nur auf einige der wichtigsten Fälle kurz hingewiesen werden:

1) Die Ballistik. Es handelt sich zwar hier meist um die Bewegung in einer compressiblen Flüssigkeit, und die Reibung ist auf die Erscheinungen meist von erheblichem Einflusse; den wesentlichsten Einfluss hat aber doch der Trägheitswiderstand der Luft, und es muss daher für eine strenge Theorie zunächst von den obigen Entwickelungen ausgegangen werden. Geschosse sind meist Rotationskörper, und es handelt sich daher im wesentlichen um die Bestimmung derjenigen Rotationsfläche, welche den Widerstand der Luft, also die Abweichung der Flugbahn von der Parabel (pag. 121) zu einem Minimum macht. In neuester Zeit haben hierüber namentlich AUGUST[3]) und GREENHILL[4]) sehr gründliche Untersuchungen veröffentlicht (s. auch Art. Aëromechanik).

2) Die Schiffsschraube[5]). Dieselbe besteht bekanntlich im wesentlichen aus einer oder mehreren schraubenartig um eine Axe gewundenen Flächen; in der ältesten Form hat sie nur eine einzige solche Fläche, aber von einem vollen Umgange, in neuerer Zeit hat sie mehrere Flügel, deren jeder nur einen Theil, und zwar meist einen kleinen Theil eines Umganges darstellt. Stände das Schiff fest, so würde die Schraube an Ort und Stelle rotiren, dabei aber von Seiten des Wassers einen kolossalen Widerstand erfahren. Da das Schiff beweglich ist, weicht sie jenem Widerstande nach vorn aus und treibt das Schiff vorwärts. Den Ausgangspunkt für eine wissenschaftliche Theorie der Schiffsschraube muss daher, wie man sieht, die Untersuchung des Druckes strömender Flüssigkeit auf geneigte feste Flächen und auf Keile von scharfer Kante bilden. Bis in die neueste Zeit hat man sich jedoch mit hypothetischen Grundlagen begnügt, und erst kürzlich haben einige Physiker und Techniker das Problem ernstlich in An-

---

1) KIRCHHOFF, Mechanik, pag. 236.

2) KÖPCKE, Math. Ann. 12, pag. 387 (Ausrechnung des allgemeinen Falles d. Bew. e. Rotationskörpers mit Hilfe der ϑ-Funktionen). — GREENHILL, Quart. J. Math. 16, pag. 242 (Ellipsoid, insbes. Rotationsellipsoid). — CLEBSCH, CRELLE's J. 52, pag. 103 u. 53, pag. 287. 1858 (Ellipsoid); Math. Ann. 3, pag. 238. 1871 (Beliebiger Körper). — H. WEBER, Math. Ann. 14, pag. 173. 1877 (Beliebiger Körper). — BJERKNES, Gött. Nachr. 1873, pag. 448 u. 829. — LAMB, Proc. Lond. Math. Soc. 8, pag. 273. 1877 (Stationäre Bewegung). — CRAIG, Am. J. Math. 2, pag. 260. — SCHIECK, POGG. Ann. 127, pag. 524. 1865. — FERRERS, Quart. J. Math. 13, pag. 330. — BELTRAMI, Mem. Bologna 3, pag. 349. 1873. — MICHAELIS, Arch. Néerland. 8. 1873. — DINI, Ann. di Matem. (2), Bd. 5. — P. KRÜGER, In. Diss. Göttingen 1882.

3) AUGUST, CRELLE's J. 103, pag. 1. 1888 (Ausgangspunkt der Untersuchung ist eine von NEWTON herrührende Theorie).

4) GREENHILL, Proc. R. Artillery Inst. Bd. 10 u. 11. — Encycl. Brit., Artikel »Hydrodynamik« (Ausgangspunkt ist die oben citirte theoretische Abhdlg. d. Verf.).

5) Die erste Idee zu dieser Vorrichtung hatte D. BERNOULLI (1752), in den Ruhm der Ausführung und Verwendung theilen sich RESSEL (1826), SAUVAGE (1832) und SMITH (1835).

griff genommen. Insbesondere ist auf Abhandlungen von GERLACH[1]) zu verweisen, in welchen die Formeln von KIRCHHOFF, BOBYLEFF (s. o., pag. 416), ferner die Untersuchungen von KUMMER und seinen Nachfolgern für den vorliegenden Zweck verarbeitet und die Resultate mit den Beobachtungen verglichen werden.

3) Der Luftballon (s. Luftschifffahrt unter Art. Aëromechanik).

4) Zahlreiche andere Apparate, als: Ruder, Windmühlenflügel, Anemometer u. s. w.

Von dem Problem der Bewegung zweier homogener Kugeln in einer Flüssigkeit (pag. 429) ist noch der dynamische Theil hinzuzufügen. Aus dem dort gefundenen Ausdrucke für φ ergiebt sich leicht die lebendige Kraft der Flüssigkeit

$$K_1 = \frac{\pi}{3} R^3 (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\pi}{3} R'^3 (u'^2 + v'^2 + w'^2) + V,$$

wo V gesetzt ist für

$$\frac{\pi}{3} R^3 R'^3 \left(u u' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + (v w' + v' w) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \, \partial c} + \ldots \right);$$

die kinetische Energie der Kugeln ist, da Drehungen ohne Einfluss sind,

$$K_2 = \frac{m}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{m'}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2).$$

In dem speciellen Falle, dass die Kugeln sich gleichförmig bewegen, bleibt da in den Bewegungsgleichungen (13, pag. 90) nur die Differentialquotienten von K vorkommen, von K_1 nur V übrig. Man findet dann, dass die Annahme der gleichförmigen Bewegung der Kugeln nicht, wie es bei nur einer der Fall wäre, in jenen Gleichungen die Kräfte XYZ verschwinden macht, sondern dass diese bestimmte Werthe erhalten; sie sind nämlich für die eine Kugel die nach abc genommenen Differentialquotienten von

$$-\frac{\pi}{3} R^3 R'^3 \left(u'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + \ldots + 2 v' w' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b \, \partial c} + \ldots \right),$$

für die andere muss man in der Klammer $u'v'w'$ durch uvw ersetzen. Diese Kräfte wird man bezeichnen dürfen als die Kräfte, welche die beiden Kugeln in der Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben; wie man sieht, sind dieselben im allgemeinen nicht gleich und entgegengesetzt.

Sind die Kugeln gleich gross und bewegen sie sich symmetrisch gegen eine Ebene, so kann man diese als feste Wand ansehen und erhält den Fall der Bewegung einer Kugel in Flüssigkeit in der Nähe einer festen Wand; bewegt sich die Kugel insbesondere gerade auf die Wand los, so wird sie von dieser abgestossen, also ihre Bewegung verzögert; bewegt sie sich parallel der Wand, so wird sie von ihr angezogen.

Von einem andern Ausgangspunkte, nämlich indem er die von ihm untersuchten Rotationskörper in mehrere zerfallen lässt, kommt HOPPE[2]) (s. o., pag. 432) zu mehreren, in einer und derselben Axe sich bewegenden Körpern und findet, dass sie sich scheinbar abstossen.

---

[1]) GERLACH, Civilingenieur, 31 (1885) u. 32 (1886). Daselbst auch reichhaltige Angaben über die Literatur des Gegenstandes.

[2]) HOPPE, Quart. J. Math. 1, pag. 301.

Auch wenn die Bewegungen der Kugeln nicht gleichförmig sind, kann man die scheinbar zwischen ihnen wirkenden Kräfte ermitteln. Besonders interessant sind periodische Bewegungen. Nachdem THOMSON, GUTHRIE[1]) u. A. in dieser Hinsicht vorangegangen waren, war es BJERKNES[2]), welcher das Problem am ausführlichsten studirte, indem er nicht nur die Wirkung von Schwingungen, sondern auch die von Pulsationen, d. h. periodischen Volumenänderungen der Körper in Betracht zog. Es ergab sich bei gewissen Annahmen: 1) Bewegt sich die eine Kugel gleichförmig gegen die andere hin, so zieht sie diese an. 2) Schwingt die eine Kugel in der Verbindungslinie beider hin und her, so wird die andere (ruhende) angezogen (ausser wenn die ruhende leichter als die Flüssigkeit ist, in welchem Falle es von den Umständen abhängt, ob sie angezogen oder abgestossen wird). — 3) Schwingen beide Kugeln mit derselben Periode, so ziehen sie sich an oder stossen sich ab, je nachdem die Phasen gleich oder entgegengesetzt sind. 4) Die hier auftretende scheinbare Anziehung oder Abstossung ist, bei gewissen Vernachlässigungen, dem Quadrat der Entfernung der Kugeln umgekehrt proportional. — BJERKNES und SCHJÖTZ[3]) haben diese Ergebnisse der Theorie alsdann auch durch eine Reihe sehr eleganter Experimente bestätigt. Weitere Ausführungen der Theorie sind von LEAHY[4]), STOKES[5]), HICKS[6]), PEARSON[7]), BASSET[8]) u. A. veröffentlicht worden.

Flüssigkeitsbewegung in mehrfach zusammenhängenden Räumen. Ist der Raum, welchen die festen Körper für die Flüssigkeit frei lassen, n-fach zusammenhängend, so giebt es in ihm n von einander unabhängige, geschlossene Linien, welche sich ohne Ueberschreitung der Grenzen des Raumes nicht zum Verschwinden bringen lassen. Es können dann Stromlinien in sich zurücklaufen (pag. 381), und es findet in ihnen eine bestimmte Circulation (pag. 382) statt. Das Geschwindigkeitspotential φ ist dann mehrwerthig oder cyklisch. Das HAMILTON'sche Princip lässt sich, wie BOLTZMANN[9]) gezeigt hat, ebenfalls nicht mehr anwenden; vielmehr treten an die Stelle desselben verwickelte Formeln, deren Aufstellung C. NEUMANN[10]) eine ausführliche Untersuchung gewidmet hat. Die Zerlegungsmethode kann man auch hier anwenden; aber zu den 6 bisherigen

---

1) GUTHRIE, Phil. Mag. (4) 41, pag. 423. 1871. Die Theorie ist von THOMSON, die Versuche sind von GUTHRIE.

2) BJERKNES, Vid. Forh. Christiania 1871. — ebda. 1875, pag. 386. — Gött. Nachr. 1876, pag. 245, u. a. v. a. O.

3) BJERKNES u. SCHJÖTZ, Gött. Nachr. 1877, pag. 291, u. in vielen franz. u. engl. Zeitschriften 1878—82. — Siehe auch DECHARME, Compt. rend. 94, pag. 440, 527, 643, 722. 1882.

4) LEAHY, Cambr. Phil. Trans. 14, pag. 1. 1885. (In Gasen findet, wie hier gezeigt wird, eine Umkehr der Erscheinung statt, d. h. gleiche Phasen ergeben Abstossung, ungleiche Anziehung.)

5) STOKES, Papers 1, pag. 230. 1880.

6) HICKS, Trans. R. Soc. 1880 (2), pag. 455. — Proc. Cambr. Phil. Soc. 3, pag. 276, u. 4, pag. 29. 1880.

7) PEARSON, Quart. J. Math. 20, pag. 60 u. 184. 1883. (Uebertragung auf Ellipsoide mit Anwendung auf den Zusammenstoss von Schiffen.)

8) BASSET, Proc. Lond. Math. Soc. 18, pag. 369. 1887.

9) BOLTZMANN, CRELLE's J. 73, pag. 111. 1871.

10) C. NEUMANN, Hydrodynamische Untersuchungen. Lpz. 1883. — Unter den hierhergehörigen Abhandlungen W. THOMSON's ist namentlich die in den Proc. R. Soc. Edinb. 7, pag. 668. 1870 zu nennen; ferner: BASSET, Proc. Cambr. Phil. Soc. 6, pag. 117. 1887. — JUKOWSKY, Beibl. zu WIED. Ann. 1887, pag. 126.

Gliedern von φ treten nun noch weitere, cyklische hinzu. Auch die kinetische Energie erhält daher ein neues Glied, dessen Bedeutung sich leicht folgendermaassen einsehen lässt. Eine im Unendlichen ruhende Flüssigkeit kann sich nämlich nicht bewegen, wenn sich in ihr z. B. eine ruhende Kugel befindet, wohl aber, wenn der in ihr ruhende Körper eine solche Gestalt hat, dass er den Flüssigkeitsraum zu einem mehrfach zusammenhängenden macht; die kinetische Energie dieser Bewegung, welche die Flüssigkeit ausführen würde, wenn der Körper ruhte, ist obiges Zusatzglied. Eine andere Methode ist der eingangs angeführten Potentialmethode analog, d. h. es wird φ gewissermaassen als Massenpotential der festen Körper bestimmt; man muss dann aber noch n Flächen hinzufügen, welche den Raum zu einem einfach zusammenhängenden machen, und die bei der Bildung von φ mit zu berücksichtigen sind; aus φ ergiebt sich dann wieder die kinetische Energie. In analoger Weise ermittelt man eventuell die Arbeit der wirkenden Kräfte.

Die einfachste hierher gehörige Körperform ist die Ringform. Die Bewegung eines Ringes ist von Sir W. Thomson[1]) untersucht worden, und von ihm und Andern ist die Rechnung für verschiedenartige Bewegungen des Ringes zur Durchführung gelangt. Die Bewegung zweier Ringe in einer Flüssigkeit hat Kirchhoff[2]) behandelt und gezeigt, dass auch zwei solche Ringe scheinbar gewisse Kräfte auf einander ausüben. Verallgemeinerungen dieses Falles haben Boltzmann[3]) und Riecke[4]) geliefert, und es hat sich dabei eine gewisse Modification des Ergebnisses herausgestellt.

Analogien mit elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Derartige Analogien ziehen sich durch die ganze hier betrachtete Klasse von Flüssigkeitsbewegungen hindurch. Es seien hier nur folgende erwähnt: 1) Das Geschwindigkeits-Potential einer Flüssigkeit, in der eine Kugel sich bewegt, ist gleich dem Potential einer magnetischen Molekel im Centrum der Kugel, dessen magnetische Axe die Richtung der Bewegung der Kugel hat und dessen magnetisches Moment $\frac{1}{2}R^3$ mal der Geschwindigkeit ist. Die Geschwindigkeit in der Flüssigkeit ist also hier überall ebenso gross wie dort die Kraft im magnetischen Felde. 2) Die von Kirchhoff untersuchten beiden Ringe in Flüssigkeit wirken auf einander so, als ob sie sich im leeren Raume befänden, aber von elektrischen Strömen durchflossen wären. — 3) Die Kräfte, welche zwei schwingende oder pulsirende Kugeln in Flüssigkeit auf einander ausüben, sind den elektrischen und magnetischen Kräften gleich, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzt; eine Analogie, welche Bjerknes[5]) u. A. noch weiter durchgeführt haben und welche sie veranlasst hat, diese Erscheinungen als hydroelektrische und hydromagnetische zu bezeichnen. Einige weitere Analogien zwischen hydrodynamischen und elektrischen Erscheinungen sehe man in einer Abhandlung von Riecke[6]).

---

1) W. Thomson, Phil. Mag. (4) 42, pag. 362. 1871. — S. auch Basset, Proc. Cambr. Phil. Soc. 6, pag. 47. 1887.

2) Kirchhoff, Crelle's J. 71, pag. 263. 1869. Ges. Abh., pag. 404.

3) Boltzmann, Crelle's J. 73, pag. 111. 1871.

4) Riecke, Math. Ann. 32, pag. 203. 1888.

5) Bjerknes, Compt. rend. 1879, an versch. Stellen. — Decharme, a. a. O.

6) Riecke, Math. Ann. 30, pag. 309. 1887. — Es wird hier u. A. gezeigt, dass die Bjerknes'schen Analogien nicht consequent durchführbar sind und eine mehr formale als sachliche Bedeutung haben.

Beziehungen zur Akustik. Es ist zwischen zwei derartigen Beziehungen zu unterscheiden: 1) Tonerniedrigung infolge des Widerstandes der Flüssigkeit, in welcher der feste Körper schwingt, oder welche sich in dem Gefässe das er bildet, befindet[1]. 2) Akustische Anziehung und Abstossung, besonders von GUTHRIE (s. oben) und DVOŘAK studirt (s. Akustik).

F. AUERBACH.

Wirbelbewegung.

Einleitung. Die in der Wirklichkeit auftretenden Bewegungen der Flüssigkeiten tragen schon für das Auge einen Character von grosser Complication an sich. Es liegt das zum grossen Theile daran, dass die Theilchen ausser der fortschreitenden und schwingenden Bewegung (Strömungen und Wellen) auch Rotationen ausführen, theils um gemeinsame Axen, theils um Axen, welche von Ort zu Ort zu variiren scheinen. Studirt man die Erscheinung näher, so sieht man, dass es die tangentiale Wechselwirkung der Theilchen, also die Reibung ist, welche diese Wirbelbewegungen zumeist hervorruft, und welche sie andererseits auch, falls sie durch sie oder auf anderem Wege entstanden sind, fortwährend wieder auszugleichen strebt. In den idealen Flüssigkeiten, wie sie die im engeren Sinne verstandene Hydrodynamik behandelt, und welche der Reibung entbehren, können dagegen Wirbel weder entstehen noch vergehen; sie müssen daher, wenn sie vorhanden sind, von jeher vorhanden gewesen sein und ewig andauern. Untersucht man diese Wirbelbewegungen und stellt ihre Gesetze auf, so erhält man, ausser der Lösung dieses auf ideale Flüssigkeiten bezüglichen Problems selbst, jedenfalls auch eine gewisse Grundlage für das Studium des complicirten Problems der Wirbelbewegung in reibenden Flüssigkeiten. Ist hiernach die in Rede stehende Theorie in doppelter Hinsicht bedeutungsvoll, so wird diese Bedeutung noch erhöht durch zwei Anwendungen der Theorie; die eine, praktischer Natur, bezieht sich auf die Erscheinung der Wirbelbewegungen der Atmosphäre (Cyclonen u. s. w.), die andere, theoretischer Natur, betrifft eine neue Anschauung von den Atomen, welche, dieselben als Wirbelatome hinstellend, sehr geeignet erscheint, die beiden von altersher einander gegenüberstehenden Hypothesen über die Beschaffenheit der Materie, die Stetigkeitshypothese und die Molekularhypothese, bis zu einem gewissen Grade mit einander zu versöhnen. Schliesslich sei bemerkt, dass ein Theil der Theorie für Flüssigkeiten und Gase gemeinschaftlich entwickelt werden kann.

Die erste hierher gehörige Untersuchung ist in einer Abhandlung von SVANBERG[2] enthalten, sie führt bereits zu einigen bemerkenswerthen Resultaten, ohne dass ihr Verfasser jedoch die Tragweite derselben erkannt hätte. Aehnliches gilt von einigen Betrachtungen CAUCHY's[3]. Eine Untersuchung von bereits sehr allgemeiner Natur stellte STOKES[4] an. Derjenige aber, welcher die Theorie der

---

1) AUERBACH, WIED. Ann. 3, pag. 157. 1878 u. 17, pag. 964. 1882. — KOLACZEK, WIED. Ann. 7, pag. 23. 1879. — Wien. Ber. 87, pag. 1147. 1883. — RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 15, pag. 385. 1883. — Die Ergebnisse dieser Untersuchungen gehören in die Akustik.

2) SVANBERG, K. Vetensk. Ac. Handl. 1839, pag. 139. — CRELLE's J. 24, pag. 153.

3) CAUCHY, Mém. Sav. Etr. 1. 1827.

4) STOKES, Cambr. Phil. Trans. 8, pag. 287. 1845.

Wirbelbewegung als eine besondere Disciplin begründete, war v. HELMHOLTZ[1]). Im Anschluss an ihn haben dann insbesondere Sir W. THOMSON[2]), J. J. THOMSON[3]), HANKEL[4]), BELTRAMI[5]) u. A.[6]) die allgemeine Theorie gefördert; von den specielleren Untersuchungen wird an Ort und Stelle die Rede sein.

Allgemeine Untersuchungen. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet die Art und Weise, wie man sich (pag. 380) die allgemeinste Bewegung der Flüssigkeitstheilchen zerlegt denken kann; es unterscheiden sich in dieser Hinsicht, wie schon dort bemerkt wurde, die Flüssigkeiten durchaus nicht von den festen Körpern, und es gelten daher auch hier die für letztere entwickelten Formeln (pag. 227 ff.). Hiernach kann man die allgemeinste Aenderung, welche ein Flüssigkeitstheilchen im Zeitelement erfährt, aus einer Verschiebung, einer Ausdehnung und einer Drehung zusammensetzen; und jeden dieser drei Bestandtheile, der sich auf eine beliebige, also im allgemeinen schiefe Axe bezieht, kann man wiederum in drei Componenten nach den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems zerlegen. Für die Drehung ergeben sich so fort einige Sätze und Beziehungen, die zum Theil schon in der allgemeinen Hydrodynamik (pag. 378 ff.) erwähnt wurden, hier aber im Zusammenhange Platz finden müssen. Durch die Geschwindigkeitscomponenten $u\ v\ w$ drücken sich die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit mittelst der Gleichungen (pag. 228)

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1}$$

aus. Sind die Drehungscomponenten gleich null, so sind es also auch die rechten Seiten dieser Gleichungen, und folglich existirt ein Geschwindigkeitspotential (Gleichungen 24 und 22 auf pag. 378). Nennt man also mit Drehungen der Theilchen verknüpfte Flüssigkeitsbewegungen Wirbelbewegungen, so stehen diese den Potentialbewegungen gegenüber. Die anschaulichste Form, in welcher die Definition der beiden Bewegungsarten ausgesprochen werden kann, ist wohl die folgende von MAXWELL (in der Encycl. Brit.) gegebene: Die Bewegung einer Flüssigkeit heisst wirbelfrei, wenn sie so beschaffen ist, dass, wenn ein kugelförmiger Theil derselben plötzlich erstarrte, die starre Kugel keine Drehung um irgend eine Axe erleiden würde. Ist dagegen die Bewegung der Flüssigkeit wirbelnd, so ist die Axe und die Winkelgeschwindigkeit irgend eines kleinen Theils der Flüssigkeit identisch mit den entsprechenden Grössen des entsprechenden, kleinen, kugligen, plötzlich erstarrt gedachten Theiles[7]). Wie scharf der Gegensatz zwischen Potential- und Wirbelbewegung ist, zeigt sich, wenn man $\xi\ \eta\ \zeta$ mit Hilfe der LAGRANGE'schen Gleichungen ausdrückt; es wird dann (pag. 379), unter Beifügung des Factors ρ (Dichte):

---

[1]) v. HELMHOLTZ, CRELLE's J. 55, pag. 25. 1858. — Wiss. Abh. 1, pag. 101.

[2]) W. THOMSON, Trans. R. Soc. Edinb. 25, pag. 217. 1867.

[3]) J. J. THOMSON, A Treatise of the motion of vortex rings, Lond. 1883.

[4]) HANKEL, Z. allg. Th. d. Bew. d. Flüss. Gött. 1861.

[5]) BELTRAMI, Mem. Bologna 1, pag. 431; 2, pag. 381; 3, pag. 349. 1871—73; Ricerche sulla cinem. dei fluidi, Bol. 1875.

[6]) So z. B. LAMB, Mess. Math. (2) 7, pag. 41. 1877, wo die Ableitungen v. HELMHOLTZ' und THOMSON's verglichen werden, ferner HICKS, Trans. R. Soc. 1884, 1, pag. 161; und 1885, 2, pag. 725. — Dagegen ist es überflüssig, auf die gegen die Begründung der Wirbeltheorie von verschiedenen Seiten (BERTRAND, VELTMANN u. s. w.) erhobenen Einwände, welche, soweit es erforderlich war, widerlegt worden sind) hier einzugehen.

[7]) Ueber eine die Reihe: Potentialbewegung, Wirbelbewegung fortsetzende Classification der Flüssigkeitsbewegungen von CRAIG s. ob., pag. 379.

$$\xi = \rho\left(A\frac{\partial x}{\partial a} + B\frac{\partial x}{\partial b} + C\frac{\partial x}{\partial c}\right)$$
$$\eta = \rho\left(A\frac{\partial y}{\partial a} + B\frac{\partial y}{\partial b} + C\frac{\partial y}{\partial c}\right) \quad (2)$$
$$\zeta = \rho\left(A\frac{\partial z}{\partial a} + B\frac{\partial z}{\partial b} + C\frac{\partial z}{\partial c}\right),$$

wo $a\,b\,c$ die Coordinaten des Theilchens $x\,y\,z$ zur Zeit $t = 0$ und folglich, wie man aus den Gleichungen selbst ersieht, ρA, ρB, ρC die Werthe von $\xi\,\eta\,\zeta$ für $t = 0$ sind. Rotirt also das Theilchen zur Zeit $t = 0$, so rotirt es immer, rotirt es zur Zeit $t = 0$ nicht, so rotirt es nie. Allgemeiner: Ein Theilchen rotirt entweder immer oder nie. Hieraus ergiebt sich, dass bei idealen Flüssigkeiten die beiden Arten von Bewegung: Potentialbewegung und Wirbelbewegung, streng geschieden sind, dass die eine niemals in die andere übergehen kann. Es ist aber hierzu, um Missverständnisse auszuschliessen, eine Bemerkung zu machen: Eine Flüssigkeit kann sich zusammensetzen aus Theilen, welche in Potentialbewegung, und aus solchen, welche in Wirbelbewegung begriffen sind. Die Wirbelbewegung kann nun im Laufe der Zeit in immer andere Gebiete des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes fortschreiten, also in Gebiete, in denen vorher nur Potentialbewegung bestand; aber dafür sind es eben jetzt auch andere materielle Theilchen, welche diese Gebiete erfüllen. Mit anderen Worten: die Wirbelbewegung haftet nicht am Raum, sondern an den materiellen Flüssigkeitstheilchen und begleitet diese überall hin, wohin diese durch die fortschreitende Bewegung geführt werden.

Es entsteht ferner die Frage, welches das einfache Element wirbelnder Flüssigkeit sei, d. h. ob, wenn nicht die ganze Flüssigkeit wirbelt, diese Art der Bewegung auf gewisse Räume oder Flächen oder Linien oder endlich gar auf Punkte beschränkt sein könne, und wie weit man, gleichviel ob die ganze, oder nur ein Theil der Flüssigkeit wirble, in der Zerlegung der wirbelnden Flüssigkeit in materielle wirbelnde Elemente gehen dürfe Zur Beantwortung dieser Frage dienen die folgenden Entwickelungen und Sätze.

1) Betrachtet man zur Zeit $t = 0$ ausser dem Theilchen abc noch das in der Richtung der Drehungsaxe desselben benachbarte Theilchen $a + da$, $b + db$, $c + dc$, so dass also

$$da : db : dc = A : B : C \quad (3)$$

ist, so findet man, wenn man diese Werthe von $A\,B\,C$ in die Gleichungen (2) einsetzt, die allgemeinere, nämlich zu beliebiger Zeit giltige Proportion

$$dx : dy : dz = \xi : \eta : \zeta. \quad (4)$$

In Worten: Zwei Theilchen, welche zu irgend einer Zeit auf einer Drehungsaxe liegen, liegen stets auf einer solchen.

2) Diese Zuordnung von Flüssigkeitstheilchen kann man nun fortsetzen. Man geht von irgend einem Theilchen zu einem zweiten über, welches augenblicklich, also stets auf der Drehungsaxe des ersten liegt, vom zweiten zu einem dritten, auf der Drehungsaxe des zweiten gelegenen u. s. w. Die so entstehende Linie, welche eine Wirbellinie heisst, ist ein Gebilde von nicht bloss augenblicklicher, sondern dauernder Bedeutung. Eine Wirbellinie bleibt nämlich stets Wirbellinie und stets aus denselben Theilchen zusammengesetzt. Schon hierdurch wird der Schluss wahrscheinlich gemacht, dass die Wirbellinie das Grundelement wirbelnder Flüssigkeit sei.

3) Für die Drehungsgeschwindigkeit selbst, d.h. für die Grösse $\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ergiebt sich die Proportion

$$\theta \sim \rho\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \tag{5}$$

d. h. die Drehungsgeschwindigkeit bleibt im Laufe der Zeit stets proportional mit der Dichte der Flüssigkeit und mit dem Abstande zweier auf der Wirbellinie benachbarten Theilchen.

4) Im allgemeinen wird ein endliches Gebiet des Raumes von wirbelnder Flüssigkeit, also von Wirbellinien erfüllt sein. Fasst man alsdann ein unendlich dünnes Bündel stetig sich aneinander schliessender Wirbellinien zusammen, so erhält man einen Wirbelfaden (auch kurz Wirbel). Auch ein solcher Wirbelfaden besteht hiernach stets aus denselben Flüssigkeitstheilchen, und zwar gehören dem inneren desselben stets dieselben und der Oberfläche ebenfalls stets dieselben Theilchen an.

5) Der in 3) für die Wirbellinie ausgesprochene Satz lässt sich für einen Wirbelfaden in andere Form bringen. Da nämlich die Masse eines kurzen Stückes des Wirbelfadens stets dieselbe bleibt, so muss der Querschnitt desselben sich umgekehrt proportional mit dem Produkte aus der Dichte und dem Abstande der Theilchen in der Längsrichtung ändern. Da nun mit letzterem Produkte die Drehungsgeschwindigkeit direkt proportional ist, muss sie mit dem Querschnitt umgekehrt proportional sein, und man erhält den Satz: Das Produkt der Drehungsgeschwindigkeit in den Querschnitt eines bestimmten Stückes eines Wirbelfadens behält mit der Zeit stets denselben Werth.

6) Wie zwischen jeder Grösse und ihren Componenten, so besteht auch zwischen θ einerseits und $\xi\ \eta\ \zeta$ andererseits die Beziehung

$$\int d\tau \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) = -\int ds\, \theta \cos(\theta n),$$

wo $d\tau$ das Element des Integrationsraumes, ds das Element seiner Oberfläche und n dessen nach innen gerichtete Normale ist. Nun folgt aus den Gleichungen (1) die auch an sich wichtige Gleichung

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

es ist also auch das Oberflächenintegral rechterseits gleich null. Wendet man dies auf einen durch die Querschnitte q_1 und q_2 begrenztes Stück eines Wirbelfadens an, und nennt man die am Orte von q_1 und q_2 herrschenden Drehungsgeschwindigkeiten θ_1 und θ_2, so erhält man

$$q_1\theta_1 = q_2\theta_2 = const, \tag{7}$$

d. h. das Produkt der Drehungsgeschwindigkeit in den Querschnitt hat für alle Stellen eines Wirbelfadens denselben Werth.

7) Fasst man die in 5) und 6) ausgesprochenen Sätze gleichzeitig ins Auge, so sieht man, dass das Produkt $q\theta$ eine für den Wirbelfaden characteristische Constante ist. Man kann sie die Intensität des Wirbels nennen und den ersten jener Sätze dann auch so aussprechen: Die Intensität eines Wirbels bleibt stets dieselbe.

8) In naher Beziehung steht die Drehungsgeschwindigkeit θ auch mit der Grösse der Circulation (pag. 382) in irgend einer geschlossenen, auf der Oberfläche des Wirbelfadens gezogenen und ihn umschliessenden Curve. Man findet nämlich leicht die Sätze: a) Die Circulation ist in allen Curven, welche denselben Wirbelfaden einschliessen, gleich gross. b) die Circulation in irgend einer dieser Curven ist gleich $2q\theta$ (für $\theta = 0$, d. h. für Potentialbewegung, ist auch die Circulation

gleich null). Auch durch Vereinigung dieser beiden Sätze kann man den in 6) (Gleichung 7) enthaltenen Satz ableiten; jene Ableitung rührt von v. HELMHOLTZ, diese von Sir W. THOMSON her. THOMSON's Beweis zeigt, dass der Satz auch für unstetige $\xi\eta\zeta$ gilt, wenn nur $u v w$ stetig sind.

9) Der für die Grösse der Circulation in 8b) gefundene Satz lässt sich leicht für beliebige Curven verallgemeinern und alsdann folgendermaassen in Worten aussprechen: Die Circulation in irgend einer geschlossenen Curve ist doppelt so gross wie die Summe der Intensitäten aller Wirbel, welche sie einschliesst.

10) Als eine specielle, aber wichtige Folgerung ergiebt sich aus 6): Ein Wirbelfaden kann im Innern der Flüssigkeit weder anfangen noch endigen; er endigt also entweder in der Begrenzung der Flüssigkeit oder er läuft in sich zurück und heisst dann Wirbelring. Von der Wirbellinie, als dem elementaren Bestandtheil des Wirbelfadens, gilt natürlich dasselbe. Damit ist zugleich endgiltig gezeigt, dass die Wirbellinie das einfachste Element wirbelnder Flüssigkeit ist[1]).

11) Kein Wirbelfaden kann durch einen andern oder durch ein Stück von sich selbst hindurchgehen. Sind also zwei Wirbelringe, was möglich ist, in einander gekettet, so bleiben sie es stets; und bildet, was ebenfalls vorkommen kann, ein Wirbelring an irgend einer Stelle einen Knoten (den man sich nicht gänzlich zugezogen zu denken hat), so behält er diesen stets bei.

Es möge hier beiläufig auf die Analogie zwischen Stromlinien und Wirbellinien, Stromfäden und Wirbelfäden (vergl. pag. 381) hingewiesen werden, mit dem Bemerken, dass dieselbe freilich nicht in allen Punkten durchführbar ist.

Eine andere Analogie ist diejenige der Bewegung von Wirbeln in Flüssigkeiten mit der Bewegung fester Körper in solchen. Um diese Analogie streng durchzuführen, kann man sich mit RIECKE[2]) des Begriffs des Wirbelkörpers bedienen; die denselben bildende Flüssigkeit ist, soweit sie nicht sogar aus Wirbelfäden selbst besteht, in Circulation um diese begriffen; die übrige Flüssigkeit dagegen ist in einfacher Strömung begriffen und wird in dieser durch den Wirbelkörper nur in derselben Weise wie durch einen festen Körper gestört.

Während die bisherigen Betrachtungen auch für Gase gültig sind, wird dem Folgenden ausser den Gleichungen (1) auch die für incompressible Flüssigkeiten charakteristische Continuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

zu Grunde gelegt und damit die Betrachtung auf solche beschränkt.

Die Frage, was gegeben sein muss, damit in einem bestimmten Falle von Wirbelbewegung die Erscheinung vollständig und eindeutig bestimmt sei, ist von STOKES und v. HELMHOLTZ beantwortet worden; vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit unbegrenzt ist, in der Unendlichkeit ruht, und uvw stetig sind, genügt es, dass $\xi\eta\zeta$ für einen Augenblick überall gegeben sind. Es bestimmen sich dann zunächst $u v w$ mittelst der Gleichungen:

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \qquad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \qquad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{8}$$

wo

$$U = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\xi d\tau}{r} \qquad V = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\eta d\tau}{r} \qquad W = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\zeta d\tau}{r}, \tag{9}$$

---

1) Ueber die Bedingungen, an welche die Existenz discreter Wirbelfäden geknüpft ist, s. MARGULES, Wien. Ber. (2) 81, pag. 810. 1880.

2) RIECKE, Gött. Nachr. 1888, pag. 351.

$d\tau$ ein Element des von Wirbelfäden erfüllten Raumes und r dessen Entfernung vom Punkte xyz ist. Hat man so uvw gefunden, so hat man ohne weiteres die Verrückungen dx, dy, dz, welche die Theile der Wirbelfäden in der Zeit dt erfahren; und hieraus erlauben dann die obigen Sätze die Grössen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, also die Werthe von $\xi\eta\zeta$ zu beliebiger Zeit abzuleiten. Wie man sieht, bringt jedes Element $d\tau$ in xyz eine Geschwindigkeit hervor, deren Componenten

$$\frac{d\tau}{2\pi}\left(\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\quad\frac{d\tau}{2\pi}\left(\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}-\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)\quad\frac{d\tau}{2\pi}\left(\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right) \tag{10}$$

sind, die also selbst, unter ε den Winkel zwischen der Drehungsaxe von $d\tau$ und der Richtung r verstanden, den Werth

$$\frac{d\tau}{2\pi}\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\sin\varepsilon}{r^2}=\frac{d\tau}{2\pi}\,\frac{\theta\sin\varepsilon}{r^2} \tag{11}$$

hat und der Richtung nach auf der durch r und die Drehungsaxe gebildeten Ebene senkrecht steht; bekanntlich stimmt mit dieser Geschwindigkeit der Grösse und Richtung nach genau überein die Kraft, welche ein elektrisches Stromelement auf einen Magnetpol ausübt.

In Bezug auf die Verallgemeinerung resp. Ausdehnung dieser Untersuchung einmal auf den Fall, dass die Flüssigkeit im Endlichen von Oberflächen, in denen der Werth λ der Normalgeschwindigkeit gegeben ist, begrenzt ist, und andererseits auf den Fall von Gasen, deren räumliche Dilatation nicht null, sondern D ist, sei auf die Darstellung von Lamb[1]) verwiesen; hier sei nur bemerkt, dass dann ausser $\xi\eta\zeta$ auch noch λ für die ganze Oberfläche resp. D für den ganzen Raum gegeben sein muss, und dass im letzteren Falle zu uvw, wie sie durch die Gleichungen (8) bestimmt sind, noch die Glieder resp.

$$\frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial z},\quad \text{wo}\quad P=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{D\,d\tau}{r},$$

hinzukommen; diese Glieder stellen eine von $d\tau$ im Punkte xyz erzeugte Geschwindigkeit dar, welche an Grösse und Richtung übereinstimmt mit der Kraft, welche eine magnetische Masse von der Dichte D auf einen Magnetpol ausübt[2]). Alles in allem sieht man, dass, während die Potentialbewegung von Flüssigkeiten völlig bestimmt ist, wenn die Bewegung der Oberfläche bekannt ist, hier ausserdem noch die Bewegung der in der Flüssigkeit vorhandenen Wirbelfäden in ihrem gegenseitigen Einflusse bestimmt sein muss, und dass folglich die einzelnen Aufgaben hier viel verwickelter werden als dort.

Die Gleichungen (10) und (11) kann man auch anwenden auf Punkte der Flüssigkeit in Gebieten derselben, wo keine Wirbel existiren, wo also ein Geschwindigkeitspotential φ vorhanden ist; dasselbe lässt sich dann leicht aus jenen Ausdrücken ableiten. Nimmt man z. B. die Wirkung eines ganzen zurücklaufenden Wirbels, von constantem Querschnitt q, so kann man den Ausdruck für φ als ein Integral über irgend eine durch ihn begrenzte Fläche S darstellen, und erhält

$$\varphi=-\frac{q\theta}{2\pi}\int\frac{\cos\varepsilon}{r^2}\,dS, \tag{12}$$

d. h. das in xyz von dem geschlossenen Wirbelfaden hervorgerufene Geschwindigkeitspotential ist proportional dem Querschnitt, der Intensität desselben und der

1) Lamb, Einl. i. d. Hydrodynamik, deutsch v. Reiff, Freiburg 1884, pag. 219.

2) Ueber Wirbelbewegung in Gasen nach obigen Principen s. bes.: Graetz, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 25, pag. 1. 1879. — Chree, Proc. Edinb. Math. Soc. 5, pag. 52. 1886.

scheinbaren Grösse der von ihm eingeschlossenen Fläche, von xyz aus gesehen. Da diese scheinbare Grösse sich um 4π ändert, wenn der Punkt xyz den Wirbelfaden einmal umkreist, so ist hier φ cyklisch vieldeutig, und die cyklische Constante ist das Doppelte der Intensität des Wirbels.

Die vorstehenden Betrachtungen gelten, wie erwähnt, auch noch, wenn $\xi\eta\zeta$ unstetig sind; dagegen setzen sie voraus, dass uvw stetig sind. Werden diese unstetig, so treten besondere Verhältnisse ein. Wenn beispielsweise zwei vorher getrennte und bewegte Flüssigkeitsmassen in Berührung mit einander kommen, so werden sich zwar die gegen die Berührungsfläche senkrechten Geschwindigkeitscomponenten ausgleichen, die tangentialen Componenten aber werden vermöge ihrer Verschiedenheit Wirbel erzeugen. Man erhält also eine Fläche, welcher eine unendlich dünne Schicht wirbelnder Flüssigkeitstheilchen anliegt; eine solche Fläche kann man nach v. HELMHOLTZ eine Wirbelfläche und insbesondere, wenn sie in einer Richtung geschlossen ist, nach BELTRAMI eine Wirbelröhre nennen. In ihr sind uvw unstetig, und zwar unterscheiden sich ihre Werthe auf beiden Seiten der Fläche, wenn δ ihre Dicke und lmn die Richtungscosinus ihrer Normale sind, um die Beträge

$$2\delta(m\zeta - n\eta) \qquad 2\delta(n\xi - l\zeta) \qquad 2\delta(l\eta - m\xi);$$

denkt man sich die Coordinatenaxen so gelegt, dass an einer bestimmten Stelle der Wirbelfläche die z-Axe deren Normale und die x-Axe Wirbelaxe wird, so hat man an dieser Stelle $\eta = \zeta = 0$, und folglich haben u und w auf beiden Seiten der Wirbelfläche gleiche Werthe, v dagegen zwei Werthe, welche sich um $2\delta\xi$ unterscheiden. Die unstetige Componente der Geschwindigkeit ist also nicht nur tangential zur Fläche, sondern auch senkrecht zu den Wirbellinien. Innerhalb der Wirbelfläche muss man sich diese Componente rapide aber gleichförmig zunehmend denken von dem Werthe auf der einen zu dem Werthe auf der anderen Seite, und man hat sich die Wirbel mit dem Mittelwerthe beider fortfliessend vorzustellen.

Die Aufgabe, eine allgemeine Beziehung zwischen den wirkenden äusseren Kräften und den inneren Vorgängen in der Flüssigkeit aufzustellen und somit eine Gleichung zu finden, welche in derselben Weise als Grundgleichung der Wirbelbewegung zu bezeichnen ist, wie die Gleichung (26) (pag. 380) als Grundlage der Potentialbewegung, ist von THOMSON gelöst worden. Man betrachte eine Linie AB, welche, stets aus denselben Flüssigkeitstheilchen bestehend, sich im Raume fortbewegt, und berechne den Zuwachs, welchen dabei die »Strömung« (pag. 382) längs AB mit der Zeit erfährt; haben die äusseren Kräfte ein Potential V, so findet man:

$$\frac{d}{dt}\int_A^B (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \left[-\int\frac{dp}{\rho} + V - \frac{(u^2+v^2+w^2)}{2}\right]_A^B, \qquad (13)$$

wo die rechte Seite die Differenz der Klammerwerthe für B und A bedeutet. Haben die Grössen uvw ein Potential φ, so erhält man hieraus in der That

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\int\frac{dp}{\rho} + V - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

d. h. die Grundgleichung der Potentialbewegung. Aus der THOMSON'schen Gleichung lassen sich zahlreiche Folgerungen ziehen (z. B. die Constanz der Intensität eines Wirbels, s. ob.) und die Bewegungsgleichungen in mannigfaltiger Form [z. B. in der den Gleichungen (24a), pag. 379, entsprechenden LAGRANGE'schen Form] ableiten, worauf jedoch hier nicht näher eingegangen werden kann.

Schliesslich ist noch der Werth der **kinetischen Energie** der Flüssigkeit anzugeben, und es lassen sich für ihn zahlreiche Ausdrücke aufstellen. Für eine incompressible, unbegrenzte Flüssigkeit findet man

$$K = \frac{\rho}{2}\int d\tau \left[U\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + V\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + W\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{\partial y}\right)\right],$$

oder kürzer

$$K = \int d\tau (U\xi + V\eta + W\zeta), \tag{14}$$

oder endlich, wenn man für UVW ihre Werthe (9) einsetzt:

$$K = \frac{\rho}{2\pi}\int\int \frac{d\tau\, d\tau'}{r}(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'). \tag{15}$$

Ein anderer leicht abzuleitender Ausdruck ist

$$K = 2\rho\int [u(y\zeta - z\eta) + v(z\xi - x\zeta) + w(x\eta - y\xi)]\, d\tau.$$

Für begrenzte Flüssigkeit tritt zu dem Raumintegrale noch ein Integral über die Begrenzung der Flüssigkeit hinzu. Was die zeitliche Aenderung von K betrifft, so ist dieselbe für unbegrenzte, im Unendlichen ruhende Flüssigkeit offenbar gleich null, also die kinetische Energie constant. Für begrenzte Flüssigkeit findet man, wenn dS ein Element der Begrenzung und lmn die Richtungscosinus von dessen nach innen gerichteter Normale sind:

$$\frac{dK}{dt} = \int (p - \rho V)(lu + mv + nw)\, dS; \tag{16}$$

für feste Wände ist die Normalcomponente der Geschwindigkeit, also der zweite Klammerausdruck null, also die kinetische Energie ebenfalls constant.

Das Verhalten der kinetischen Energie hängt innig zusammen mit der Frage nach den Bedingungen der Stabilität von Wirbelbewegungen; dieser Zusammenhang ist von THOMSON eingehend untersucht worden. Ist K ein Maximum oder Minimum, so ist die Bewegung stationär und stabil; für ein Maximum-Minimum ist sie auch stationär, aber sie kann stabil oder unstabil sein. In Bezug auf das Weitere, z. B. Uebergang vom Maximum zum Minimum, sei auf die Abhandlungen von THOMSON und LAMB verwiesen.[1])

Zweidimensionale Bewegung. Geradlinige parallele Wirbel. Erfolgt die Bewegung überall parallel der xy-Ebene und in allen diesen Ebenen in gleicher Weise, so ist $\xi = 0$, $\eta = 0$, alle Wirbelfäden sind der z-Axe parallel, reichen also, wenn die Flüssigkeit nicht unbegrenzt ist, von der einen bis zur andern der beiden parallelen Grenzebenen derselben, ihre Länge ist also zeitlich constant, und folglich ist dies auch mit ζ der Fall. Ist dieses ζ als Funktion von x und y gegeben, so findet man u und v aus den Gleichungen

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial W}{\partial x} \qquad W = -\frac{1}{\pi}\int \zeta \log r\, df,$$

wo in dem aus (9) durch Integration nach z erhaltenen Ausdrucke für W (logarithmisches Potential) df ein Element der xy-Ebene ist, ζ auf dieses sich bezieht und r seine Entfernung von dem Punkte xy bedeutet, für welchen u und v gelten sollen. Hiernach ruft ein Wirbelfaden von der Intensität $m = \zeta df$ in dem Punkte xy die Geschwindigkeit $m/\pi r$ hervor. Setzt man ferner

$$x_0 \sum m = \sum mx \qquad y_0 \sum m = \sum my,$$

so kann man den Punkt $x_0\, y_0$ den Schwerpunkt der Wirbelfäden nennen, da er der Schwerpunkt von Massen ist, welche mit der Dichte ζ über die xy-Ebene

[1]) W. THOMSON, Proc. R. Soc. Edinb. 9, pag. 59; Phil. Mag. (5) 10, pag. 97. 1880; Rep. Brit. Assoc. 1880, pag. 473 u. 491. — LAMB, Proc. Lond. Math. Soc. 9, pag. 91. 1878.

ausgebreitet sind, und man findet dann unmittelbar, dass dieser Schwerpunkt während der Bewegung der Wirbelfäden in Ruhe bleibt; dasselbe gilt dann auch von der Axe der Wirbelfäden, wenn man darunter die durch den Schwerpunkt parallel der z-Axe gelegte Linie versteht. Es sei bemerkt, dass im Gegensatz zu materiellen Massen, die Grössen m, je nach dem Sinne der Wirbelbewegung ζ, positiv oder negativ sein können.

Specielle Fälle: 1) Ein einziger Wirbelfaden. Nach dem oben angeführten Schwerpunktssatze ist der Wirbelfaden, als Ganzes betrachtet, in Ruhe, und seine Theile führen nur relative Bewegungen aus, auch wird sich der Querschnitt im allgemeinen fortwährend ändern. Ein Flüssigkeitstheilchen, dessen Abstand von der Axe des Wirbels endlich und zwar gleich r ist, beschreibt um diese einen Kreis mit der constanten Geschwindigkeit $m/\pi r$; diese Geschwindigkeit ist also in der Nähe des Wirbels überaus gross und nimmt, wenn r wächst, in umgekehrtem Verhältniss ab. Das durch den Wirbel in der umgebenden Flüssigkeit hervorgerufene Geschwindigkeitspotential ist, wie man leicht findet, $\varphi = \frac{m}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}$, also cyklisch vieldeutig, wie dies dem Umstande entspricht, dass der Raum ausserhalb des Wirbelfadens, also das Gebiet von φ, zweifach zusammenhängend ist. Die cyklische Constante ist auch hier $2m$, ebenso gross ist also auch die Circulation in irgend einem den Wirbel einfach umschliessenden Ringe.

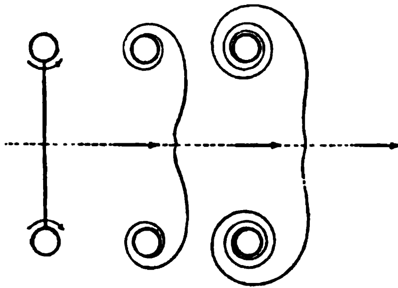
2) Zwei parallele Wirbelfäden. A und B seien die Schwerpunkte, m_1 und m_2 die Intensitäten der Wirbel, S ihr gemeinsamer Schwerpunkt. Die Bewegung des Schwerpunktes A rührt lediglich von der Einwirkung des andern Fadens her und ist daher senkrecht zur Linie AB gerichtet, und Analoges gilt für die Bewegung von B. Daraus folgt, dass A und B, ohne ihren gegenseitigen Abstand zu ändern, um den festen Punkt S rotiren; es rotiren also die beiden Wirbelfäden um die durch S gehende Axe, und die Drehgeschwindigkeit ist

$$\Omega = \frac{m_1 + m_2}{\pi (AB)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \frac{1}{(SB)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} \frac{1}{(SA)^2}$$
$$= \frac{1}{\pi} \frac{m_1 m_2}{m_1 (SA)^2 + m_2 (SB)^2}.$$

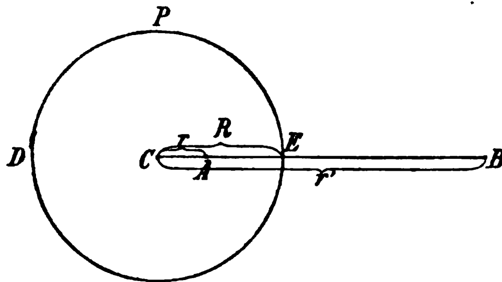
Haben m_1 und m_2 gleiches Vorzeichen, wirbeln also beide Fäden in demselben Sinne, so liegt S zwischen A und B, haben sie entgegengesetzte Vorzeichen, so liegt die Axe jenseits des stärker wirbelnden Fadens. Ist in letzterem Falle speciell $m_2 = -m_1$, so liegt S im Unendlichen[1]), nach dem ersten der obigen Ausdrücke ist $\Omega = 0$, und die beiden Fäden schreiten gradlinig und senkrecht zu ihrer Ebene mit der Geschwindigkeit $m_1/(\pi \cdot AB)$ fort. Die zwischen beiden Fäden liegenden Theilchen bewegen sich in gleicher, die ausserhalb gelegenen in entgegengesetzter Richtung fort; die in der Mittelebene zwischen beiden gelegenen Theilchen bleiben stets in dieser Ebene und schreiten viermal so rasch fort, wie die Wirbelfäden selbst. Die Stromcurven sind Kreise, welche das System der die Wirbelfäden kreuzenden Kreise senkrecht schneiden. Der Wirbelkörper lässt sich leicht durch die Gleichung seiner cylindrischen Oberfläche bestimmen; in der Richtung des Abstandes der Fäden ist er etwa 2·2 mal so breit wie dieser Abstand. Eine Zeichnung, welche sämmtliche Einzelheiten dieses Falles veranschaulicht, hat Riecke (Gött. N. 1888, pag. 353, Tafel II und III) ge-

[1]) Man erkennt die Analogie dieser drei Fälle mit dem zweiarmigen Hebel, dem einarmigen Hebel und dem Kräftepaar.

geben; eine charakteristische Einzelheit, nämlich die Veränderungen eines Querfadens, zeigt Fig. 180. In Anbetracht des ersteren der obigen Resultate kann man die Mittelebene auch durch eine feste Wand ersetzen und sich die andere Hälfte der Flüssigkeit wegdenken; man erhält dann die Erscheinung des Fortschreitens eines Wirbels längs einer festen Wand, und die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist $m/2\pi d$, wo d der Abstand des Wirbels von der Wand ist.


(Ph. 180.)

3) Wirbelfaden in einem cylindrischen Gefässe oder um einen festen Cylinder herum. Die Bewegung eines solchen ergiebt sich unmittelbar aus dem eben betrachteten Falle mit Hilfe der Bildermethode. Ist nämlich DPE das cylindrische Gefäss, A der Wirbelfaden und B der Bildpunkt von A, sodass $CA \cdot CB = (CE)^2$ oder kurz $rr' = R^2$ ist, so wird der Kreis DPE Stromlinie der entgegengesetzt und gleich stark wirbelnd gedachten Fäden A und B. Hieraus folgt, dass, wenn man sich jetzt B wieder wegdenkt, A um die Axe des cylindrischen Gefässes mit der gleichförmigen Geschwindigkeit



(Ph. 181.)

$$\Omega = \frac{mr}{\pi(R^2 - r^2)},$$

rotirt. Ganz analog würde es sich verhalten, wenn die Flüssigkeit ausserhalb des festen Cylinders und der Wirbel in B sich befände.

4) Wirbelfäden in einem prismatischen Gefässe. Für einige dreieckige Querschnittsformen hat LOVE[1]) dieses Problem gelöst.

5) Drei parallele Wirbelfäden[2]). Auch dieses Problem lässt sich im Princip allgemein lösen, d. h. auf die Auflösung von Gleichungen und die Ausführung von Quadraturen zurückführen. Sind nämlich $s_1 s_2 s_3$ die Abstände der drei Fäden von einander und ist $P = -\frac{1}{\pi}\sum m_1 m_2 \log s$, so sind die Bewegungsgleichungen in Polarcoordinaten $\rho\vartheta$

$$m\rho\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial P}{\partial\vartheta} \qquad m\rho\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial\rho}$$

mit den Indices 1, 2, 3, und die vier allgemeinen Integrale lauten:

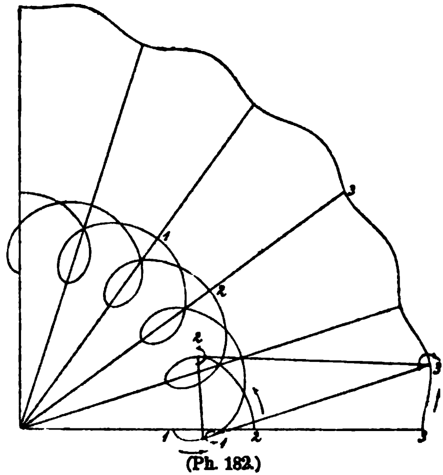
$$\sum m\rho\cos\vartheta = 0 \qquad \sum m\rho\sin\vartheta = 0 \qquad \sum m\rho^2 = C_1 \qquad \sum\frac{\log s}{m} = C_2.$$

Durch geeignete Combination dieser Gleichungen kann man nun zwar alle die Erscheinung bestimmenden Grössen, nämlich s_1, s_2, s_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3, $\cos(\vartheta_2 - \vartheta_3)$, $\cos(\vartheta_3 - \vartheta_1)$ als Funktionen der Zeit ausdrücken; praktisch begegnet man aber dabei, wie man sieht, der Schwierigkeit, mit transcendenten Gleichungen operiren zu müssen, und diese Schwierigkeit fällt nur fort, wenn die Verhältnisse der Intensitäten der drei Wirbel rationale Zahlen sind. Hier seien nur einige besonders einfache

[1]) LOVE, Am. J. of Math. 1889.

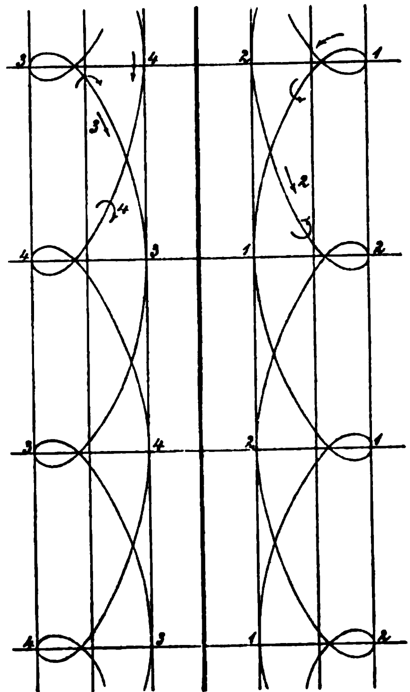
[2]) GRÖBLI, Spez. Probleme ü. d. Bew. gerader parall. Wirbelfäden. Gött. In.-Diss. Zür. 1877.

Ergebnisse erwähnt. Für $m_1 = m_2 = -m_3$ giebt es einen Specialfall, in welchem das Wirbeldreieck stets gleichseitig ist und gleichförmig um seinen Schwerpunkt rotirt. Hiervon abgesehen wird schon für diese einfachen Verhältnisse die Erscheinung sehr complicirt, und je nach dem Werthe von C_1 ganz verschieden; am einfachsten wird sie für $C_1 = 0$, wo die Fäden gewisse grade Linien beschreiben, und für zwei andere Werthe von C_1, wo die Fäden Spiralen beschreiben; in allen übrigen Fällen beschreiben sie complicirtere Wellen- resp. Schleifenlinien, von denen die Fig. 182 ein Bild giebt (die Zahlen deuten die Fadennummern, die graden Pfeile die Richtung der fortschreitenden, die krummen die Richtung der Wirbelbewegung an). Ebenso hat Gröbli die Fälle $m_1 = m_2 = m_3$ und $m_1 = 2m_2 = -2m_3$ behandelt, ferner Fälle, in denen, ohne Annahmen über die m, das Dreieck seine Grösse oder seine Gestalt oder beides beibehält.



(Ph. 182.)

6) Vier parallele Wirbelfäden. Gröbli[1]) hat die Bewegung derselben unter Voraussetzung einer Symmetrieebene untersucht; einen Specialfall zeigt Fig. 183. Die Symmetrieebene kann in jedem dieser Fälle zur festen Wand genommen werden, und man erhält so die Bewegung zweier Wirbel in der Nähe einer festen Wand. Ist auch die auf der ersten senkrechte Ebene Symmetrieebene, so kann man beide festmachen und, indem man nur einen Quadranten in Betracht zieht, die Bewegung eines Wirbelfadens in der Nähe einer Wandecke verfolgen.



(Ph. 183.)

7) Elliptischer Wirbelcylinder. Schliessen sich die Wirbelfäden stetig an einander an, bilden sie auf diese Weise einen Cylinder von endlichem und speciell elliptischem Querschnitt mit den Halbaxen a und b, und ist ζ für den ganzen Querschnitt constant, so bleibt, wie man findet, der Cylinder elliptisch, aber er dreht sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\lambda = 2\zeta ab/(a+b)^2$ um seine Axe, und ausserdem beschreiben die einzelnen Flüssigkeitstheilchen noch Kreise, deren Radien und Mittelpunkte für jedes Theilchen andere sind, um die sie aber einen Umlauf in der für alle gleichen Zeit π/λ vollenden. Für einen Wirbelstreifen, wie man ihn für $b = 0$ erhält, fällt die Rotation weg, für einen Kreiscylinder $(a = b)$

[1]) Gröbli, a. a. O.

erhält man die gemeinschaftliche Rotation aller Theilchen mit der Winkelgeschwindigkeit ζ.

Wirbelringe. Es seien beliebig viele kreisförmige Wirbellinien resp. Wirbelfäden vorhanden, deren gemeinsame Axe die z-Axe sei. Jedes Flüssigkeitstheilchen bewegt sich aldann in einer durch die z-Axe gehenden Ebene, und sein Ort ist bestimmt durch die beiden Coordinaten $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ und z, während die dritte Coordinate, der Meridianwinkel ϑ, eine für es charakteristische Constante ist. Auch die gegebenen Wirbelcomponenten kann man in Polarcoordinaten

$$\xi = -\sigma \sin\vartheta, \quad \eta = \sigma\cos\vartheta, \quad \zeta = 0$$

ausdrücken, während man die zu ermittelnden Geschwindigkeitscomponenten uvw zweckmässig durch Cylindercoordinaten

$$u = s\cos\vartheta, \quad v = s\sin\vartheta, \quad w = w$$

ersetzen wird, so dass $s = d\rho/dt$ und $w = dz/dt$ wird. Die Rechnung zeigt, dass $W = 0$ wird, und man erhält das Resultat

$$s\rho = -\frac{\partial(S\rho)}{\partial z} \qquad w\rho = \frac{\partial(S\rho)}{\partial\rho},$$

wo

$$S = \frac{1}{2\pi}\iint \sigma'\rho'\, d\rho'\, dz' R, \qquad R = \frac{2}{\sqrt{\rho\rho'}}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)E_1 - \frac{2}{k}E_2\right]$$

ist und E_1 und E_2 die beiden elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul

$$k = \sqrt{\frac{4\rho\rho'}{(z'-z)^2 + (\rho'+\rho)^2}}$$

bedeuten; die gestrichenen Zeichen beziehen sich auf einen Punkt des Integrationsraumes, die ungestrichenen auf den Punkt, für den s und w gefunden werden sollen. Die kinetische Energie findet sich, wenn df und df' die Querschnitte der Wirbelfäden sind:

$$K = 2\pi\int S\rho\sigma\, df = \iint R\rho\rho'\sigma\sigma'\, df\, df';$$

sie ist der Zeit nach constant. Endlich seien noch die beiden wichtigen Gleichungen angegeben:

$$\int \rho^2\sigma\, df = const \qquad \int\left(\rho\frac{dz}{dt} - z\frac{d\rho}{dt}\right)\rho\sigma\, df = \frac{K}{4\pi} = const.$$

Specielle Fälle: 1) Ein einziger Wirbelring. Derselbe habe einen unendlich kleinen Querschnitt, und zwar sei die Lineardimension unendlich klein erster Ordnung; ist dann die Intensität $m = \int\sigma df$ des Wirbelringes endlich, so muss σ unendlich gross von der zweiten Ordnung sein. In diesem Falle wird näherungsweise

$$k = 1 \qquad E_1 = \log\frac{8\rho}{\sqrt{\delta}} \qquad E_2 = \frac{\pi}{2},$$

wo bei der Nähe aller Punkte $\rho = \rho'$ und der Abstand δ gesetzt wurde. Es wird daher S, und folglich auch K im Innern des Wirbels logarithmisch unendlich gross, dagegen werden s und w unendlich von der ersten Ordnung. Da es im wesentlichen auf die Bewegung des Ringes als ganzen ankommt, führe man die Grössen s_0 und w_0 mittelst der Gleichungen

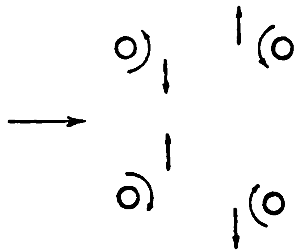
$$s_0^2\int\sigma df = \int s^2\sigma df \qquad w_0\int\rho^2\sigma df = \int w\rho^2\sigma df$$

ein; man findet dann, wenn man endliche Grössen gegen logarithmisch unendliche vernachlässigt:

$$s_0 = 0 \qquad m\rho_0^2 w_0 = \frac{K}{4\pi} = const.$$

Der Wirbelring behält also seinen Radius bei, schreitet aber gleichförmig in der Richtung der z-Axe fort, und zwar in demselben Sinne, in welchem die Flüssigkeit in der durch ihn begrenzten Kreisfläche strömt, und mit einer Geschwindigkeit, welche klein ist gegen die der Theilchen in seiner Nachbarschaft, aber gross gegen die der Theilchen im Mittelpunkt. In THOMSON's Abhandlung[1]) sowie in MAXWELL's »Electricity and Magnetism« findet man die Stromlinien abgebildet; es ist interessant, dabei auf den Fall zweier grader, paralleler, gleich stark und entgegengesetzt wirbelnder Fäden (pag. 445) zu verweisen, da beide Fälle ganz analog sind, wie schon die blosse Vorstellung eines Querschnittes dort resp. eines Centralschnittes hier lehrt.

2) Zwei parallele Wirbelringe. Die Bewegung jedes derselben kann als aus zwei Theilen zusammengesetzt betrachtet werden, deren einer von ihm selbst, deren anderer von dem anderen Ringe herrührt; letzterer Theil wird nur beträchtlich werden, wenn die Ringe sich nahe kommen. Die Wirkung, die jeder Ring auf sich selbst ausübt, besteht, wie gezeigt, in einer Fortschreitung (w); die Wirkung des anderen besteht dagegen in einer Veränderung des Radius (s), wie schon die Anschauung vermuthen lässt. Wirbeln beide in gleichem Sinne, so schreiten sie auch in gleichem Sinne fort; sind sie sich genügend nahe, so wird, wie man einsieht, der vordere sich erweitern und infolge dessen langsamer fortschreiten, der hintere sich verengern und schneller fortschreiten; schliesslich wird letzterer durch ersteren hindurchschlüpfen, worauf die Ringe das Spiel mit vertauschten Rollen wiederholen werden. Wirbeln dagegen die beiden Ringe entgegengesetzt, so werden sie auf einander zuschreiten und dabei sich gegenseitig erweitern; haben sie speciell gleiche Radien und gleiche Geschwindigkeiten, so werden sie sich der Mittelebene immer langsamer nähern und dabei sich unbegrenzt erweitern. Dasselbe wird also auch der Fall sein, wenn ein einzelner Wirbelring gegen eine feste Wand läuft[2]).


(Ph. 184.)

Andere Fälle. In neuester Zeit sind noch zahlreiche Fälle von Wirbeln theoretisch untersucht worden, und zwar sowohl für verschiedene Formen und verschiedene Bewegungsarten derselben, als auch für verschiedene Begrenzungen der Flüssigkeit; von Wirbelringen z. B. hat man ausser kreisförmigen auch anders gestaltete und sogar doppelt gekrümmte (z. B. W. THOMSON's »Ringschraubenlinie«) betrachtet, ferner solche, welche Schleifen oder Knoten bilden, ehe ihre Enden sich zusammenschliessen; von Bewegungsarten hat man einerseits die stationäre studirt, andererseits die Schwingungen, wie sie z. B. ein nichtkreisförmiger Wirbelring der obigen Art um seine kreisförmige Gleichgewichtsgestalt oder ein säulenförmiger Wirbel um seine Axe ausführen. Auch die Erscheinungen der Strahlen und der Wellen hat man mit Rücksicht auf die dabei auftretenden Wirbel theoretisch zu studiren versucht. Es muss jedoch hier genügen, auf die bezügliche Litteratur zu verweisen[3]).

---

1) W. THOMSON, Trans. R. Soc. Edinb. 25, Tafel III*.

2) v. HELMHOLTZ, a. a. O. Schluss.

3) Es seien hier namentlich folgende Abhandlungen genannt: Sir W. THOMSON, Proc. R. Soc. Edinb. 9, pag. 59.; Phil. Mag. (5) 10, pag. 97; Phil. Mag. (5) 10, pag. 155. — F. D. THOMSON, Mess. Math. 3, pag. 238; 4, pag. 37. 1874. — GREENHILL, Quart. J. 15, pag. 10. 1878. — COATES, Quart. J. 15, pag. 356; 16, pag. 81. 1878. — LEWIS, Mess. Math. 9,

Beobachtung von Wirbeln. Es leuchtet ein, dass es nur in sehr beschränktem Maasse möglich sein kann, die vorstehenden theoretischen Ergebnisse durch Beobachtungen oder Experimente zu prüfen. Einmal besteht der principielle Gegensatz, dass in Wirklichkeit die Wirbel, wie sie durch Reibung entstehen, auch während ihres Bestehens der Reibung unterworfen sind und von dieser sehr bald wieder vernichtet werden; und dazu kommt noch der praktische Uebelstand, dass die eigentliche Wirbelbewegung unter gewöhnlichen Verhältnissen eine viel zu grosse Geschwindigkeit besitzt, als dass man sie und ihre Wirkungen messend verfolgen könnte. Immerhin ist es gelungen, eine Reihe von Sätzen experimentell zu veranschaulichen. Die Ersten, welche hierzu geeignete Apparate ersannen und die Versuche ausführten, waren ROGERS[1]), NOGUÈS[2]) und REUSCH[3]); jene erhielten die Wirbelringe aus platzenden Blasen, letzterer durch kurze Schläge auf eine elastische Membran, welche auf der einen Seite den Verschluss eines mit geeigneter Substanz gefüllten und auf der gegenüberliegenden Seite mit einer Oeffnung versehenen Kastens bildet. Die Methode von REUSCH, welche die gegenwärtig meist übliche ist, gestattet je nach Wunsch die Anwendung von Flüssigkeiten oder Gasen. Zu ersterem Zwecke fügte REUSCH an den ersten Kasten einen zweiten, füllte beide mit verschiedenen Flüssigkeiten, z. B. Wasser und Oel oder auch mit gefärbtem und ungefärbtem Wasser, und trieb durch Schläge auf die Membran Wirbelringe aus dem ersten in den zweiten Kasten (resp. bei nachlassendem Druck aus dem zweiten in den ersten). Bei starken Impulsen zerfallen die Ringe sehr bald in mehrere Kugeln, bei schwächeren verwandeln sie sich in eine einzige solche, wobei diese gewöhnlich etwas von der andern Flüssigkeit in sich einschliesst; bei ganz schwachen Impulsen endlich gelangen die Ringe nicht voll zur Ausbildung, es entstehen vielmehr pilzartige Gebilde, ganz wie bei den nahe verwandten Versuchen von OBERBECK (s. Art. Ausfluss, pag. 414). Einem grösseren Auditorium macht man die Versuche zugänglich und mit einfacheren Mitteln kommt man aus, wenn man, in Erinnerung an die Fähigkeit mancher Raucher, nach REUSCH Tabaksrauch anwendet, oder noch besser, nach TAIT[4]) Chlorammoniumrauch; zu letzterem Zwecke besprengt man den Boden des Kastens mit einer starken Ammoniaklösung und stellt alsdann eine Schale mit Kochsalz und etwas Schwefelsäure auf ihm auf. Die in Wirbelbewegung zu versetzende Flüssigkeit ist also in diesen Fällen mit Rauchtheilchen durchsetzte Luft. Auch beim Verbrennen von Phosphorwasserstoffgas erhält man sehr schöne Ringe. Für die einfachsten Versuche benutzt man kreisförmige Oeffnungen und kann dann zeigen, wie die Ringe, ganz entsprechend der Theorie, sich verengern, erweitern, durch einander hindurchschlüpfen u. s. w. Man kann sogar bis zu einem

---

pag. 93. 1879; Quart. J. 16, pag. 338. 1879. — HICKS, Trans. R. Soc. 1884, 1, pag. 161 u. 1885, 2, pag. 725; Proc. Cambr. Phil. Soc. 3, pag. 283. — J. J. THOMSON, Trans. R. Soc. 1882; A Treatise on vortex rings, Lond. 1883. — HILL, Trans. R. Soc. 1884, 2, pag. 363. — Proc. Lond. Math. Soc. 16, pag. 171. 1885. — LODGE, Phil. Mag. (5) 20, pag. 67. 1885. — RIECKE, Gött. Nachr. 1888, pag. 351. — BELTRAMI, Mem. Bologna, 5, pag. 443. 1875. — LECORNU, Compt. rend. 106, pag. 1654. 1888.

1) ROGERS, Amer. J. of Science 26. 1858.

2) NOGUÈS, Compt. rend. 104, pag. 1166. 1887.

3) REUSCH, POGG. Ann. 110, pag. 309. 1860. — Aehnliche Versuche hat später REYNOLDS (z. B. Nature 14, pag. 477. 1876) ausgeführt, gezeigt, welchen Einfluss die Reibung hat und untersucht, wie sich der Wirbelkörper (s. ob., pag. 441) verhält.

4) TAIT, Vorl. über einige neuere Fortschr. d. Physik; Deutsche Ausgabe, Brschw. 1877, pag. 242.

gewissen Grade ihre Stabilität zeigen, indem man z. B. mit einem Messer hindurch schneiden kann, ohne sie zu zertheilen. Neuerdings haben TROWBRIDGE [1]) einerseits und J. J. THOMSON und NEWALL [2]) andererseits eine auf tropfbare Flüssigkeiten bezügliche Methode benutzt, welche der von REUSCH ganz analog ist. Lässt man einen Tropfen Tinte von mässiger Höhe in Wasser fallen, so fällt er durch dasselbe als Wirbelring, bleibt dann meist schweben, theilt sich in Segmente, die selbst wieder Wirbelringe bilden u. s. w; mittelst momentaner Beleuchtung durch elektrische Funken kann man den Verlauf der Erscheinungen auch im einzelnen gut verfolgen; statt Tinte und Wasser kann man auch zahlreiche andere Combinationen nehmen, z. B. schwache Silbernitratlösung in schwache Kochsalzlösung tropfend. Nimmt man eine Pipette zu Hilfe, so kann man die Ringe auch unter der Oberfläche der Flüssigkeit direkt erzeugen.

Was bei diesen Experimenten hier interessirt, sind die Wirbelerscheinungen selbst; was die Erklärung ihrer Entstehung betrifft, bei der namentlich Reibung und Oberflächenspannung mitwirken, so sei auf die Ansichten der obigen Experimentatoren verwiesen.

Auch abgesehen von Versuchen dieser Art kann man Wirbel bei den verschiedensten Vorgängen beobachten; beim Strömen von Flüssigkeiten z. B. immer dann, wenn der Querschnitt sich erweitert (Fig. 151, pag. 389), worüber RIECKE [3]) interessante Versuche von KRÜGER mitgeteilt und durch Abbildungen veranschaulicht hat; oder wenn der Strömung Hindernisse in den Weg treten (Stromschnellen, Strudel, todtes Wasser); ferner bei Flüssigkeitsstrahlen [OBERBECK, BELTRAMI (letzte Abhandlung) u. A.]; endlich beim Ausfluss aus Gefässen immer dann, wenn eine noch so kleine Asymmetrie vorhanden ist, sodass die Theilchen nicht in Meridiancurven, sondern in Spiralen der Oeffnung zuströmen und um die Axe des Gefässes ein hohler Trichter sich bildet.

Auch halbe Wirbelringe, welche an der Oberfläche der Flüssigkeit enden, kann man leicht erhalten; rudert man z. B. oder zieht man einen halb eingetauchten Löffel auf der Oberfläche einer gefüllten Tasse hin und zieht ihn dann rasch heraus [4]), so sieht man ihm zwei entgegengesetzt wirbelnde Strudel folgen; es sind dies einfach die Enden eines halben Wirbelringes. In der That hat TROWBRIDGE [5]) dies sichtbar gemacht, indem er als Gefäss einen weissen Porzellantrog benutzte und den Boden desselben beleuchtete; man kann dann die Schatten der halben Wirbelringe deutlich verfolgen und zahlreiche interessante Versuche anstellen [6]).

In der Natur begegnen uns Wirbelbewegungen im grössten Maassstabe in den Wirbelwinden und Cyklonen der Atmosphäre, deren nähere Betrachtung jedoch nicht hierher gehört.

Wirbelatomtheorie. Die Wirbelringe einer idealen Flüssigkeit zeichnen sich nach den gemachten Auseinandersetzungen durch die Vereinigung zweier einander ergänzender Eigenschaften aus: sie sind einerseits weder dem Entstehen noch dem Vergehen unterworfen, und sie weisen andererseits überaus zahlreiche Formen auf, mit andern Worten: sie sind von unveränderlicher Quantität und dabei von der denkbar mannigfaltigsten Qualität. Dieselben beiden Eigenschaften

1) TROWBRIDGE, Phil. Mag. (5) 3, pag. 290. 1877.
2) J. J. THOMSON nnd NEWALL, Proc. R. Soc. 39, pag. 417. 1885.
3) RIECKE, Gött. Nachr. 1888, pag. 355.
4) v. HELMHOLTZ, a. a. O. Schlussworte.
5) TROWBRIDGE, a. a. O.
6) S. auch die Abhandlung von REYNOLDS, Proc. Phys. Soc. Lond. 1877.

hat nun aber auch die Materie, und dieser Gedanke hat Sir W. THOMSON[1]) zur Aufstellung der inzwischen von ihm und Andern weiter ausgebildeten Theorie der Wirbelatome geführt. Hiernach ist die Materie in ihrer Mannigfaltigkeit nicht eigentlich etwas Materielles, sondern sie ist mit ihren sämmtlichen Eigenschaften das Resultat der Wirbelbewegung eines anderen Substrates. Dieses Substrat ist nicht das, was wir im gewöhnlichen Sinne Materie nennen, es ist vielmehr eine ideale Flüssigkeit und zwar eine aus Wirbelelementen der verschiedensten Form und Bewegungsarten zusammengesetzte, und erst durch diesen Bewegungszustand erhält sie die Eigenschaften und die Mannigfaltigkeiten, welche wir an der Materie wahrnehmen; eine der ersteren ist die Masse, oder allgemeiner die Gravitation, und die Erklärung, welche dieselbe hier findet, trifft am meisten mit der Corpusculartheorie von LESAGE (vergl. pag. 209 u. f.) zusammen[2]). Die Wirbelelemente jener idealen Flüssigkeit heissen Wirbelatome, und zwar mit mehr Recht als die Atome der Chemie, da die Unzerschneidbarkeit der letzteren nur statuirt, die der ersteren aber verständlich gemacht wird (s. ob.). Ein allgemeines Urtheil über die Tragweite der Wirbelhypothese abzugeben, wäre jedenfalls verfrüht; es muss Jedem überlassen werden, aus dem Studium der betreffenden Literatur seinen Standpunkt zu gewinnen. Nur auf zwei Vorzüge der Theorie sei hingewiesen: erstens gestattet sie die Anwendung der Mathematik stetiger Grössen auf Körper, die aus Atomen (nämlich Wirbelatomen) bestehen, und zweitens schafft sie die Voraussetzung für die Betrachtung idealer, d. h. reibungsfreier Flüssigkeiten, während auf der Grundlage der kinetischen Atomistik, in Anbetracht der z. Th. schiefen Stösse der Atome resp. Molekeln solche nicht möglich sind.

F. AUERBACH.

Capillarität.

I. Geschichtliches.

Die Erscheinung, dass Flüssigkeiten in porösen Körpern, speciell in engen Kanälchen, wie sie durch einen Docht gebildet werden, aufsteigen, ist selbstredend lange bekannt gewesen[3]). Die ersten messenden Versuche unter einfachen Bedingungen scheinen von JURIN[4]) herzurühren. Er fand, dass die Steighöhe in runden Glasröhren umgekehrt proportional dem Röhrendurchmesser ist; von ihm rühren ferner die bekannten Versuche, dass in zusammengesetzten Röhren von verschiedener Weite die Steighöhe nur abhängig ist von dem Durchmesser der Meniskusstelle.

An die JURIN'schen Beobachtungen schliessen sich die ersten Versuche einer

---

[1]) Sir W. THOMSON, Proc. R. Soc. Edinb. 6, pag. 94. 1867; Phil. Mag. (4) 34. — RANKINE, Trans. R. Soc. Edinb. 25, pag. 557. 1869.

[2]) Eine andere, physikalisch brauchbare Erklärung giebt HICKS, Proc. Cambr. Phil. Soc. 1879, pag. 283.

[3]) Vergl. über die Beobachtungen von ca. 1600 an und die ersten Erklärungsversuche, welche einen geringeren Luftdruck im Inneren des Rohres annehmen, GEHLER, Physik. Wörterbuch, II. Bd., Capillarität. Ferner eine Notiz von POGGENDORFF in seinen Ann. Bd. 101, pag. 551, wonach LEONARDO DA VINCI Entdecker der Capillarität sei.

[4]) JURIN, Phil. Trans. 30, No. 355, 363, 759, 1083.

theoretischen Behandlung durch CLAIRAUT[1]). CLAIRAUT denkt sich einen Faden aus der Flüssigkeit herausgeschnitten, der folgende Gestalt haben soll: Er geht vom Meniskus aus, läuft vertical in der Axe des Rohres, biegt in endlicher Entfernung unterhalb des Rohres um, läuft horizontal ein Stück weiter und geht dann wieder vertical nach oben bis in das äussere ebene Niveau. CLAIRAUT stellt die Kräfte auf, welche auf diesen Faden wirken und leitet damit die Gleichgewichtsbedingung ab. Er nimmt an, dass die Molecularkräfte nur merklich sind auf einen »sehr kleinen Abstand«. Doch spielen die Anziehungskräfte der Wand auf diesen axialen Faden eine hervorragende Rolle in seiner Betrachtung; er meint, man müsse diese Kräfte so wählen, dass dem JURIN'schen Beobachtungsresultat genügt werde, was durch eine unendliche Zahl von Anziehungsgesetzen geleistet werde. — Die Entstehung des Randwinkels erklärt er in der noch jetzt in den Lehrbüchern üblichen Weise.

An die CLAIRAUT'sche Behandlung schliesst LAPLACE[2]) an (1805). Er fand es aber mit HAUKSBEE nöthig, anzunehmen, dass die Kräfte nur merklich sind in unmerklicher Entfernung und stützt sich namentlich auf HAUKSBÉE's Beobachtungsresultat, wonach die Steighöhe des Wassers in Röhren unabhängig ist von der Wanddicke. Für die Grundanschauung liegt der Hauptfortschritt von LAPLACE in dem Resultat, dass die Niveauänderung oder, allgemeiner gesagt, der capillare Druck nur abhängig ist von der Krümmung der Oberfläche an der betreffenden Stelle, ganz gleichgültig, durch welche Ursachen diese Krümmung hervorgebracht ist. Er leitet für diesen Druck p den Ausdruck $p = K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ ab, wo K und H Constanten sind, die lediglich von der Natur der Flüssigkeit abhängen, R und R' die Hauptkrümmungsradien der Oberfläche an derjenigen Stelle, die den Druck p ausübt. Von K denkt sich LAPLACE abhängig das Halten von Quecksilber in einer Barometerröhre bis zu Säulen, die 3—4 mal länger sind als diejenigen, welche der Luftdruck tragen kann, das Brechungsvermögen, die Cohäsion und die chemische Affinität.

Die Bestimmung der Gestalt der freien Oberfläche einer Flüssigkeit ist nun auf die Lösung einer Differentialgleichung zurückgeführt. Ihre allgemeine Integration ist unmöglich, doch führt LAPLACE sie für viele specielle Fälle durch, bisweilen unter Zuhülfenahme vereinfachender, wenn auch nicht immer streng bewiesener Annahmen (s. Literaturverzeichniss). Er erklärt ferner die scheinbare Anziehung und Abstossung schwimmender Körper und behandelt in etwas strengerer und allgemeinerer Weise als CLAIRAUT das Problem des Randwinkels.

In seinem Supplement leitet LAPLACE die Fundamentalgleichung der Capillarität aus der Bedingung der Perpendicularität der resultirenden Kraft auf der Oberfläche ab; die Differentialgleichung wird dann dritter Ordnung und ist das Differential der früher gegebenen. (Weiteres siehe Literaturübersicht).

LAPLACE hatte die Flüssigkeit stets als homogen betrachtet. POISSON in seiner Nouvelle Théorie etc. verlässt diese Annahme; in der Nähe der Oberfläche muss nach ihm die Dichte wechseln und ohne diese Aenderung wären gar keine Capillarerscheinungen möglich. Er kommt zu den gleichen Ausdrücken für den Druck wie LAPLACE; nur sind seine Constanten durch etwas

[1]) CLAIRAUT, Théorie de la figure de la Terre, tirée des Principes de l'Hydrostatique. 8. Paris 1743. Cap. X, pag. 105—128.

[2]) LAPLACE, Méc. céleste Suppl. zum X. Buch, pag. 1—65, und à la théorie de l'action capillaire Méc. cél. T. IV. Anhang pag. 1—78, Paris 1805, und Oeuvres, T. IV., pag. 389 bis 552 (beide Abhandlungen). Paris 1845.

anders gestaltete bestimmte Integrale definirt. Während K nach LAPLACE sehr gross ist, ist es nach POISSON sehr klein.

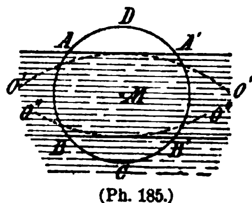
TH. JOUNG gab 1805[1]) eine auf die Annahme einer constanten Oberflächenspannung gegründete Theorie, welche alle Thatsachen erklärt.

GAUSS leitete 1829 die Theorie aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ab (vergl. später).

Bezüglich der experimentellen Prüfungen und Erweiterungen muss auf das Folgende verwiesen werden.

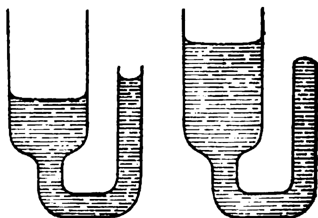
II. Elementare Behandlung der Capillaritätstheorie. Methoden zur Bestimmung der Constanten.

1) Als Ausgangspunkt dient am zweckmässigsten die von LAPLACE gegebene Vorstellung, welche man in folgender Weise darzustellen pflegt. Es sei eine homogene Flüssigkeit gedacht; ihre Theilchen ziehen sich gegenseitig an. Die Kraft sei gerichtet nach der Verbindungslinie beider Theilchen und eine unbekannte Function der Entfernung. Bekannt ist nur, dass sie mit wachsender Entfernung sehr rasch abnimmt und schon für einen sehr kleinen Werth l derselben (ca. $50 \cdot 10^{-6}$ *mm*) merklich gleich Null ist; l heisse der Radius der Wirkungssphäre.



(Ph. 185.)

Ein Flüssigkeitstheilchen m, welches bis zu einer Entfernung gleich oder grösser als l allseitig von derselben Flüssigkeit umgeben ist, ist im Gleichgewicht. Befindet es sich in einem Abstande $< l$ unterhalb einer ebenen Flüssigkeitsoberfläche (Fig. 185), so erfährt es eine resultirende Anziehung, die gerichtet ist nach der Oberflächennormale. Denn legt man um m als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius l, so fällt der Theil ADA' ausserhalb der Flüssigkeit. Die Anziehungskräfte der im Raum $AA'B'B$ befindlichen Theilchen auf m heben sich auf; die Wirkung von den in $BB'C(=ADA')$ enthaltenen wird aber nicht compensirt. Das Gleiche gilt für alle oberhalb m in der Normalen gelegenen Theilchen. Diese Kräfte (Drucke) auf die Flüssigkeit addiren sich; es entsteht somit ein Normaldruck. Auf die Einheit der Oberfläche bezogen stellt er das LAPLACE'sche K dar. — Ist die Oberfläche gekrümmt wie $O'O'$ (diese Art der Krümmung soll convex genannt werden), so wird die Wirkung der in $O''CO''$ gelegenen Theilchen nicht durch die eines entsprechenden Raumes compensirt — der Normaldruck ist grösser als in einer ebenen Oberfläche (Fall von Quecksilber). — Ist der Sinn der Krümmung der entgegengesetzte (concav), so wird der Normaldruck kleiner als in einen ebenen Oberfläche (Fall einer benetzenden Flüssigkeit: Wasser, Alkohol etc.).


(Ph. 186.)

2) Dies erläutert ein von GAY-LUSSAC[2]) angegebener Versuch. Giesst man in das Gefäss (Fig. 186) Wasser, so steht dasselbe im engen Schenkel höher, wenn die Oberfläche desselben, wie gewöhnlich concav ist. Fügt man mehr Wasser hinzu, so lässt sich bewirken, dass die Flüssigkeit in beiden Schenkeln gleich hoch steht — sie ist dann im engeren Rohre eben. Tröpfelt man noch mehr Wasser zu, so bildet sich im engeren Schenkel (er sei

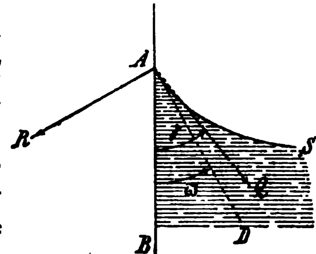
[1]) TH. JOUNG, Phil. Trans. 1805, I, pag. 65.

[2]) LAPLACE, l. c.

daher scharf abgeschnitten) eine convexe Kuppe; das Wasser steht jetzt im weiten Schenkel höher.

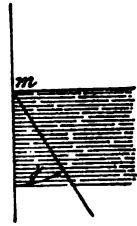
Ob eine Flüssigkeit in einem Capillarrohr höher oder tiefer steht als in einem damit communicirenden weiten Gefässe, hängt also nicht von der Natur der Flüssigkeit, sondern vom Sinne der Meniskuskrümmung ab. — Dieser letztere ist aber — wegen der nothwendigen Stetigkeit im Verlaufe der Oberfläche — abhängig von demjenigen benachbarter Oberflächenpartieen; speciell in der Nähe einer Wand von der Gestalt der Oberfläche an der Wand. Quecksilber, welches an nicht von ihm benetzten Metallen unter dem allgemeinen Niveau steht, steigt an benetzten Metallen auf, wie Alkohol an Glas. Das Ansteigen einer Flüssigkeit ist also bedingt durch das Verhalten der Wand zu der Flüssigkeit. Dieses ist maasgebend für die Grösse des Randwinkels.

3) Definition des Randwinkels. Grösse desselben. Im Punkt A (Fig. 187) stosse Flüssigkeit und Wand zusammen. Die Ebene der Zeichnung sei ein Normalschnitt der Flüssigkeitsoberfläche im Punkte A. Legt man in A eine Tangente, gerichtet nach der freien Flüssigkeitsoberfläche; desgleichen eine Tangente an die Wand, gerichtet nach dem benetzten Theile derselben, so soll der Winkel, den beide Richtungen mit einander bilden, Randwinkel heissen. (Für Alkohol | Glas wäre er $= 0$, für Hg | Glas ca. 135°.) Von welchen Bedingungen seine Grösse abhängt, soll für den Fall untersucht werden, dass eine unendlich lange, ebene, verticale Wand in eine Flüssigkeit eintaucht.



(Ph. 187.)

Ein Flüssigkeitstheilchen m (Fig. 188) werde angezogen von den Flüssigkeitstheilchen, welche in einem Quadranten liegen. Zerlegen wir denselben in Winkelelemente $d\gamma$, so soll die Kraft, welche die Flüssigkeit eines solchen Elementarstreifens auf m ausübt, bezeichnet werden als $\frac{K}{2}d\gamma$. Die Verticalcomponente der ganzen Wirkung, welche der Quadrant auf m ausübt, wird dann $= K/2$. Die entsprechende Grösse für die Wirkung eines Quadranten des Körpers, aus welchem die Wand besteht, auf das Flüssigkeitstheilchen heisse $K'/2$.



(Ph. 188.)

In Fig. 187 stelle AS die Oberfläche der Flüssigkeit dar, AD sei Tangente an dieselbe, BAD der Randwinkel $\tilde{\omega}$. Dann wirken auf A folgende Kräfte:

1) Von Seiten des festen Körpers: eine horizontale Kraft $= K'$. Die Verticalcomponenten heben sich auf

2) Von Seiten der Flüssigkeit.

α) Vom Raum BAD

$$\text{eine Verticalcomponente} = \frac{K}{2}\int_0^{\tilde{\omega}} \cos\tilde{\omega}\, d\tilde{\omega} = \frac{K}{2}\sin\tilde{\omega},$$

$$\text{eine Horizontalcomponente} = \frac{K}{2}\int_0^{\tilde{\omega}} \sin\tilde{\omega}\, d\tilde{\omega} = \frac{K}{2}(1-\cos\tilde{\omega}).$$

β) vom Raum DAS.

Die resultirende Anziehung sei Q und schliesse den Winkel γ mit der Wand ein. Daher wirken in Summa auf das Theilchen A

vertical . . . $\frac{K}{2} \sin \tilde{\omega} + Q \cos\gamma = Y,$

horizontal . . $K' - \frac{K}{2} + \frac{K}{2} \cos\tilde{\omega} - Q \sin\gamma = X.$

Bedingung des Gleichgewichtes ist, dass die aus X und Y resultirende Kraft R senkrecht zur Oberfläche in A steht. Daher ist

$$R \sin\tilde{\omega} = Y; \qquad R \cos\tilde{\omega} = X,$$

oder $Y \cos\tilde{\omega} - X \sin\tilde{\omega} = 0$, was zu der Gleichung führt

$$Q \cos(\gamma - \tilde{\omega}) = \left(K' - \frac{K}{2}\right) \sin\tilde{\omega} \ . \ . \ . \qquad \text{(I)}$$

Daraus folgt:

a) Ist die Flüssigkeitsoberfläche concav (benetzte Wand), so ist $\sin\tilde{\omega}$ (positiv, $Q \cos(\gamma - \tilde{\omega})$ positiv, daher

$$K' - \frac{K}{2} > 0 \quad \text{oder} \quad K' > \frac{K}{2}.$$

b) Ebenso ergiebt sich, wenn die Oberfläche convex ist,

$$K' < \frac{K}{2}.$$

c) Ist $\tilde{\omega} = 90°$, so wird

$$K' = \frac{K}{2}.$$

Bemerkungen: 1) In den Betrachtungen ist von der Wirkung der Erdschwere, welche noch als verticale auf A wirkende Kraft hinzukommt, abgesehen. Dies involvirt die Annahme, dass sie zu vernachlässigen sei gegen die Molecularkräfte. Der Erfolg rechtfertigt, soweit die Genauigkeit der Beobachtungen geht, diese Annahme, d. h. der Randwinkel ist unabhängig von der Neigung der Wand gegen die Verticale. Man bezeichnet dies als den Satz von der Constanz des Randwinkels.

2) Vollständige Benetzung ($\tilde{\omega} = 0$), kann nur eintreten, wenn gleichzeitig $Q = 0$ ist, d. h. wenn eine dünne ebene Flüssigkeitsschicht die Wand überzieht.

4) Der Capillardruck als Function der Krümmung. Zur Ableitung genügt die Bemerkung, dass eine Flüssigkeitsoberfläche stets eine Niveaufläche sein, d. h. die gesammte resultirende Kraft, welche auf ein Theilchen der Oberfläche wirkt, stets normal zu derselben sein muss. Man kann die Ableitung dann an die Theorie der Fadencurven anschliessen. — Denkt man sich über die Oberfläche eine beliebige Curve gelegt, so wirken auf ein Element ds dieser Schnittcurve: 1) eine Kraft $p_1 ds$, angreifend in der Mitte des Fadenelementes und normal zu ds; 2) am einen Ende von ds eine nach ds gerichtete Spannung T'; 3) am anderen Ende von ds eine in die Richtung des an ds angrenzenden Bogenelementes fallende Spannung T''; $p_1 ds$, T' und $-T''$ müssen sich das Gleichgewicht halten. Bezeichnen X, Y, Z die Componenten von p_1, so führt dies (mit Vernachlässigung eines Drehungsmomentes von der Ordnung $T ds\, \varepsilon$, wo ε den Contingenzwinkel bedeutet) zu den Gleichungen:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds = 0$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds = 0$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds = 0$$

Diese geben nach Ausführung der Differentation in bekannter Weise mit dx/ds etc. multiplicirt und addirt,

$$dT + (Xdx + Ydy + Zdz) = 0,$$

d. h. wegen der Bedingung der Niveaufläche $dT = 0$ oder $T = const$ im ganzen Faden. Bildet man aus den Gleichungen (a) $X^2 + Y^2 + Z^2 = p_1^2$, so ergiebt sich $p_1 = \frac{T}{\rho_1}$, wenn ρ_1 den Krümmungsradius bedeutet.

Da somit T constant ist im selben Faden, der Faden selber aber beliebige Gestalt haben kann, so muss es in der ganzen Oberfläche constant sein. Denkt man sich zwei in einem Punkte A der Oberfläche sich schneidende Normalebenen, so wird in A ausgeübt durch den Faden, welchen die erste Ebene ausschneidet, der Druck $p_1 = \frac{T}{\rho_1}$; durch den zweiten Faden der Druck $p_2 = \frac{T}{\rho_2}$ wenn ρ_2 den Krümmungsradius des zweiten Fadens im Punkte A bedeutet. Daher

$$p_1 + p_2 = T\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

wenn R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien sind. In ähnlicher Weise wird man immer die von zwei sich senkrecht schneidenden Fäden herrührenden Drucke zusammensetzen können und erhält daher für den ganzen Druck p in einem Punkt der Oberfläche einen Ausdruck von der Form

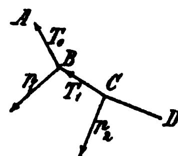
$$p = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

$\frac{H}{2}$ heisst die Capillarconstante oder Oberflächenspannung. Sie ist constant in der ganzen Ausdehnung der Flüssigkeit und kann nur von deren Natur abhängen, da bei einer gegebenen Krümmung p und damit $H/2$ durch die letztere bestimmt sein muss.

Bemerkung. Bei dieser Behandlungweise tritt aus leicht ersichtlichem Grunde keine Constante K auf. Eine ebene Flüssigkeit übt keinen Druck aus.

5) Maass der Capillarconstante. Verhalten der Flüssigkeit an einer unendlich langen, ebenen, verticalen Wand. Stellt in Fig. 189 $ABCD$ eine Fadencurve dar; bezeichnen T_0, T_1, T_2 die Spannungen in den Fäden, $p_1 p_2$ . . die gegebenen in resp. B, C . . angreifenden Kräfte, so ist bekanntlich

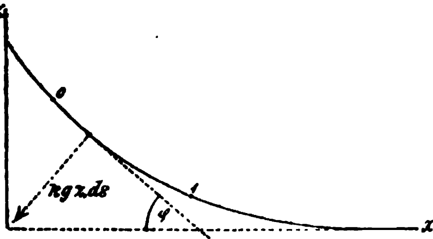
$$T_1 = Res(T_0, p_1)$$
$$T_2 = Res(T_1, p_2) = Res(T_0, p_1, p_2)$$
$$T_n = Res(T_0, p_1, p_2 \ldots p_n) \text{ oder}$$
$$Res(T_0, p_1, p_2 \ldots p_n, -T_n) = 0,$$



(Ph. 189.)

d. h. T_0; $p_1 p_2 \ldots p_n$; $-T_n$, an einen Punkt verlegt, halten sich Gleichgewicht.

Diesen Satz wollen wir auf die capillare Oberfläche anwenden, welche sich an einer unendlich breiten, ebenen, vertikalen Wand bildet. Wir denken uns zwei vertikale Ebenen, im Abstand 1 *mm* von einander, senkrecht zur Wand gelegt. Fig. 190 stelle einen Schnitt mit der Flüssigkeit dar. Die x-Axe sei in das ebene Niveau, die z-Axe in die Wand gelegt. Bezeichnet k die specifische Masse der Flüssigkeit, g die Beschleunigung der



(Ph. 190.)

Erdschwere, so ist der Druck p, welcher im Niveau z auf die Flächeneinheit wirkt, seinem absoluten Werthe nach gleich kgz. Die Gleichgewichtsbedingungen für ein zwischen den Punkten 0 und 1 gelegenes Stück der Flüssigkeitsoberfläche sind daher

$$T_0 \sin\varphi_0 - kg\int_0^1 z\, ds \cos\varphi - T_1 \sin\varphi_1 = 0$$

$$- T_0 \cos\varphi_0 - kg\int_0^1 z\, ds \sin\varphi + T_1 \cos\varphi_1 = 0.$$

Ferner ist $\cos\varphi = -\frac{dx}{ds}$; $\sin\varphi = \frac{dz}{ds}$; $T_0 = T_1 = T.$

Verlegt man den Punkt 1 in das allgemeine Niveau, so ist $\varphi_1 = 0$. Daher werden die Bedingungen

$$T \sin\varphi_0 = kg\int_\infty^0 z\, dx \qquad \text{(II)}$$

$$T(\cos\varphi_0 - 1) = kg\int_0^\infty z\, dz = -\frac{kg}{2}\cdot z_0^2.$$

Führt man statt φ_0 den Randwinkel $\bar\omega$ ein, so wird

$T \cos\bar\omega$ = Flüssigkeitsgewicht, das von 1 *mm* Contactlinie gehoben wird, (III)

$$T(1 - \sin\bar\omega) = \frac{kg}{2} z_0^2. \qquad \text{(IV)}$$

Aus (III) und (IV) folgt durch Division

$$\cot g\left(45° - \frac{\bar\omega}{2}\right) = \frac{2v}{z_0^2}, \qquad \text{(V)}$$

wenn v das pro Millimeter Contactlinie gehobene Flüssigkeitsvolum (in mm^3) bedeutet.

Die hier als T bezeichnete Constante ist identisch mit der (LAPLACE'schen) $H/2$. Sie wird auch als α bezeichnet.

Für $\bar\omega = 0$ (vollkommene Benetzung) stellt also die Capillarconstante das pro Einheit der Contactlinie gehobene Flüssigkeitsgewicht dar. Es ist noch üblich, die Längen in Millimetern, die gehobenen Gewichte in Milligrammen anzugeben. — Dass dies das Maass der Capillarconstante sei, ist hier nur bewiesen für den Fall, dass eine unendliche ebene Platte eingetaucht ist. Es gilt aber auch für jede beliebig gekrümmte verticale Wand. Den Beweis dafür werde ich später aus der GAUSS'schen Theorie geben; ich benutze den Satz aber schon im Folgenden zur Erläuterung der experimentellen Methoden.

Der Werth z_0 für $\bar\omega = 0$ werde durch a bezeichnet; der Werth a^2 ist specifische Cohäsion benannt worden (QUINCKE). a stellt die Erhebung in Millimetern einer vollkommen benetzenden Flüssigkeit an einer unendlich langen, ebenen, verticalen Wand dar. — Genügt die Wand nicht mehr diesen Voraussetzungen, so ändert sich die Steighöhe.

Da $[\alpha] = \left[\frac{\text{Mgrgew.}}{\text{Mill.}}\right]$, so sind die für α später angegebenen Zahlen mit 9,81 zu multipliciren, um sie in GCS-System zu erhalten. In diesem System gemessen will ich die Capillarconstante durch T bezeichnen. Die Dimension von T ist (GS^{-2}); ihre Bedeutung eine Energie dividirt durch eine Fläche (vergl. pag. 456). Die Capillarconstante (für Wasser) $\alpha = 8$ [Mgrgew./Mill.] oder $T = 8 \cdot 9{,}81$ $[G/S^2] = 79{\cdot}2\ [GS^{-2}]$ heisst, dass eine Energie von 79·2 (GC^2S^{-2}) erforderlich ist, um eine Wasseroberfläche um 1 Quadratcentimeter zu vergrössern.

Wir hätten also, um auch gleich die später vorkommende GAUSS'sche Constante mit anzuführen, folgende

Uebersicht der Constantenbezeichnungen.

$$\left(\frac{H}{2}\right)_{\text{LAPL}} = \alpha = a^2{}_{\text{GAUSS}} \cdot \sigma; \qquad [\alpha] = (\text{Mgrgew. } mm^{-1})$$

$$T[GS^{-2}] = \alpha\ [\text{Mgrgew. } mm^{-1}] \cdot 9{\cdot}81\ [CS^{-2}]$$

$$a^2 = \frac{H}{\sigma} = \frac{2\alpha}{\sigma} = 2\,a^2{}_{\text{GAUSS}}; \qquad [a] = [mm].$$

6) Experimentelle Methoden zur Bestimmung der Capillarconstante.

a) WILHELMY'sche Methode. Eine rechtwinklig begrenzte, planparallele Platte hängt vertical an einer Wagschale, so dass die längste Kante horizontal, die kleinere vertikal ist. Sie ist äquilibrirt. Man lässt sie dann in eine Flüssigkeit bis zu einer gewissen Tiefe eintauchen. Wäre kein hydrostatischer Auftrieb vorhanden, so müsste man $\alpha \cos w\ U mgr$ auf anderen Schalen auflegen, um wieder Gleichgewicht herzustellen, wenn U die Länge der Contactlinie in mm bedeutet.

Bedeutet l die Länge der horizontalen Kante, d die Dicke der Platte, δ das specifische Gewicht der Flüssigkeit; ist ferner die untere Kante bis zur Höhe h unter das allgemeine Niveau untergetaucht, so ist das Gewicht P, welches nach dem Eintauchen der Platte auf der anderen Wagschale aufgelegt werden muss, um die Wage wieder zum Einspielen zu bringen:

$$P = 2\alpha \cos\bar{\omega}\,(l + d) - l d \sigma.$$

Je dünner die Platte, desto genauer ist die Methode. Sie lässt sich selbstredend auch für nicht benetzende Flüssigkeiten anwenden.

b) Methode der sogen. Adhäsionsplatten. Eine an einer Wage horizontal aufgehängte Platte von der Fläche O und der Contourlänge U wird mit der Flüssigkeit in Berührung gebracht und dann auf die andere Wagschale Gewichte P aufgelegt, damit die Platte gehoben und die Flüssigkeit unter derselben mit ihr. Legt man eine Verticalebene senkrecht zur Contour der Platte und bildet die in dieser Ebene von der Contour aus nach der Flüssigkeit hin gezogene Tangente mit der Verticalen den Winkel $\bar{\omega}$, ist ferner z die Erhebung der Platte über das allgemeine Niveau, so ist

$$P = O \cdot z \cdot \sigma + U\alpha \cos\bar{\omega}.$$

Die Methode ist ungünstig wegen des ersten, gewöhnlich gegen das zweite sehr grossen Gliedes zu messenden; ferner weil $\bar{\omega}$ eingeht. Man kann $\bar{\omega} = 0$ machen, wenn man die Platte so lange hebt, bis man durch die gehobene Flüssigkeit hindurch, direct unter der Platte ein jenseits derselben aufgestelltes Licht sieht. Wird die Platte über diese Höhe gebracht, so schnürt sich die Flüssigkeit unterhalb derselben zusammen, das Gleichgewicht wird labil und die Platte reisst ab. — Man hat für den Versuch fälschlich einen Namen gewählt, welcher zu dem Gedanken verführt, man messe durch P die Adhäsion der Platte an der Flüssigkeit (bei nicht benetzenden Flüssigkeiten, oder gar die innere Cohäsion bei benetzenden).

c) Steighöhe in Capillarröhren. An der Stelle, wo sich der Meniskus bildet, habe die Röhre den Querschnitt q, die Contourlänge u. Die unterste Stelle des Meniskus sei über das allgemeine ebene Niveau bis zur Höhe h gehoben, so ist die Gleichgewichtsbedingung

$$\alpha u \cos\bar{\omega} = q h \sigma + k.$$

Dabei ist k das Gewicht der kleinen Flüssigkeitsmenge, welche noch an den Wänden über (oder bei nicht benetzenden unter) der Kuppe des Meniskus sich befindet.

Ist die Meniskusstelle ein Kreis vom Radius r, so wird $u = 2r\pi$; $q = r^2\pi$; vernachlässigt man k, so wird

$$\alpha \cos \bar{\omega} = \sigma h \frac{r}{2}.$$

Für $\bar{\omega} = 0$ ist daher auch $2\alpha/\sigma = a^2$ gleich der Steighöhe in einer Röhre von 1 *mm* Radius.

Um k zu berücksichtigen, pflegt man zu h noch $r/3$ zu addiren[1]), so dass die Gleichung lautet

$$\alpha = \sigma\left(h + \frac{r}{3}\right)\frac{r}{2}.$$

Ein genauerer, von POISSON[2]) abgeleiteter Ausdruck, ergiebt $m = \alpha/\sigma = \frac{a^2}{2}$ aus der Gleichung (für $\bar{\omega} = 0$)

$$m^2 - \frac{1}{2} mr\left(h + \frac{1}{3} r\right) = -0{\cdot}0322 r^2,$$

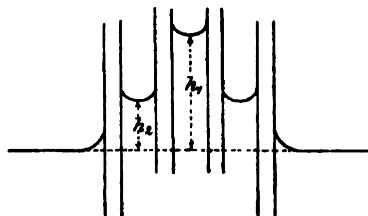
oder, was auf das Gleiche herauskommt,

$$a^2 = rh\left(1 + \frac{1}{3}\frac{r}{h} - 0{\cdot}1288 \frac{r^2}{h^2}\right).$$

Befindet sich im Rohre ein coaxialer Cylinder vom Radius r', so ergiebt sich ($k = 0$ gesetzt)

$$h = \frac{2\alpha}{\sigma} \cdot \frac{1}{r - r'} \cos \bar{\omega}.$$

Correction für den Fall, dass eine cylindrische Capillare sich in einer nicht unendlich weiten cylindrischen Röhre befindet (Fig. 191). Die Röhre habe am Meniskus den inneren Radius r_1, stehe coaxial in einer Röhre vom inneren Radius r_3 und habe an der Stelle, wo sie das äussere Flüssigkeitsniveau durchsetzt, den äusseren Radius r_2. — Denkt man sich die äussere Röhre zunächst unten offen und in ein unendlich breites Niveau eingesetzt, so stehe die Flüssigkeit im weiteren Rohre bis zur Höhe h_2, im engeren bis h_1. Sieht man von den Gewichten k ab, so hat man die Gleichungen



(Fig. 191.)

$$2r_1\pi \cdot \alpha \cos\bar{\omega} = h_1 \sigma r_1^2 \pi$$
$$2(r_2 + r_3)\pi\alpha \cos\bar{\omega} = h_2 \sigma (r_3^2 - r_2^2)\pi.$$

Daher

$$h_1 - h_2 = h = \frac{2\alpha \cos\bar{\omega}}{\sigma}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3 - r_2}\right).$$

Die Erhebung h der Flüssigkeit im engeren Rohre über die im weiteren ändert sich nun offenbar nicht, wenn man das äussere Rohr sich unten geschlossen denkt, d. h. h stellt die gesuchte Grösse dar.

d) Steighöhe zwischen unendlich breiten, parallelen, verticalen Wänden. Haben dieselben den Abstand $2r$, so ist die Erhebung h gegeben durch

$$h = \frac{\alpha \cos\bar{\omega}}{\sigma} \cdot \frac{1}{r}.$$

---

[1]) LAPLACE, Théorie etc. § 5.

[2]) POISSON, Nouv. Th., pag. 112; vergl. HAGEN, POGG. Ann. 67. 1846, woselbst noch eine andere Correctionsrechnung sich findet.

Genauer[1]) für $\bar{\omega} = 0$

$$a^2 = \frac{2\alpha}{\sigma} = 2hr\left(1 + 0{\cdot}2146\,\frac{r}{h} - 0{\cdot}052\,\frac{r^2}{h^2}\right).$$

Dies gilt auch für Platten von endlicher Breite in einigem Abstand vom Rande.

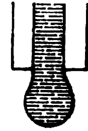
Sind die Vertikalplatten unter dem Winkel φ gegen einander geneigt, bezeichnet x den Abstand eines Punktes von der Durchschnittslinie der Platten, z die Erhebung über das allgemeine Niveau, so bildet die Flüssigkeitsoberfläche eine recktwinklige gleichseitige Hyperbel

$$xz = \frac{\alpha \cos\bar{\omega} \cdot \sigma}{tg\,\frac{\varphi}{2}}.$$

e) Methode der frei fallenden Tropfen. Am unteren, offenen Ende einer vertikalen Capillarröhre bilde sich ein Tropfen (Fig. 192). Sobald das an die Röhre anstossende Element der Flüssigkeitsoberfläche vertical ist, so ist

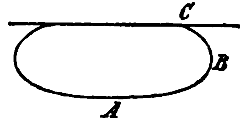
$$t = \alpha\, 2r\pi,$$

wo t das Tropfengewicht, r den Radius der Röhre bezeichnet. Nimmt t zu, so schnürt sich der Tropfen oben ein, das Gleichgewicht wird labil und der Tropfen fällt ab.


(Ph. 192.)

Die Methode setzt keine Kenntniss des Randwinkels voraus. Doch braucht das Gewicht des herabfallenden Tropfens nicht gleich dem obigen g zu sein. — Die Methode giebt auch je nach der Geschwindigkeit der Tropfenbildung verschiedene Werthe. Die Ansichten über den Grund dieser Erscheinung scheinen verschieden zu sein.

f) Methode der flachen Tropfen (Luftblasen). Man legt einen flachen Tropfen auf eine nicht benetzte Unterlage (Quecksilber auf Glas oder Wasser auf Glas, welches mit Lycopodium bestäubt ist) oder erzeugt unter einer ebenen oder linsenförmigen oder am besten röhrenförmigen Platte, welche sich in Flüssigkeit befindet, eine flache Luftblase. Ist die Blase, wie in einer Röhrenlibelle, lang gestreckt, so befindet sich die Flüssigkeit an diesen Stellen (wo der Krümmungsradius in einer Horizontalebene ∞ ist) unter den gleichen Bedingungen, wie diejenige an einer verticalen Wand angestiegen ist. Stellt Fig. 193 einen Verticalschnitt durch die Flüssigkeit dar, senkrecht zu der Längsausdehnung der Blase; ist A der tiefste Punkt der Blase und ist in B die Tangente an die Durchschnittscurve vertikal, so ist die Niveaudifferenz der beiden Punkte gleich der Constanten a (vergl. § 5). Voraussetzung ist aber dabei, dass in A die Krümmung $= 0$ ist. Allgemein gelten dann die (in § 5) aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen; speciell auf die Strecke BC angewendet ist die Bedingung des Gleichgewichts in Richtung der x-Axe:



(Ph. 193.)

$$-T_0 \sin\psi_0 - kg\int_0^1 z\, ds \cos\psi + T_1 \sin\psi_1 = 0,$$

wenn $\cos\psi = -dz/ds$, ψ also der Winkel der nach C hinschauenden Tangente mit der nach oben gerichteten z-Axe bedeutet. Sind die Verticalordinaten von C und B bezw. 0 und $-z_2$, so ist

$$\psi_0 = 90 - \bar{\omega} \qquad z_0 = 0$$
$$\psi_1 = 0 \qquad z_1 = -z_2,$$

und daher

[1]) Volkmann, Wied. Ann. 11, pag. 180. 1800.

$$\overset{1}{T} \cos \bar{\omega} = \frac{kg}{2} \cdot z_2^2.$$

Auch für Tropfen, deren horizontale Querschnitte Kreise sind, gelten die Relationen noch angenähert, wenn der Horizontalschnitt durch den Punkt B so gross ist, dass sein Radius gegen den Krümmungsradius in einer Verticalebene durch B gross ist.

Diese Methode, a und damit α aus der Niveaudifferenz der Punkte A und B zu bestimmen, hat den Vorzug, dass der Randwinkel herausgeht; ferner, dass man reine Oberflächen schaffen und erhalten kann. Ihr Nachtheil ist, dass man, soll sie bequem sein, grosse Tropfen braucht oder eine Correction einzuführen hat.

g) Methoden, bei welchen die Krümmungen gemessen werden.

α) In einer kugelförmigen Blase (Seifenblase) vom Radius R ist der Druck (wenn die Wand so dünn ist, dass der innere und äussere Radius gleich gesetzt werden können)

$$p = 4\alpha/R.$$

β) Kennt man von einem flachen Tropfen den Durchmesser $2l$ an seiner breitesten Stelle und die Krümmung an der Kuppe, so lässt sich daraus die Capillarconstante berechnen. Ist die Breite gross gegen die Höhe, so ist der Krümmungsradius an dem Scheitel gegeben durch

$$R = \frac{a(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{\pi\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{a}{l'}}\, e^{\frac{l'\sqrt{2}}{a}},$$

wo $l' = l + (\sqrt{2} - 1)\,a$, und a die früher definirte Constante bezeichnet.

Diese Methode ist durch A. König für die Untersuchung der Abhängigkeit der Capillarconstante von der electrolytischen Polarisation benutzt worden[1]). Die obige Formel ist abgeleitet von Poisson in seiner Nouvelle théorie etc., pag. 216. Daselbst findet sich auch die Theorie für andere, event. zu verwerthende Methoden wie: Aus dem Gewicht und der Höhe kleiner Quecksilbertröpfchen den Randwinkel zu bestimmen (pag. 209). Gestalt der Kuppe flacher Tropfen (pag. 211). Abstand k zweier Platten, zwischen welchen ein Tropfen sich befindet; die obere Platte ist belastet mit einem Gewicht P oder gezogen, je nachdem die Flüssigkeit benetzt oder nicht. Ist k klein gegen a und gegen m, den Radius des Tropfens, so wird

$$k = a\sqrt{\frac{\varkappa g v \cos\bar{\omega}}{P}},$$

wo $v = \pi m^2 k$ das Volum des Tropfens darstellt, $\varkappa$, g, w die seither benutzte Bedeutung haben. — Endlich: wie man aus Höhe, Gewicht und grösstem Durchmesser eines Tropfens a oder $\bar{\omega}$ berechnen kann. Depression des Quecksilbers in Capillarröhren.

γ) Natürlich kann man auch die Krümmung, z. B. des Meniskus in einem Rohre und den Druck — etwa durch die Niveaudifferenz gegen einen sehr breiten Flüssigkeitsspiegel messen — und wird damit vom Randwinkel unabhängig[2]).

Andere Methoden (z. B. aus Länge und Neigung einer Flüssigkeitssäule in einem konischen Rohre, direkte Messung der Spannung in beiderseits an Luft angrenzenden Lamellen (Sondhauss, Terquem) sind wohl mehr zur Demonstration

[1]) Vergl. das Nähere A. König, Wied. Ann. 16, pag. 1. 1882.

[2]) Eine im Princip einwurfsfreie Methode vergl. Eötvös, Wied. Ann. 27, pag. 448. 1886.

von Sätzen der Capillaritätstheorie als zur genaueren Messung der Constanten geeignet.

7) Methoden zur Bestimmung des Randwinkels.

a) Indirekte. Man bestimmt α, etwa nach der Methode der flachen Tropfen; ferner $\alpha \cos \bar{\omega}$, etwa aus capillaren Steighöhen oder nach der WILHELMY'schen Methode etc. und berechnet daraus $\cos \bar{\omega}$.

Die sub 6 f. angegebenen Formeln gestatten an flachen Tropfen aus zwei Höhenmessungen, wenn das specifische Gewicht bekannt ist, beide Constanten zu ermitteln.

b) Direkte Methode. Man bestimmt die Neigung des letzten Elementes der Flüssigkeitsoberfläche gegen die Wand nach Verfahren, die ähnlich den Winkelmessungen an Krystallen sind. Welches als das letzte Element anzusehen sei, ergiebt sich aus der plötzlichen Winkeländerung, welche beim Uebergang von der Flüssigkeit zur Wand eintritt. Z. B. Man deckt auf einen in einem Uhrglas oder in einer Rinne befindlichen Quecksilbertropfen ein Planglas und lässt von einer entfernten Lichtquelle schräg Strahlen auffallen. Man stellt in die Nähe des Tropfens ein Goniometer, die Drehungsaxe horizontal und parallel zur Contactlinie von Quecksilber und Glas. Am Goniometer befindet sich ein, mit seiner Ebene der Drehungsaxe paralleler Spiegel. Man findet dann im Allgemeinen ein Bild der Lichtquelle, in derselben Richtung gelegen wie das direct gesehene Bild, welches durch doppelte Reflexion, einmal an der Tangentialebene der Quecksilberfläche, dann an der ihr parallelen Spiegelebene entstanden ist. Man dreht den Spiegel zu immer kleineren Neigungen gegen die Horizontale bis bei einer kleinen weiteren Drehung das doppelt reflectirte Bild plötzlich verschwindet. Diese Grenzstellung des Spiegels giebt die Tangentialebene an das letzte Flüssigkeitselement. (QUINCKE, POGG. Ann. 105, vergl. eine andere ähnliche Methode QUINCKE, WIED. Ann. 2, pag. 152. 1877).

Man kann auch in eine horizontale Fläche der Flüssigkeit ein Planglas tauchen und dasselbe so lange drehen, bis auf der einen Seite des Glases die Flüssigkeit ganz eben (horizontal) bleibend an das Glas anstösst. Der Winkel des Planglases gegen die Horizontalebene ergänzt dann den Randwinkel zu 180°.

III. Experimentelle Ergebnisse der Constantenbestimmungen. Abhängigkeit von der Temperatur.

8) Wir geben zunächst einige Zahlen für oft vorkommende Substanzen (nach QUINCKE):

Substanz	Dichte $\varkappa$	aus Steighöhen	aus Blasen	$\alpha \cos \bar{\omega}$	$\bar{\omega}$
Wasser	1	7·235	8·253	7·449	25°
Unterschwefligsaures Natron	1·1248	7·636	7·903	7·256	23°
Schwefelkohlenstoff . . .	1·2678	3·343	3·274	2·768	32°
Olivenöl	0·9136	3·271	3·760	3·490	22°
Terpentinöl	0·8867	2·765	3·033	2·398	37°
Chloroform	1·4878	2·733	—	—	—
Steinöl	0·7977	2·566	3·233	2·604	36°
Alkohol	0·7906	2·273	2·599	2·352	25°
Quecksilber	13·596	—	55·0	—	51°

Organische Substanzen[1]).

Substanz	Chemische Zusammensetzung[2])	Capillaritätscoëfficient α.			
		Mendelejeff	Bède	Ohne Correction. Wilhelmy	Mit Correction. Wilhelmy
Methyl-Alkohol	CH_4O	2·426	2·419	—	—
Aethyl-Alkohol	C_2H_6O	2·365	2·342	2·552	2·325
Amyl-Alkohol	$C_5H_{12}O$	2·445	2·426	2·630	2·427
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	2·957	2·948	3·064	2·973
Buttersäure	$C_4H_8O_2$	2·779	—	2·807	—
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	2·703	—	2·828	—
Essigsaures Aethyl	$C_4H_8O_2$	2·552	—	2·570	2·564
Buttersaures Aethyl	$C_6H_{12}O_2$	2·547	—	—	—
Ameisensaures Amyl	$C_6H_{12}O_2$	2·611	—	—	—
Essigsaures Amyl	$C_7H_{14}O_2$	2·611	—	—	—
Buttersaures Amyl	$C_9H_{18}O_2$	2·621	—	—	—
Valeriansaures Amyl	$C_{10}H_{20}O_2$	2·600	—	—	—
Benzoesaures Aldehyd	C_7H_6O	4·164	—	—	—
Cumensaures Aldehyd	$C_{10}H_{12}O$	3·669	—	—	—
Oxalsaures Aethyl	$C_6H_{10}O_4$	3·327	3·112	—	—
Essigsäure-Anhydrid	$C_4H_6O_3$	3·302	—	—	—
Milchsäure	$C_3H_6O_3$	3·936	—	—	—
Salicylsäure	$C_7H_6O_2$	4·769	—	—	—
Gaultheriasäure	$C_8H_8O_3$	4·113	—	—	—
Benzin	C_6H_6	2·877	2·760	2·998	—
Toluen	C_7H_8	2·849	—	—	—
Xylen	C_8H_{10}	2·752	—	—	—
Cymen	$C_{10}H_{14}$	2·849	—	—	—
Amylen	C_5H_{10}	1·753	—	—	—
Ceten	$C_{16}H_{32}$	2·763	—	—	—
Aethyl-Bromür	C_2H_5Br	2·438	2·518	—	—
Aethyl-Chlorür	C_2H_5Cl	—	1·982	—	—
Aethyl-Jodür	C_2H_5J	2·910	2·838	—	—
Amyl-Chlorür	$C_5H_{11}Cl$	2·455	—	—	—
Amyl-Bromür	$C_5H_{11}Br$	2·603	—	—	—
Amyl-Jodür	$C_5H_{11}J$	2·885	—	—	—
Benzoesaures Methyl	$C_8H_8O_2$	3·883	—	—	—
Benzoesaures Aethyl	$C_9H_{10}O_2$	3·674	—	—	—
Benzoyl-Chlorür	C_7H_5OCl	4·067	—	—	—
Aethyl-Amyl-Oxyd	$C_7H_{16}O$	2·338	—	—	—
Aceton	C_3H_6O	2·456	2·486	2·748	2·581
Ameisensaures Aethyl	$C_3H_6O_2$	—	2·632	—	—
Essigsaures Methyl	$C_3H_6O_2$	—	2·582	—	—
Chloroform	$C_2H_2Cl_6$	—	2·812	—	—
Flüssigkeit der Holländer	$C_2H_4Cl_2$	—	3·256	—	—
Aether (nach Brunner)	$C_4H_{10}O_2$	1·796	1·892	1·985	1·815

Nach Beobachtungen von Bartoli[3]) und Cantoni[4]) soll für alle Flüssig-

[1]) Mendelejeff, Compt. rend. 50, 51. — Bède, Mém. d. Brux. 30 (5), pag. 1—198.

[2]) H = 1, O = 16, C = 12.

[3]) Bartoli, N. Cim. (3) 6, pag. 141—153. 1879.

[4]) Cantoni, Atti R. Acc. dei Lincei (3) 4, pag. 74—78. 1880 (Prioritätsreclamation); Beibl. 1880, pag. 332; ferner Bartoli, Atti R. Acc. dei Lincei (3) 7, pag. 340; Beibl. 9, pag. 301. 1885.

keiten, welche nur Wasserstoff, Sauerstoff, Schwefel und Kohlenstoff enthalten, nahezu

$$\frac{a^2}{c \cdot k} = const$$

sein, wenn c die specifische Wärme, k das specifische Gewicht bedeuten.

9) QUINCKE hat auf Grund sehr ausgedehnter Bestimmungen den Satz aufgestellt, dass alle reinen Stoffe oder Verbindungen in der Nähe des Schmelzpunktes specifische Cohäsionen besitzen, welche einfache Multipla von einander seien. Er bestimmte die Constanten entweder mit der Methode der flachen Tropfen (fl. Tr.) oder mit fallenden Tropfen (f. Tr.). Er liess die Substanzen aus einem Glastrichter mit capillarer Spitze in eine Atmosphäre eines indifferenten Gases tropfen; oder er liess (edle) Metalle direkt von dem unteren in einer Flamme geschmolzenen Ende eines Drahtes oder auch Salzperlen von einem Platindraht abfallen. Bedeutet $2r$ den Durchmesser desselben, G das Tropfengewicht, so ergab sich z. B.

Silber:

$2r$	G	α
0·4971 *mm*	0·0733 *gr*	47·14 *mgr*
0·2318 „	0·0299 „	41·13 „
0·0993 „	0·0130 „	41·66 „
0·0775 „	0·0110 „	41·09 „
		Mittel 42·75 „

QUINCKE theilt nach seinen Bestimmungen die untersuchten Stoffe in folgende Gruppen:

I.

$a^2 = 4·3.$

	f. Tr.	fl. Tr.		f. Tr.	fl. Tr.		f. Tr.	fl. Tr.
Se	3·42	—	P	4·58	—	AgBr	—	4
Br	3·90	—	NaBr	—	4·08	KJ	—	4·84
S	4·28	—	KBr	—	4·49			

II.

$a^2 = 8·6.$

	f. Tr.	fl. Tr.		f. Tr.	fl. Tr.		f. Tr.	fl. Tr.
Hg	8·65	—	KNO_3	—	8·35	AgCl	—	8·18
Pb	8·34	—	LiCl	—	8·53	BoO_3	9·86	—
Ag	8·55	—	NaCl	—	8·41	Rohrzucker	—	8·53
Bi	8·02	—	KCl	—	8·76	Traubenzucker	—	9
Sb	7·63	—	$CaCl_2$	—	9·49	Pectinzucker	—	9·18
Wachs	7·06	—	$SrCl_2$	—	8·18	Wallrath	—	7·89
$NaNO_3$	—	8·55	$BaCl_2$	—	8 29	Paraffin	—	8·14

III.

$a^2 = 12·9.$

	f. Tr.
Au	11·71

IV.

$a^2 = 17{\cdot}2.$

	f. Tr.	fl. Tr.		f. Tr.	fl. Tr.		f. Tr.	fl. Tr.
Pt	17·86	—	Na_2CO_3	17·88	16·24	H_2O	17·58	—
Cd	16·84	—	Phosphorsalz	16·79	—	Li_2CO_3	—	17·39
Sn	16·75	—	Glas	15·51	—	Na_2SO_4	17·64	17·64
Borax	17·28	—	K_2CO_3	16·33	14·82	K_2SO_4	17·25	15·92

VI.
$a^2 = 25{\cdot}8,$
$Pd = 25{\cdot}26,$
$Zn = 25{\cdot}41.$

XII.
$a^2 = 51{\cdot}6,$
$Na = 52{\cdot}97.$

XX.
$a^2 = 86,$
$K = 85{\cdot}74.$

10) Für wässerige Lösungen kommt QUINCKE zu dem Resultate, dass α nahezu proportional der Anzahl y von Salzäquivalenten zunimmt, die in der Lösung mit 100 Aeq. Wasser verbunden sind.

Für Chloride lassen sich die Beobachtungen in Capillarröhren nahezu durch die Gleichung

$$(\alpha) = 7{\cdot}35 + 0{\cdot}1783 \cdot y,$$

die Beobachtungen an flachen Luftblasen durch

$$\alpha = 8{\cdot}30 + 0{\cdot}1870 \cdot y$$

darstellen.

Auch für die Lösungen von $MgSO_4$, K_2CO_3 und Na_2CO_3 lässt sich α durch diese Gleichung wiedergeben. Dagegen folgen ihr nicht: Na_2SO_4, K_2SO_4, $ZnSO_4$, $CuSO_4$; $NaNO_3$; KNO_3; Zucker. —

Die alkoholischen Lösungen von LiCl und $CaCl_2$ geben

$$\alpha = 2{\cdot}336 + 0{\cdot}1097 \cdot y.$$

Die Constante a^2 ändert sich nur wenig mit der Concentration. — Sie nimmt mit zunehmendem Salzgehalt ab, ausser bei NH_4Cl in Wasser und LiCl in Alkohol; bei $MgCl_2$ und K_2CO_3 nimmt sie bei sehr grossem Salzgehalt wieder zu (VOLKMANN).

VOLKMANN[1]) findet, dass die QUINCKE'sche Regel gilt, wenn man sie nur innerhalb engerer Gruppen anwendet. Sie gilt nach ihm ziemlich streng für

$$(K_2SO_4,\ Na_2SO_4) \quad \text{und} \quad (2KNO_3,\ 2NaNO_3),$$

angenähert für

$$(BaCl_2,\ SrCl_2,\ CaCl_2,\ MgCl_2) \quad \text{und} \quad (2KCl,\ 2NaCl).$$

ROTHER[2]) findet für

NaCl	$\alpha = 7{\cdot}357 + 0{\cdot}1566y$
KCl	$\alpha = 7{\cdot}357 + 0{\cdot}1666y$
Na_2SO_4	$\alpha = 7{\cdot}357 + 0{\cdot}1382y$
K_2SO_4	$\alpha = 7{\cdot}357 + 0{\cdot}1595y.$

RÖNTGEN und SCHNEIDER[3]) finden eine enge Beziehung von α zur Compressibilität. Bei Lösungen, welche dasselbe Metall oder dasselbe negative Radikal enthalten, kommt derjenigen Flüssigkeit, welche kleinere »molekulare Compressibilität«[4]) besitzt, grössere Oberflächenspannung zu[5]).

[1]) VOLKMANN, WIED. Ann. 17, pag. 353. 1882; vergl. auch l. c. 28, pag. 135. 1886.

[2]) ROTHER, WIED. Ann. 21, pag. 576. 1884 (Methode: Capillarröhren). Derselbe giebt auch Werthe für Gemische von Salzlösungen. Die Constanten lassen sich aus denen der Componenten in derselben Form darstellen, welche RODENBECK (vergl. weiter unten) benutzte.

[3]) RÖNTGEN u. SCHNEIDER, WIED. Ann. 29, pag. 165. 1886.

[4]) Die Definition dieses Ausdruckes vergl. l. c. pag. 199 u. 200.

[5]) Vergl. jedoch wegen einiger Ausnahmen l. c. pag. 210.

RODENBECK[1]) hat die Capillarconstante von Flüssigkeitsgemischen untersucht (Alkohol, Wasser; Petroleum, Chloroform; Alkohol, Chloroform; Aether, Chloroform; Petroleum, Aether), und findet, dass sich die Constante a der Mischung aus den Constanten a_1 und a_2 der Componenten darstellen lässt durch die Gleichung:

$$a = \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2}{v_1 + v_2},$$

wenn v_1 und v_2 die gemischten Volumina bedeuten.

11) Einfluss der Temperatur. Genauere Versuche haben zuerst FRANKENHEIM und SONDHAUSS[2]) angestellt (1841 und 1846); sie finden Abnahme der »Synaphie« auch bei Wasser zwischen 0 und 4°. BRUNNER[2]) bestätigte dies. Die Steighöhen in einem Rohr von 1 *mm* Radius stellen sich nach BRUNNER dar:

Wasser . . . . $h = 15{\cdot}33 - 0{\cdot}0286\,t$
Aether . . . . $h = 5{\cdot}35 - 0{\cdot}0280\,t$
Olivenöl . . . . $h = 7{\cdot}46 - 0{\cdot}0105\,t$.

BÈDE hat die Zahlen von BRUNNER und FRANKENHEIM berechnet in der Form $a^2 = a_0^2(1 - ct)$, wenn a_0 die Constante für 0° C. bedeutet.

$a^2 = a_0^2(1 - ct)$[3]).

Substanz	x	a_0^2	c	Beobachter
Wasser	1·000	15·37	0·0019	FRANKENHEIM
„	—	15·33	0·00187	BRUNNER
„	—	15·81	0·0020	BRAUN
Terpentinöl	0·890	6·71	0·0024	FRANKENHEIM
Citronenöl I.	0·838	7·10	0·0023	„
„ II.	0·836	6·88	0·0024	„
Steinöl	0·847	6·95	0·0023	„
Alkohol	0·821	6·05	0·0024	„
„	0·927	6·41	0·0019	„
„	0·967	7·27	0·0022	„
Essigäther	0·905	6·10	0·0034	„
Aether	0·757	5·40	0·0047	„
„	—	5·35	0·00525	BRUNNER
Schwefelkohlenstoff . . .	1·290	5·10	0·0020	FRANKENHEIM
Essigsäure	1·052	8·51	0·0011	„
Ameisensäure	1·105	10·20	0·0012	„
„	1·044	10·21	0·0018	„
Schwefelsäure	1·840	8·40	0·0025	„
Zinkchlorid	1·363	10·06	0·0022	„
Kalilösung	1·274	7·70	0·0025	„
Schwefel	1·980	4·61 (100°)	0·0044	„
Olivenöl	—	7·46	0·0014	BRUNNER
Essigsäuremethyläther . .	—	6·01	0·0036	BRAUN
Aceton	—	6·75	0·0033	„

[1]) RODENBECK, Dissertat. Bonn 1879. Beibl. 4, pag. 104. 1880.
[2]) Vergl. Literatur.
[3]) Vergl. BÈDE, Mém. cour. et d. sav. et Brux. Bd. 30. Die Beobachtungen des Referenten nach nicht publicirten Versuchen. Methode: Capillarröhren.

Bestimmungen von R. Schiff[1]).

Substanz	$2a^2$ bei t	bei T	t	T	$4a$ bei T
Methylalkohol	12·025	10·215	7·3	64·2	7·636
Aethylalkohol	11·912	9·564	5·5	78·0	7·059
Propylalkohol	12·446	9·507	5·8	97·0	7·002
Isopropylalkohol[2]) . . .	11·560	9·184	5·3	81·1	6·808
Chloroform	7·749	6·484	8·0	60·6	9·121
Tetrachlorkohlenstoff . .	7·201	5·513	7·4	75·2	8·160
Aethylenchlorid	10·998	8·396	8·0	83·2	9·719
Benzol	13·937	10·660	6·7	79·8	8·646
Toluol	13·923	9·493	5·8	109·8	7·383
Xylol[3])	14·078	8·860	5·0	141·1	6·698
Metaxylol	14·073	8·874	4·0	139·2	6·718
Paraxylol	13·980	8·832	4·0	138·1	6·662
Paracymol[4])	14·036	7·707	3·4	176·2	5·586

12) Wenn die Temperatur soweit steigt, dass $a^2 = 0$ wird, so soll die Flüssigkeit in den Cagniard'schen Zustand übergehen[5]). Für Aether stimmt die aus der Brunner'schen Zahl berechnete Temperatur mit der beobachteten. Doch scheint die Flüssigkeit vor Eintritt der kritischen Temperatur oft eine Depression zu erfahren; z. B. soll flüssige schweflige Säure[6]) bei niedrigen Temperaturen im Capillarrohr tiefer stehen, bei zunehmender Temperatur steigen, bei 69° C. innen und aussen gleich hoch, bei noch höheren im engeren höher stehen als im weiteren Rohre. — Es ist sonach nicht leicht, den Gang von a oder a^2 (mit Elimination des Randwinkels) zu ermitteln.

Literatur über Constanten.

Melde, Schr. d. Ges. z. Beförd. d. ges. Naturw. z. Marburg Bd. 9, pag. 7—71. 1868. Wasser, wässrige Lösung von Pikrinsäure, $CuSO_4$, Gummi, Essigsäure, Alkohol, alkoholische Colophoniumlösung, alkoholische Tanninlösung. Methode: Flache Blasen.

Buliginsky, Pogg. Ann. 134, pag. 440. Wasser, KNO_3 in Wasser, NH_4Cl in Wasser. Methode: Steighöhen.

Quincke, Capconst. geschmolzener Körper. Berl. Monatsber. 1868, pag. 350; Pogg. Ann. 135, pag. 621; 138, pag. 141. Verschiedene Methoden.

Meusbrugghe, Mém. cour. et Mém. d. sav. étr. d. Brux. 34, pag. 1—67 (eine Anzahl verschiedener Flüssigkeiten).

Quincke, Gemeinsch. Oberfl. Pogg. Ann. 39, pag. 1—89 (cf. oben).

Valson, Moduln der Capillarität. Compt. rend. 70. 1870; Ann. chim. phys. (4) 20, pag. 361—391; Compt. rend. 74, pag. 103. Salzlösungen, welche 1 Grammäqu. im Liter enthalten, zeigen specifische Cohäsion, welche sich additiv aus den Bestandtheilen zusammensetzen. Tritt für das Metall 1 ein Metall 2 ein, so ändert sich die Constante um den betreffenden Modul, unabhängig vom Metalloid oder Säureradicul und umgekehrt. Diese Moduln sind:

---

1) R. Schiff, Chem. Ber. 15. pag. 2965. 1882 (Methode: Höhendifferenz in zwei Capillarröhren, die resp. 0·65 und 1·30 *mm* weit waren).

2) Vielleicht nicht vollständig rein.

3) Fast ausschliesslich Orthoxylol.

4) Fast ausschliesslich.

5) Wolf, Pogg. Ann. 98. — Mendelejeff, Pogg. Ann. 141, pag. 618. 1870.

6) Vergl. z. B. Clark, Chem. News 40, pag. 8. 1879.

NH_4	0·0 *mm*	Mn½	2·5 *mm*	Ag	5·5 *mm*	(CO_3)	1·1 *mm*
Li	0·05 „	Fe½	2·5 „	Pb½	5·9 „	(SO_4)½	1·2 „
Na	1·2 „	Zn½	2·7 „	Tl½	7·9 „	(SO_3)½	1·3 „
Mg½	1·4 „	Cu½	2·9 „	Cl	0·0 „	(S_2O_3)½	1·4 „
Ca½	1·4 „	Ba½	3·9 „	(CO_3)½	0·5 „	Br	2·1 „
K	1·5 „	Cd½	4·3 „	NO_3	1·0 „	J	3·9 „

Die Steighöhe ist dabei gedacht in einer Röhre von 0·5 *mm* Durchmesser. Die Aenderung von a^2 ist also $\frac{1}{4}$ der mitgetheilten Zahlen.

SCHOLZ, Constante zusammengesetzter Aether. POGG. Ann. 148, pag. 62. Bequeme Zusammenstellung der Resultate vergl. Fortschr. 1873.

DUCLAUX, Compt. rend. 70, pag. 933; Ann. chim. phys. (4) 21, pag. 378—435; Compt. rend. 78, pag. 951. SALLERON, Mondes (2) 34, pag. 223. Alkoholgehalt des Weines mit Tropfenzahl zu bestimmen. — Im ersten Aufsatz auch Constante vieler anderer Substanzen mit fallenden Tropfen ermittelt.

QUINCKE, Salzlösungen. Münch. Ber. 1876, 1, pag. 3—19; POGG. Ann. 160, pag. 337, 560 (30 verschiedene Substanzen, theils von verschiedener Concentration).

DUCLAUX, Alkohole und Fettsäuren und Mischungen derselben. Ann. chim. phys. (5) 13, pag. 76—101. 1878.

PISATI, Geschmolzener Schwefel. Acc. dei Lincei (3) 1, pag. 105; Fortschr. 1877; Beibl. 1877.

TRAUBE, Chem. Ber. 17, pag. 2294—2316. 1884; Beibl. 9, pag. 229. 1884. Capillarconstanten von Alkoholen, Säuren und Ester der Fettsäurereihe in Lösungen. Beziehungen zur Constitution und zum Moleculargewicht. Journ. f. pr. Chem. N. F. 31, pag. 177—218. 1885; Beibl. 9, pag. 613. 1885.

R. SCHIFF, Capillarconstanten und Capillaritätsäquivalente der einfachen Körper. LIEB. Ann. 223, pag. 47—106; Beibl. 8, pag. 457. 1884; Mem. della R. Acc. dei Lincei (3) 19. 1884; Beibl. 9, pag. 559. 1885; enthält Bestimmungen der Constanten für eine sehr grosse Zahl organischer Stoffe bei verschiedenen Temperaturen.

TRIMBERG, Einfluss der Temperatur. WIED. Ann. 30, pag. 545. 1887.

IV. Die Capillarconstante an der gemeinschaftlichen Grenze zweier Flüssigkeiten.

13) Was wir seither Oberfläche einer Flüssigkeit nannten, ist gewöhnlich die gemeinschaftliche Grenze derselben mit Luft resp. Luft und dem Dampf der Flüssigkeit. Doch zeigt sich kein messbarer Unterschied, wenn die Luft, soweit möglich, entfernt wird.

Schichtet man auf eine Flüssigkeit 2 eine andere 1, so zeigt die gemeinschaftliche Grenze eine Capillarconstante α_{12}. Um dieselbe zu messen sind die früher angegebenen Methoden anwendbar; man muss nur dem veränderten hydrostatischen Druck Rechnung tragen. Ist z. B. eine Capillarröhre vom Radius r, in welcher eine Flüssigkeit 2 zur Höhe h angestiegen ist, vollständig untergetaucht in einer Flüssigkeit 1, so ist die Gleichgewichtsbedingung

$$\alpha_{12} \cos \omega_{12} \cdot 2 r \pi = r^2 \pi h (\sigma_2 - \sigma_1).$$

Taucht eine Capillare in eine Flüssigkeit 2 und ist von dieser in ihr angestiegen eine Säule von der Höhe h_2; befindet sich über ihr in der Röhre eine Säule von der Höhe h_1 der Flüssigkeit 1, so ist

$$(\alpha_1 \cos \omega_1 + \alpha_{12} \cos \omega_{12})\, 2 r \pi = (h_1 \sigma_1 + h_2 \sigma_2)\, r^2 \pi.$$

Ebenso wird, wenn 2 wieder die schwerere Flüssigkeit bedeutet, für eine ebene Wand

$$\frac{z_0^2}{2} = \frac{\alpha_{12}(1 - \sin\omega_{12})}{\sigma_2 - \sigma_1},$$

daher, wenn für $\omega_{12} = 0$ gesetzt wird $z_0 = a_{12}$:

$$\frac{\alpha_{12}}{\sigma_2 - \sigma_1} = \frac{a_{12}^2}{2}.$$

14) Bestimmungen solcher Constanten sind namentlich von QUINCKE[1]) gemacht worden. Die Constante an der gemeinschaftlichen Grenze von 1 und 2 soll bezeichnet werden als $\underset{\alpha}{1/2}$ oder, da im Folgenden keine Verwechselung mit elektrischen Potentialdifferenzen zu fürchten ist, mit 1/2.

	α_1	α_2	α_{12}
Quecksilber-unterschwefligsaures Natron ($\varkappa = 1{\cdot}125$)	55·03	7·90	45·11
„ -Wasser	55·03	8·25	42·58
„ -Alkohol ($\varkappa = 0{\cdot}791$)	55·03	2·60	40·71
„ -Chloroform	55·03	3·12	40·71
„ -Chlorwasserstoff ($\varkappa = 1{\cdot}1$)	55·03	(7·15)	38·41
„ -Schwefelkohlenstoff	55·03	3·27	37·97
„ -Olivenöl	55·03	3·76	34·19
„ -Steinöl ($\varkappa = 0{\cdot}798$)	55·03	3·23	28·94
„ -Terpentinöl	55·03	3·03	25·54
Schwefelkohlenstoff-Wasser	3·27	8·25	4·26
Steinöl-Wasser	3·23	8·25	3·83
Chloroform-Wasser	3·12	8·25	3·01
Olivenöl-Wasser	3·76	8·25	2·09
Terpentinöl-Wasser	3·03	8·25	1·18
Olivenöl-Alkohol	3·76	2·60	0·23

15) Während alle theoretischen Betrachtungen zu dem Resultate geführt hatten, dass die obere Flüssigkeit in einer Capillaren nur wie eine Belastung wirke, ergeben die Versuche ein anderes Resultat. MENSBRUGGHE[2]) hat versucht, Theorie und Beobachtung in Einklang zu setzen; es sei niemals möglich in Capillarröhren die Bedingungen, welche die Theorie voraussetzt, bei Anwendung zweier Flüssigkeiten herzustellen. Indessen ergeben auch andere Methoden und Beobachtungen, dass nicht $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_{12}$ ist.

V. Versuche zur Erläuterung der allgemeinen Theorie. Folgerungen aus derselben.

16) Experimenteller Nachweis der Oberflächenspannung in ebenen Lamellen. DUPRÉ[3]) hat mehrere einfache Versuche beschrieben, darunter den folgenden: Eine rechteckige, vertikale Metallplatte, deren unterer Rand horizontal ist, besitzt an diesem unteren Rand einen rechtwinkligen Ausschnitt. Man benetzt die Platte mit Seifenlösung, legt an das untere Ende des Ausschnittes ein leichtes Stäbchen und erzeugt in diesem Rechteck, dessen eine

1) QUINCKE, POGG. Ann. 139, pag. 1—89. 1870.

2) MENSBRUGGHE, Bull. d. Brux. 40, pag. 447, 669. 1876.

3) Vergl. PLATEAU, Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Paris 1873. 8°. 2 Bde.; T. I, pag. 267. — DUPRÉ, Ann. chim. phys. IV, T. VI, VII, IX, XI u. XIV. 1865—1868.

bewegliche Seite durch das Stäbchen gebildet wird, eine Seifenlamelle. Zieht man das Stäbchen herab, so schnellt es beim Loslassen wieder in die Höhe. Die Spannung der Seifenlamelle, welche ein Minimum der Oberfläche anstrebt, hebt sein Gewicht.

VAN DER MENSBRUGGHE[1]) hat, daran anschliessend, einige andere Versuche gegeben: In einem rechtwinkligen Drahtrahmen erzeugt man eine Seifenlamelle. An einer verticalen Seite des Rahmens ist ein Seidenfaden befestigt, welcher am freien Ende ein kleines Gewichtchen (ca. $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{2}$ *gr*) trägt. Auf der horizontal oder etwas schräg geneigten Lamelle nimmt der Seidenfaden keine bestimmte Lage oder Gestalt an. Er theilt die Lamelle in zwei beliebige Theile. Sprengt man den einen Theil der Lamelle, indem man etwas Fliesspapier an dieselbe bringt, so nimmt der Faden jetzt eine kreisförmige Gestalt an; zieht man den Faden in der jetzt vertical gestellten Lamelle herab, so zieht er sich losgelassen, wieder in die Höhe. Das Gewicht am Faden muss nach Maassgabe der Grösse und Spannung der Lamelle ausgeglichen sein (cfr. GAUSS'sche Theorie, Anwendungen). Legt man auf eine ebene Seifenlamelle einen zusammengeknüpften Seidenfaden und sprengt die Lamelle in seinem Innern, so nimmt er Kreisgestalt an.

17) Die umfassendsten Untersuchungen über capillare Oberflächen sind von PLATEAU ausgeführt und mit sehr ausführlicher Berücksichtigung der Literatur (bis zum Jahre 1870) im oben angeführten Werke zusammengestellt. Wir können von seinen Versuchen hier nur wenige mittheilen und verweisen im Uebrigen auf seine Schrift. — Erzeugt man zwischen beliebig gestalteten Drähten eine Seifenlamelle, welche keine geschlossene Oberfläche bildet, so ist der (Luft-) Druck auf die Lamelle beiderseits der gleiche, der capillare Druck also gleich Null und man erhält daher Oberflächen, deren mittlere Krümmung $\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ gleich Null ist. — Entzieht man eine Flüssigkeitsmasse der Einwirkung der Erdschwere, umgiebt man also Oel mit einer specifisch gleich schweren Mischung von Alkohol und Wasser, so nimmt das Oel immer Formen an, welche constanten capillaren Druck, d. h. constante mittlere Krümmung besitzen. Erzeugt man z. B. zwischen zwei gleichen Kreisringen vom Radius R einen Oelcylinder, so ist derselbe an den Kreisringen nicht eben abgeschnitten, sondern daselbst von Kugelcalotten begrenzt; ihr Krümmungsradius ist $= 2R$. Zieht man die Ringe weiter auseinander, so schnürt sich die Flüssigkeit in der Mitte zusammen; der Krümmungsradius der Kugelcalotten nimmt ab. Man kann nur durch fortgesetztes Entfernen der Ringe von einander bewirken, dass die Endflächen eben werden; dann ist auf den Mantelflächen $R = -R'$; sie sind Oberflächen des Catenoids. — Man kann einen Cylinder auch so ausziehen, dass er mehrere Einschnürungen bekommt, die sich periodisch wiederholen. Diese Form nennt PLATEAU das Unduloid. Man erhält es am besten, wenn man Oel auf einem vorher gut mit Oel benetzten Eisenstab anbringt, während der Stab in dem Alkoholwassergemisch sich befindet. Ist der Stab sehr dünn und die Oelmenge beträchtlich, so können die Einschnürungen so eng werden gegenüber den Anschwellungen, dass die Gestalt der letzteren sich kaum noch von einer Kugel unterscheidet (l. c. Tab. I, pag. 84). Der Eisencylinder ist wesentlich, weil diese Formen nicht mehr stabile Gleich-

[1]) Vergl. PLATEAU, l. c., pag. 274. — V. D. MENSBRUGGHE, Bell. de l'Académie de Belgique (2), Tab. XXII, pag. 308. 1866.

gewichtsfiguren sind. PLATEAU findet experimentell, dass ein Cylinder mit kreisförmiger Basis nicht mehr stabil ist, sobald seine Länge gleich 3 bis 3·6 mal der Länge des Durchmessers wird. (l. c. T. II. pag. 174). Die Flüssigkeit trennt sich dann in zwei gleiche Theile; der Zusammenhang zwischen beiden ist vorher hergestellt durch einen schmalen Cylinder, welcher sich in kleine Tröpfchen auflöst (l. c. § 375). Löst sich ein langer Cylinder in Tröpfchen auf, so wird, wie eine einfache Rechnung ergiebt, der Durchmesser der Tröpfchen zu dem des Cylinders sich verhalten wie 1·82 : 1; der Abstand zweier benachbarten Tröpfchen zu dem Durchmesser des Cylinders wie 2·18 : 1 (pag. 206). Dieses Zusammenziehen in Tropfen beobachtet man z. B. wenn ein Eisendraht durch einen galvanischen Strom geschmolzen wird; wenn man einen Seidenfaden in Oel taucht und heraushebt; ferner beim Ausfliessen von Flüssigkeitsstrahlen[1]). Sie kommen wieder in Betracht bei der Form, welche auf eine ebene Fläche auffallende Tropfen annehmen, indem die von ihm zuerst radial ausgehenden Aeste sich in solche Tröpfchen spalten. Es sind die von einem grösseren Tropfen herumspritzenden kleinen.[2]) Wenn geschmolzenes Glas sich zu Fäden ausziehen lässt, oder wenn der Seidenwurm glatte Fäden spinnt, so rührt dies von der mehr teigigen Beschaffenheit des Materiales. Innere Reibung erweitert die Stabilitätsgrenzen. Für reibungslose Flüssigkeiten hat HAGEN[3]) statt des von PLATEAU experimentell ermittelten Verhältnisses 3 bis 3·6 auf Grund nur angenähert zutreffenden Voraussetzungen 2·828 ausgerechnet; PLATEAU findet nach einer Methode, deren Princip ihm LAMARLE angegeben hatte, den Werth π[4]). BEER[5]) kommt zur gleichen Zahl.

18) Eine weitere, sehr ausführliche Versuchsreihe PLATEAU's bezieht sich auf das Gleichgewicht ebener oder gekrümmter Seifenlamellen, welche gemeinschaftliche Kanten oder Flächen besitzen[6]). Angenommen, etwa auf einer Flüssigkeit, schwimmen zwei sich berührende Seifenblasen; sie bestehen aus Theilen von Kugelflächen. Der Krümmungsradius der grösseren freien Fläche sei ρ, derjenige der kleineren ρ', derjenige der gemeinschaftlichen Scheidewand r. Die capillaren Drucke, welche die Lamellen ausüben, seien resp. p, p' und q.

Dann ist die Gleichgewichtsbedingung

$$q = p' - p.$$

Ferner (da alle Oberflächen die gleiche Capillarconstante haben sollen),

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{\rho}; \quad \frac{p'}{q} = \frac{r}{\rho'}.$$

Daraus folgt

$$r = \frac{\rho\rho'}{\rho - \rho'}.$$

[1]) Vergl. MAGNUS, POGG. Ann. Bd. 95 u. 106; RAYLEIGH, Literaturverz.

[2]) WORTHINGTON, Literaturverzeichniss.

[3]) HAGEN, POGG. Ann. Bd. 80, pag. 559. 1850.

[4]) l. c. T. II. pag. 249; vergl. daselbst die Rechnungen und die ausführliche Besprechung der Form von Flüssigkeitsstrahlen.

[5]) BEER, POGG. Ann., Bd. 96, pag. 1, 210. 1855. Vergl. auch BEER, Elasticität u. Capillarität, Leipzig, TEUBNER.

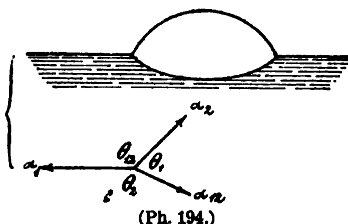
[6]) Ueber die Erfahrungen zur Herstellung guter Lösung vergl. l. c. T. I, pag. 441.

Ist z. B. $r = \infty$, so ist $\rho = \rho'$; ist $\rho' = \frac{\rho}{2}$, so wird $\rho = r$ etc. (vergl. T. I, pag. 294—314, die Prüfung verschiedener Fälle). Eine einzelne Seifenblase, welche auf einer von ihr benetzten ebenen Platte liegt, muss immer unter einem Winkel von 90° gegen dieselbe anstossen, wie aus dem Specialfalle $r = \infty$ sofort folgt. (MENSBRUGGHE; cfr. PLATEAU, l. c. T. I, pag. 388, pag. 336).

Stossen mehrere ebene Lamellen in einer gemeinschaftlichen Kante oder Ecke zusammen, so müssen sich dieselben symmetrisch um den gemeinschaftlichen Theil gruppiren. Stabil sind die Figuren nur, wenn sich drei Lamellen in einer Kante, vier in einem Punkt treffen (vergl. PLATEAU, l. c. T. I, pag. 314 ff.).

19) Ausbreitung von Flüssigkeiten auf anderen. Ein Tropfen einer Flüssigkeit 2 befinde sich auf einer anderen 1; er nimmt im Allgemeinen eine linsenförmige Gestalt an (Fig. 194). Auf einen Punkt der gemeinschaftlichen Kante wirken die Kräfte in Richtung der Tangenten α_1, α_2 und α_{12}. Die Gleichgewichtsbedingung ist dann

$$\frac{\alpha_1}{\sin\theta_1} = \frac{\alpha_2}{\sin\theta_2} = \frac{\alpha_{12}}{\sin\theta_{12}}.$$


(Ph. 194.)

Construirt man daher ein Dreieck aus den Seiten α_1, α_2 und α_{12}, so geben die Aussenwinkel desselben die Winkel θ_1, θ_2 und θ_{12}. Ist $\alpha_1 > \alpha_2 + \alpha_{12}$, so ist das Dreieck unmöglich, die Flüssigkeit 2 breitet sich auf der Flüssigkeit 1 aus[1]).

Beispiele solcher Ausbreitung, welche oft mit Geschwindigkeiten von mehreren Metern in der Sekunde erfolgen, sind die von Oel auf ganz reinen Wasserflächen; ferner Wasser auf ganz reinem Quecksilber. Dass letzteres, wie es die Theorie fordert, stattfindet, hat zuerst QUINCKE[2]) gezeigt. Die geringsten Verunreinigungen des Quecksilbers bewirken aber schon, dass keine Ausbreitung mehr erfolgt, sondern das Wasser in Form einer mehr oder weniger flachen Linse auf dem Quecksilber liegen bleibt.

An einem derartigen Tropfen lassen sich mittels eines von QUINCKE[3]) angegeben Versuches schön die Bedingungen der Ausbreitung erläutern. Benetzt man ein dünnes Glasfädchen mit etwas Oel und streicht die Hauptmenge desselben zwischen den Fingern ab, berührt dann mit dem Glasfädchen die obere Wasserfläche, so wird der Tropfen flacher (α_2 ist jetzt aus dem Werthe 8 übergegangen in 2·09). Sticht man mit dem Faden bis zur Fläche Hg/H_2O durch, so breitet sich der Tropfen noch stärker aus. Ist die aufgebrachte Oelmenge sehr gering, so geht dasselbe nicht über den Rand des Tropfens heraus auf eine andere Contactfläche.

Bringt man endlich etwas Oel auf die Quecksilberfläche, in die Nähe des Tropfens, so bewegt er sich von der berührten Stelle fort, weil das Oel sich nicht momentan um den ganzen Tropfen herum über das Quecksilber ausbreitet. Es ist daher auf der einen Seite der Tropfen gezogen mit der Spannung Hg/Luft = 55, auf der andern mit der Hg/Oel + Oel/Luft = 34·2 + 3·8 = 38.

---

[1]) MARANGONI, Sull' espansione delle goccie d'un liquido gallegianti sulla superfice die altro liquido. Pavie. 1865.

[2]) QUINCKE, POGG. Ann. 139, pag. 67.

[3]) QUINCKE, l. c., pag. 68.

20) Die Bewegung von kleinen Körperchen, z. B. Tröpfchen von Stearin (welche man auf eine Wasserfläche tropfen liess), wenn man auf der einen Seite derselben etwas Seifenwasser auf die Wasserfläche bringt, erklären sich ebenso. Desgleichen die Rotation von Campfer etc. auf Wasser.

Ein Wassertropfen in einer horizontalen Röhre bewegt sich, wenn man auf seinen einen Meniskus etwas Oel bringt, nach dem reinen Meniskus hin. Ein Quecksilbertropfen nach der entgegengesetzten Seite — wie es die Zahlen in § 14 fordern.

Legt man einen flachen Quecksilbertropfen in eine horizontale Röhre, füllt dieselbe mit verdünnter Schwefelsäure und leitet einen galvanischen Strom hindurch, so bewegt sich der Tropfen in der Richtung des Stromes. Die Capillarconstante wird an derjenigen Stelle, wo sich Wasserstoff aus Queksilber abscheidet, grösser. — Ein Wassertropfen, auf Quecksilber gelegt, zeigt bei Durchleiten eines Stromes vom Wasser zum Quecksilber resp. umgekehrt, Gestaltsänderungen, welche stets in dem Sinne gehen, als sei durch Wasserstoffabscheidung die Cappillaritätsconstante vergrössert, durch Sauerstoffabscheidung verkleinert worden. — Unterschwefligsaures Natron, überhaupt reducirende Substanzen, dem Wasser zugesetzt, wirken wie Wasserstoffentwickelung auf galvanischem Wege; umgekehrt oxydirende Mittel, z. B. Chromsäure[1]).

21) Ein Tröpfchen eines geschmolzenen Salzes, welches an einem Platindraht haftet und denselben benetzt, bewegt sich bei ungleichmässigem Erhitzen von der wärmeren Stelle weg. Diese Erscheinung, die man früher wohl einer abstossenden Kraft der Wärme zuschob, folgt daraus, dass die Capillarconstante mit steigender Temperatur abnimmt.

22) Entstehung von Emulsionen. GAD[2]) hat beobachtet, dass Oel, welches etwas freie Fettsäure enthält, in eine Lösung von Soda oder Aetznatron gebracht, freiwillig sich in immer kleinere Tröpfchen spaltet, welche sich sehr fein in der Flüssigkeit vertheilen und in ihr lange suspendirt bleiben. Man kann also auf diesem Wege, ohne zu schütteln, eine Emulsion herstellen. QUINCKE[3]) hat die Erscheinungen verfolgt und auf Capillaritätswirkungen zurückgeführt. Hängt man eine durchbohrte Glasplatte auf Wasser, führt durch das Loch einen Oeltropfen ein und lässt schliesslich in diesem etwas Sodalösung oder 0·5§ige Natronlösung untersinken, so bildet sich aus dem kleinen Tropfen Natronlauge (welcher an der untern Kuppe des Oeltropfens liegen bleibt) eine feste Haut von Seife. Kommt diese allmählich mit dem Wasser in Berührung, so löst sie sich und die Seifenlösung breitet sich auf dem Oele aus; denn es ist

$$\text{Olivenöl}/H_2O = 2{\cdot}30$$
$$\text{Olivenöl}/\text{Seifenwasser}/\text{Wasser} = \text{Olivenöl}/\text{Seifenwasser} + \text{Seifenwasser}/\text{Wasser} = 0{\cdot}36 + 0,$$

also letztere Zahl um 84§ kleiner als erstere. Bei der Ausbreitung flacht sich der Oeltropfen ab. Gleichzeitig findet Flüssigkeitsströmung nach dem Ausbreitungscentrum hin statt. Dort wird die Gruppe für kurze Zeit concav und einzelne Oeltröpfchen splittern ab. — Aehnlich erfolgt die freiwillige Emulsionsbildung[4]).

1) PAALZOW, POGG. Ann. 104, pag. 420. 1858. Vergl. übrigens darüber das Capitel Electricität.

2) GAD, DU BOIS-REYMOND's Archiv für Anatomie und Physiologie. 1878.

3) QUINCKE, PFLÜGER's Archiv. 1879, Bd. 19; Beibl. 1880, pag. 110.

4) Betreffs einer anderen Erklärungsweise, welche das chemische Vereinigungsbestreben von Oelsäure und Alkali zu Hilfe nimmt, vergl. BRÜCKE, Sitzber. Wien. Akad. 79. 1879. April. — Beibl. 1880, pag. 109.

23) Haltbarkeit der Emulsionen. Haltbar sind nach QUINCKE (l. c.) Emulsionen und Schaum (eine Emulsion mit Luft) nur dann, wenn sie aus heterogenen Substanzen bestehen, von denen die eine sich auf der andern ausbreitet beispielsweise Oel und Wasser (fettiges Wasser). Gesetzt nämlich, es entstehe in der bedeckenden Oelschicht durch äussere Veranlassung ein Loch, so wird dies wieder zugezogen, da das Oel sich ausbreitet, weil

$$H_2O/Luft > Oel/Luft + Oel/H_2O.$$

Haltbar sind also allgemein Emulsionen nur, wenn im Ganzen drei Flüssigkeiten (Gase eingeschlossen) vorhanden sind, die der Bedingung genügen

$$3/1 > 2/1 + 2/3.$$

Sie sind um so haltbarer, je verschiedener die beiden Seiten der obigen Ungleichung sind.

Der Vortheil, welchen die Anwendung von Gummilösung zur Herstellung von Emulsionen bietet, erklärt sich daraus, dass fettes Oel/Gummilösung < fettes Oel/H_2O ist, wie QUINCKE in besonderen Versuchen gezeigt hat.

24) Weitere Anwendungen der Capillaritätserscheinungen. — Das Schwimmen nicht benetzter Nähnadeln, dünner Metallbleche, die Erscheinung, dass Wasserspinnen auf demselben nicht untersinken; ferner dass Wassertropfen auf einer mit Lycopodium bestäubten Glassplatte oder auf einem mit feinen Härchen besetzten Blumenblatt, wie Quecksilber, liegen bleiben u. dergl. mehr erklären sich aus der Bedeutung der Grösse α. Ist u die Länge der Centrumlinie des an der Oberfläche zu tragenden Körpers, p sein Gewicht in Milligrammen, so ist der höchste Werth, den p annehmen kann, ohne dass der Körper untersinkt, $p = \alpha \cdot u$.

Quecksilber tropft aus einer engen Röhre vom Radius r aus, sobald der Druck p, unter welchem der Meniskus steht (gemessen in Milligrgew./mm^2) gleich oder grösser ist als α_{Hg}/r. Bringt man den Druck hervor durch eine Quecksilbersäule von h Millim. Höhe und bezeichnet σ das specifische Gewicht des Quecksilbers, so ist

$$\sigma \cdot h \gtreqless \alpha_{Hg}/r.$$

Für $r = 0{\cdot}1\ mm$ ergiebt sich daraus $h \gtreqless 45\ mm$. Die Höhe h wird kleiner, sobald α abnimmt; z. B. durch Eintauchen der Spitze in Wasser, Oel etc., oder durch einen Strom, welcher Sauerstoff an der Spitze abscheidet. — Zur Ermittelung der Weite von Poren, welche dem Quecksilber den Durchtritt gestatten, lässt sich obige Relation verwenden. —

Ueberspannt man einen beiderseits offenen Glascylinder an einem Ende mit Leinwand, so trägt derselbe gleichfalls Quecksilber. Taucht man die mit Leinwand bezogene Seite in ein Gefäss voll Wasser, so tritt dasselbe durch die Leinwand hindurch. Kehrt man den Cylinder um, so dass die angefeuchtete Leinwand nach oben kommt und taucht ihn wieder in Wasser, so entweicht die Luft nicht durch die Leinwand. Die Flüssigkeitsmembran hält in Folge ihres capillaren Druckes dem Luftdruck im Innern des Cylinders Gleichgewicht[1]). Daher die Undurchlässigkeit benetzter Kleider für Luft.

25) Haften von Quecksilber in ausgekochten Röhren. Bedingungen des Siedens von Flüssigkeiten. Quecksilbersäulen, welche bis zu 2 m

---

[1]) THOMSON, Nature 22, pag. 548. 1880; vergl. übrigens JAMIN, Compt. R. 50, pag. 172; Phil. Mag. (4) 19, pag. 204—207.

lang sein können, haften in Glasröhren, wenn die Luft möglichst entfernt ist. Sie können sich nur loslösen oder das Quecksilber kann sich von einander trennen, wenn irgendwo eine kleine Blase entsteht. Da dieselbe aber mit dem Radius 0 anfangen muss, so ist dazu ein unendlich grosser Zug erforderlich. Das Gleichgewicht ist aber instabil, da mit wachsendem Radius der Capillardruck abnimmt[1]).

Die Bedingung, dass im Innern einer erhitzten Flüssigkeit sich eine Dampfblase bildet, ist: die Dampfspannung im Innern der Blase muss gleich oder grösser sein als 1) der Luftdruck, der auf der Oberfläche der Flüssigkeit lastet; plus 2) dem hydrostatischen Druck für die betr. Horizontalebene, in welcher die Blase entstehen soll; plus 3) dem Capillardruck. Letzterer ist Anfangs unendlich gross. Ganz luftfreie Flüssigkeiten kochen daher nicht, sondern verdampfen ohne Blasenbildung von der Oberfläche (Ueberhitzen). Entsteht aber irgendwo eine Blase so tritt nun, wegen der Instabilität einerseits, der Temperatur der Flüssigkeit, oberhalb der normalen Siedetemperatur andererseits stürmische Dampfentwickelung ein (Siedevorzüge).

26) Versuche zur Bestimmung der Entfernung, bis zu welcher die Kräfte der Cappillarität eine merkliche Wirkung äussern (Radius der Wirkungssphäre l). PLATEAU (l. c. T. I., pag. 204—210) hat versucht, einen oberen Wert für diese Grösse zu finden. Er ging dazu aus von der Ueberlegung, dass die Spannung einer Lamelle so lange constant bleiben muss, als ihre Dicke grösser ist als der doppelte Radius der Wirkungssphäre. Lässt man daher die Dicke einer Seifenblase stetig abnehmen, so müsste der Druck constant bleiben, so lange dieser Bedingung genügt ist und dann allmählich abnehmen. Es ist ihm nicht gelungen, diese Grenze zu erreichen, und er schloss aus seinen Versuchen, dass der Radius l der Wirkungssphäre für Glycerin grösser sein müsse als 1/17000 *mm*. — LEIDENFROST schloss aus dem grössten Durchmesser, welchen eine Seitenblase bei gegebener Menge Seifenwasser annehmen kann, $l < 0{\cdot}00089$ *mm*. — QUINCKE[2]) hat l in der folgenden Weise bestimmt. Er stellte sich dünne keilförmige Silberschichten auf Glas dar, tauchte die so überzogenen Glasplatten in Flüssigkeiten und bestimmte diejenige Stelle, wo der Randwinkel einen constanten Werth annimmt; von da ab muss die Dicke der Silberlamelle gleich resp. grösser als l sein. Die Dicke der Silberschicht wurde nach Verwandlung in Jod- oder Schwefelsilber aus der Farbe der Lamelle berechnet. So fand er

$l > 0{\cdot}0000542$ *mm* für H_2O/Ag/Glas
$l = 0{\cdot}0000483$ „ „ Hg/Ag_2S/Glas
$= 0{\cdot}000059$ „ „ Hg/AgJ/Glas
$= 0{\cdot}000080$ „ „ Hg/Collodium/Glas.

Im Mittel ist l etwa gleich $\frac{1}{10}$ Wellenlänge Licht von mittlerer Brechbarkeit.

BOLTZMANN[3]) berechnet die Grösse λ, um welche die Distanz zweier Moleküle vergrössert werden muss, damit keine merkliche Anziehung mehr zwischen ihnen stattfindet, als $\lambda = \alpha/P$, wenn P die Zugfestigkeit der Flüssigkeit bedeutet. Indem er hierfür den an den festen Körpern ermittelten Werth nimmt, findet er für

	Fe	Pt	Au	Ag	Cu	Zn	
λ	1·6	5·0	5·0	3·1	1·5	6·3	10^{-6} *mm*.

[1]) Vergl. J. MOSER, POGG. Ann. 160, pag. 138.
[2]) QUINCKE, POGG. Ann. Bd. 137, 1869, pag. 402.
[3]) BOLTZMANN, Wien. Anz. 1877, pag. 85.

Lüdtge[1]) fand, dass eine allmählich ablaufende Lamelle eine grössere Spannung zeige als eine derselben Flüssigkeit, die auf constanter Dicke gehalten wird. Er schloss daraus, dass entgegen den sonstigen Ansichten die Spannung der Lamellen zunehme mit abnehmender Dicke und fand eine Bestätigung in folgendem Versuch: In einer vertikalen Lamelle befindet sich ein kreisförmiger Seidenfaden, dessen Inneres keine Lamelle enthält. Der Faden liegt Anfangs am unteren Ende der Lamelle. Wenn dieselbe allmählich dünner wird, so steigt der Faden in die Höhe. Mensbrugghe[2]) erklärt den ersten Versuch aus Temperaturverschiedenheiten; den zweiten aus dem Princip, dass der Schwerpunkt des Systems möglichst tief liegt.

27) Aus diesem kleinen Werthe von l erklärt sich die ausserordentliche Empfindlichkeit der Capillaritätserscheinungen. Eine kleine, optisch nicht nachweisbare Spur Oel auf den Meniskus von Wasser in einem Capillarrohr gebracht, lässt das Wasser auf die Hälfte seiner ursprünglichen Steighöhe fallen (vergl. ferner die Ausbreitungserscheinungen). Daher ist grösste Reinlichkeit Erforderniss bei Capillaruntersuchungen; besonders einflussreich sind Fette und Oele, namentlich Flüssigkeiten gegenüber, welche dieselbe nicht auflösen.

Gefässe, welche für Capillarversuche dienen, seien daher auf das Sorgfältigste gereinigt. Platin durch Ausglühen; Glas womöglich durch Erhitzten mit Schwefelsäure und sorgfältiges Abspülen; Capillarröhren stellt man am besten her aus einer mit warmer Schwefelsäure und destillirtem Wasser gereinigten Glasröhre, welche man vor der Lampe auszieht. Man hebt dieselbe beiderseits zugeschmolzen auf. Soll Quecksilber so rein sein, dass sich Wasser auf demselben ausbreitet, so muss das auf chemischem Wege gereinigte Quecksilber oft stundenlang durch eine hohe Schicht warmen, destillirten Wassers in Form eines feinen Staubregens hindurch gefallen sein. Man sammelt unten das trocken abfliessende Quecksilber, um es oben wieder einzugiessen[3]). Auch das Gefäss, in welchem man die Erscheinung zeigen will, muss wiederholt mit derart gereinigtem Quecksilber ausgespült werden, ehe der Versuch gelingt. Uebrigens scheint auch Bewegung des Quecksilbers von Einfluss zu sein. Auf bewegtem Quecksilber breitet sich Wasser leichter aus. Es wird, wie mir scheint, durch Reibung der Tropfen in der Richtung der Bewegung ausgezogen.

Die bekannten Moser'schen Hauchbilder erklären sich nach Quincke[4]) aus Tröpfchen, welche aus den stärker verunreinigten Stellen sich mit grösserem Randwinkel absetzen und daher dort einen Bezug mit matterem Glanz geben als an denjenigen Stellen, welche durch vorheriges Behauchen und Verdampfenlassen der Flüssigkeitsschicht gereinigt sind. Auch die Daguerrotyps bestehen nach ihm aus Quecksilbertröpfchen von verschiedener Krümmung. Die Richtigkeit dieser Erklärung erhellt unmittelbar daraus, dass man Daguerrotyps, wie der Verfasser aus Versuchen weiss, welche A. Knop schon kurz nach der Daguerre'schen Entdeckung auf Anregung von Wöhler unternahm, galvanoplastisch sehr genau copiren kann. — Damit hängen andere Erscheinungen zusammen. Ein matter Lack besteht aus kleinen, hohen Tröpfchen, ein glänzender aus einer

---

[1]) Lüdtge, Pogg. Ann. 139, pag. 620—628.

[2]) Meusbrugghe, Bull. d. Brux. (2) 30, pag. 322; Pogg. Ann. 141, pag. 608.

[3]) Vergl. über die Vorsichtsmaassregeln Quincke, Pogg. Ann. 139, pag. 67.

[4]) Quincke, Wied. Ann. 2, pag. 145—194. 1877, insbes. pag. 187 ff. Vergl. auch Quincke, Pogg. Ann. 108, pag. 339. 1859.

ebenen Fläche oder breiten Tröpfchen. Schellack in Alkohol gelöst giebt auf Weissblech einen glänzenden Bezug; setzt man ihm Terpentinöl hinzu, so wird er matt, weil beim Verdampfen des Alkohols das Oel sich zu kleinen Tröpfchen zusammenzieht, welche allmählich verharzen. Politur wird mit der Zeit matt, weil Tröpfchenbildung eintritt.

28) Oberflächenzähigkeit. PLATEAU[1]) nimmt eine besondere Oberflächenzähigkeit an. Er liess eine horizontale, sehr flache Magnetnadel so schwingen, dass sie das eine Mal nur mit ihrer unteren Fläche die ebene Flüssigkeitsoberfläche berührte; ein zweites Mal war sie ganz in die Flüssigkeit eingetaucht. Er fand so für die Zeit, welche die Nadel brauchte, wenn sie 85° aus dem magnetischen Meridian abgelenkt war, um in denselben zurückzukehren, in beiden Fällen verschiedene Werthe. Bei destillirtem Wasser waren sie z. B. 4·59 und 2·37 Sec., also grösser, wenn sie nicht vollständig untertauchte. Dagegen ging sie dann um 8° über den magnetischen Meridian hinaus, aber nur um 3·5°, wenn sie ganz eingetaucht war. Dieser scheinbare Widerspruch fand seine Erklärung, als PLATEAU die Oberfläche mit Lycopodium bestäubte. Er sah dann die ganze Oberfläche, wie eine starre Schicht, durch die Nadel fortgeschoben. Diese in Bewegung gesetzte Schicht zieht die Nadel mit sich. Das fällt weg, wenn sie ganz von Flüssigkeit umgeben ist. Statt Lycopodium aufzustreuen, kann man auch ein kleines Stückchen Goldschaum auflegen; es wird vor der Nadel fortgeschoben, als werde es von der bewegten Nadel abgestossen. Bei anderen Flüssigkeiten (Alkohol, Schwefelkohlenstoff, Aether, Terpentinöl) ist umgekehrt die Geschwindigkeit der auf der Oberfläche sich bewegenden Nadel grösser als die der untergetauchten. PLATEAU unterscheidet demnach zwei Categorien von Flüssigkeiten, solche, deren Oberflächenzähigkeit grösser und solche, bei denen sie kleiner ist als im Innern. Am ausgesprochensten ist die erste Art von Zähigkeit bei Saponinlösung, welche bei einem Gehalt von nur $\frac{1}{100}$ an Saponin, die aus dem Meridian um 90° abgelenkte Nadel ganz fest hält, während sie die Zähigkeit reinen Wassers zu haben scheint. Auch Bewegung der Oberfläche mit einem Draht ändert nichts an der Erscheinung. Ueber das Historische vergl. PLATEAU, l. c., § 283—290.

Da die Aenderung der Schwingungsdauer ausser von der Reibung auch von anderen, entgegesetzten Kräften herrühren kann, so hat OBERBECK[2]) die Frage so untersucht, dass er Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement gesondert bestimmte. Er bestätigt die PLATEAU'schen Resultate, findet, dass eine länger andauernde Berührung der freien Oberfläche mit Luft den Widerstand steigert, dass aber ein besonderer Oberflächenwiderstand schon unmittelbar nach Bildung der freien Oberfläche vorhanden ist. Ob das letztere aber auch schon einer Verunreinigung zuzuschreiben ist, konnte nicht entschieden werden. Doch scheint die Thatsache, dass Wasser der ersten Categorie von Flüssigkeiten, Alkohol der zweiten angehört und ein Gemisch beider (ungefähr vom specifischen Gewicht 0·94) keinen specifischen Oberflächenwiderstand zeigt, doch zur Annahme zu nöthigen, dass der Grund dieser Erscheinung nicht in Verunreinigung zu suchen ist.

Die Beobachtungen OBERBECK's sind in Uebereinstimmung mit denen von ROITI[3]). Er fand speciell, dass Oel, auf Wasser gebracht, keine besondere

---

1) PLATEAU, l. c. T. II, pag. 261—296.

2) OBERBECK, WIED. Ann. Bd. 11, pag. 634—652. 1880.

3) ROITI, Nouv. Cim. (3) 3. 1878; Beibl. 1878, pag. 381.

Zähigkeit hervorruft, wenn das Wasser nicht schon solche besass. — MARANGONI[1]) erklärt die Oberflächenzähigkeit aus einer Art Schleier, welche sich in Folge der Verdunstung bilde, wobei sich die nur scheinbar gelösten Substanzen ablagern. Er bestreitet die Erklärung MENSBRUGGHE's, welcher dieselbe in einer Aenderung der Capillarconstante findet, die verursacht ist durch Temperaturänderungen bei der Bildung neuer Oberflächenschichten (vergl. § 32). Auch bei Quecksilber und dessen Amalgamen weisst er Oberflächenzähigkeit nach, welche nach ihm in einer Bildung von Oxydhaut begründet ist.

29) Nachwirkung der Capillarität. Dass die Capillarconstante bei längerer Berührung des Meniskus mit Luft sich ändert, meist abnimmt, ist man geneigt aus Verunreinigungen zu erklären, welche sich auf dem Meniskus ablagern. Auch eine Aenderung der Wand und eine damit hervorgebrachte des Randwinkels kann eine Wirkung erzeugen, welche wie eine Aenderung der Capillarconstante erscheint. QUINCKE[2]) hat aber auch an flachen Luftblasen, welche mit reinen Gasen hergestellt waren und zu denen nicht wohl Verunreinigungen von aussen gelangen konnten, eine zeitliche Abnahme der Capillarconstante gefunden, die bisweilen bis zu 40% des Anfangswerthes ging, z. B.

	Max.	Min.	Min./Max.
H_2O	8·45	7·53	0·86
H_2O mit Spur HCl .	7·98	5·22	0·64
„ „ NH_4Cl . .	8·2	7·28	0·89

Durch Umrühren stieg die Oberflächenspannung wieder, ohne aber zum Anfangswerth zurückzugelangen. Bei einem Gemisch von Alkohol und Wasser beobachtete er auch eine, wenn auch geringe zeitliche Zunahme.

Wasser mit 1·17% Alkohol	0^h	$0^h\,25'$	$5^h\,16'$	$14^h\,43$
	8·02	7·84	7·92	7·79
„ „ 8·69% „	0^h	$1^h\,30'$	$12^h\,30'$	
	5·74	5·79	5·80	

An kleineren Luftblasen waren die Aenderungen geringer; desgleichen in Röhren um so kleiner, je enger die Röhre war. QUINCKE vergleicht die Er scheinung mit elastischer Nachwirkung und vermuthet, dass die benachbarten festen Theile eine Wirkung in der Weise ausübten, dass sie eine Umlagerung der Flüssigkeitsmoleküle hindern und dass diese Wirkung sich von Theilchen zu Theilchen auch auf grössere Entfernung fortsetzen könne. Es fehlen noch weitergehende Versuche über diese interessante Thatsache. Die Annahme QUINCKE's würde sich prüfen lassen, indem man der Flüssigkeitsoberfläche, etwa flachen Blasen, vollständig untergetauchte feste Körper näherte. Dass derjenige wässerige Alkohol, welcher eine geringe Nachwirkung zeigt, nahezu der gleiche ist, an dem man auch keine besondere Oberflächenzähigkeit beobachtet, legt die Vermuthung nahe, dass beide Erscheinungen im Zusammenhang stehen.

VOLKMANN[3]) findet, dass man constante Oberflächenspannung erhält, wenn man die Flüssigkeiten vorher mit Luft sättigt und ist daher geneigt, die Ursache

---

[1]) MARANGONI, N. Cim. (3) III, pag. 50—68, 97—115, 192—212. 1878; u. Riv. Scient. (X), pag. 202—205. 1878. — Beibl. 1878, pag. 842—846.

[2]) QUINCKE, POGG. Ann. Bd. 160, pag. 573—585. 1877.

[3]) VOLKMANN, WIED. Ann. 11, pag. 177—209. 1880. 17, pag. 353—390. 1882.

der elastischen Nachwirkung in einer allmählichen Aufnahme derselben zu suchen.

30) Einfluss des Druckes auf die Oberflächenspannung. KUNDT[1]) hat gezeigt, dass die Capillarconstante einer Flüssigkeit in einem mit Gas erfüllten Raume abnimmt, wenn der Druck des Gases gesteigert wird. Die Aenderung ist abhängig von der Natur der Gases und der Flüssigkeit. Sie beträgt für eine Druckänderung von 1 auf 100 kg/cm^2:

Aether-Wasserstoff	0·0029	Aether-Luft	0·0077
Alkohol-Wasserstoff	0·0027	Alkohol-Luft	0·0066
Alk. Chlorcalciumlösung-Wasserstoff	0·0028	Alk. Chlorcalciumlösung-Luft	0·0060

Ob diese Erscheinung mit der Löslichkeit des Gases in Zusammenhang steht, blieb unentschieden.

WROBLEWSKI[2]) führt dieselbe auf einen solchen zurück.

31) Die Versuche WILHELMY's, aus denen er auf eine Oberflächenverdichtung schloss. WILHELMY[3]) hat nach der § 6a beschriebenen Methode die Capillarconstanten einer grossen Anzahl von Flüssigkeiten untersucht. Je tiefer er die Platte eintauchen liess, desto grösser fand er den Werth der Capillarconstante. Er schloss daraus, dass an der eingetauchten Platte eine sehr erhebliche Flüssigkeitsmenge condensirt werde; z. B. sollten auf dem Quadratmillimeter einer Glasplatte verdichtet werden 0·013 *mgr* Aethylalkohol, 0·0087 *mgr* Essigsäure etc. Die Zahlen sind so beträchtlich, dass sie einen erheblichen Einfluss bei Bestimmungen des specifischen Gewichtes ausüben müssten. Ein solcher hat sich aber nicht nachweisen lassen; z. B. hat RÖNTGEN[4]) für eine Gipsplatte den Gewichtsverlust in Alkohol bestimmt, dieselbe dann in 11 Platten gespalten und unter Annahme des kleinsten, von WILHELMY gefundenen Verdichtungscoëfficienten berechnet, dass der Gewichtsverlust jetzt 0·180 *gr* weniger betragen müsse. Thatsächlich fand er aber keine messbare Aenderung desselben. Desgleichen bei Glas, welches zu feinen Häutchen ausgeblasen wurde. SCHLEIERMACHER[5]) findet, dass die Verdichtung höchstens 0·0001 *mgr* auf das Quadratmillimeter betragen könne und dass sich kein Unterschied für verschiedene Substanzen erkennen lässt. Die von WILHELMY gegebene Deutung seiner sorgfältigen Messungen lässt sich also nicht aufrecht halten. Andererseits liegt aber auch keine genügende Erklärung derselben vor[6]), und wenn auch verschiedene berechtigte Einwendungen gegen die Versuche WILHELMY's gemacht sind, so dürfte doch ohne neue experimentelle Inangriffnahme des Gegenstandes eine Aufklärung kaum möglich sein.

WILHELMY glaubte auch, indem er Cylinder von verschiedenem Durchmesser in die Flüssigkeiten eintauchen liess, einen Einfluss der Krümmung auf die Oberflächenspannung nachweisen zu können. VOLKMANN[7]) hat in sorgfältigen Versuchen die Steighöhe in Röhren von verschiedenem Durchmesser und zwischen

---

1) KUNDT, Monatsber. Bresl. Akad. 1880; WIED. Ann. 12, pag. 538—550. 1881.
2) WROBLEWSKI, Compt. rend. 95, pag. 284. 342. 1882.
3) WILHELMY, POGG. Ann. 119. 121. 122.
4) RÖNTGEN, WIED. Ann. 3, pag. 321. 1878.
5) SCHLEIERMACHER, WIED. Ann. 8, pag. 52. 1879.
6) Vergl. Literaturverzeichniss.
7) VOLKMANN, WIED. Ann. 11, pag. 177.

ebenen Platten bestimmt. Ein Einfluss der Krümmung auf die Capillarconstante fand sich dabei nicht (bis auf 0·2 % der Constante). Doch führen ihn seine Versuche zu dem auch von früheren Beobachtern schon ausgesprochenen Resultate, dass man eine der festen Wand adhärirende Flüssigkeitsschicht annehmen muss (um deren Dicke der Radius der Röhre kleiner zu denken ist), welche für Alkohol und Klauenfett an Glas 0·004 *mm* dick ist.

32) Thermischer Effect bei Oberflächenänderung. W. Thomson hat die Principien der mechanischen Wärmetheorie auf den Fall angewendet, dass eine Flüssigkeit eine Aenderung der Grösse der Oberfläche erfährt, z. B. eine Seifenlamelle ausgezogen wird. Es wird dann eine Arbeit geleistet, welche gleich der Oberflächenspannung multiplicirt mit der Flächenvergrösserung ist. Dabei verschwindet eine Wärmemenge, die gleich dem Produkt aus der absoluten Temperatur in die Abnahme der Capillarconstante für einen Grad ist. Nimmt dieselbe mit steigender Temperatur ab, so bringt Oberflächenvergrösserung Temperaturabnahme hervor, umgekehrt Erwärmung bei Flüssigkeiten, wo die Capillarconstante steigt mit der Temperatur (falls solche existiren). Mensbrugghe[1]) hat den gleichen Satz, unabhängig von Thomson, abgeleitet und zur Erklärung vieler Erscheinungen angewendet; z. B. taucht man ein Drahtdreieck in Terpentinöl, die Spitze nach oben gekehrt und zieht dasselbe dann theilweise aus dem Oel heraus, so bildet sich eine Lamelle, welche oft länger als 17 Minuten bestehen bleibt. Nach obigem Princip muss die frisch gebildete Lamelle niedrigere Temperatur und damit grössere Capillarconstante haben; diese behält sie auch in Folge des Verdampfens. Es steigt daher immer neue Flüssigkeit in sie hinein und sie ist, wie auch die Erfahrung bestätigt, oben dicker als unten. Er erklärt damit auch die Details der Erscheinungen, welche auftreten, wenn zwei Flüssigkeitsstrahlen auf einander stossen und sich dabei zu Scheiben ausbreiten[2]). Desgleichen das periodische Auf- und Absteigen vertical in die Höhe springender Flüssigkeitssäulen; die Bewegungsenergie der Meereswellen, welche, an ein Ufer anlaufend, Oberflächenenergie verlieren, die sich in kinetische umsetzt; die Entstehung der Fluthwellen an der Mündung gewisser Flüsse; die Gewalt des Golfstromes[3]). Er wendet sie ferner an zur Erklärung der Beruhigung von Wellen durch eine darauf ausgebreitete Oelschicht[4]).

33) Dampfspannung und Capillarität. Thomson[5]) leitet die folgende Formel ab. Bezeichnet P den Druck des gesättigten Dampfes an einer ebenen Flüssigkeitsfläche, δ die Dichte des Dampfes, d die Dichte der Flüssigkeit, T die Oberflächenspannung, $1/\rho$ die Krümmung an einer Stelle, so ist der Dampfdruck p an derselben Stelle

$$p = P \mp \frac{T\delta}{d-\delta} \cdot \frac{1}{\rho},$$

1) Mensbrugghe, Mém. de l'Acad. roy. de Belgique 43. 1878; Beibl. 3, pag. 239—244. 1879.

2) Bull. de l'Acad. Belg. (2) 46. 1878; Beibl. 3, pag. 464. 1879.

3) Ibid. (2) 47, pag. 326—346. 1878; Mondes (2) 49, pag. 480—489. 1879; Beibl. 3, pag. 776—778; vergl. ferner Bull. d'Acad. Belg. (2) 48, pag. 346—359. 1879; Beibl. 5, pag. 339—341. 1881; Bull. Ac. Belg. (2) 50, pag. 155. 1880; pag. 286. 1881; Beibl. 6, pag. 173. 1882.

4) Compt. rend. 95, pag. 1055. 1882; Beibl. 8, pag. 17. 1884.

5) Thomson, Proc. Roy. Soc. of Edinb. 1870.

wo das ∓ Zeichen gilt, je nachdem die Oberfläche concav oder convex ist. Er gelangt zu dieser Gleichung, indem er sich in einem Gefäss, welches nur die Flüssigkeit und deren Dampf enthält, ein Capillarrohr eingesetzt denkt. Der Dampf muss dann in der oberen Kuppe sowohl als in der unteren im Gleichgewicht mit der Flüssigkeit sein; sonst würde eine continurliche Destillation stattfinden. Auf der unteren Kuppe lastet aber ein grösserer Druck. — Denkt man sich das Capillarrohr unten geschlossen und etwas Flüssigkeit aus demselben entfernt, so muss also so lange in das Capillarrohr Flüssigkeit destilliren, bis wieder die gleiche Höhe erreicht ist, wie bei unten offenem Rohr. — THOMSON glaubt, dass man daraus die hygroskopische Beschaffenheit vegetabilischer Stoffe erklären könne. — In der Nähe eines kleinen Tropfens muss der Dampfdruck grösser sein, als in einer ebenen Oberfläche. Er könnte also noch verdampfen in einem Raume, der von einer ebenen Fläche aus gesättigt ist. — Eine andere Ableitung und eine Reihe weiterer Schlüsse hat WARBURG gegeben[1]).

34) Ausdehnung der Anschauungen der Capillaritätstheorie auf feste Körper. Da auch feste Körper nicht absolut starr sind, so soll auch bei ihnen das Bestreben vorhanden sein, ein Minimum der Oberfläche anzunehmen. Man könnte dann auch von einer Capillarconstante reden. QUINCKE[2]) hat aus Versuchen von KARMARSCH, wonach die Festigkeit eines Drahtes sich aus zwei Gliedern zusammensetzt, einem proportional dem Querschnitt, und einem zweiten proportional der Peripherie, das letztere berechnet und als Capillarconstante angesprochen. Er findet so:

	Capillaritätsconstante α.	
	Hart gezogen	Ausgeglüht
Eisen	$5731 \cdot 10^3$ *mgr*	$1592 \cdot 10^3$ *mgr*
Platin	3025 „	2388 „
Kupfer	2388 „	0 „
Silber	2388 „	478 „
Gold	1592 „	478 „
Zink	557 „	—
Stahl	6685 „	955 „
Neusilber	6685 „	1114 „
Silber (12 löth.)	5253 „	2547 „
Gold (14 Karat)	3661 „	2228 „
Messing (Draht)	2547 „	1751 „
„ (Saiten)	1751 „	637 „

Diese Constanten sind viel grösser als diejenigen, welche QUINCKE für geschmolzene Metalle gefunden oder welche VOLKMANN[3]) auf einem freilich hypothetischen Wege aus der Capillarconstante von Salzlösungen unter Benutzung einer von POISSON angegebenen Formel für die Constante aus festen Salzen ableitet.

35) Eine Bestimmung der Capillarconstanten eines festen Körpers (Kautschuk) gegen eine Flüssigkeit liegt von RÖNTGEN[4]) vor. Er überspannte die Oeffnung eines engen Glasröhrchens mit einer sehr dünnen Kautschukmembran

[1]) WARBURG, WIED. Ann. 28, pag. 394—400. 1886.
[2]) QUINCKE, POGG. Ann. 134, pag. 356—367. 1868.
[3]) VOLKMANN, WIED. Ann. 17. Die POISSON'sche Formel vergl. Literaturverzeichniss.
[4]) RÖNTGEN, WIED. Ann. 3, pag. 324—328. 1878.

und bewirkte durch Aussaugen von Luft aus dem Röhrchen, dass die Membran sich zu einer Hohlkugel ausbauchte. Der dazu nöthige Druck p_1 wurde an einem Wassermanometer abgelesen. Bezeichnet T die Spannung der Membran (Elasticität), r den Radius der Röhre, so ist

$$-p_1 = T\frac{2}{r}.$$

Nun wurde die untere Seite der Membran in Wasser getaucht, die Membran wieder bis zur selben Gestalt eingebaucht und der Druck p_2 bestimmt. Steht das Wasser innen und aussen gleich hoch, so ist

$$-p_2 = (T + \alpha_{23})\frac{2}{r},$$

wenn α_{23} die Oberflächenspannung Wasser/Kautschuk bedeutet. Um zu controliren, ob sich T nicht dabei geändert habe, wird die Membran auch innerlich unter Wasser gebracht. Steht das Wasser innen und aussen wieder gleich hoch und hat innen die Krümmung Null, so wird

$$-p_3 = (T + 2\alpha_{23})\frac{2}{r}.$$

Legt man auch der trockenen Membran eine Oberflächenspannung bei, so ist α_{23} die Differenz der Spannungen Kautschuck/Luft — Kautschuk/Wasser. Dafür findet Röntgen den Werth 8 Mgrgew./Mill., also wie Wasser/Luft. Er erreicht erst 30—60 Secunden nach der Berührung einen constanten Werth.

36) Bologneser Flaschen. Glasthränen. Wird eine geschmolzene Glasmasse rasch abgekühlt, so erstarrt zunächst die Oberfläche. Indem nun die innere Glasmasse sich bei weiterem Kühlen zusammenzieht, übt sie einen normalen Zug auf die bereits erstarrte Oberfläche und es muss daher in der letzteren eine Spannung eintreten. So lange das Innere flüssig und die Oberfläche sehr dünn ist, müssen Spannung, Druck und Krümmung durch die früher gegebenen Relationen verknüpft sein. Bei weiterem Erstarren treten Unregelmässigkeiten ein. Denkt man sich auf der so gespannten Oberfläche eine Linie von 1 *mm* Länge gezogen, so wirken rechts und links derselben die Tangentialkräite; es kann aber sein, dass die Festigkeit des Materials den Zug aushält, das Glas ganz bleibt. Bringt man aber daselbst eine wirkliche Trennungslinie (einen Ritz durch einen scharfkantigen Feuerstein) hervor, so rollen jetzt gewissermaassen die Tangentialspannungen die Oberfläche ab, das Glas blättert entweder an der Oberfläche ab (wie das lange Jahre gelegene Glaskolben beim Erwärmen oft zeigen) oder auch das ganze Glas zerspringt.

VI. Anziehungen und Abstossungen durch Capillarkräfte.

37) Zwei benetzte auf einer Flüssigkeit schwimmende Körper ziehen sich an; desgleichen zwei nicht benetzte[1]). Ein benetzter und ein nicht benetzter stossen sich ab oder ziehen sich an, je nach der Entfernung[2]). Laplace hat die Erscheinung zuerst erklärt und rechnend verfolgt. Die Erklärung ist, wenigstens für die ersten Fälle mit zwei Worten zu geben: Es ist eine hydrostatische Erscheinung. Die Flüssigkeit steigt zwischen den benetzten Körpern an, ihr hydrostatischer Druck ist daher kleiner als im allgemeinen Niveau; daher werden die Körper zusammengepresst. —

[1]) Laplace, Théorie etc., § 11.

[2]) Suppl. de la Th. d. l. Cap. Oeuvres, T. IV, pag. 506—517. Paris 1845.

Wir wollen der Einfachheit halber nur den Fall genauer betrachten, dass zwei verticale parallele Platten eingetaucht seien (Fig. 195). Die Flüssigkeit sei in einem beliebigen Punkte gehoben über das allgemeine Niveau um $h_1 + h_2$. Legt man in den Höhen h_1, $h_1 + h_2$, $h_1 + h_2 + z$ Horizontalebenen, so ist allgemein der Druck in einer Tiefe h_1, wenn P den äusseren (Athmosphärendruck), σ das specifische Gewicht bezeichnet,

(Fig. 195.)

$$p_{h_1} = P + h_1\sigma + \alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \tag{1}$$

Daher in der Tiefe $h_1 + h_2 + z$:

$$p_{h_1+h_2+z} = P + (h_1 + h_2)\sigma + z\sigma + \alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \tag{2}$$

Dieses ist aber auch

$$= P + z\sigma. \tag{3}$$

Daher für $z = 0$, d. h. im allgemeinen Niveau,

$$p_{h_1+h_2} = P + (h_1 + h_2)\sigma + \alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = P. \tag{2a}$$

Daher

$$(h_1 + h_2)\sigma = -\alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Dies in (1) gesetzt, giebt

$$p_{h_1} = P + h_1\sigma - (h_1 + h_2)\sigma = P - h_2\sigma. \tag{1a}$$

Der hydrostatische Druck nimmt also in dem Capillarraum ab beim Höhergehen proportional dem Abstand vom allgemeinen Niveau. Dieser Satz gilt, die capillare Oberfläche mag beschaffen sein wie sie will, er gilt daher auch für die ausserhalb des Capillarraumes angestiegene Flüssigkeit. Soweit also beiderseits der Platte sich Flüssigkeit befindet, ist auch der Druck von beiden Seiten der gleiche.

Hat die Platte die Breite b und ist die Flüssigkeit ausserhalb angestiegen bis zur Höhe a, innerhalb bis h, so wird der Gesammtdruck (von aussen nach innen) auf eine Wand

$$-\sigma b \int_a^h h_2\, dh_2 = -\sigma b(h - a)\frac{h + a}{2}.$$

Da P aus der Rechnung herausfällt, so gilt dies auch für den luftleeren Raum. Es würde nicht mehr gelten, wenn σ, d. h. $g = 0$ wäre (Oel im PLATEAU'schen wässrigen Alkohol). Die Erscheinung hat also mit Molekularkräften gar keinen Zusammenhang.

Ist h gross gegen a, so ergiebt eine einfache Rechnung, dass die Kraft nahezu umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes der Platten ist.

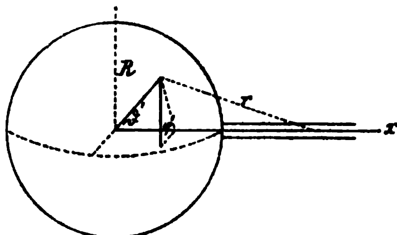
Ganz analoge Betrachtungen und Resultate gelten, wenn beide Platten nicht benetzt werden. Zwischen denselben herrscht der Druck P, ausserhalb derselben $P + h_2\sigma$.

Ist eine Platte benetzt, die andere nicht, so ist für das Resultat entscheidend, dass die Flüssigkeit im Capillarraum an jeder Platte weniger von dem allgemeinen Niveau absteht als ausserhalb der Platten. Zwischen beiden muss ein Punkt im allgemeinen Niveau liegen; in ihm muss daher die Krümmung Null

sein. Damit erklärt sich die Abstossung, wie eine einfache Ueberlegung ergiebt, sofort. Betreffs des Näheren vergl. LAPLACE l. c., wo auch die Bedingungen discutirt sind, wann die Abstossung in Anziehung übergehen kann. Dies tritt nur bei sehr kleinen Abständen ein, wie HAUY experimentell bestätigte[1].

VII. Die Bedeutung der LAPLACE'schen Constanten.

38) Wir untersuchen die Wirkung einer Flüssigkeitskugel auf die Flüssigkeit in einer Capillarröhre, deren Basis gleich 1 angenommen sei. Die Kugel habe den Radius a; Die Röhre stosse zunächst von aussen auf die Kugel auf und sei radial gerichtet. Ihre Axe sei die x-Axe (Fig. 196).



(Ph. 196.)

Wir legen ein Kugelcoordinatensystem R, ϑ', φ' zu Grunde. Ein Volumelement $R^2\,dR\,sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\varphi'$ habe von einem Axenpunkt des Flüssigkeitcanals den Abstand r. Es sei $\varphi(r)$ die Anziehungsfunktion, wo in $\varphi(r)$ noch eingehen können Grössen, welche von der specifischen Natur der Flüssigkeit abhängen. Die Anziehung auf das Volumelement 1 der Flüssigkeit im Canal lässt sich dann schreiben als

$$R^2\,dR\,sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\varphi'\,\varphi(r),$$

und die Componente nach der x-Axe

$$\delta X = R^2\,dR\,sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\varphi'\,\varphi(r)\,cos(r, x).$$

Ist ρ der Abstand des angezogenen Volumelementes vom Kugelmittelpunkt, so ist

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\,cos\vartheta'; \quad cos(r, x) = \frac{\rho - R\,cos\vartheta'}{r} = \frac{\partial r}{\partial \rho}.$$

Setzt man

$$\int_0^r \varphi(r)\,dr = c - \Pi(r)$$

[wo c den Werth bedeutet, den das Integral annimmt, wenn die obere Grenze $r = \infty$ gesetzt wird, da dann $\Pi(r) = 0$ sein soll], so ist

$$\frac{\partial \Pi(r)}{\partial \rho} = \varphi(r)\frac{\partial r}{\partial \rho},$$

und daher

$$\delta X = -\frac{\partial}{\partial \rho}[R^2\,dR\,sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\varphi' \cdot \Pi(r)].$$

Die Integration über alle Volumelemente der Kugel giebt die Componente X der Anziehung auf die Masse im Volumelement 1 des Canals. Setzt man daher

$$V = \int_0^a R^2\,dR \int_0^\pi sin\vartheta'\,d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi'\,\Pi(r),$$

so ist

[1]) Eine elementare Ableitung vergl. MENSBRUGGHE, Bull. de Brux. (3) 5, pag. 482; Beibl. 8, pag. 16. 1814; ferner LE CONTE, Sill. Am. Journ. 1882; Phil. Mag. (5) 15. 1883. — WORTHINGTON, Phil. Mag. (5) 15. 1883.

$$X = -\frac{\partial V}{\partial \rho}.$$

Integrirt man zunächst noch φ' und dann noch ϑ'; beachtet bei der letzteren Operation, dass

$$r\partial r = R\rho \sin\vartheta' \partial\vartheta',$$

so wird

$$V = 2\pi \int_0^a \frac{R}{\rho} dR \int_{\rho-R}^{\rho+R} \Pi(r) r\partial r.$$

Setzt man nun wieder

$$\int_0^r \Pi(r) r \partial r = c' - \Psi(r),$$

wo $\Psi(r)$ wiederum die Eigenschaft haben soll mit wachsendem r sehr rasch gegen Null zu convergiren, so wird

$$\int_{\rho-R}^{\rho+R} \Pi(r) r \partial r = -[\Psi(\rho+R) - \Psi(\rho-R)]$$

und

$$V = -2\pi \int_0^a \frac{RdR}{\rho} [\Psi(\rho+R) - \Psi(\rho-R)].$$

Nun ist die Componente auf das Volumelement 1 gleich $-\partial V/\partial\rho$; daher auf eine Schicht von der Länge $d\rho$ gleich $-(\partial V/\partial\rho)\, d\rho$; daher auf einen Canal, der von $\rho = a$ bis $\rho = \rho_1$ reicht, gleich $-[V]_a^{\rho_1}$. Bezeichnet man letztere durch ΣX, so ist

$$\Sigma X = [V]_{\rho=a} - [V]_{\rho=\rho_1}$$

oder

$$\Sigma X = -2\pi \int_0^a \frac{RdR}{a} [\Psi(a+R) - \Psi(a-R)]$$

$$+ 2\pi \int_0^a \frac{RdR}{\rho_1} [\Psi(\rho_1+R) - \Psi(\rho_1-R)].$$

Hat a einen merklichen Werth, so bleibt nach der Annahme über die rasche Abnahme der Function Ψ nur

$$\Sigma X = 2\pi \int_0^a \frac{RdR}{a} \Psi(a-R) = [V]_{\rho=a}.$$

Setzt man $a - R = z$, so ist daher

$$\Sigma X = 2\pi \int_0^a \frac{(a-z)\,dz}{a} \Psi(z).$$

Schreibt man endlich

$$2\pi \int_0^a \Psi(z)\, dz = K, \tag{VI}$$

$$2\pi \int_0^a \Psi(z)\, z dz = H, \tag{VII}$$

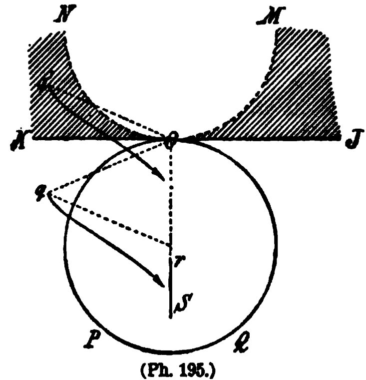
so ist

$$\Sigma X = [V]_{\rho=a} = K - \frac{H}{a}. \tag{VIII}$$

Dabei sind K und H unabhängig von a, wenn a überhaupt endlich ist; die Natur der Funktion Ψ soll dies bedingen.

Die Anziehung einer Flüssigkeitskugel auf die in einem Canal vom Querschnitt 1 enthaltene Flüssigkeit ergiebt sich also in der Form der Gleichung (VII), einer speciellen Form der früher allgemeiner abgeleiteten und benutzten.

Hierin stellt V entweder dar den Druck, welcher in Folge der Anziehung der Kugelmasse auf den Boden des Flüssigkeitscanals vom Querschnitt 1 ausgeübt wird; oder, da $\partial V/\partial\rho$ die Kraft bedeutet, welche auf das Volumelement 1 ausgeübt wird, so wäre $[V]\rho = a$ auch gleich der Arbeit, die geleistet würde, wenn die im Volumelement 1 enthaltene Flüssigkeitsmenge aus unendlicher Entfernung sich der Flüssigkeit näherte bis $\rho = a$.



(Fig. 195.)

K hätte dieselbe Bedeutung für eine durch eine ebene Fläche begrenzte Flüssigkeitsmasse.

Man beachte, dass K und H nicht von derselben Grössenordnung sind. H/K ist von der Ordnung s, wo s eine sehr kleine Grösse bedeutet.

39) Wir haben bis jetzt die Wirkung auf einen Flüssigkeitskanal bestimmt, welcher ausserhalb der Flüssigkeitsmasse liegt. In Wirklichkeit handelt es sich um die Wirkung auf einen Canal, welcher in der Masse selber sich befindet.

Es sei (Fig. 195) POQ die Flüssigkeitskugel; der Kanal OS, auf dessen Theilchen die Anziehung bestimmt wird, sei aber innerhalb der Kugel gelegen. Legt man durch O eine Tangentialebene und über derselben eine der ersten gleiche Flüssigkeitskugel, so ist die Kraft, mit welcher die ganze Flüssigkeit des Kanals OS durch den Raum $KONMJ$, also den Flüssigkeitsmeniskus nach oben gezogen wird, wie vorher bewiesen, gleich H/b, wenn b den Kugelradius bedeutet. Es soll bewiesen werden, dass die Wirkung dieses Flüssigkeitsmeniskus auf den ausserhalb gelegenen Canal OS dieselbe ist, wie die des Meniskus $KOPQJ$ auf die Flüssigkeit im Canal OS.

In der That denkt man sich einen Punkt q im letzten Meniskus, zieht das gleichschenklige Dreieck Oqr, so hebt sich in vertikaler Richtung die Wirkung von q auf die im Canaltheile Or gelegene Moleküle auf; dagegen wirkt q nun auf den unterhalb r gelegenen Canal rS genau ebenso wie ein zu q als Spiegelbild in Bezug auf die Trennungsebene (als spiegelnde Fläche) gelegener Punkt q' auf den Canal OS.

Ebenso ist die Wirkung einer unendlich ausgedehnten ebenen Flüssigkeitsmasse auf einen ausserhalb derselben gelegenen Flüssigkeitscanal OS ebenso, wie die Wirkung derjenigen ebenen Flüssigkeit, welche den Canal selbst enthält, auf diesen.

Es sei z. B. die Flüssigkeit befindlich oberhalb der Ebene KOJ; OS der Canal. Betrachtet man die Wirkung auf einen Punkt r des Canals; sie sei $= K_0$. Legt man symmetrisch zu KJ in Bezug auf r die Ebene $K'J'$, so übt

die unterhalb letzterer gelegene Flüssigkeit eine Kraft aus, die als K_x bezeichnet werde. Da r im Gleichgewicht, so ist $K_0 + K_x = 0$, $K_0 = -K_x$. Und da dies für alle Punkte r gilt, so ist auch $\Sigma K_0 = -\Sigma K_x$; ΣK_0 ist aber die früher als K bezeichnete Grösse.

Dies sind die LAPLACE'schen Betrachtungen, wie sie in den Lehrbüchern in etwas anderer Form reproducirt zu werden pflegen. Man bemerkt, dass die Flüssigkeit als homogen angenommen ist. Hätte sie eine mit dem Abstand vom Niveau sich ändernde Dichte, so wird im ersten Beweis die Dichte im Canal Or eine andere sein als im Canal rS und damit auch die anziehende Kraft anders ausfallen. — Das ist derjenige Punkt, wo POISSON eine Erweiterung hat eintreten lassen.

40) Ob die Grösse K thatsächlich existire, lässt sich direkt nicht entscheiden. Man könnte versucht sein, auf dem folgenden indirekten Weg darüber ins Klare zu kommen. Da H die Wirkung eines Meniskus, der zwischen einer Ebene und einer Kugel vom Radius 1 gelegen ist, auf den Flüssigkeitskanal misst; K die Wirkung der ganzen unterhalb der Ebene gelegenen Masse, so sollten K und H bei allen Flüssigkeiten (sofern sie, wie LAPLACE annimmt, den Raum als continuirlich erfüllend gedacht werden dürfen) in einem constanten Verhältniss stehen. Nun ergiebt die Beobachtung, wenn man drei Flüssigkeiten 1, 2 und 3 übereinander hat (z. B. Luft, Oel, Wasser), dass nicht

$$H_{13} = H_{12} + H_{23},$$

wie alle Theorien verlangen, sondern dass gewöhnlich

$$H_{13} > H_{12} + H_{23}.$$

Dem entsprechend sollte auch

$$K_{13} > K_{12} + K_{23}$$

sein, d. h. wenn man in einer Capillarröhre Wasser aufsteigen und dann auf dem allgemeinen Niveau sich Oel ausbreiten lässt, so sollte die Steighöhe sich ändern[1]); noch empfindlicher ist die folgende Anordnung: ein mit Luft gefüllter Kolben trägt einen durchbohrten Kork und in diesem eine rechtwinklig gebogene Glasröhre, deren einer Schenkel horizontal verläuft. Man taucht den Kolben in ein Gefäss voll Wasser und sorgt dafür, dass ein Wassermeniskus im horizontalen Glasrohr steht. Lässt man nun auf der Oberfläche sich Oel ausbreiten, so sollte der Meniskus seine Stelle ändern. Man beobachtet nie bei derartigen Versuchen einen positiven Erfolg und da K ausserordentlich viel grösser als H ist, so darf man mit Bestimmtheit schliessen, entweder, dass H und K gar nicht proportional sind[2]) oder, was noch unabhängig davon folgt, dass K jedenfalls nicht als ein innerhalb der Flüssigkeit nachweisbarer Druck existirt[3]).

In der That wird in einer unendlich ausgedehnten ebenen Flüssigkeitsmasse der Effekt der gegenseitigen Anziehung der Theilchen nur der sein, dass in der Nähe der Oberfläche die Flüssigkeitstheilchen sich zu nähern streben und, sofern sie comprimirbar ist, daselbst eine dichtere sehr dünne Oberflächenschicht bilden. In einer sehr kleinen Entfernung von der Oberfläche bleiben

---

1) QUINKE, POGG. Ann. 1870. — RILEY, Phil. Mag. (5) 15. 1883.

2) Vergl. darüber RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) 16, 1883. — EXNER's Repertorium 20. 1884.

3) Vergl. auch WORTHINGTON, Phil. Mag. (5) 16. 1883. — EXNER's Rep. l. c.

die Theilchen dagegen in ungeänderter Entfernung, der Druck ändert sich nicht. Lässt man nun die ebene Oberfläche eine Deformation erfahren, so müssen die Theilchen, ebenso wie bei elastischen Verschiebungen, in erzwungene Entfernungen gebracht werden, was nur durch das Auftreten neuer Kräfte (capillarer Druck) möglich ist. Die einzige im vorliegenden Aufsatz besprochene Erscheinung, in welcher sich die Existenz von K äussert, könnte demnach die Oberflächenzähigkeit sein. In der That haben RÖNTGEN[1]) und WARBURG[2]) nachgewiesen, dass die Zähigkeit vom Druck abhängig ist, bei Wasser mit demselben abnehmend, bei Aether, Benzol und Kohlensäure mit ihm steigend. Das erstere Resultat widerspricht zwar der thatsächlich beobachteten Oberflächenzähigkeit; indessen fragt es sich, ob nicht bei höheren Drucken als WARBURG (100 bis 150 Atm.) verwendete, die Zähigkeit eine andere wird. — Wenn eine gemischte Flüssigkeit vorliegt, so kann die Oberflächenschicht, wenn sie unter dem Druck K steht, nicht die Zusammensetzung der inneren Masse haben.[3]). Wählt man die Mischungsverhältnisse so, dass die innere Reibung ein Maximum oder Minimum ist (bei Alkohol und Wasser ca. für gleiche Mengen beider Körper), so muss die Differenz der Oberflächenzähigkeit gegen die innere Reibung dann im Minimum sein. In der That findet sich dies annähernd bestätigt.

Wir lassen hier noch für eine Anzahl Flüssigkeiten die Grössen K folgen, wie sie VAN DER WAALS[4]) aus seinen gastheoretischen Untersuchungen abgeleitet hat (für 0° C.):

	K		$H/2$	
Aether	1300—1430	Atm.	3·7	Mgrgew./Mill.
Alhohol	2100—2400	„	5·0	„
Schwefelkohlenstoff .	2900—2890	„	6·6	„
Wasser	10500—10700	„	15·5	„
Chloräthyl	2040	„	—	„
Schweflige Säure . .	3060	„	—	„
Kohlensäure . . .	2820	„	—	„
Essigsäuremethyläther	2225	„	—	„
Diäthylamin	1500	„	—	„

VAN DER WAALS kommt zu dem Schlusse: Ist der Radius der Attraction bei allen Körpern gleich gross, so muss die Capillarconstante für die verschiedenen Körper dem kritischen Druck proportional sein. Ist dagegen der Radius den linearen Dimensionen der Moleküle proportional, so ist

$$\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3 = \frac{p_1^2 T_1}{p_2^2 T_2},$$

wenn p und T den kritischen Druck und die kritische Temperatur bedeuten.

VIII. Theorie von GAUSS.

41) GAUSS macht gegen die LAPLACE'sche Theorie zwei Einwände. LAPLACE lasse $\varphi(r)$ sehr rasch gegen Null convergiren. Daraus folge aber noch nicht, dass

1) RÖNTGEN, WIED. Ann. 22, pag. 510.

2) WARBURG, Ibid. pag. 518.

3) BRAUN, Zeitschr. f. phys. Chem. 1, pag. 271.

4) VAN DER WAALS, Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Deutsch von ROTH. Leipzig, BARTH, 1881, pag. 107, 165.

auch $\Pi(r) = \int \varphi(r) dr$ und $\Psi(r) = \int \Pi(r)\, dr$ die gleiche Eigenschaft besitze. Wäre z. B. $\varphi(r) = 1/r$, so würde $\Psi(r) = log\, r$. Sein Haupteinwand geht gegen die LAPLACE'sche Beweisführung der Constanz des Randwinkels, welche entweder das zu beweisende schon voraussetze oder ohne rechtes Resultat verlaufe. Seine Theorie soll gleichzeitig ein Beispiel für die Variation von mehrfachen Integralen mit veränderlichen Grenzen sein. Sie ist dadurch schwierig und weitläufig. BERTRAND [1]) hat eine einfachere Darstellung gegeben, indem er die Variationen der Integrale durch Zuhilfenahme eines einfachen Satzes über Flächenkrümmung vermeidet.

42) Es sei ein System gegeben von Theilchen einer Flüssigkeit und eines festen Körpers. Die Theilchen der Flüssigkeit seien $m\, m'\, m''$ etc., die des festen Körpers $M M' M''$ etc., die Kräfte zwischen den Theilchen seien gerichtet nach der Verbindungslinie und proportional den Massen. Der Abstand zweier Theilchen m und m' sei bezeichnet durch (m, m'); die Anziehungsfunction der Flüssigkeitstheilchen unter einander sei f, die zwischen Flüssigkeits- und festen Theilchen F. In diesen Functionen kann wieder der Einfluss der besonderen Materie einbegriffen sein. Das System sei der Schwerkraft unterworfen. Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten muss für alle Verschiebungeu, welche das ganze Volumen ungeändert lassen, sein

$$o = \sum m\, [g\, dz - m' f\,(mm')\, d\,(mm') - m'' f\,(mm'')\, d\,(mm'') - \ldots \\ - MF(mM)\, d(mM) - M' F(mM')\, d(mM') - \ldots]. \tag{1}$$

Darin ist dz die verticale Verschiebung des Punktes m; die Variationen $d(mm') \ldots d(mM)$ etc. beziehen sich auf die Verschiebung des Punktes m.

Setzt man

$$\int_r^\infty f(r)\, dr = -\varphi(r); \quad \int_r^\infty F(r)\, dr = -\Phi(r),$$

so wird Gleichung (1)

$$o = \sum m\, [-g\, dz + m'\, d\,\varphi\,(mm') + m''\, d\,\varphi\,(mm'') + \ldots \\ + M d\Phi\,(mM) + M'\, d\Phi\,(mM') + \ldots],$$

wo die Differentiale sich nur beziehen auf die Verschiebung des Punktes m. Aber jedes dieser partiellen Differentiale kann mit einem zweiten vorkommenden Gliede zu einem vollständigen Differential zusammengefasst werden. So kommt in Bezug auf m vor die Variation

$$mm'\, d_m\, \varphi\,(mm'),$$

und in Bezug auf m' die Variation

$$m' m\, d_{m'}\, \varphi\,(mm').$$

Für die Summen beider soll geschrieben werden

$$mm'\, d\varphi\,(mm').$$

Die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte ist daher die **totale** Variation des Ausdruckes

$$\Omega = \sum m\, [-g z + \tfrac{1}{2} m' \varphi(mm') + \tfrac{1}{2} m'' \varphi\,(mm'') + \ldots \\ + M\Phi\,(mM) + M'\,\Phi\,(mM') + \ldots].$$

[1]) BERTRAND, Journ. de Liouville (1) 13, pag. 185—209. 1848.

Nur die ersten mit φ behafteten Glieder kommen zweimal vor, nicht auch die mit Φ multiplicirten, weil die Massen M festliegen.

Die Massen sollen den Stamm continuirlich erfüllen. Nennt man v und k Volum und Dichte der Flüssigkeit, V und k' Volum und Dichte des festen Körpers; bezeichnet mit dv und dv' Volumelemente, mit $(dv\, dv')$ den Abstand zweier Volumelemente, so ist

$$\Omega = -g\rho \int z\, dv + \tfrac{1}{2}k^2 \iint dv\, dv' \varphi\,(dv\, dv') + kk' \iint dv\, dV \Phi\,(dv\, dV).$$

43) Die 6fachen Integrale erstrecken sich das eine Mal über zwei getrennte Räume, das andere Mal über zwei Räume, welche zusammenfallen. Gauss führt diese 6fachen Raumintegrale auf 4fache (Oberflächenintegrale) zurück. Wir wollen den Weg nur andeuten. Er zerlegt zu dem Ende in der auch sonst von ihm angewendeten Weise den Raum um einen Punkt μ herum in kleine Kegel von dem Oeffnungswinkel $d\Pi$; schneidet ein solcher Kegel aus der Oberfläche ein Stück dt heraus im Abstand r und ist q der Winkel, den die Oberflächennormale mit r einschliesst, so ist $d\Pi = \pm \frac{dt \cos q}{r^2}$, wo das $+$ oder $-$ Zeichen gilt, je nachdem der Strahl r durch die Oberfläche in den Raum ein- oder austritt. Handelt es sich z. B. um das dreifache Integral

$$\int dv\, \varphi(\mu, dv),$$

und liegt μ innerhalb des Raumes v; schneidet der Strahl die Oberfläche in den Abständen $(\mu, dv) = r', r'', r'''$ etc., so liefert ein solcher Kegel zu dem Integral den Beitrag

$$d\Pi \left[\int_0^{r'} \varphi(r)\, r^2 dr + \int_{r''}^{r'''} \varphi(r)\, r^2 dr + \ldots\right],$$

da $dv = d\Pi\, r^2\, dr$ ist. Setzt man

$$\int_r^\infty \varphi(r)\, r^2\, dr = -\psi(r),$$

so wird der Beitrag daher

$$d\Pi\, [\psi(o) - \psi(r') + \psi(r'') - \ldots]$$

$$= d\Pi \cdot \psi(o) + \left[\frac{dt' \cos q' \psi(r')}{r'^2} + \frac{dt'' \cos q'' \cos \psi(r'')}{r''^2} + \ldots\right].$$

Bei der Integration durch alle Kegel, welche den Punkt μ umgeben, würde das erste Glied den Gesammtbeitrag $4\pi \cdot \psi(o)$ ergeben, wenn der Punkt im Innern der Masse liegt. Geht man nun weiter zum 6fachen Integral $\int dv' \int dv\, \varphi\,(\mu, dv)$, wo dv' das Volumelement im Punkt μ bedeutet, so entsteht daraus der Werth $v \cdot 4\pi \cdot \psi(o)$, wenn v das ganz Volum der Masse bedeutet, welcher der Punkt μ angehört.

44) Indem Gauss so in aller Allgemeinheit die Ausdrücke verfolgt, findet er für Ω die folgende Form:

$$\Omega = -gk \int z\, dv + \tfrac{1}{2}k^2 \cdot 4\pi \cdot v\psi(o) - \tfrac{1}{2}\pi k^2 t\vartheta(o) + \pi k k' T\Theta(o)$$

$$+ \frac{1}{2} k^2 \int dt \cos q \int \frac{dt' \cos q' \vartheta(r)}{(dt, dt')^2}$$

$$+ \frac{1}{2} kk' \int dt \cos q \int \frac{dT \cos Q \cdot \Theta(r)}{(dt, dT)^2}.$$

Hierin bedeutet

k .. Dichte der Flüssigkeit,
k' .. „ des festen Körpers,
v .. Volum der Flüssigkeit,
t .. gesammte (freie und nicht freie) Oberfläche der Flüssigkeit,
T .. gemeinschaftliche Oberfläche von Flüssigkeit und festem Körper,
dt und dt' Elemente der freien Flüssigkeitsoberfläche,
(dt, dt') ihren Abstand.

dT und (dt, dT) haben entsprechende Bedeutungen.

q und q' bedeuten die Winkel, welchen die Verbindungslinie (dt, dt') mit den nach ausserhalb der Flüssigkeit gerichteten Oberflächennormalen an den resp. Stellen dt und dt' bildet. Endlich sind $\vartheta(o)$ und $\theta(o)$ die Functionen $\vartheta(r)$ und $\theta(r)$ für $r = 0$ und diese selbst sind definirt aus

$$\int_r^\infty f(r)\,dr = -\varphi(r); \quad \int_r^\infty r^2\varphi(r)\,dr = -\psi(r); \quad \int_r^\infty \psi(r)\,dr = -\vartheta(r);$$

$$\int_r^\infty F(r)\,dr = -\Phi(r); \quad \int_r^\infty r^2\Phi(r)\,dr = -\Psi(r); \quad \int_r^\infty \Psi(r)\,dr = -\theta(r).$$

45) Die 4fachen (Oberflächen-) Integrale verschwinden nach Gauss; z. B.

$$\int dt\cos q\int\frac{dt'\cos q'}{r^2}\,\vartheta(r).$$

Hier lässt sich wieder setzen $\frac{dt'\cos q'}{r^2} = d\Pi$, und das Integral hat daher die Form

$$\int dt\int d\Pi\cos q\,\vartheta(r).$$

Für nahe Theile verschwindet es, weil dort $q = 90°$ ist; für entferntere weil $\vartheta(r) = 0$ ist.

Indessen schliesst die Annahme, dass das Integral verschwinde, schon eine gewisse Voraussetzung über die Function $\vartheta(r)$ ein. Wäre, um ein einfaches Beispiel zu haben, die Fläche t eine Kugelfläche vom Radius a, so würde $\cos q = \frac{r}{2a} = \cos q'$ sein und das Integral würde den Werth annehmen

$$\frac{1}{4a^2}\int dt\int\vartheta(r)\,dt' = \pi\int\vartheta(r)\,dt'.$$

Wäre $\vartheta(r)$ von der Form k/r, so würde das Integral $= \pi k\int\frac{dt'}{r} = 4\pi^2 ka$, also noch endlich; ebenso, wenn $\vartheta(r)$ die Form k/r^2 besässe, wo das Integral $= 4\pi^2 k$ sein würde. $\vartheta(r)$ müsste also mindestens von der Form k/r^3 sein. Daraus folgt, dass $f(r)$ mindestens mit wachsendem r unendlich klein werden muss wie $1/r^8$. Will man also die Anziehungsfunction durch eine umgekehrte Potenz der Entfernung darstellen, so fordern die Erscheinungen der Capillarität, dass mindestens die umgekehrte 8. Potenz anzunehmen ist.

Nimmt man an, dass auch das zweite in Ω vorkommende Integral verschwindet; so reducirt sich nun die Gleichgewichtsbedingung darauf, dass der übrig bleibende Ausdruck ein Minimum sein muss. Da das mit v multiplicirte Glied constant ist, so bleibt die Bedingung, dass

$$M = \int z\,dv + \alpha^2 t - 2\beta^2\cdot T$$

ein Minimum ist. Darin ist

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi k}{g}\vartheta(o)$$

$$\beta^2 = \frac{\pi k'}{g}\cdot\theta(o).$$

Bezeichnet man die freie Oberfläche der Flüssigkeit mit U, so ist

$$t = U + T,$$

und daher

$$M = \int z\,dv + (\alpha^2 - 2\beta^2)\,T + \alpha^2 U.$$

Ueber eine Vergleichung des Ausdruckes für Constanten, welche in den Theorien von LAPLACE, POISSON und GAUSS auftreten, vergl. WEINSTEIN[1]).

VIII. Anwendungen der GAUSS'schen Theorie.

46) Capillarröhren. Wenn M ein Minimum sein soll, so muss die Variation von $M + \lambda v$ gleich Null sein, mit der Nebenbedingung, dass die Variation von v verschwinde; λ ist eine später zu bestimmende Constante.

Wir lassen zunächst die freie Oberfläche U allein eine unendlich kleine Variation erleiden, während die Conturlinie dieselbe bleibt, d. h. während die benetzte Wandfläche T ungeändert bleibt.

Betrachtet man in einer Oberfläche U ein unendlich kleines Rechteck dw, welches durch zwei Krümmungslinien (Normalschnitte) begrenzt ist, so schneiden die Normalen, welche durch den Umfang von dw gelegt sind, auf einer um die sehr kleine Grösse ε entfernten Oberfläche ein unendlich kleines Oberflächenelement aus, welches ist

$$dw + dw\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varepsilon,$$

wenn R und R' die Krümmungsradien der Oberfläche in den beiden Normalschnitten bedeuten. Dieser Satz ergiebt sich aus einer sehr einfachen geometrischen Ueberlegung. Daher ist die Variation von $\alpha^2 U$

$$\delta(\alpha^2 U) = \alpha^2 \int dw \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varepsilon.$$

Was die Variation von $\int z\,dv$ betrifft, so ist dieselbe, da im Inneren der Flüssigkeit alle z ungeändert bleiben,

$$\delta \int z\,dv = \int \bar{z}\,\varepsilon\,dw,$$

wenn $\bar{z}$ den Werth von z an der Oberfläche bedeutet.

Endlich ist die Variation von v

$$\delta v = \int \varepsilon\,dw.$$

Daher muss sein

$$\int \varepsilon\,dw \left[\alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \bar{z} + \lambda\right] = 0,$$

und da die Gleichung für beliebige Werthe von ε gelten soll, so muss sein

$$\alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \bar{z} + \lambda = 0.$$

[1]) WEINSTEIN, WIED. Ann. 27, pag. 544. 1886.

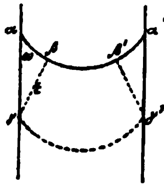
Die Constante λ bestimmt sich leicht; für $R = \infty = R'$ wird $\bar{z} + \lambda = 0$; d. h. rechnet man die z vom allgemeinen Niveau aus, so ist für dieses

$$z = 0 \quad \text{und daher auch} \quad \lambda = 0.$$

Die Gleichung wird daher:

$$\bar{z} = -\alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

47) Randwinkel. Die Flüssigkeit erleide eine Variation, indem gleichzeitig die Contourlinie sich ändert (Fig. 195).



(Fig. 195.)

Die Variation der Oberfläche, welche zwischen den Normalen $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$ liegt, ist dann ebenso wie vorher

$$\int \varepsilon dw \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Zu ihr ist hinzuzufügen der ringförmige Theil zwischen $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$; bezeichnet $\bar{\omega}$ den Randwinkel, so ist

$$\alpha\beta = \varepsilon \, cotg \, \bar{\omega}.$$

Ist dP ein Element des Umfanges, so ist diese Zone gleich

$$\int \varepsilon \, cotg \, \bar{\omega} \, dP.$$

Die Variation des Volums ist $\int \varepsilon dw$. Dazu kommt das Volum des kleinen Ringes, welches unendlich klein zweiter Ordnung ist, nämlich $\frac{1}{2}\varepsilon \cdot \alpha\beta$-Umfang, und welches wir daher vernachlässigen.

Was die Variation von $\int z dv$ betrifft, so ist gleichfalls derjenige Theil, welcher dem unendlich schmalen Ring entspricht, unendlich klein zweiter Ordnung.

Endlich erleidet die gemeinschaftliche Oberfläche T eine Variation, welche ist

$$\int \alpha\gamma \cdot dP = \int dP \cdot \frac{\varepsilon}{sin \, \bar{\omega}}.$$

Die Terme, welche herrühren von der Variation des Volums, bleiben also (bis unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung) dieselben, wie vorher, und verschwinden für sich. — Die Terme, welche herrühren von der Variation der Contour, müssen daher gleichfalls für sich verschwinden. Sie sind

$$\int \varepsilon dP \left(\frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{sin \, \bar{\omega}} + \alpha^2 \, cotg \, \bar{\omega}\right).$$

Sollen sie für jedes ε verschwinden, so muss sein

$$\frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{sin \, \bar{\omega}} + \alpha^2 \, cotg \, \bar{\omega} = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$cos \, \bar{\omega} = -\frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{\alpha^2}$$

Der Randwinkel hängt also nur ab von der Natur der Röhrenwand und der Flüssigkeit; er ist unabhängig speciell von der Neigung und Krümmung der Wand.

α^2 und β^2 sind proportional den Werthen $\vartheta(o)$ und $\Theta(o)$, d. h. den Anziehungskräften resp. zweier Flüssigkeitstheilchen unter einander oder den zwischen einem Flüssigkeits- und einem Wandtheilchen.

Für $\alpha^2 = \beta^2$ wird $cos \, \bar{\omega} = 1$, es findet vollständige Benetzung statt. Für $\beta^2 > \alpha^2$ würde $cos \, \bar{\omega} > 1$, d. h. $\bar{\omega}$ einen unmöglichen Werth annehmen. In diesem Falle dürfen die früher besprochenen Werthe nicht vernachlässigt werden. Man nimmt an, dass ein Flüssigkeitshäutchen die Röhrenwand bedeckt, so dass man auf den Fall $\alpha^2 = \beta^2$ damit zurückkommt.

48) Das ganze in einer cylindrischen vertikalen Röhre von beliebigem Querschnitt gehobene Flüssigkeitsvolum. Beziehung der GAUSS'schen Constante α^2 zu der früher benutzten Constante α.

Die xy-Ebene sei das allgemeine Niveau. Dann ist, wenn z die Erhebung eines Punktes der capillaren Oberfläche bedeutet,

$$z = -\alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Multiplicirt man mit $dx\,dy$ und integrirt durch den ganzen Querschnitt des Rohres, so kommt links das ganze gehobene Flüssigkeitsvolum; rechts

$$\int\int dx\,dy \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Dieses Integral lässt sich aber auffassen als die Verticalcomponente eines Systems von Kräften, welche normal auf die Flüssigkeitsoberfläche wirken und für jedes Element dw die Grösse $dw\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ haben. Ein derartiges System lässt sich aber durch zwei einfachere Systeme, nämlich solche mit constanter Normalkraft, in der folgenden Weise einsetzen. Man denke sich parallel der Flüssigkeitsoberfläche w eine zweite w' im unendlich kleinen Abstand ε. Auf ein Element der ersten wirke die Normalkraft $\frac{1}{\varepsilon}dw$; auf ein Element der zweiten die entgegengesetzt gerichtete Normalkraft $\frac{1}{\varepsilon}dw'$. Die Differenz beider Kräfte ist

$$\frac{1}{\varepsilon}(dw' - dw) = dw\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Man weiss nun aber, dass ein System von constanten Normaldrucken, die auf eine beliebig gekrümmte Fläche wirken, einen Gesammtdruck nach irgend einer Richtung s ergeben, welcher gleich ist dem Normaldruck (bezogen auf die Flächeneinheit) multiplicirt mit der Projection des Fläche auf eine zu s senkrechte Ebene. Hier ist s die Verticalrichtung. Nennt man daher die Projectionen der Fächen w und w' auf eine Horizontalebene resp. P_1 und P_2, so ist

$$\int\int dx\,dy\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = (P_1 - P_2)\frac{1}{\varepsilon}.$$

Nennt man L die Contourlänge der Projectionsfläche P_1, ferner wieder $\bar{\omega}$ den Randwinkel, so ist $P_1 - P_2 = L\varepsilon\cos\bar{\omega}$; daher endlich

$$\int\int dx\,dy\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = L\cos\bar{\omega}.$$

Bezeichnet V das ganze in der Röhre gehobene Flüssigkeitsvolum, so folgt also

$$(m) \quad . \; . \; V = \alpha^2 L \cos\bar{\omega}.$$

Die Vergleichung mit Gleichung III, § 5, zeigt, dass die GAUSS'sche Constante α^2 zu den früheren Constanten die Beziehung hat:

$$\alpha = \frac{H}{2} = \alpha^2_{\text{GAUSS}} \cdot \sigma = \alpha^2_{\text{GAUSS}} \cdot kg,$$

wenn σ specifisches Gewicht, k specifische Masse bezeichnet.

Die Gleichung (m) ist der allgemeine Beweis für den schon früher benutzten Satz, dass $\alpha\cos\bar{\omega}$ für beliebig gekrümmte verticale Wände das pro Mill. Contactlinie gehobene Flüssigkeitsgewicht darstellt.

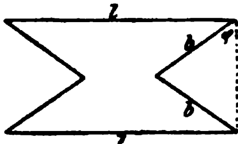
49) Flache Tropfen. Die Oberflächengleichung ist

$$h - z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

wo h eine Constante bezeichnet. Ist der Tropfen an der Kuppe eben, so lässt sich h bestimmen. Dann ist nämlich für $R = \infty = R' \,.\,.\, h - z = 0$, d. h. h bedeutet die Höhe des Tropfens. Führt man wieder, wie oben, die unendlich nahen Flächen constanten Druckes ein, so ergiebt sich Folgendes. Liegt der Tropfen auf seiner Unterlage auf mit einer Fläche $= b$; ist wieder L die Contour länge des Tropfens, so ist sein Volum V

$$V = bh + \alpha^2 L \cos \bar{\omega}.$$

50) Gewicht, welches eine Lamelle tragen kann. Wir wollen endlich noch einen einfachen Fall durchführen, welcher ausreicht zu erläutern, wie man allgemeinere Probleme zu behandeln hat.



(Ph. 196.)

Es sei eine Seifenlamelle gegeben in einem System von Stäbchen der beifolgenden Gestalt (Fig. 196). Die Stäbchen seien, etwa in Charnieren, ohne Reibung gegeneinander beweglich. Das untere Stäbchen habe das Gewicht p. Das Gewicht der Seifenlamelle sei f; vom Gewicht der seitlichen Stäbchen wollen wir absehen oder es sei in f mit einbegriffen. Gefragt ist nach der Gleichgewichtsbedingung.

Wir benutzen das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, wobei zu beachten, dass eine Vergrösserung dU der capillaren Oberfläche einer Arbeit $= \alpha \cdot dU$ entspricht.

Das Gewicht p erleide eine virtuelle Verschiebung dz; der Schwerpunkt der Lamelle senkt sich dann — wenn ihre Dicke gleichmässig ist — um die Hälfte; daher ist

a) Arbeit der Schwere $= \left(p + \frac{f}{2}\right) dz.$

b) Die eine Fläche der Lamelle war vorher

$$O = lh - 2\frac{h}{2} b \sin\varphi.$$

Ferner ist (1) $\frac{h}{2} = b \cos\varphi$; daher

$$O = lh - 2b^2 \sin\varphi \cos\varphi = lh - b^2 \sin 2\varphi.$$

Senkt sich p um dz, so ist die Aenderung von h gleich dz, daher

$$dO = l dz - 2b^2 \cos 2\varphi \cdot d\varphi,$$

wobei nach (1) $dh = dz = -2b \sin\varphi \, d\varphi$. Damit wird (2)

$$dO = \left(l + b\frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi}\right) dz.$$

Nennt man U die ganze freie Oberfläche, so ist (da die Lamelle zwei Seiten hat) $U = 2O$ und

$$\left(p + \frac{f}{2}\right) dz = \alpha \, dU = 2\alpha \, dO.$$

Daher die gesuchte Bedingung:

$$p + \frac{f}{2} = 2\left(l + \frac{b \cos 2\varphi}{\sin\varphi}\right)\alpha.$$

Literaturübersicht.

Die folgende Uebersicht ist wesentlich chronologisch geordnet, bei einzelnen Autoren sind aber Aufsätze, welche sich auf den gleichen Gegenstand beziehen, auch wenn einige derselben erst später kommen sollten, zusammengefasst. Die meisten der im Text citirten Arbeiten sind nicht nochmals angegeben. Häufig ist nicht der Titel der Arbeit angeführt, sondern nur kurz angedeutet, worauf sich dieselbe bezieht. — Die Literaturübersicht ist nicht erschöpfend; doch wird keine wichtige Untersuchung vergessen sein. Ausgeschlossen, da der Behandlung des Gegenstandes halber nicht gut hier anschliessend, sind die sämmtlichen neueren Untersuchungen über Beziehungen der Capillarität zur Electricität.

Bezüglich der Literatur bis zum Jahre 1826 siehe GEHLER, Handwörterbuch, Artikel Capillarität. Ferner Einleitung zu unserem Aufsatz. Von der LAPLACE'schen Abhandlung gebe ich hier noch eine etwas speciellere Inhaltsangabe, sofern sie nicht schon in der Darstellung enthalten ist.

LAPLACE, I. Abhandlung: § 4 und 5. Meniskus in runden Capillarröhren. § 6. Capillarröhre mit axialem Cylinder. § 8. Flüssigkeit zwischen parallelen, verticalen, ebenen Platten. Specialfall: eine Platte. § 9. Tropfen in einem konischen Rohr. § 10. Tropfen zwischen zwei horizontalen Platten; dann die eine horizontal, die andere wenig dagegen geneigt. § 11. Anziehung schwimmender Körper. § 12. Randwinkel.

Supplement. Allgemeine Gleichung. Randwinkel $\rho = \rho' \cos^2 \omega / 2$. ρ Anziehungsmaass von Wand auf Flüssigkeit; $\rho' = H/2$. — Mehrere in einer Capillarröhre übereinander geschichtete Flüssigkeiten. Die Steighöhe hängt nur von der unteren ab; die obere wirkt nur wie eine Belastung, pag. 26. LAPLACE zeigt, dass das gehobene Flüssigkeitsgewicht nur von der Länge der Contourlinie, nicht von ihrer Gestalt abhängt. — Anziehung etc. schwimmender Körper.

POISSON, Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris, Bachelier. 1831. 4. pag. 1—300. Es enthält eine Inhaltsübersicht. Eine Anzahl specieller gelöster Probleme vergl. diesen Aufsatz § 6 g. Wir heben nur noch hervor, dass nach POISSON (pag. 107 u. 293) für eine Mischung zweier Flüssigkeiten sein soll

$$\rho h = u^2 f + u u' f_1 + u'^2 f',$$

wenn ρ die Dichte der Mischung, h die Steighöhe, u und u' das Verhältniss, in dem beide Flüssigkeiten gemischt sind ($u + u' = 1$), $f f_1$ und f' drei positive Constanten sind. f und f' sind proportional den Capillarconstanten der reinen Bestandtheile. Die Gleichung würde gestatten, die Capillarconstante fester Körper zu bestimmen (vergl. § 34).

GAUSS, Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. Werke. Bd. V, pag. 30—77.

FRANKENHEIM, Die Lehre von der Cohäsion. Breslau, Aug. Schulz. 1835.

SONDHAUSS, Dissertatio de vi, quam calor habet in fluidorum capillaritatem. Vratislaviae 1841. — FRANKENHEIM und SONDHAUSS, Journ. pr. Chem. (ERDMANN) 23, pag. 401. 1846.

GIRARD, Ueber die Anziehung, die sich in merklichen Abständen zwischen den Oberflächen starrer Körper äussert, durch eine Flüssigkeit, in welcher sie untergetaucht sind. Ann. Chim. Phys. 29, pag. 260; POGG. Ann. 5, pag. 41. 1825. Bezieht sich auf die scheinbare Anziehung vollständig untergetauchter Platten, also ein Phänomen, welches von der inneren Reibung abhängt; ferner Aenderungen des specifischen Gewichts von Flüssigkeiten durch in ihnen suspendirte Pulver.

DUTROCHET, Ueber die Endosmose, ihre physische Ursache und ihre relative Stärke bei einigen organischen Flüssigkeiten. POGG. Ann. 28, pag. 359. 1833 (sucht Beziehungen zur Capillarität, Bewegung erhitzter Tropfen an Drähten).

LINK, POISSON's Nouvelle théorie de l'action capillaire. POGG. Ann. 25, pag. 270. 1832; 27, pag. 193. 1833. Uebersicht von POISSON's Werk. Bemerkungen gegen PARROT; Antwort desselben.

J. W. DRAPER, Is capillarity an electrical phaenomenon? Phil. Mag. 26, pag. 185. POGG. Ann. 67, pag. 284. 1846.

G. HAGEN, Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten. Abh. Kgl. Akad. Berlin 1845. POGG. Ann. 67, pag. 1. 1846.

W. G. ARMSTRONG, On the spheroidal condition of liquids. Phil. Mag. 27, pag. 257. 1847; DINGL. pol. J. 98, pag. 472.

DONNY, Note sur la cohésion des liquides Inst. No. 576, pag. 17. — Luftfreies Wasser kann auf 135° C. erhitzt werden, ehe es siedet.

HENRY, Observation on capillarity. Phil. Mag. 38, pag. 341; POGG. Ann., Ergzbd. II, pag. 358. Eine Anmerkung über technische Erfahrungen, aus denen der Verfasser auf eine Diffusion fester Metalle schliesst.

PLATEAU, Ueber die Erscheinungen bei einer freien und der Einwirkung der Schwere entzogenen Masse. POGG. Ann. 55, pag. 517; 56, pag. 167; Ergzbd. II, pag. 249; Mém. de Brux. 16.

BRUNNER, Untersuchung über die Cohäsion der Flüssigkeiten (Abnahme mit der Temperatur). Dissertation, Berlin 1846. POGG. Ann. 70, pag. 481; Monatsber. Berl. Ak. 1846, pag. 181.

DONNY, Mém. sur la cohésion des liquides et sur leur adhérence aux corps solides. Mém. cour. et d. sav. étr. de l'Ac. de Brux. 17; POGG. Ann. 67, pag. 562. 1846. (Versuche mit Adhäsionsplatten; ferner Haften von Flüssigkeiten in leer gepumpten Röhren; Ueberhitzen von Flüssigkeiten; Stossen.)

P. RIESS, Ueber eine merkwürdige Eigenschaft des Glimmers. POGG. Ann. 67, pag. 354. 1846; Phil. Mag. 29, pag. 25. (Auf frisch gespaltener Glimmerfläche schlägt sich Hauch als gleichmässige Haut nieder, auf altem, reinen als Tröpfchen, die man unter dem Mikroskop erkennen kann.)

A. WALLER, Observations on certain molecular actions of crystalline particles and on the cause of the fixation of mercurial vapours in the daguerrotype process. Phil. Mag. 28, pag. 94. 1846; Arch. sc. phys. 1, pag. 428.

PRATER, Vier Aufsätze über den gleichen Gegenstand und die »Contactwirkung« vergl. die Titel in Fortschr. 1846.

C. HOLTZMANN, Ueber die Cohäsion des Wassers. POGG. Ann. 71, pag. 463. 1847; Arch. sc. phys. 5, pag. 355.

BUYS-BALLOT, Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Synaphie. POGG. Ann. 71, pag. 177. 1847. Versuche mit Adhäsionsplatten über Lösungen von Kupfervitriol, Glaubersalz.

MERIAN, Bemerkung dazu. POGG. Ann. 73, pag. 485. 1848.

FRANKENHEIM, Ueber die Abhängigkeit einiger Cohäsionserscheinungen flüssiger Körper von der Temperatur. POGG. Ann. 72, pag. 177. 1847.

HAUGHTON, Experiments proving the common nature of magnetism, cohesion, adhesion and viscosity. Phil. Mag. 30, pag. 437, 502.

LOUGET, De l'ébullition des liquides et de leur adhérence aux vases. Bull. Brux. 1848, pag. 349.

DANGER, Höhe der Quecksilbermenisken in gläsernen Capillarröhren. Compt. rend. 27, pag. 381; POGG. Ann. 76, pag. 297. 1849. Enthält die oft bei Quecksilberhöhen zur Kuppencorrection angeführten Zahlen.

FRANKENHEIM, Veränderungen der Höhe des Quecksilbers in Capillarröhren mit der Temperatur. POGG. Ann. 75, pag. 209. 1849.

G. WILSON, On some phenomena of capillary attraction, observed with chloroform, bisulphuret of carbon and other liquids. Quart. J. Chem. Soc. 1, pag. 174. 1848. Aenderungen der Tropfenform, z. B. von Chloroform in Wasser, wenn man dem letzteren Alkali hinzusetzt.

W. SWAN, On certain phenomena of capillary attraction exhibited by chloroform etc. Phil. Mag. 33, pag. 36. (Schliesst an den vorigen Autsatz an.)

ROSELLI, Theoria dei tubi capillari. Giorn. Arcad. 113, pag. 3. Er macht u. A. darauf aufmerksam, dass die Molekularanziehung nicht durch eine umgekehrte Potenz der Entfernung ausgedrückt werden könne; sie ergebe nicht die Bedingung nur in unmerklicher Entfernung eine merkbare Grösse zu liefern. Man müsse die Form $AB^{-\frac{r^m}{a}}$ nehmen, wo a ein kleiner Abstand, m eine grosse Zahl sei.

DAVIDOFF, Cousidérations sur la théorie des phenomènes capillaires analysés par OSTROGRADSKY et LENZ. Bull. de St. Petersb., VII. Supplément. 1849.

T. SCHEERER, Einige Beobachtungen über das Absetzen aufgeschlämmter, pulverförmiger Körper in Flüssigkeiten. POGG. Ann. 82, pag. 419. 1850. (Die Geschwindigkeit des Absetzens wird in Beziehung zu der mit Adhäsionsplatten oder Tropfengewicht ermittelten Cohäsion gebracht.)

C. Brunner, Einfluss des Magnetismus auf Cohäsion (nicht nachweissbar). Pogg. Ann. 79, pag. 141.

Coulier, Flüssigkeiten in einer Capillarröhre übereinander. Inst. No. 857, pag. 178.

Duprez, Haften von Flüssigkeiten. Mém. de Brux. 26 (3) 17, pag. 312.

Simon, Recherches sur la capillarité. Ann. chim. phys. (3) 32, pag. 5—41. (Steighöhe in Capillarröhren, zwischen ebenen Platten; Adhäsionsplatten.)

Bède, Mém. sur l'ascension de l'eau et la dépression du mercure dans les tubes capillaires. Bull. Brux. 19, pag. 2; Mém. cour. d. Brux. 25, pag. 3—25.

Desains, Versuche zur Correctionsermittelung des Kuppendruckes bei Messung mit Quecksilbersäulen. Compt. rend. 34, pag. 765; Pogg. Ann. 86, pag. 491.

Duprez, Haften von Flüssigkeiten. Ann. chim. phys. (3) 42, pag. 500; Mém. d. Brux. 28 (5), pag. 1—34.

Schefzik, Bewegung schwimmender Krystalle. Jahrb. geol. Reichsanstalt 1855, pag. 263; Chem. Centralbl. 1856, pag. 836.

Popoff, Bemerkung zu Davidoff, Bull. d. natural d. Moscou. 1856. Davidoff dagegen ibid.

Zantedeschi, Steighöhen von Wasser und Quecksilber bei 10°.

Wolf, Temperatur, bei welcher die Flüssigkeit die Gefässe nicht mehr benetzen. Compt. rend. 42, pag. 968; Pogg. Ann. 98, pag. 643. (Für Wasser berechnet sich aus Brunner's Zahlen 536°, für Aether 191°; für Aether findet er es experimentell bestätigt; bei 200° tritt Cagniard-Latour'scher Zustand ein.)

Desains, Mém. sur les phénomènes capillaires. Compt. rend. 43, pag. 1077—1081. Pogg Ann. 100, pag. 336—340.

Wolf, Temperatureinfluss. Ann. chim. phys. (3) 49, pag. 230; Pogg. Ann. 101, pag. 550—576.

Wertheim, Beobachtung von Steighöhen. Compt. rend. 44, pag. 1022; Pogg. Ann. 102, pag. 595—600.

Valson, Versuche zur Bestätigung der Theorie. Compt. rend. 45, pag. 10—13, 101—103.

Desains, Wasser zwischen zwei verticalen Platten. Compt. rend. 45, pag. 225; Pogg. Ann. 102, pag. 601—605.

P. du Bois-Reymond, Experimentaluntersuchungen über Ausbreitung von Flüssigkeiten. Pogg. Ann. 104, pag. 193—234.

G. Quincke, Capillarconstanten des Quecksilbers. Pogg. Ann. 105, pag. 1—48; Ann. chim. phys. (3) 45, pag. 227. (Methode der flachen Tropfen; desgl. Randwinkelbestimmung.)

Quincke, Oberflächenverdichtung. Pogg. Ann. 108, pag. 326.

Mendelejeff, Bestimmung von a^2 für organische Stoffe. Compt. rend. 50, pag. 52; 51, pag. 97.

Jamin, Versuche über den Widerstand, den Luftbläschen in einer Röhre (nach Quincke, wenn dieselbe nicht vollständig benetzt ist) der Bewegung entgegensetzen und die Kräfte, mit welchen Flüssigkeiten von porösen Körpern aufgesogen werden. Compt. rend. 50, pag. 172, 311, 385.

Plateau, Gleichgewichtsfiguren schwereloser Flüssigkeiten. Mém. d. Brux. (5) 33; (6) 33; Pogg. Ann. 114, pag. 597; Phil. Mag. (4) 22, 24; vergl. Bull. d. Brux. (2) 20, pag. 220; Pogg. Ann. 128, pag. 481; Bull. d. Brux. (2) 36; Pogg. Ann. 130, pag. 264; Bull. d. Brux. (2) 24, pag. 21; Pogg. Ann. 132, pag. 654—658; Mém. d. Brux. 28, pag. 3—102; Mém. d. Brux. 37.

Schönbein, Trennungswirkungen von Filtrirpapier auf Lösungen. Pogg. Ann. 114, pag. 275.

Mattenici, Ueber Aufsaugung. Cim. 13, pag. 265.

Wertheim, Ueber Capillarität. Ann. chim. (3) 63, pag. 129—193, 194—201, 447—449.

Tomlinson, Cohäsionsfiguren (so nennt er die Figuren, welche sich ausbreitende Tropfen zeigen). Phil. Mag. (4) 23, pag. 186—195; vergl. auch 27, pag. 425, 528; 28, pag. 354. Dazu Hallwachs, Dingl. Journ. 174.

Tomlinson, Bewegung von Campher auf Wasser. l. c. 24, pag. 490; ferner 26, pag. 187.

Bède, Recherches sur la capillarité. Mém. cour. d. Brux. 30 (5), pag. 1—198; 32, pag. 1—17.

Wilhelmy, Pogg. Ann. 119, 121, 122. (Die im Text ausführlich besprochenen Arbeiten.) Die Schlüsse betreffs Einfluss der chemischen Constitution auf α vergleiche das Original.

Gore, Ausbreitung auf Hg. Phil. Mag. (4) 26, pag. 142.

TATE, Gewicht abfallender Tropfen. Phil. Mag. (4) 27, pag. 176—180. Resultate bei verschiedenen Substanzen.

VAN DER MENSBRUGGHE, Sur quelques effets curieux de la force moléculaire des fluides. Bull. Brux. (2) 18.

GUTHRIE, On drops. Proc. Roy. Soc. 13, pag. 444.

GUTHRIE, On bubbles. Proc. Roy. Soc. 14, pag. 22.

MELDE, Methode zur Beobachtung von Luftblasen. POGG. Ann. 124, pag. 87.

ROGER, Compt. rend. 62, pag. 134. (Theorie betreffend; Radius der Wirkungssphäre nicht unendlich klein angenommen.)

BROUGHTON, Phil. Mag. (4) 31, pag. 228; POGG. Ann. 128, pag. 641. (Dicke von Seifenblasen = 0·00134 bis 0·000726 *mm*.)

LACOUTURE, Mond. 1, pag. 73. (Tropfen, welche auf eine Flüssigkeit auffallen.) PLATEAU, ibid. 237. Bemerkung dazu.

NÄGELI und SCHWENDENER, Münch. Ber. 1866, Bd. I, pag. 353—376, 473—492. Versuche über Capillarität bei vermindertem Luftdruck.

NÄGELI, Theorie der Capillarität. l. c. pag. 597—627.

MENSBRUGGHE, Bull. d. Brux. 21, pag. 530, 552. (Ueber eine Oberfläche von der Krümmung Null.)

MENSBRUGGHE, Bull. d. Brux. 22, pag. 272; POGG. Ann. 133, pag. 277. Versuche über die Spannung in Seifenlamellen (cfr. Text § 16). Bull. d. Brux. 22, pag. 308; 23, pag. 448; Compt. rend. 64, pag 281; 65, pag. 41.

DUPRÉ, Ann. chim. (4) 7, pag. 246—282, 406—428; 9, pag. 328—384. Theoretische im Anschluss an mechanische Wärmetheorie. Experimentelles. Es soll $f = 26{\cdot}69\, \alpha / k^2$ sein, wo f umgekehrt proportional sei dem Moleculargewicht, dividirt durch die Zahl der Atome im Molekül. Ferner Ann. chim. phys. (4) 11, pag. 194—220.

FELICI, Cim. 23—24, pag. 151. Oberflächenform projicirt und gezeichnet.

BECQUEREL, 1867, Compt. rend. 64, pag. 919, 1211; 65, pag. 51, 720; 66, pag. 77, 245, 766, 1066; 1868, Compt. rend. 67, pag. 1081; 1869, Compt. rend. 68, pag. 1285; 69, pag. 1037 1870, Compt. rend. 70, pag. 68, 345; 71, pag. 197; 1872, Compt. rend. 75, pag. 1729; 1873 Compt. rend. 76, pag. 245, 1037; 78, pag. 1081; 79, pag. 82, 1281; 84, pag. 145; 85, pag. 169 In capillaren Räumen sollen besondere chemische Wirkungen eintreten.

ARTUR, Compt. rend. 64, pag. 1275. Erklärung desselben. Compt. rend. 66, pag. 845.

BETTI, Cim. 25, pag. 81—105, 225—237. Eine andere Behandlung der Capillaritätstheorie.

MENSBRUGGHE, Mém. cour. et d. sav. étr. d. Brux. 34, pag. 1—67. Wesentlich Ausbreitung.

LÜDTGE, POGG. Ann. 137, pag. 362—377. Ausbreitung.

MENSBRUGGHE, Bull. d. Brux. (2) 29; POGG. Ann. 141, pag. 287—294. Electrisirte Seifenblasen.

LUVINI, Atti di Torino, V. 3—7. Phil. Mag. (4) 40, pag. 190. Oberflächenzähigkeit.

MARANGONI, Cim. (2) 3, pag. 105—120; POGG. Ann. 143, pag. 337—354. Auszug seiner 1865 erschienenen Brochüre über Ausbreitung. Prioritätsreclamation.

J. STAHL, POGG. Ann. 139, pag. 239—263. Zur Theorie von LAPLACE und POISSON's Einwänden.

BOLTZMANN, POGG. Ann. 141, pag. 582. Elementare Herleitung der GAUSS'schen Resultate.

P. DU BOIS-REYMOND, POGG. Ann. 139, pag. 262—276. Ausbreitung.

MOUTIER, Compt. rend. 70, pag. 612. Ueber die Theorie des Randwinkels.

ROGER, Compt. rend. 72, pag. 848. Zur Theorie, wenn die Dichte nicht als constant angesehen wird. Compt. rend. 74, pag. 1510; 76, pag. 816; 90, pag. 908.

LOEW, Journ. f. pr. Chem. (2) 4, pag. 271. Zu BECQUEREL's electrocapillaren Erscheinungen.

KOBER, Ueber die angeblichen Dunstbläschen in der Atmosphäre. POGG. Ann. 144, pag. 395—427. 1871. — Wasser soll nur in Tropfen in der Atmosphäre sein. (Literaturzusammenstellung.) Dagegen

PLATEAU, Bull. d. Brux. (2) 32. 1871. Ein einerseits geschlossenes Rohr von 13 *mm* Durchmesser wird mit Wasser gefüllt, die Oeffnung mit Papier bedeckt, umgekehrt und das Papier entfernt Kommen hohle Wasserbläschen mit der unteren Wasserfläche in Berührung, so platzen sie und es steigt Luft in dem Wasser in die Höhe. Bringt man die Röhre aber

über ein Gefäss, in welchem Wasser kocht, so steigen keine Luftbläschen auf, d. h. in diesem Wasserdampf sind nur Tröpfchen enthalten.

Bosscha, Inst. 1872, pag. 135, 142—143. Spannung an der gemeinschaftlichen Oberfläche zweier mischbaren Flüssigkeiten sei nicht gleich Null. — An Ringen von Rauch oder Salmiaknebel, die sich an einer Röhre mit enger Oeffnung bilden, hat der Verf. auch die Plateau'schen Gleichgewichtsfiguren gesehen. Die Theilchen können auch, statt in Luft, in einer Flüssigkeit suspendirt sein.

Mensbrugghe, Bull. d. Brux. (2) 28, pag. 233; Pogg. Ann. 146, pag. 623. — Sobald eine Flüssigkeit mit grossem α, welche Gas gelöst enthält, mit einer von kleinem α in Berührung kommt, tritt Gasentwickelung ein. — Dagegen Gernez, Compt. rend. 76, pag. 89.

Marangoni, Cim. (2) 5—6, pag. 239—273; Naturf. V, pag. 236. Oberflächenzähigkeit. Unter Anderem: Die Zähigkeit ist kleiner, wenn nur die untere Fläche der schwingenden Platte die Flüssigkeit berührt, als wenn obere und untere Fläche damit in Berührung sind. Dagegen Plateau, Bull. d. Brux. (2) 34, pag. 404; Cim. (2) 7—8, pag. 370.

Marangoni und Stefanelli, Flüssigkeitsblasen. Cim. (2) 7—8, pag. 301—356.

Moutier, Ann. de l'école norm. (2) 3, pag. 69—86. Gemeinschaftliche Oberfläche.

Spring, Bull. d. Brux. 41, pag. 914. Eine dünne Kautschukplatte wird durch Ausziehen elektrisch. Ebenso zwei sich vereinigende Hg-Tröpfchen. Alkohol, der sich auf Wasser ausbreitet, giebt Veranlassung zu einem elektrischen Strome.

Worthington, Ueber die Form, welche Tropfen annehmen, wenn sie auf eine horizontale Platte auffallen. Proc. Roy. Soc. 25, No. 174, pag. 261, 498. Untersuchung mit Momentanbeleuchtung. Beibl. 1. 1877, pag. 181, 275.

Cintolesi, Rend. Lomb. (2) 9, No. 6; Naturf. 1876, pag. 299. Ausbreitung.

Sondhauss, Spannung flüssiger Lamellen. Pogg. Ann., Ergzbd. 8, pag. 266—298.

Bosscha, Form eines Quecksilbertropfens zwischen 2 horizontalen Platten. Arch. néerl. 11, pag. 467—475. Eine Anwendung der Gauss'schen Theorie. Beibl. 1, pag. 440. 1877.

Rayleigh, Capillaritätserscheinungen bei Flüssigkeitsstrahlen. Proc. Roy. Soc. 29, pag. 71—97. 1879; 34, pag. 130—145. 1882; Beibl. 4, pag. 245. 1880; 7, pag. 823. 1883.

Heringa, Arch. Néerl. 15. 1880. Zur Erklärung der Wilhelmy'schen Beobachtungen. Beibl. 5, pag. 338. 1881.

Reiff, Inaug.-Dissertation, Tübingen. Fues. 1879, pag. 31 ff. Er zeigt, dass die Sätze der Capillarität auch für bewegte Flüssigkeiten gelten.

Terquem, Compt. rend. 92, pag. 407. Rotationsflächen constanter Krümmnng.

Worthington, Proc. Roy. Soc. 30, pag. 49—60. 1879; Beibl. 5, pag. 486. 1881. Freiwilliges Zerfallen eines Flüssigkeitscylinders. Experimentell mit Hg, das in freier Luft sich zu Tropfen zusammenzieht, welche auf Sand aufgefangen werden.

Worthington, Hängende Tropfen. Proc. Roy. Soc. 32, pag. 362. 1881. Ein principieller Einwand gegen die Methode der fallenden Tropfen. Wenn ein Tropfen am Ende eines Drahtes vom Radius r sich bilde, so sei die Gleichgewichtsbedingung, bei der der Tropfen eben noch bestehen könne:

$$2\pi r\alpha = \text{Gewicht der Tropfen} + \pi r^2 \cdot \alpha / r.$$

Volkmann, Molecularanziehung von Flüssigkeiten auf einander. Wied. Ann. 16, pag. 321. 1882.

de Heen, Aenderung von α mit der Temperatur (fallende Tropfen; Ester). Bull. de Belg. (3) 5, pag. 477, 492, 505; Beibl. 7, pag. 663. 1883.

V. v. Lang, Capillarwage. Wien. Ber. 87, pag. 1060. 1882; Beibl. 7, pag. 665. Ein Aräometer, an dessen dünner Spindel sich aber oben eine Glaskugel befindet. Das Aräometer taucht in Wasser bis zur Spindel. Senkt man es aber noch tiefer ein, bis das Wasser die Kugel berührt, so hat es nun in Folge der Capillarität eine zweite tiefere Einstellung. Giesst man jetzt Alkohol auf das Wasser, so steigt die Capillarwage wieder in ihre erste Lage zurück. — Uebrigens geht der Versuch nicht nur, wie der Verf. irrthümlich angiebt, wenn das obere Gefäss die Form einer Kugel hat. Auch ein Conus von ca. 10—15° Oeffnungswinkel thut es.

Mensbrugghe, Bull. J. Brux. (8), pag. 326. 1884, beschreibt einen ähnlichen Apparat. Er benutzt oben einfach einen Drahtring.

R. Schiff, Capillarconstanten von Flüssigkeiten beim Siedepunkt. Chem. Ber. 15, pag. 2965—75. 1882; Beibl. 7, pag. 228. 1883.

STABLES uud WILSON, Oberflächenzähigkeit. Phil. Mag. 15, pag. 406. 1883; Beibl. 7, pag. 884. Widerstand an der Oberfläche vom Wasser halb so gross als im Inneren, bei 2%iger Saponialösung aber 600 mal so gross. Taucht die Scheibe bis 0·1 *mm* unter, so ist der Widerstand nur noch 16 mal so gross.

REYNOLDS und RÜCKER, Proc. Roy. Soc. 35, pag. 149. 1883; Beibl. 7, pag. 749 Bestimmungen der Dicke von Seifenlamellen auf optischem Wege und aus elektrischem Widerstand ergeben nahezu gleiche Werthe. Die Dicke der schwarzen Stellen ist 7·2 bis $14·5 \cdot 10^{-6}$ *mm*.

MATHIEU, Capillaritätstheorie. Paris, Gauthier Villars. 1883.

MATHIEU, Journ. d. phys. 3, pag. 82—86. 1884; Beibl. 8, pag. 625. 1884; 3, pag. 86—93. Modification des Auftriebes einer Flüssigkeit durch Capillarkräfte.

WORTHINGTON, Proc. Roy. Soc. 36, pag. 351—353. 1884. Allgemein Theoretisches. Beibl. 8, pag. 624.

E. WIEDEMANN, LIEB. Ann. 225, pag. 263. 1884; Beibl. 8, pag. 755. Einige Bemerkungen gegen H. SCHIFF. α wird nicht bei der kritischen Temperatur gleich Null.

AITKEN, Proc. Edinb. Roy. Soc. 12, pag. 56. 1883.

CULVERWELL, Nat. 28, pag. 608; Beibl. 8, pag. 186. 1884. Wirkung des Oeles für Wogenberuhigung.

REYNOLDS, Rep. Brit. Assoc. pag. 524. 1882. Ausbreitung. Beibl. 9, pag. 227.

THOULET, Compt. rend. 99, pag. 1072; Beibl. 9, pag. 234. Aenderung des specifischen Gewichts von NaCl und $BaCl_2$-Lösung beim Filtriren durch Marmor, Porzellanerde und Quarz.

WORTINHGTON, Phil. Mag. (5) 19, pag. 83. Benutzt ein spiralförmig gebogenes Platinblech statt eines geraden bei der WILHELMY'schen Methode.

WORTHINGTON, Phil. Mag. (5) 20, pag. 51. 1885, corrigirt die QUINCKE'schen Beobachtungen über flache Tropfen auf den Fall unendlicher grosser Tropfen. Vergl. QUINCKE, WIED. Ann. 27, pag. 220 dagegen. Vergl. auch MAGIE, WIED. Ann. 25, pag. 421. 1885.

HAROLD WHITING, Neue Theorie der Cohäsion, gegründet auf die Thermodynamik flüssiger und fester Körper. Proc. Amer. Ac. of Sc. 19, pag. 352—432. 1884.

FUCHS, Randwinkel (Theoretisches). WIED. Ann. 29, pag. 140. 1886.

JULIUS, Verh. d. Acad. d. Wiss. zu Amsterd. 24, pag. 1—63. 1885; Beibl. 10, pag. 384. DUHEM, Ann. scient. de l'école norm. (3) 2, pag. 217. 1885; Beibl. 10, pag. 330. Thermodynamische Behandlung der Capillarität.

J. CURIE, Bildung der Krystalle und über die Capillaritätsconstanten ihrer verschiedenen Flächen. Bull. Soc. Min. 8, pag. 145. 1885; Beibl. 10, pag. 151. 1886. Sind $S_1 S_2 S_3 \ldots$ mehrere Grenzflächen, $A_1 A_2 A_3$ Constanten, welche man ihre Capillarconstanten nennen kann, so wird $A_1 S_1 + A_2 S_2 + A_3 S_3 + \ldots$ ein Minimum sein wollen. Daraus Schlüsse über die Aenderung der Gestalt von Krystallen in Lösungen.

KURZ, Anziehung durch Capillarität. Rep. d. Phys. 21, pag. 518.

STEFAN, WIED. Ann. 29, pag. 655. Capillaritätstheorie und Verdampfung.

EÖTVÖS, Oberflächenspannung und Molecularvolumen. WIED. Ann. 27, pag. 448. 1886. Er findet

$$\alpha \cdot v^{\frac{2}{3}} = 0·227\,(T - t),$$

wo v specifisches Volum, T die Temperatur, bei welcher $\alpha v = 0$ wird, t die absolute Versuchstemperatur bedeutet (Wasser, Alkohole und Fettsäuren bilden Ausnahmen).

J. J. THOMSON und NEWALL, Wirbelringe beim Fallen von Tropfen in Flüssigkeiten. Proc. Roy. Soc. 39, pag. 417—436. 1885; Beibl. 11, pag. 128. 1887.

BLONDLOT, Journ. d. phys. (2) 5, pag. 456. 1886; Beibl. 11, pag. 133. 1887. Ein netter Versuch, welcher die Oberflächenzähigkeit illustriert.

REINOLD und RÜCKER, Proc. Lond. Roy. Soc. 40, pag. 441. 1886. Die Spannung von Lamellen, deren Dicke zwischen 1350 und $12 \cdot 10^{-6}$ *mm* variirt, ist constant bis auf 0·5%.

R. TRAUBE, Journ. f. pr. Chem. 34, pag. 292, 515. Fallende Tropfen.

R. WEBER, Arch. d. Gen. (3) 12, pag. 510. Bewegungen bei Auflösung und Ausbreitung.

GOPPELSRÖDER, Capillaranalyse. ROMEN's Journ. 1887.

LENARD, Schwingungen fallender Tropfen. WIED. Ann. 30, pag. 209. F. BRAUN.

Von den Gasen.

Das BOYLE-MARIOTTE'sche Gesetz und die Abweichungen von demselben.

I. Das BOYLE-MARIOTTE'sche Gesetz.

Der Zusammenhang zwischen dem Volumen eines Gases und dem Druck, unter welchem das Gas steht, ist zuerst von BOYLE[1]) 1662, dann, vielleicht unabhängig davon, von MARIOTTE[2]) 1679 gesucht und gefunden worden und drückt sich durch ein sehr einfaches Gesetz aus, das BOYLE-MARIOTTE'sche Gesetz, welches ursprünglich nur für die Luft als gültig angesehen wurde, welches aber für alle Gase und ungesättigte Dämpfe (bis auf gewisse zu erwähnende Abweichungen) gilt. MARIOTTE brachte eine bestimmte Luftmenge in ein U-förmig calibrirtes Rohr, welches an dem einen Ende geschlossen war. In den andern Schenkel goss er Quecksilber. Sobald das Niveau des Quecksilbers in beiden Schenkeln gleich hoch war, stand die abgeschlossene Luft unter dem Druck einer Atmosphäre (760 Millim. Quecksilber) und nahm dabei ein bestimmtes Volumen V ein. Wurde nun mehr Quecksilber eingefüllt, der Druck also erhöht so nahm das Volumen der Luft ab, die Luft wurde comprimirt und sobald die drückende Quecksilbersäule eine Höhe von 760 Millim. erreicht hatte, war das Volumen der Luft die Hälfte des ursprünglichen geworden, $\frac{V}{2}$. Bei dem doppelten Druck ist also das Volumen der Luft auf die Hälfte reducirt, ebenso bei dem dreifachen auf ein Drittel u. s. w. Daraus ergiebt sich das MARIOTTE'sche Gesetz:

Das Volumen V einer bestimmten Gewichtsmenge eines Gases ist dem Druck P, unter welchem das Gas steht, umgekehrt proportional, oder das Produkt aus Druck und Volumen einer bestimmten Gewichtsmenge eines Gases ist constant:

$$PV = const = A.$$

Die Grösse A nennt man die Constante des MARIOTTE'schen Gesetzes. Sie ist für ein und dasselbe Gas unabhängig von Druck und Volumen, aber sie ist abhängig von der Temperatur. Für verschiedene Gase hat sie natürlich verschiedene Werthe, die aber in leicht angebbarer Beziehung stehen. Was erstens die Abhängigkeit von A von der Temperatur betrifft, so hat GAY-LUSSAC gezeigt, dass A mit steigender Temperatur wächst und zwar pro Grad Celsius um $\alpha = \frac{1}{273}$ seines Werthes, so dass also $A = A_0(1 + \alpha t)$ gesetzt werden kann, wo $\alpha = 0{\cdot}003665$ ist. (Näheres darüber unter »Gastheorie«). Es ist also

$$PV = A_0(1 + \alpha t).$$

Führt man die sogen. absoluten Temperaturen $T = 273 + t = \frac{1}{\alpha} + t$ ein, so kann man, indem man $A_0 \alpha = R$ setzt, schreiben

$$PV = RT$$

worin R die Constante des MARIOTTE-GAY-LUSSAC'schen Gesetzes genannt wird.

Für den Eispunkt ist also

$$PV = A_0$$

Sind also P und P_0 zwei Drucke, etwa in Atmosphären ausgedrückt, und sind V und V_0 die entsprechenden Volumina einer bestimmten Gewichtsmenge eines Gases, so ist bei 0° $PV = P_0 V_0 = A_0$.

---

1) BOYLE, Nova experimenta physico mechanica de vi aeris elastica London. 1662.

2) MARIOTTE, De la nature de l'air. 1679.

Nehmen wir also als P_0 den Druck von 1 Atmosphäre an und nehmen wir als Gewichtsmenge des Gases 1 Kilo an, so ist $A_0 = V_0$, d. h. gleich dem Volumen eines Kilo des Gases unter dem Druck einer Atmosphäre bei 0° C. Beziehen wir das specifische Gewicht eines beliebigen Gases s wie gewöhnlich, auf Luft als Einheit, so ist das Volumen, welches ein Kilo desselben einnimmt, gleich $\frac{1}{s}$ von dem Volumen eines Kilo Luft, L_0. Es ist also für ein Kilo eines beliebigen Gases

$$PV = \frac{L_0}{s}.$$

Nun ist das Volumen von 1 Kilo Luft bei 0° und 1 Atm. Druck $L_0 = \frac{1}{1{\cdot}293}$ $= 0{\cdot}7733$ Kubikmeter. Der Druck, 1 Atmosphäre, in $\frac{Kgr}{m^2}$ ausgedrückt, ist gleich dem Gewicht von 760 Liter Hg auf einen Quadratmeter bezogen, also gleich $760 \cdot 13{\cdot}596 = 10333$, mithin ist

$$PV = A_0 = \frac{10333}{1{\cdot}293 \cdot s} = \frac{7986{\cdot}8}{s},$$

und bei beliebiger absoluter Temperatur T

$$PV = RT = \frac{7986{\cdot}8 \cdot 0{\cdot}003665\, T}{s} = \frac{29{\cdot}27}{s} T.$$

Aus dem MARIOTTE'schen Gesetz folgt sofort, da die Volumina eines Gases bei verschiedenen Drucken den Dichtigkeiten d umgekehrt proportional sind: $\frac{P}{d} = const.$

II. Die Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz bei Drucken unter 60 Atmosphären.

Die Frage, ob das MARIOTTE'sche Gesetz streng gültig ist, d. h. ob bei allen Drucken und zugehörigen Volumina das Produkt PV constant ist, wurde schon in der Mitte des vorigen Jahrhunderts von MUSSCHENBROEK, SULZER, ROBISON durch Experimente zu beantworten gesucht, ohne dass eine Sicherheit gewonnen wurde. Auch blieb die Frage zu entscheiden, ob für andere Gase als Luft und namentlich für (ungesättigte) Dämpfe das Gesetz ebenfalls giltig wäre. Die letztere Frage wurde zuerst von OERSTEDT und SCHWENDSEN[1]), dann von DESPRETZ[2]) verneinend beantwortet. Letzterer fand, dass schon bei zwei Atmosphären Druck bei Ammoniak, Schwefelwasserstoff, Cyangas das Volumen stärker abnahm, als es nach dem MARIOTTE'schen Gesetz sollte, so dass also das Produkt PV bei höheren Drucken kleiner wurde. Aber auch für Luft fand DESPRETZ, dass nur bis etwa 20 Atmosphären das MARIOTTE'sche Gesetz gültig bleibt, bei höheren Drucken nahm auch hier das Produkt PV ab, die Luft nahm ein kleineres Volumen ein, als sie nach dem MARIOTTE'schen Gesetz einnehmen sollte. Die nächste Untersuchung dieser Frage wurde von ARAGO und DULONG[3]) im Verlaufe einer im Auftrage der französischen Akademie unternommenen Arbeit ausgeführt. Sie comprimirten die Luft ebenso wie MARIOTTE durch Quecksilberdruck in dem geschlossenen Schenkel einer U-förmigen Röhre, sorgten aber für constante

---

[1]) OERSTEDT und SCHWENDSEN, Edinburgh Journ. of science IV, pag. 224. 1826.

[2]) DESPRETZ, Ann. d. chim. et de phys. (2) Bd. 34. 1827.

[3]) Exposé des recherches faites par l'ordre de l'Académie royale des sciences pour déterminer les forces elastiques de la vapeur d'eau à de hautes températures par PRONY, ARAGO, GIRARD, DULONG, Mém. de l'Acad., Bd. 10, pag. 193. 1831.

Temperatur, genaue Calibrirung der Röhre und sorgfältige Ablesung. Ihr Resultat war, dass bis zu dem angewendeten Druck von 27 Atmosphären die Abweichungen von dem MARIOTTE'schen Gesetz innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen, so dass sie in diesen Grenzen das Gesetz für streng gültig hielten. Die ausführlichste Reihe ihrer Beobachtungen ist folgende, bei 13° angestellte:

P	V beobachtet	V aus d. MARIOTTE'schen Gesetz berechnet	P	V beobachtet	V aus d. MARIOTTE'schen Gesetz berechnet
1 Atm.	501·3	—	16·5 Atm.	30·119	30·192
4·75 „	105·247	105·47	17 „	28·664	28·770
4·94 „	101·216	101·412	19 „	25·885	25·987
5 „	99·692	99·946	21·7 „	22·968	23·044
6 „	82·286	82·380	22·7 „	22·879	22·972
6·58 „	76·095	76·193	24 „	20·547	20·665
7·6 „	66·216	66·417	26·5 „	18·833	18·872
11·3 „	44·308	44·325	27 „	18·525	18·588
13 „	37·851	38·132			

Für andere Gase als Luft bestimmte POUILLET[1]) die Abweichung vom MARIOTTE'schen Gesetz, indem er das Gesetz für Luft als streng gültig annahm, und in demselben Bade mehrere Röhren, mit Luft und anderen Gasen gefüllt, zusammen dem Druck aussetzte. Seine Versuche gehen bis zu 100 Atm. Druck und er fand, dass Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Stickoxyd und Kohlenoxyd dem MARIOTTE'schen Gesetz in derselben Genauigkeit folgen, wie Luft, dass dagegen die leicht coerciblen Gase, schweflige Säure, Ammoniak, Kohlensäure, Stickoxydul, ebenso Sumpfgas und Aethylen schon bei 3 bis 4 Atm. merkliche Abweichungen von dem MARIOTTE'schen Gesetz zeigen. Bezeichnet man mit v das Volumen, welches eine bestimmte Gasmenge unter irgend einem Druck haben sollte, wenn es dem MARIOTTE'schen Gesetz folgte, und mit v' das von POUILLET beobachtete Volumen für diesen Druck, so nimmt der Quotient $\frac{v'}{v}$ mit wachsendem Druck fortwährend ab, was anzeigt, dass diese Gase stärker comprimirt werden, als es dem MARIOTTE'schen Gesetz entspricht. So ergab sich der Quotient $\frac{v'}{v}$ für

Druck in Atmosphären	1	5	10	20	40	83
Kohlensäure	1·000	0·989	0·965	0·919	0·739	—
Stickoxydul	1·000	0·983	9·956	0·896	0·732	—
Sumpfgas	1·000	0·992	0·981	0·956	0·940	—
Aethylen	1·000	0·986	0·972	0·955	0·919	0·850

Trotzdem so die Genauigkeit des MARIOTTE'schen Gesetzes für Luft und andere Gase sicher festgestellt zu sein schien, nahm REGNAULT[2]) in einer grossen Arbeit die Untersuchung von Neuem auf, in der er auch einen historischen Abriss der bis dahin vorliegenden Arbeiten gab. REGNAULT änderte die MARIOTTE'sche Beobachtungsmethode derartig ab, dass die Beobachtungsfehler nicht, wie früher, einen um so grösseren Einfluss erhalten konnten, je höhere Drucke man anwendete. Auch er bediente sich eines U-förmigen Rohres, dessen offener Schenkel 36 Meter lang war, während der geschlossene, von 3 Meter Länge genau cubicirt

[1]) POUILLET, Eléments de Phys., 4. Aufl., Bd. I, pag. 327.

[2]) REGNAULT, Mém. de l'Institut, Bd. 21, pag. 329. 1847.

war und zwei Marken trug, welche ein bestimmtes Volumen, das als 1 angenommen wurde, und ein anderes halb so grosses kennzeichneten. Es wurde nun das Volumen 1 mit Luft von 1 Atmosphäre gefüllt, und durch Zugiessen von Quecksilber die Luft auf das Volumen $\frac{1}{2}$ comprimirt. Die dazu nöthige Höhe der Quecksilbersäule wurde gemessen. Bei einem zweiten Versuch wurde das ganze Volumen 1 mit Luft von zwei Atmosphären gefüllt, durch Einpumpen mittelst einer Druckpumpe, und wieder die Höhe der Quecksilbersäule bestimmt, welche das Volumen auf die Hälfte reducirte. Weiter wurde ursprünglich das Volumen 1 mit Luft von 4 Atm. gefüllt u. s. w. Bezeichnet man das Volumen 1 mit V_0 und den zugehörigen Druck mit P_0, das Volumen $\frac{1}{2}$ mit V_1 (in den Experimenten war V_1 nur nahezu $= \frac{V_0}{2}$, die Abweichungen wurden gemessen) und den zugehörigen Druck mit P_1, so müsste wenn das MARIOTTE'sche Gesetz richtig wäre, $V_0 P_0 = V_1 P_1$ sein, oder $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} = 1$ sein. Falls aber die Gase bei höheren Drucken stärker comprimirbar sind, als es dieses Gesetz verlangt, so entspricht dem Volumen $V_1 = \frac{V_0}{2}$ ein Druck $P_1 \angle 2 P_0$, es wird also $V_1 P_1 \angle V_0 P_0$, oder $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$ wird grösser als 1. In der That fand nun REGNAULT, dass selbst bei Luft schon bei $P_1 = 2$ Atm. der bezeichnete Quotient grösser als 1 wurde und dass die Abweichung von dem Werthe 1 immer grösser wurde, je höher der Druck wurde. Bezeichnet P_0 den Anfangsdruck (in *mm* Quecksilber) in jedem Versuch, so ergeben sich bei Luft folgende Zahlen, als Beispiele aus dem grossen von REGNAULT angegebenen Zahlenmaterial:

Luft		Luft		Luft	
Druck in *mm* Hg	$\frac{P_0 V_0}{P_1 V_1}$	Druck in *mm* Hg	$\frac{P_0 V_0}{P_1 V_1}$	Druck in *mm* Hg	$\frac{P_0 V_0}{P_1 V_1}$
$P_0 = 738{\cdot}72$, $P = 1476{\cdot}25$	1·001414	$P_0 = 4140{\cdot}82$, $P = 8177{\cdot}48$	1·003253	$P_0 = 6387{\cdot}41$, $P = 12725{\cdot}02$	1·004611
$P_0 = 2112{\cdot}53$, $P = 4209{\cdot}48$	1·002765	$P_0 = 4219{\cdot}05$, $P = 8404{\cdot}11$	1·003336	$P_0 = 9336{\cdot}41$, $P = 18551{\cdot}09$	1·006366
$P_0 = 2068{\cdot}20$, $P = 4127{\cdot}82$	1·002709	$P_0 = 6770{\cdot}15$, $P = 13483{\cdot}48$	1·004286	$P_0 = 11472{\cdot}00$, $P = 20969{\cdot}42$	1·005619

Obschon also die Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz nicht bedeutend sind, sind sie doch sicher vorhanden und es zeigt sich, dass die Luft um so stärker comprimirbar ist, je höher der Druck wird.

Ganz entsprechende Resultate ergaben sich für Stickstoff und Kohlensäure, welche in folgenden Tabellen enthalten sind, wobei nur P_0 angegeben ist. P_1 ist immer nahezu $= 2 P_0$

Stickstoff					
$P_0 =$	753·96	1159·26	2159·36	3030·22	4953·92
$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} =$	1·001012	1·001074	1·001097	1·001950	1·002952
$P_0 =$	5957·96	7294·47	8628·54	9767·42	10981·42
$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} =$	1·003271	1·003770	1·004768	1·005147	1·006456

Kohlensäure								
$P_0 =$	764·03	1414·77	2164·81	3186·13	4879·77	6820·22	8393·68	9620·06
$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} =$	1·007597	1·012313	1·018973	1·028494	1·045625	1·066137	1·084278	1·099830

Man sieht, dass Stickstoff etwas geringere, Kohlensäure sehr viel stärkere Abweichungen zeigt wie Luft, aber in demselben Sinne.

Dagegen ergaben sich bei Wasserstoff Abweichungen in grade entgegengesetztem Sinne. Um das Volumen von Wasserstoff auf die Hälfte zu vermindern, braucht man **mehr** als den doppelten Druck. Es wird also der Quotient $\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1}$ in diesem Falle kleiner als 1, wie folgende Tabelle zeigt:

Wasserstoff						
$P_0 =$	2211·18	3989·47	5845·18	7074·96	9147·61	10361·88
$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} =$	0·998584	0·996961	0·996121	0·994697	0·993258	0·992327

Die Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz für alle Gase lassen sich im Allgemeinen dadurch darstellen, dass die Grösse

$$\frac{V_0 P_0}{V_1 P_1} - 1$$

nicht, wie sie bei der Gültigkeit des MARIOTTE'schen Gesetzes sein sollte, gleich 0 ist, sondern gleich einer Grösse μ, die positiv ist für Luft, Stickstoff, Kohlensäure und die andern dieser coercibeln Gase, dagegen negativ für Wasserstoff. μ selbst hängt in jedem Falle ab vom Drucke P. Da μ bei einzelnen Gasen positiv, bei andern negativ ist, so kann man sich als Grenzfall ein Gas denken, bei welchem es grade gleich Null ist. Ein solches Gas nennt man ein **ideales Gas**. Die wirklichen Gase entfernen sich von dem idealen Gaszustand um so mehr, unter je höherem Drucke sie stehen und zwar Wasserstoff im entgegengesetzten Sinne wie die andern Gase. (Dieses letztere Resultat REGNAULT's ist jedoch nach weiteren Versuchen nur bis zu einer gewissen Grenze richtig). Ebenso wie für die genannten 4 Gase hat REGNAULT noch die einschlägigen Verhältnisse bei Sauerstoff, Kohlenoxyd, Stickoxydul und Stickoxyd bis zu dem Drucke von 8 Atmosphären bestimmt. Er stellte seine Beobachtungen durch eine Interpolationsformel von folgender Form dar. Es sei $\frac{P_1}{P_0} = r$ $\frac{V_0}{V_1} = m$, dann setzt er

$$\frac{r}{m} = 1 + A(m - 1) + B(m - 1)^2.$$

Die Drucke P_1 und P_0 sind in Metern Quecksilber ausgedrückt und als Einheit des Volumens das unter 1 *m* Druck bei 0° angenommen. Aehnliche Interpolationsformeln sind von JOCHMANN [1]), SCHRÖDER VAN DER KOLK [2]), RANKINE [3]) und BLASERNA [4]) aufgestellt worden. REGNAULT [5]) hat noch einige leicht coercible Gase

[1]) JOCHMANN, SCHLÖMILCH's Zeitschr. für Math. u. Phys. 5, pag. 106. 1860.

[2]) SCHRÖDER VAN DER KOLK, POGG. Ann. 116, pag. 429. 1862 u. 126, pag. 333. 1865.

[3]) RANKINE, Phil. Mag. (4). 2, pag. 527. 1851.

[4]) BLASERNA, POGG. Ann. 126, pag. 594. 1865.

[5]) REGNAULT, Mém. de l'Acad. Bd. 26, pag. 229. 1847.

im Bereich von 2 Atm. untersucht und bei ihnen starke Abweichungen in demselben Sinne wie bei Luft gefunden. Es ergab sich in diesem Intervall für

Namen des Gases	$\frac{P_0 V_0}{P_1 V_1}$	Namen des Gases	$\frac{P_0 V_0}{P_1 V_1}$	Namen des Gases	$\frac{P_0 V_0}{P_1 V_1}$
Luft	1·00215	Stickoxydul . . .	1·00651	Ammoniak . . .	1·01881
Stickstoff	1·00285	Kohlensäure . . .	1·00722	Schweflige Säure .	1·02088
Kohlenoxyd . . .	1·00293	Chlorwasserstoff .	1·00925	Cyan	1·02353
Grubengas . . .	1·00634	Schwefelwasserstoff	1·01083		

Diese Zahlen gelten für eine Temperatur von 7·9°.

III. Die Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz bei höheren Drucken.

Eine wesentlich neue Thatsache auf diesem Gebiet wurde zuerst von NATTERER[1]) gefunden. Wenn man aus den bisherigen Versuchen vermuthen konnte, dass die Luft und die ihr ähnlichen Gase um so stärkere Abweichungen von dem MARIOTTE'schen Gesetz, immer in demselben Sinne der stärkeren Compressibilität zeigen würden, je höher die Drucke steigen, so zeigte NATTERER zuerst, dass im Gegentheil bei hohen Drucken eine Abnahme der Compressibilität stattfinde, dass bei hohen Drucken die Luft und die anderen Gase dasselbe Verhalten zeigen, wie Wasserstoff. In REGNAULT's Bezeichnungsweise heisst dies: Der Quotient $\frac{P_0 V_0}{P_1 V}$ ist zuerst grösser als 1 und wächst mit wachsendem P. Dieses Wachsen wird aber allmählich geringer, die Quotienten fallen wieder und werden schliesslich sogar ganz erheblich kleiner als 1. NATTERER hat dieses Verhalten zuerst gefunden, indem er versuchte, durch hohen Druck Luft, Stickstoff, Sauerstoff u. s. w. flüssig zu machen. Es gelang ihm dies nicht, obwohl er bis zu über 3000 Atm. ging. Bei diesen Versuchen zeigte es sich, dass die Gase bei hohen Drucken viel weniger comprimirbar seien, als es das MARIOTTE'sche Gesetz verlangt. Wenn man durch 1 Atm. in einen bestimmten Raum das Volumen 1 der folgenden Gase drücken kann, so wird man durch den Druck von 3600 Atm. nicht, wie es das MARIOTTE'sche Gesetz verlangt, 3600 Volumina hineindrücken können, sondern:

für Stickstoff nur	. . . .	710 Vol.
Kohlenoxyd ,,	. . . .	730 ,,
Luft ,,	. . . .	800 ,,
Leuchtgas ,,	. . . .	850 ,,
Wasserstoff ,,	. . . .	1040. ,,

In der folgenden Arbeit gab NATTERER quantitative Resultate. Er pumpte die Gase in die eiserne Flasche seines Compressionsapparates und maass den Druck, indem er vermittelst eines Hebels ein Ventil an der Flasche durch Gewichte geschlossen hielt. Die Gewichte gaben den Druck. Nach Füllung der Flasche bis zum Maximaldruck liess er durch eine Rohrleitung langsam Gas austreten in eine mit Wasser gefüllte Glocke, deren Volumen 10 mal so gross war, wie das der Flasche. Wenn das MARIOTTE'sche Gesetz richtig wäre, so würde

1) NATTERER, Wien. Ber. 5, pag. 351. 1850; 6, pag. 557. 1850; 12, pag. 199. 1854.

das Austreten von 10 Volumina unter 1 Atm. in der Flasche eine Druckabnahme von 10 Atm. bewirken. Thatsächlich nahm aber der Druck in der Flasche sehr viel stärker ab, wodurch angezeigt wird, dass die Gasmenge, die 10 Vol. unter 1 Atm. einnimmt, ein Vol. unter weit mehr als 10 Atm. Druck einnimmt, dass also der Druck rascher wächst, als das Volumen abnimmt, d. h., dass eine Abweichung vorhanden ist, wie sie Regnault für den Wasserstoff constatirt hat. Die Abweichungen sind äusserst beträchtlich. Bezeichnet man mit P_0 den Anfangsdruck von 78 Atm. (bei anderen Gasen von 76 oder 77 Atm.) — die geringen Abweichungen bei noch niedrigeren Drucken können durch diese Methode nicht gemessen werden — und mit V_0 das bei P_0 vorhandene Volumen des Gases, so ergaben sich entsprechend den Regnault'schen Bezeichnungen, aus Natterer's Beobachtungen für $\frac{P_0 V_0}{P V}$ folgende Zahlen:

Wasserstoff

P Atm.	$\frac{P_0 V_0}{P V}$	P Atm.	$\frac{P_0 V_0}{P V}$	P Atm.	$\frac{P_0 V_0}{P V}$	P Atm.	$\frac{P_0 V_0}{P V}$	P Atm.	$\frac{P_0 V_0}{P V}$	P Atm.	$\frac{P_0 V_0}{P V}$
78	1·000	274	0·868	505	0·788	824	0·677	1292	0·556	1904	0·461
89	0·986	287	0·864	522	0·782	850	0·668	1326	0·549	1948	0·456
100	0·980	300	0·860	539	0·775	876	0·659	1362	0·542	1995	0·450
111	0·973	313	0·856	556	0·769	903	0·651	1398	0·535	2044	0·442
122	0·967	326	0·853	573	0·764	930	0·643	1434	0·528	2098	0·437
134	0·955	339	0·849	590	0·759	958	0·635	1471	0·522	2154	0·431
146	0·943	352	0·846	608	0·753	986	0·628	1508	0·516	2213	0·424
158	0·936	365	0·844	627	0·747	1015	0·619	1546	0·503	2277	0·416
170	0·929	379	0·839	646	0·739	1044	0·611	1584	0·503	2347	0·408
183	0·917	393	0·835	665	0·734	1074	0·603	1623	0·497	2423	0·400
196	0·908	408	0·828	685	0·727	1104	0·596	1662	0·491	2505	0·390
209	0·899	423	0·822	706	0·719	1134	0·589	1701	0·486	2594	0·381
222	0·892	438	0·817	728	0·711	1164	0·582	1741	0·481	2689	0·372
235	0·885	454	0·810	751	0·703	1194	0·576	1781	0·475	2790	0·361
248	0·879	471	0·802	775	0·694	1226	0·570	1821	0·471		
261	0·874	488	0·795	799	0·688	1259	0·562	1862	0·465		

Stickstoff

P	$\frac{P_0 V_0}{P V}$	P	$\frac{P_0 V_0}{P V}$	P	$\frac{P_0 V_0}{P V}$	P	$\frac{P_0 V_0}{P V}$	P	$\frac{P_0 V_0}{P V}$	P	$\frac{P_0 V_0}{P V}$
75	1·000	206	0·946	351	0·869	600	0·690	1035	0·507	1940	0·322
96	0·989	217	0·944	367	0·858	630	0·675	1095	0·488	2046	0·315
107	0·981	228	0·943	384	0·847	662	0·657	1159	0·470	2156	0·304
118	0·975	240	0·937	403	0·831	695	0·640	1228	0·452	2272	0·293
129	0·968	252	0·932	423	0·815	729	0·624	1300	0·435	2394	0·282
140	0·964	265	0·925	444	0·799	764	0·608	1376	0·418	2522	0·272
151	0·960	278	0·918	466	0·783	801	0·593	1458	0·401	2654	0·262
162	0·957	292	0·908	489	0·768	840	0·577	1546	0·385	2790	0·253
173	0·953	308	0·900	515	0·747	882	0·561	1640	0·369		
184	0·951	321	0·888	542	0·729	928	0·544	1738	0·354		
195	0·949	336	0·878	570	0·710	980	0·526	1838	0·340		

Atmosphärische Luft

p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$
76	1·000	217	0·949	352	0·898	580	0·735	1047	0·512	1843	0·350
107	0·991	228	0·947	367	0·888	610	0·715	1101	0·496	1943	0·337
118	0·982	240	0·942	383	0·878	642	0·695	1156	0·481	2051	0·324
129	0·977	252	0·936	401	0·863	676	0·675	1212	0·466	2165	0·312
140	0·971	264	0·932	420	0·848	713	0·653	1273	0·453	2283	0·300
151	0·967	276	0·928	439	0·831	753	0·632	1340	0·437	2405	0·289
162	0·963	288	0·924	459	0·819	796	0·610	1413	0·422	2531	0·279
173	0·959	300	0·920	481	0·803	843	0·588	1490	0·407	2659	0·269
184	0·956	312	0·917	504	0·785	891	0·569	1570	0·392	2790	0·260
195	0·954	325	0·911	528	0·769	941	0·548	1656	0·378		
206	0·951	338	0·905	553	0·752	993	0·529	1747	0·364		

Kohlenoxyd

p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$
77	1·000	248	0·955	381	0·911	629	0·727	1133	0·500	2088	0·324
138	0·993	259	0·954	394	0·906	661	0·707	1196	0·484	2209	0·311
149	0·983	271	0·949	408	0·900	695	0·686	1264	0·464	2339	0·298
160	0·981	283	0·944	424	0·889	732	0·665	1338	0·446	2477	0·285
171	0·977	295	0·939	443	0·873	771	0·645	1416	0·428	2627	0·273
182	0·972	307	0·935	465	0·854	814	0·623	1498	0·412	2790	0·261
193	0·969	319	0·931	489	0·832	861	0·600	1584	0·396		
204	0·965	331	0·927	515	0·810	911	0·578	1674	0·380		
215	0·963	343	0·924	542	0·788	962	0·558	1767	0·366		
226	0·960	355	0·921	570	0·767	1016	0·538	1867	0·352		
237	0·958	368	0·916	599	0·746	1073	0·519	1974	0·338		

Sauerstoff

p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$	p	$\frac{p_0 V_0}{p V}$
77	1·000	276	0·967	382	0·935	517	0·864	764	0·703	1160	0·514
188	0·994	287	0·965	394	0·932	539	0·848	800	0·684	1218	0·523
199	0·990	298	0·963	407	0·926	563	0·829	840	0·663	1284	0·504
210	0·986	310	0·958	420	0·921	588	0·811	881	0·644	1354	0·485
221	0·982	322	0·953	434	0·915	614	0·793	923	0·625		
232	0·978	334	0·949	448	0·909	641	0·775	966	0·608		
243	0·975	346	0·945	463	0·901	670	0·757	1010	0·590		
254	0·972	358	0·941	479	0·890	700	0·739	1056	0·575		
265	0·970	370	0·938	497	0·879	731	0·721	1106	0·558		

Es nimmt also bei allen untersuchten Gasen das Produkt PV bei diesen enormen Drucken äusserst stark zu, die Gase verhalten sich mithin bei hohen Drucken alle gleich und zwar so, wie sich Wasserstoff schon von Anfang an verhält. Dieselbe Erscheinung wurde 1870 von CAILLETET[1]) in genauerer Weise festgestellt. Er brachte die Gase in eine Capillare, welche innen vergoldet war. Durch ein

[1]) CAILLETET, Compt. rend. 70, pag. 1131. 1870.

DESGOFFE'sches Manometer wurde der Druck gemessen. Der Stand des Quecksilbers in der Capillare, also das Volumen des Gases wurde durch die Ablösung des Goldes erkannt. So fand CAILLETET bei 15° C. für Wasserstoff und Luft folgende Resultate, die er in der Bezeichnungsweise von REGNAULT darstellte.

Druck P	Wasserstoff $\frac{P_0 V_0}{PV}$	Luft $\frac{P_0 V_0}{PV}$	Druck P	Wasserstoff $\frac{P_0 V_0}{PV}$	Luft $\frac{P_0 V_0}{PV}$
60 Atm.	0·9810	1·0131	350 Atm.	0·8537	0·9047
80 „	—	1·0118	400 „	0·8347	0·8672
90 „	—	1·0106	450 „	0·8136	0·8265
100 „	0·9552	1·0098	500 „	0·7893	0·7927
150 „	0·9372	1·0047	550 „	0·7701	0·7502
200 „	0·9158	0·9990	605 „	0·7580	0·7215
250 „	0·9001	0·9792	660 „	—	0·6895
300 „	0·8761	0·9465	705 „	—	0·6660

Hierbei wurde also zum ersten Mal bei Luft gezeigt, dass der Quotient $\frac{P_0 V_0}{PV}$ bei gewissem Druck ein Maximum, also PV Minimum hat. Bei seinen späteren Untersuchungen[1]) bediente sich CAILLETET direkt eines Quecksilbermanometers von 250 *m* Länge und 3 *mm* innerem Durchmesser und arbeitete in einem Schacht bei Buttes-aux-Cailles von 560 *m* Tiefe, der mit stagnirendem Wasser gefüllt war. Die Röhre mit dem zu untersuchenden Gase, das Piezometer, war wieder innen vergoldet, und das hineinsteigende Quecksilber löste das Gold auf, so dass man nach dem Versuch das Volumen des comprimirten Gases genau bestimmen konnte. CAILLETET experimentirte mit Stickstoff und fand folgende Werthe für die Drucke P (in Metern Quecksilber), und die entsprechenden Volumina V (in willkürlichem Maass) bei den Temperaturen 15—17°. Aus diesen Zahlen ist das Produkt PV berechnet.

Druck P	Volumen V	PV	Druck P	Volumen V	PV
39·359	207·93	8184	99·188	86·06	8536
44·264	184·20	8153	109·199	77·70	8484
49·271	162·82	8022	114·119	76·69	8751
49·566	161·85	8022	124·122	71·36	8857
59·462	132·86	7900	144·241	62·16	8966
64·366	123·53	7951	149·205	59·70	8907
69·367	115·50	8011	154·224	58·18	8973
74·330	108·86	8091	164·145	54·97	9023
79·234	103·00	8162	174·100	52·79	9191
84·388	97·97	8267	181·985	51·27	9330
89·231	93·28	8323			

Das Produkt PV zeigt also ein Minimum bei etwa 60 *m* Quecksilber. Bei diesem Druck ist also das Volumen V relativ am kleinsten, ist das Gas relativ am meisten comprimirt, bei höheren und niederen Drucken ist die Compressibilität geringer. Dadurch sind die Resultate REGNAULT's und NATTERER's in Einklang gebracht. Dieses Resultat von CAILLETET wurde auch von AMAGAT[2]) bei Stickstoff gefunden, indem er dieses Gas als Grundlage für spätere Untersuchungen

[1]) CAILLETET, Compt. rend. 88, pag. 61. 1879.

[2]) AMAGAT, C. R. 87, pag. 432. 1878. 88, pag. 336. 1879.

sorgfältigen Messungen unterwarf. Auch er wandte direkt eine Röhre von 300 *m* Länge für den Druck an und maass das vom Gase eingenommene Volumen direkt an einer Glasröhre. Seine Resultate für Stickstoff bei etwa 22° sind folgende:

P(Atm.)	127·223	168·684	208·622	251·157	290·924	332·039	332·302	420·773
$\frac{V_0 P_0}{PV}$	1·0000	0·9760	0·9516	0·9238	0·8927	0·8613	0·8227	0·7885.

Später verglich AMAGAT[1]) eine Reihe anderer Gase, Sauerstoff, Luft, Kohlenoxyd, Sumpfgas und Aethylen nach der POUILLET'schen Methode mit Stickstoff. Die zu vergleichenden Gase wurden in zwei Manometer aus Krystallglas eingeschlossen und empfingen den Druck gemeinschaftlich durch eine Schraube.

Die Röhren konnten einen Druck bis zu 500 Atm. aushalten. Die Temperaturen blieben zwischen 18 und 22°. Es ergab sich für alle Gase ein Minimum von PV, also ein Maximum für $\frac{P_0 V_0}{PV}$ und zwar lag dieses Maximum, welches sich aber bei verschiedenen Temperaturen wesentlich verschiebt, bei folgenden Drucken:

Stickstoff	50 *m* Quecksilber	Kohlenoxyd . . .	50 *m* Quecksilber
Sauerstoff . . .	100 „ „	Sumpfgas	120 „ „
Luft	65 „ „	Aethylen	65 „ „

Bei Aethylen schwankt das Verhältniss $\frac{P_0 V_0}{PV}$, zwischen 2·213 um 0·337, sodass Aethylen 3 mal stärker oder weniger stark comprimirbar ist, als es nach dem MARIOTTE'schen Gesetz sein sollte.

IV. Die Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz in verschiedenen Temperaturen.

Die Frage, wie sich die Abweichungen der Gase vom MARIOTTE'schen Gesetz bei verschiedenen Temperaturen verhalten, ist ebenfalls von AMAGAT in einigen Arbeiten studirt worden. Seine ersten Versuche[2]) bezogen sich auf schweflige Säure, Ammoniak, Kohlensäure und Luft und ergaben im Intervall von 1—3 Atm. folgende Werthe für $\frac{P_0 V_0}{PV}$ bei verschiedenen Temperaturen, aber nahezu gleichem Anfangsdruck P_0:

	$\frac{P_0 V_0}{PV}$ niedere Temp.		$\frac{P_0 V_0}{PV}$ höhere Temp.	
Schweflige Säure, 1. Versuch . .	15·3°	1·0188	98·4°	1·0057
„ „ 2. „ . .	15·5°	1·0182	97·8°	1·0051
Ammoniak, 1. Versuch	7·7°	1·0125	98·0°	1·0048
„ 2. „	6·1°	1·0129	98·4°	1·0051
Kohlensäure, 1. Versuch . . .	8·5°	1·0061	98·1°	1·0026
„ 2. „ . . .	9·0°	1·0064	98·4°	1·0021
Luft, 1. Versuch	7·2°	1·0010	98·8°	1·0001
„ 2. „		—	97·5°	0·9998

Es geht aus diesen Zahlen hervor, dass die Abweichungen vom MARIOTTE-schen Gesetz um so geringer werden, je höher die Temperatur ist. Später unter-

[1]) AMAGAT, C. R. 89, pag. 437. 1879.

[2]) AMAGAT, Compt. rend. 68, pag. 1170. 1869; 71, pag. 67. 1870; 73, pag. 143. 1872.

suchte AMAGAT[1]) direkt nach der REGNAULT'schen Methode die Abweichungen bei Luft und Wasserstoff bis 320° im Intervall von 1—2 Atm. und fand für $\frac{P_0 V_0}{PV}$ folgende Zahlen. Es ist

für Luft		für Wasserstoff	
bei	$\frac{P_0 V_0}{PV}$	bei	$\frac{P_0 V_0}{PV}$
0°	1·0015	250°	0·99986
100°	1·00011		
250°	1·00025		
320°	1·00018		

In einer Zusammenfassung seiner Resultate giebt er[2]) noch folgende Zahlen für schweflige Säure und Kohlensäure:

Werthe von $\frac{P_0 V_0}{PV}$				Werthe von $\frac{P_0 V_0}{PV}$			
für schweflige Säure				für Kohlensäure			
bei 15°	1·0185	bei 150°	1·0032	bei 8°	1·0065	bei 150°	1·0014
„ 50°	1·0110	„ 200°	1·0021	„ 50°	1·0036	„ 200°	1·0008
„ 100°	1·0054	„ 250°	1·0016	„ 100°	1·0023	„ 250°	1·0006

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass alle betrachteten Gase sich mit steigender Temperatur dem idealen Gaszustand nähern. Im Intervall von 100° bis 320° zeigt die Luft durchaus keine über die Beobachtungsfehler hinausgehende Abweichung des Werthes $\frac{P_0 V_0}{PV}$ von 1. Insbesondere ist keine Tendenz vorhanden, dass dieser Quotient kleiner als 1 wird. Auch bei Wasserstoff nährt sich der Quotient bei höherer Temperatur dem Werth 1. Es hat also eine Erhöhung der Temperatur nicht denselben Effekt wie eine Erhöhung des Druckes; letztere bringt Abweichungen hervor, wie sie beim Wasserstoft von Anfang an existiren, erstere macht alle Abweichungen verschwinden.

Dasselbe Resultat fand auch WINKELMANN[3]) für Aethylen, welches er im Intervall von 1 bis 3 Atm. bei Temperaturen von 0° und 100° untersuchte und wobei er, um mit kleinen Apparaten genau arbeiten zu können, die Volumenänderung durch eine Bestimmung des Gewichtes von ausgeflossenem Quecksilber scharf messbar machte. Das Nähere über seine Methode übergehend, sind im Folgenden seine Resultate angegeben. Es ergab sich für:

Aethylen bei 0°		Aethylen bei ca. 100°			Aethylen bei 0°		Aethylen bei ca. 100°		
P	$\frac{P_0 V_0}{PV}$	P	$\frac{P_0 V_0}{PV}$	Temp.	P	$\frac{P_0 V_0}{PV}$	P	$\frac{P_0 V_0}{PV}$	Temp.
731·94 1406·97	1·00545	746·65 1451·32	1·00265	99·537°	714·29 2067·82	1·0139	746·65 2083·93	1·00381	99·537°
748·70 1424·2	1·00538	746·65 1451·79	1·00281	99·537°	714·29 2067·95	1·00965	746·65 2084·40	1·00373	99·537°
714·29 1481·61	1·00589	733·52 1456·69	1·00285	99·181°	724·23 2078·45	1·01026	733·52 2078·02	1·00428	99·181°

1) AMAGAT, Annal. d. chim. et de phys. (4). 28, pag. 274. 1873.

2) AMAGAT, Ann. d. chim. et de phys. (4) 29, pag. 246. 1873.

3) WINKELMANN, WIED. Ann. 5. pag. 92. 1878.

In allen Fällen weicht also bei höherer Temperatur das Aethylen weniger vom MARIOTTE'schen Gesetz ab als bei niedriger.

In jüngster Zeit hat ROTH[1]) eine Reihe von Versuchen über die Zusammendrückbarkeit von Gasen bei verschiedenen Temperaturen publicirt. Er füllte eine Röhre mit Stickstoff, eine andere mit dem zu untersuchenden Gase, setzte beide demselben Druck aus und maass die Volumina. Das reciproke Volumen des Stickstoffs diente ihm direkt als Maass für den Druck, da Stickstoff verhältnissmässig geringe Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz zeigt. Es ergaben sich für die untersuchten Gase starke Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz, die aber durchweg bei höheren Temperaturen geringer wurden. Aus den von ROTH aufgezeichneten Interpolationstabellen ergaben sich folgende Werthe von $\frac{P_0 V_0}{P V}$ für die einzelnen Gase bei verschiedenen Temperaturen.

1. Kohlensäure.

	18·5°	49·5°	99·8°	183·8°
$P_0 = 20$ Atm., $P = 50$ „	1·3653	1·1795	1·0822	1·0274.

2. Schweflige Säure.

	58·0°	99·6°	183·2°
$P_0 = 10$ Atm., $P = 14$ „	1·5134	1·0503	
$P_0 = 28$ „, $P = 40$ „		1·3430	1·0912.

3. Aethylen.

	18·0°	50·2°	99·6°	183·2°
$P_0 = 25$ Atm., $P = 50$ „	1·2222	1·1146	1·0878	1·0451.

4. Ammoniak.

	99·6°	183·0°
$P_0 = 20$ Atm., $P = 60$ „	1·5880	1·1207.

Im Uebrigen zeigen die von ROTH untersuchten Gase bis zu den angewendeten Drucken (im Maximum 160 Atm.) nicht das von CAILLETET beobachtete Minimum von PV. Im Gegentheil nehmen die Werthe von PV regelmässig ab. Es ergaben sich zum Beispiel für Kohlensäure bei 183·2° folgende zusammengehörige Werthe von P und PV:

Kohlensäure bei 183·2°

P (Atm.)	PV	P (Atm.)	PV	P (Atm.)	PV
13·06	9939	20·64	9761	45·81	9341
14·23	9934	23·12	9738	68·59	9136
15·55	9893	26·73	9658	87·94	8741
17·07	9849	32·09	9553	106·33	8727
18·73	9815	38·14	9504	130·55	8400

Dieser scheinbare Widerspruch wurde jedoch durch eine neuere Untersuchung von AMAGAT[2]) aufgeklärt, in welcher die Abweichungen vom MARIOTTE'schen

[1]) ROTH, WIED. Ann. 11, pag. 1. 1880.

[2]) AMAGAT, Ann. de chim. et de phys. (5) 22, pag. 353. 1881.

Gesetz bei verschiedenen Temperaturen zwischen 0° und 100° aber bis zu Drucken von 320 *m* Quecksilber gemessen wurden. Und zwar wurden dabei die Gase: Stickstoff, Wasserstoff, Sumpfgas, Aethylen und Kohlensäure untersucht. Der Apparat war ähnlich eingerichtet wie derjenige, welcher zu seinen oben erwähnten Versuchen mit höheren Drucken gedient hatte, die Drucke wurden mit Stickstoffmanometern gemessen. In ausführlichen Tabellen und in Curven wurde der Gang des Produktes *PV* mit wachsendem Druck und zwar bei 5 bis 10 verschiedenen Temperaturen dargestellt. Einige Zahlen dieser Tabellen sind folgende.

Stickstoff.

P	17·7°	30·1°	50·4°	75·5°	100·1°
30 *m*	2745	2875	3080	3330	3575
60 „	2740	2875	3100	3360	3610
100 „	2790	2930	3170	3445	3695
200 „	3075	3220	3465	3750	4020
320 „	3525	3675	3915	4210	4475.

Wasserstoff.

P	17·7°	40·4°	60·4°	81·1°	100·1°
30 *m*	2830	3045	3235	3430	3610
100 „	2985	3200	3400	3620	3780
200 „	3240	3465	3685	3870	4055
320 „	3550	3780	3890	4200	4385.

Sumpfgas.

P	14·7°	29·5°	40·6°	60·1°	79·8°	100·1°
40 *m*	2515	2685	2830	3060	3290	3505
100 „	2275	2480	2640	2935	3180	3435
140 „	2260	2480	2655	2940	3190	3460
230 „	2560	2730	2880	3150	3385	3650.

Aethylen.

P	16·3°	20·3°	30·1°	40·0°	50·0°	60·0°	70·0°	79·9°	89·9°	100·0°
30 *m*	1950	2055	2220	2410	2580	2715	2865	2970	3090	3225
70 „	880	945	1110	1340	1675	1920	2150	2365	2560	2740
100 „	1150	1200	1275	1380	1535	1690	1895	2105	2335	2515
130 „	1415	1455	1525	1620	1725	1840	2000	2150	2320	2480
200 „	2030	2065	2115	2200	2290	2390	2490	2600	2715	2835
320 „	3035	3065	3125	3200	3285	3375	3470	3545	3625	3710.

Kohlensäure.

P	18·2°	35·1°	40·2°	50·0°	60·0°	70·0°	80·0°	90·2°	100°
30 *m*	flüssig	2360	2460	2590	2730	2870	2995	3120	3225
70 „	„	725	950	1530	1890	2155	2380	2570	2750
100 „	760	870	920	1065	1315	1630	1940	2200	2425
130 „	955	1060	1115	1190	1315	1505	1735	1980	2190
170 „	1210	1310	1360	1430	1520	1645	1780	1975	2135
200 „	1405	1500	1550	1615	1705	1810	1930	2075	2215
320 „	2135	2240	2280	2360	2440	2525	2620	2725	2830.

Aus der Diskussion dieser Zahlen findet AMAGAT, dass diese Gase zwei verschiedenen Typen und einem Zwischentypus angehören. Den einen Typus bildet

der Wasserstoff, bei welchem der Werth von PV beständig und fast gradlinig mit P wächst bei allen Temperaturen. Den entgegengesetzten Typus bilden Aethylen und Kohlensäure. Bei diesen nimmt PV zuerst rasch ab, um ein Minimum zu erreichen, welches bei verschiedenen Temperaturen an verschiedenen Stellen liegt, und dann weiter zu steigen. Dieses Minimum rückt bei höheren Temperaturen zu höheren Drucken vor, wird aber dabei immer weniger scharf. Folgende Tabelle giebt die Lage des Minimums von PV für Aethylen und Kohlensäure bei verschiedenen Temperaturen:

Aethylen.

Temperatur	16.3°	20·3°	30·1°	40·0°	50·0°	60·0°	70·0°	79·9°	89·9°	100°
Druck	55 *m*	60 *m*	70 *m*	80 *m*	88 *m*	95 *m*	100 *m*	105 *m*	115 *m*	120 *m*

Kohlensäure.

Temperatur	35·1°	40·2°	50·0°	60·00	70·0°	80·00	90·2°	100·0°.
Druck	70 *m*	80 *m*	98 *m*	115 *m*	130 *m*	140 *m*	150 *m*	160 *m*.

Die dem Zwischentypus angehörenden Gase, Sumpfgas und Stickstoff, zeigen durch den Verlauf der Werthe von PV an, dass sie bei genügend niedrigen Temperaturen ebensolche tiefe Minima aufweisen werden, wie Aethylen und Kohlensäure. Das Endergebniss dieser sorgfältigen Versuche ist wieder, dass in jedem Falle die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetz — nach der einen oder andern Richtung hin — um so geringer werden, je höher die Temperatur steigt.

V. Das Verhalten ungesättigter Dämpfe gegen das Boyle-Mariotte-sche Gesetz.

Dass im Allgemeinen die Dämpfe um so grössere Abweichungen vom Mariotte-schen Gesetz zeigen, je leichter sie coercibel sind, war von vornherein zu erwarten und wurde auch durch Versuche an einzelnen Dämpfen von Bineau[1]), Cahours[2]), erkannt, Versuche, welche jedoch nicht entscheidend waren. Regnault[3]), dann Fairbairn und Tate[4]) endlich Hirn[5]) stellten Versuche über Wasserdampt an, Horstmann[6]) für Schwefelkohlenstoff und Aetherdampf, Herwig[7]) für Alkohol, Chloroform, Schwefelkohlenstoff (bei Drucken unter 1 Atm.) Troost und Hautefeuille[8]) für Chlorsilicium, Chlorkohlenstoff und Phosphorchlorür. Diese Frage erhielt eine überraschende Beantwortung durch die Versuche von Andrews[9]), welcher an der Kohlensäure zeigte, dass der Uebergang von dem gasförmigen Zustand zum flüssigen nur möglich ist unter geeigneten Drucken, bei Temperaturen, welche unterhalb einer bestimmten Grenztemperatur liegen. Diese, die kritische Temperatur, scheidet die Dämpfe von den Gasen. Oberhalb der kritischen Temperatur verhalten sich die Dämpfe wie Gase. Dass aber auch in diesem gasförmigen Bereich starke Abweichungen von dem Mariotte'schen Ge-

1) Bineau, C. R. 19, pag. 767. 1844.
2) Cahours, C. R. 20, pag. 51. 1845.
3) Regnault, Mém. de l'acad. franç. Bd. 26, pag. 700. 1847.
4) Fairbain und Tate, Phil. Mag. (4) 21 pag. 230. 1861.
5) Hirn, Theorie méc. de la chaleur.
6) Horstmann, Liebig. Ann. Supplementb. 6, pag. 51. 1868.
7) Herwig, Pogg. Ann. 157, pag. 19, 1869.
8) Troost u. Hautefeuille, C. R. 83, pag. 333. 1886.
9) Andrews, Pogg. Ann. Erg. V. pag. 64. 1871. Phil. Mag. (5) 1, pag. 78. 1876.

setz stattfinden, in dem Sinne einer zunehmenden Compressibilität, zeigen schon die Versuche von ANDREW's selbst, ferner die von JANSSEN[1]) am Stickstoffoxydul und endlich die oben erwähnten Versuche von ROTH und AMAGAT. Die durch die ANDREWS'schen Versuche gewonnene Aufklärung ist deswegen von besonderer Wichtigkeit, weil sie eine Formel in schlagender Weise bestätigte, welche VAN DER WAALS zur Zusammenfassung der Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz aufgestellt hatte. Das sonstige Verhalten der Dämpfe s. unter mechanische Wärmetheorie.

VI. Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz bei Drucken unterhalb 1 Atmosphäre.

Es bleibt noch die Frage, ob sich die Luft und die ihr ähnlichen Gase bei Drucken unter einer Atmosphäre so verhalten, wie es das MARIOTTE'sche Gesetz verlangt, oder ob sie auch da Abweichungen zeigen und in welchem Sinne. Die Beantwortung dieser Frage ist besonders schwierig und hat noch zu keiner sicheren Entscheidung geführt. Es liegen eine Anzahl Arbeiten über sie vor, welche zu genau entgegengesetzten Resultaten führen. SILJESTRÖM[2]) fand 1874, dass bei niederen Drucken die Luft dieselben Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz zeigt, wie sie REGNAULT bei höheren Drucken gefunden hat, d. h. bei wachsenden Drucken nimmt PV ab. Dagegen fanden MENDELEJEFF und KIRPITSCHEFF[3]), dass umgekehrt mit wachsendem Drucke (unterhalb einer Atmosphäre) PV grösser wird. Die Kritik, die MENDELEJEFF an SILJESTRÖM's Versuchen vorgenommen hat, lässt dessen Angaben unsicher erscheinen. Aber auch MENDELEJEFF's Versuche sind von AMAGAT scharfer Kritik unterworfen worden.

Die Abweichungen sind nach MENDELEJEFE nicht unbeträchtlich. Es ergaben sich z. B. folgende Zahlen für Luft, wobei in der Berechnung von PV der Werth für 646·19 *mm* gleich 1 gesetzt ist.

Druck	Volumen	PV	Druck	Volumen	PV
646·185	1027·29	1·00000	104·805	6315·75	0·99730
486·285	1364·73	0·99960	51·628	12769·20	0·99306
207·403	3195·89	0·99867	16·395	39320·71	0·97114
155·645	4258·84	0·99856	14·554	44034·87	0·96551

AMAGAT[4]) hat diese Frage in zwei Arbeiten zu beantworten gesucht. Er kommt auf Grund sehr umsichtiger und sorgfältiger Kritik zu dem Schluss, dass mit der angewendeten Methode ein sicheres Urtheil darüber, in welchem Sinne die Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz stattfinden, nicht zu finden ist. Die Abweichungen nach der einen und anderen Seite hin folgen entweder promiscue durcheinander, oder sie sind, wenn sie auch immer nach derselben Seite gehen, von der Ordnung der Beobachtungsfehler. So bekam er für Luft bei Antangsdrucken P, die von 12·296 *mm* bis 0·295 *mm* abnahmen und höheren Enddrucken P' folgende Reihe für $\frac{PV}{P'V'}$

[1]) JANSSEN, Beibl. 2, pag. 136. 1878.

[2]) SILJESTRÖM, POGG. Ann. 151, pag. 451. 1874; Chem. Ber. 8, pag. 576. 1875.

[3]) MENDELEJEFF und KIRPITSCHEFF, Bull. de l'Académie de St. Petersbourg Bd. 9, pag. 466. 1874; Chem. Ber. 7, pag. 1339. 1878. 8, pag. 744. 1875.

[4]) AMAGAT, Ann. de chin. et de phys. (5) 8, 1876. (5) 28 pag. 480. 1883.

0·9986 1·0020 0·9992 1·0013 1·0015 1·0021 1·0025 1·0010 1·0048 1·0027 1·0016; 0·9999 1·0015 1·0013 1·0015 1·0050 0·9986 1·0030 1·0150 1·0143 1·0042 1·0137 1·0030 1·0075 0·9999 1·0160 1·0100 1·0045 0·9680.

Entsprechende schwankende Werthe fand er für Kohlensäure und Wasserstoff, so dass nach ihm die Frage nicht entschieden ist.

Endlich hat in der jüngsten Zeit FR. FUCHS[1]) diese Untersuchungen wieder aufgenommen und eine geschickte Methode angewendet, welche ihm für einige Gase positive Resultate zu finden gestattete. Nur für Wasserstoff war die Abweichung vom MARIOTTE'schen Gesetz so gering, dass es nicht gelang, ihren Sinn festzustellen. Für Luft, Kohlensäure und schweflige Säure dagegen ergaben sich folgende Werthe von PV bei verschiedenen Drucken

Druck in *mm*	PV		
	Luft	Kohlensäure	Schweflige Säure
1000	10000	10000	10000
900	10000·4	10011	10033·6
800	10000·8	10022·4	10067
700	10001	10033	10100
600	10000	10042·4	10133
500	9998·3	10052	10166·4
400	9996	10057	10198
300	9991	10061	10225
250	9988	10063	10251.

Bildet man, entsprechend der REGNAULT'schen Darstellungsweise, die Quotienten $\frac{PV}{P'V'}$, indem man für PV den Werth bei dem niedrigsten Druck (250 *mm*) und für $P'V'$ solche bei höherem Druck nimmt, so sieht man, dass für Kohlensäure und schweflige Säure die Quotienten $\frac{PV}{P'V'}$, grösser als 1 sind, so dass also diese Gase schon von 250 *mm* an Abweichungen nach derselben Richtung vom MARIOTTE'schen Gesetz zeigen, wie sie REGNAULT für Drucke über 1 Atm. gefunden hatte. Diese beiden Gase sind also auch bei niedrigen Drucken stärker comprimirbar, als es nach dem MARIOTTE'schen Gesetze der Fall wäre. Dagegen werden diese Quotienten für die Luft kleiner als 1, also ist die Luft unterhalb einer Atmosphäre weniger comprimirbar, als es das MARIOTTE'sche Gesetz verlangt. Darin stimmen also die Resultate von FUCHS mit denen von MENDELEJEFF überein und auch die Grösse der Abweichungen ergiebt sich bei beiden angenähert gleich. Es muss also, da unterhalb 1 Atm. die Abweichungen von Werthen, die > 1 sind, übergehen zu solchen, die < 1 sind, es einen Druck geben, bei dem $\frac{PV}{P'V'} = 1$ ist. Bei diesem Druck, der wenig unter 1 Atm. liegt, ist die Luft danach ein ideales Gas. Auch für Kohlensäure zeigt der Verlauf der Zahlen, dass sie bei einem Druck unter 200 *mm* sich dem idealen Zustande nähern wird.

VII. Theoretische Erweiterung des BOYLE-MARIOTTE'schen Gesetzes.

Da das MARIOTTE'sche Gesetz für kein Gas streng richtig ist, so wurde vielfach auf Grund der Beobachtungen versucht, die einfache Formel $PV = RT$ zu ergänzen, so dass sie das wirkliche Verhalten der Gase darstelle.

---

[1]) FUCHS WIED. Ann. Bd. 35, pag. 430, 1888. Jahresbericht der Realschule zu Kempten 1886/87.

REGNAULT selbst hatte seine Beobachtungen empirisch dargestellt durch eine Formel mit 2 Constanten von der Form

$$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = 1 + A\left(\frac{v_0}{v_1} - 1\right) + B\left(\frac{v_0}{v_1} - 1\right)^2.$$

Diese Darstellung soll nur den Beobachtungen genügen, ohne dass sie eine theoretische Unterlage besitzt. Eine theoretische Ableitung einer neuen Formel versuchte REYE[1]), 1861 auf Grund der mechanischen Wärmetheorie und den Versuchen von JOULE und THOMSON über die Abkühlung der Gase beim Ausströmen, indem er die Differentialgleichung aufstellte

$$\frac{dp}{z + p} = \frac{dt}{a + t} - \frac{1}{J(a + t)}\,\frac{z + p}{c_p - c_v}\,dv,$$

und diese integrirte in

$$\frac{p}{1 + \pi p}(v + RS) = RT,$$

worin π und R und S neue Constante sind.

Jedoch sind in dieser Ableitung einige nicht streng richtige Voraussetzungen enthalten und die Formel stimmt auch, wie SCHRÖDER VAN DEK KOLK[2]) ausführt, nicht genau mit REGNAULT's Beobachtungen.

DUPREZ[3]) führte zuerst die Annahme ein, dass statt des gesammten Volumens V des Gases vielmehr dieses Volumen abzüglich einer Constante, $V - C$, in die MARIOTTE'sche Formel eingesetzt werden müsse, ein Gedanke, der sich später fruchtbar erwies. Er schreibt die Formel

$$\frac{p_1(V_1 + C)}{p_0(V_0 + C)} = 1.$$

Die DUPREZ'schen Betrachtungen wurden von BUDDE[4]) weiter ausgeführt.

HIRN[5]) hat zuerst auf Grund der Vorstellungen der kinetischen Gastheorie (s. d.) die Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz als auf 2 Ursachen beruhend angesehen und dadurch eine Formel aufgestellt, welche nur geringer Veränderung bedurfte, um überraschende Resultate zu geben. Er machte darauf aufmerksam, dass von dem ganzen Raum, welchen ein Gas einnimmt, ein gewisser constanter Theil von den Molekülen selbst erfüllt ist. Die Zusammendrückung kann sich aber nur auf den von den Molekülen freien Raum erstrecken, d. h. von dem Volumen V der MARIOTTE'schen Formel ist ein constanter Abzug ψ zu machen. Einen ähnlichen Gedanken hatte schon D. BERNOULLI ausgesprochen[6]). Andererseits werden die Gase nicht bloss durch einen äussern Druck P zusammengedrückt, sondern auch noch durch innere Molekülanziehung, so dass zu dem Druck P in der Formel noch eine Constante S zu addiren ist. Die Verallgemeinerung des MARIOTTE'schen Gesetzes wäre demnach

$$(P + S)(V - \psi) = RT$$

wo S und ψ zwei Constanten sind.

In diesem Ausdrucke ist nur die Annahme unbegründet, dass S eine Constante ist. Die Anziehung zwischen den Molekülen muss ja um so grösser sein,

---

1) REYE, die mech. Wärmetheorie und das Spannungsgesetz der Gase. Göttingen 1861. POGG. Ann., Bd. 116. pag. 424. 1861.

2) SCHRÖDER VAN DER KOLK, POGG. Ann. 116, pag. 429. 1862 u. 126, pag. 333. 1865.

3) DUPREZ, Ann. d. chim. et de phys. (4) 1, pag. 168. 1864.

4) BUDDE, KOLBE's Journal 9, pag. 39. 1874.

5) HIRN, Théorie méc. de la chaleur 2 pag. 215. 1864.

6) s. DÜHRING, Neue Grundges. zur rationellen Physik und Chemie. Leipzig 1878.

je näher die Moleküle an einander liegen, d. h. je kleiner V ist. Diese Verbesserung wurde von VAN DER WAALS[1]) vorgenommen, welcher zeigte, dass der innere Druck dem Quadrat des Volumens umgekehrt proportional sei, so dass die verbesserte MARIOTTE'sche Formel lautet (die VAN DER WAALS'sche Formel)

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT,$$

worin a und b zwei Constanten sind. Die Constante b hat die Bedeutung, dass sie das 4fache des Molekularvolumens ist. Die VAN DER WAALS'sche Formel stellt nun in überraschend schöner Weise die bisher beobachteten Abweichungen vom MARIOTTE'schen Gesetz qualitativ und quantitativ dar. CLAUSIUS[2]) hat zwar wahrscheinlich zu machen gesucht, dass die Grösse a nicht constant, sondern eine Temperaturfunktion dass ferner statt $\frac{a}{v^2}$ eingesetzt werden müsste $\frac{a}{(v+\beta)^2}$, wo β eine dritte neue Constante ist, und war so zu der Formel gelangt

$$p = R\frac{T}{v - \alpha} - \frac{c}{T(v+\beta)^2}$$

mit drei Constanten $\alpha\beta c$; indess stellt diese Formel die Beobachtungen nicht viel besser dar, als die von VAN DER WAALS mit 2 Constanten, so dass bis jetzt die letztere als einfachster Ausdruck der Thatsachen gelten kann.

Bevor die Uebereinstimmung dieser Formel mit den Beobachtungen gezeigt werde, sei noch erwähnt, dass RECKNAGEL[3]) ebenfalls eine Erweiterung des MARIOTTE'schen Gesetzes aufgestellt hat, die mit REGNAULT's Beobachtungen über Kohlensäure sehr gut übereinstimmt, und dass CLAUSIUS[4]) später seine obenerwähnte Formel durch Hinzufügung von 2 weiteren Constanten in die Form brachte

$$\frac{p}{RT} = \frac{1}{v - \alpha} - \frac{AT^{-n} - B}{(v+\beta)^2},$$

eine Formel mit 5 beliebigen Constanten, welche natürlich zur Darstellung ausgedehnter Beobachtungen leicht benutzbar ist, ohne dass sie jedoch wesentliche Vorzüge von der zweiconstantigen Formel von VAN DER WAALS hätte. CLAUSIUS wendete seine Formel an auf Kohlensäure, Aether und Wasser. Er ergab sich für

Kohlensäure	$n = 2$	$A = 287{\cdot}0$	$B = 0$	$\alpha = 0{\cdot}000426$	$\beta = 0{\cdot}000494$
Aether	$n = 1{\cdot}19233$	$A = 15{\cdot}607$	$B = 0{\cdot}0044968$	$\alpha = 0{\cdot}0010876$	$\beta = 0{\cdot}0006476$
Wasser	$n = 1{\cdot}24$	$A = 45{\cdot}17$	$B = 0{\cdot}00737$	$\alpha = 0{\cdot}000754$	$\beta = 0{\cdot}001815$.

Es ist dabei die Volumeneinheit 1 Kubikmeter, die Druckeinheit 1 *kgr* auf 1 Quadratmeter und als Masse des betrachteten Dampfes ist 1 *kgr* angenommen.

VAN DER WAALS hat seine Formel zuerst an REGNAULT's Resultaten geprüft. Da REGNAULT seine Zahlen durch eine Formel mit 2 Constanten A und B darstellte, die umgeformt sich schreiben lässt

$$pv = (1 + A + B) - \frac{A + 2B}{v} + \frac{B}{v^2},$$

und da andererseits die VAN DER WAALS'sche Formel sich schreiben lässt

[1]) VAN DER WAALS, Ueber die Continuität des flüssigen und Gaszustandes. Deutsch von F. ROTH (das Original 1873).

[2]) CLAUSIUS, WIED. Ann. 9, pag. 337. 1880.

[3]) RECKNAGEL, POGG. Ann. Erg. V., pag. 563. 1871.

[4]) CLAUSIUS, WIED. Ann. 14, pag. 701. 1881.

$$pv = (1 + a)(1 - b)(1 + \alpha t) - \frac{a}{v} + \frac{ab}{v^2} + bp,$$

wobei für bp gesetzt werden kann $\frac{b}{v}$, so stimmen diese Formeln überein, die REGNAULT'schen Beobachtungen werden also durch die Formel von VAN DER WAALS direkt dargestellt und die Constanten a und b lassen sich aus REGNAULT's A und B berechnen. So ergab sich bei den von REGNAULT gewählten Einheiten — Druckeinheit 1 *m* Quecksilber, Volumeneinheit das Volumen von 1 Kilo bei 0° C. und 1 *m* Druck für

Luft	$a = 0{\cdot}0037$	$b = 0{\cdot}0026$
Kohlensäure	$a = 0{\cdot}0115$	$b = 0{\cdot}003$
Wasserstoff	$a = 0$	$b = 0{\cdot}00069$
Schweflige Säure	$a = 0{\cdot}0395$.	

Noch vorzüglicher zeigt sich die Gültigkeit dieser Formel, indem VAN DER WAALS im Stande war, mit den so aus REGNAULT's Beobachtungen ermittelten Constanten a und b für Kohlensäure auch die ANDREWS'schen Versuche vollständig darzustellen. Es war dazu nur nöthig, die Constanten auf die von ANDREWS benützten Einheiten umzurechnen. Zwar zeigt sich der Werth von b ein wenig mit der Temperatur veränderlich, indess doch in so geringem Grade, dass nur eine geringe Correktion daran anzubringen wäre, die vielleicht, nach der Ableitung der VAN DER WAALS'schen Formel, ihren Grund in einer Dissociation der Moleküle hat. Auch ROTH[1]) hat seine Beobachtungen für Kohlensäure (zwischen 18·5° und 183·8°) nach der VAN DER WAALS'schen Formel dargestellt und sehr guten Anschluss gefunden. Es ergab sich, wenn als Volumeinheit das Volumen des Gases bei 0° und 1 Atm. Druck gewählt wurde, in der Formel

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = (1 + a)(1 - b)(1 + \alpha t),$$

für Kohlensäure $a = 0{\cdot}00874$ $b = 0{\cdot}00228$ bei 18·5°
$b = 0{\cdot}00269$ „ 49·5°
$b = 0{\cdot}0029$ „ 99·6° und 183·8°.

Aus den Versuchen von JANNSEN[2]) mit Stickoxydul berechnete ROTH
$a = 0{\cdot}00742$ $b = 0{\cdot}00189$ bei 25·15°
$b = 0{\cdot}00179$ „ 32·2°
$b = 0{\cdot}00192$ „ 38·40° und 43·8°.

Ferner finden VAN DER WAALS und ROTH für schweflige Säure
$a = 0{\cdot}03002$ $b = 0{\cdot}0062$ für 58·0°
$b = 0{\cdot}0094$ „ 96·6°
$b = 0{\cdot}0084$ „ 183·2°,

und ROTH für Ammoniak
$a = 0{\cdot}0169$ $b = 0{\cdot}00602$ für 46·6°
$b = 0{\cdot}00631$ „ 99·6° und 183·0°.

Endlich für Aethylen
$a = 0{\cdot}0142$ $b = 0{\cdot}00698$ für 18°
$b = 0{\cdot}00666$ „ 50·2°
$b = 0{\cdot}00608$ „ 99·6°
$b = 0{\cdot}00587$ „ 182·8°.

Die Anwendung der VAN DER WAALS'schen Formel auf den kritischen Zustand der Dämpfe wird bei der Behandlung der Dämpfe gegeben werden.

[1]) ROTH, WIED. Ann. 11, pag. 28. 1880.
[2]) JANNSEN, Beibl. 2, pag. 136. 1878.

van der Waals zeigte ferner, wie durch seine Formel auch die Beobachtungen von Cailletet und Amagat dargestellt werden, welche ein Minimum von PV für gewissen Druck ergeben. Cailletet findet bei Luft zwischen 60 und 80 Atm. ein Minimum für PV. Nun folgt aus der van der Waals'schen Formel

$$p = \frac{(1+a)(1-b)(1+\alpha t)}{v-b} - \frac{a}{v^2},$$

indem man mit v multiplicirt,

$$pv = (1+a)(1-b)(1+\alpha t)\frac{v}{v-b} - \frac{a}{v}.$$

Damit das Minimum von pv gefunden werde, bei der Veränderung von v (oder. p) muss $\frac{d(pv)}{dv} = 0$ gesetzt werden, welches ergiebt

$$\frac{v^2}{(v-b)^2} = \frac{a}{b(1+a)(1-b)(1+\alpha t)}.$$

Aus den Werthen von a und b ergiebt sich $v = 0{\cdot}014326$ und der zugehörige Werth von p ist 72 Atm. Das Minimum von pv findet also bei 72 Atm. statt, wobei $a = 0{\cdot}002812$, $b = 0{\cdot}00197$ gesetzt ist.

Bei noch höherem Druck wird pv nach Cailletet einmal gleich 1. Nach der Formel musste dieser Druck 140 Atm. betragen, nach Cailletet's Beobachtungen ist er ungefähr 180 Atm., doch ist dieser Unterschied vielleicht auf die Schwierigkeit der Volumenmessung bei hohen Drucken zurückzuführen.

Auch die Versuche von Amagat über Luft stellt van der Waals mit seiner Formel dar. Die Uebereinstimmung ist aus folgenden Tabellen zu ersehen.

Luft

Druck P (in m Hg)	PV beobachtet von Amagat	PV berechn. von van der Waals	Druck P (in m Hg)	PV beobachtet von Amagat	PV berechn. von van der Waals
1	1000	1000	64·00	—	977
9·94	994	—	68·55	979	—
19·77	998	—	72·16	—	978
24·07	—	984	78·67	984	—
29·53	984	—	84·22	—	980
34·90	—	982	89·03	989	—
39·25	981	—	99·85	998	—
45·24	—	978	101·47	—	990
48·86	977	—	111·09	1009	—
55·50	—	977	133·89	—	1009
58·64	977	—			

Für Wasserstoff kann, da a viel kleiner als b ist, kein Minimalwerth von PV existiren. Die Constante b ergiebt sich bis zum Druck von 605 Atm. für Wasserstoff fast constant gleich $= 0{\cdot}00047$.

Auch bei Aethylen fand Baynes[1]) mittelst der van der Waals'schen Formel vorzügliche Uebereinstimmung mit Amagat's Beobachtungen und insbesondere das Minimum von PV. Die Zahlenwerthe ergeben sich, wenn p in Atmosphären ausgedrückt ist, so, dass die van der Waals'schen Formel lautet

$$p = \frac{0{\cdot}0037\left(\frac{1}{\alpha} + t\right)}{v - 0{\cdot}0024} - \frac{0{\cdot}00786}{v^2}.$$

[1]) Baynes, Nature 22, pag. 186. 1880.

Die Zusammenstellung von Beobachtung und Berechnung ist in folgenden Tabellen enthalten

Aethylen					
Druck P (in Atm.)	PV beobachtet von AMAGAT	PV berechnet von BAYNES	Druck P (in Atm.)	PV beobachtet von AMAGAT	PV berechnet von BAYNES
31·58	914	895	133·26	520	520
45·80	781	782	176·01	643	642
59·38	522 [1])	624	233·58	807	805
72·86	416	387	282·21	941	940
84·16	399	392	329·14	1067	1067
94·53	413	413	398·71	1248	1254
110·47	454	456			

Es ist also bisher die VAN DER WAALS'sche Formel als die einfachste und gut bestätigte Erweiterung des MARIOTTE'schen Gesetzes anzusehen. Gewisse noch übrig bleibende Unterschiede gegen die Beobachtungen sind durch die Annahme einer geringen Veränderlichkeit des Molekularvolumens mit der Temperatur zu beseitigen, eine Veränderlichkeit, welche durch das Eintreten von Dissociationen leicht erklärbar ist.

L. GRAETZ.

Aëromechanik.

Einleitung. Die Aëromechanik im allgemeinsten Sinne des Wortes umfasst alle Erscheinungen, welche die Gase darbieten. Da nun bei diesen die Dichte nicht, wie bei Flüssigkeiten, nahezu unabhängig von Druck und Temperatur, sondern nach dem BOYLE'schen Gesetz (s. o.) dem Drucke annähernd proportional und auch mit der Temperatur (s. w. u.) stark veränderlich ist, so folgt, dass die Erscheinungen an Gasen complicirter und mannigfaltiger sein werden als die Erscheinungen, welche tropfbare Flüssigkeiten darbieten. Das ist auch thatsächlich der Fall; wenn trotzdem der vorliegende Artikel von vergleichsweise geringem Umfange ist, so hat dies einen doppelten Grund. Der eine ist dieser, dass zahlreiche Betrachtungen und Ergebnisse, die in den hydrostatischen und hydrodynamischen Artikeln aufgeführt worden sind, auch für Gase gelten, nämlich einerseits alle diejenigen, bei welchen die Gleichung der Incompressibilität (pag. 373, Gleichung 8) nicht mit zu Grunde gelegt ist, und andererseits solche Erscheinungen, bei denen dies zwar der Fall ist, die Compressibilität aber, auch wenn es sich um Gase handelt, sich nicht geltend macht; es kann daher im allgemeinen auf jene Angaben zurückverwiesen, und es brauchen hier zu denselben nur einzelne Ergänzungen gemacht zu werden. Zweitens aber müssen gerade von denjenigen Erscheinungen, welche den Gasen eigentümlich sind, die meisten besonderen Artikeln resp. sogar besonderen Gebieten überwiesen werden. Dahin gehört zunächst alles, wobei sich die Reibung geltend macht, und das ist hier viel häufiger der Fall, als bei Flüssigkeiten, weil die Wirkung der Gase infolge ihrer geringeren Masse überhaupt geringfügiger und im Verhältnis zu dieser Masse ihre Reibung weit grösser ist als bei Flüssigkeiten (bei Luft z. B. 20 Mal so gross wie bei Wasser). Analoge Erscheinungen sind die der Absorption und der Diffusion von Gasen (s. Art. Reibung, Absorption, Diffusion). Ferner

[1]) Wohl ein Druckfehler bei AMAGAT, wie BAYNES zeigt.

giebt es eine grosse Klasse von Erscheinungen an Gasen — alle diejenigen nämlich, welche in raschen Schwingungen bestehen, oder solche enthalten — die man als Schall wahrnimmt, und welche deshalb, schon der experimentellen Methodik wegen, ebenso wie die Schwingungen elastischer fester Körper, zweckmässiger Weise in der Akustik im Zusammenhange behandelt werden. Drittens sollen hier nur diejenigen Erscheinungen Platz finden, für deren Verständniss die Stetigkeitstheorie der Materie als Grundlage zunächst ausreicht; die entgegengesetzte Hypothese, die Molekulartheorie, hat grade für die Gase zu einer Disciplin geführt, welche ausgebildet genug ist, um ein Ganzes für sich zu bilden (s. Art. Kinetische Gastheorie). Viertens endlich machen sich bei sehr vielen Erscheinungen an Gasen die Einflüsse der Temperatur in so erheblichem Maasse geltend, dass es selbst in erster Annäherung nicht möglich ist, sie ohne Rücksicht auf dieselben zu verfolgen, und dass es somit nothwendig wird, die Betrachtung derselben bis zur Untersuchung der Wärmeerscheinungen zu verschieben; namentlich gilt dies von fast allen Erscheinungen, welche eine bestimmte Varietät der Gase, die sog. Dämpfe, darbieten, d. h. Gase, die nicht weit vom Zustande der Verflüssigung entfernt sind. Hier sollen Temperatureinflüsse nur da, wo sie als nothwendige Correktionsglieder auftreten, Berücksichtigung finden, und es wird zu diesem Behufe ein wichtiges Gesetz der Wärmelehre, das Gesetz von Gay-Lussac, vorgreifend benutzt werden; ein Gesetz, welches dem Boyle'schen zur Seite steht, und für Gase aussagt, dass der Druck, resp. das Volumen irgend einer Temperatur ϑ durch Druck resp. Volumen bei 0° sich annähernd mittelst der Formeln $p = p_0(1 + \alpha\vartheta)$ und $v = v_0(1 + \alpha\vartheta)$ ausdrückt, wo die Grösse α sowohl für ein und dasselbe Gas als auch für verschiedene Gase als endlich auch in beiden obigen Gleichungen mit derselben Annäherung einen und denselben Werth hat, mit welcher das Boyle'sche Gesetz (s. oben) erfüllt ist.

Aërostatik.

Gleichgewicht eines Gases. Für das Gleichgewicht eines Gases gelten, wenn XYZ die Componenten der wirkenden Kräfte, p der Druck und ρ die Dichte ist, dieselben Gleichungen (4), pag. 365, wie für Flüssigkeiten:

$$X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad Y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad Z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{1}$$

Hiernach sind auch bei Gasen XYZ stets die Differentialquotienten einer und derselben Grösse

$$V = \int\frac{dp}{\rho} \tag{2}$$

nach den Coordinaten, und es ergiebt sich der Satz: Gase können nur unter der Wirkung von Kräften, die ein Potential haben, im Gleichgewicht sein. Dagegen wird hier die Beziehung zwischen p und ρ eine andere wie bei Flüssigkeiten, nämlich die durch das Boyle'sche Gesetz gelieferte:

$$p = a^2\rho, \text{ also } dp = a^2 d\rho, \tag{3}$$

wo a eine Constante ist; und folglich wird das Potential V, im Gegensatz zur Gleichung (5), pag. 365

$$\begin{aligned} &\text{entweder:} \quad V = a^2\int\frac{dp}{p} = a^2 \log p + const \\ &\text{oder:} \quad V = a^2\int\frac{d\rho}{\rho} = a^2 \log\rho + const. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Flächen $V = const$, die sog. Niveauflächen, haben also hier ausser ihrer Bedeutung als Flächen gleichen Druckes auch noch die zweite Bedeutung als Flächen gleicher Dichte.

Gleichgewicht eines schweren Gases. Handelt es sich um eine der Schwere unterworfene Gassäule von geringen Querdimensionen, so ist z die einzige Variable und, wenn R der Erdradius ist

$$Z = -\frac{gR^2}{(R+z)^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Haben Druck und Dichte an der Erdoberfläche, d. h. für $z = 0$, die Werthe p_0 und ρ_0, so wird $a^2 = p_0/\rho_0$, und die Lösung lässt sich in einer der beiden Formen

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g R}{p_0}\cdot\frac{z}{R+z}}$$
$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g R}{p_0}\cdot\frac{z}{R+z}} \tag{5}$$

hinschreiben. Kann man selbst für die höchsten Punkte der Säule z gegen R vernachlässigen oder will man nur den unteren Theil untersuchen, so erhält man einfacher

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g z}{p_0}} \qquad p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g z}{p_0}} \qquad log\, p = log\, p_0 - \frac{\rho_0 g}{p_0} z = log\, p_0 - \frac{z}{18401}, \tag{6}$$

und umgekehrt

$$z = \frac{p_0}{\rho_0 g} \, log\, nat \frac{p_0}{p} = 18401 \, log \frac{p_0}{p}, \tag{6a}$$

letzteres für atmosphärische Luft[1]).

Wenn also die Höhe arithmetisch zunimmt, nehmen Dichte und Druck geometrisch ab; oder: Die Abnahme der Logarithmen des Druckes und der Dichte ist der Zunahme der Höhe über dem Erdboden proportional. Wie man ferner sieht, ist die Abnahme des Druckes und der Dichte mit der Höhe eine desto stärkere, je grösser die Schwerkraft und je grösser das Verhältnis ρ_0/p_0, also je kleiner die Constante a (Gleichung 3) für das betreffende Gas ist. Ueber die experimentelle Messung des Luftdrucks in verschiedenen Höhen s. w. u. Hier sei nur der einfache Versuch angeführt, bei welchem ein an der Erdoberfläche verschlossenes Gefäss mit Luft, in der Höhe plötzlich geöffnet, einen Theil seines Inhalts unter Zischen nach aussen abgiebt.

Ist die Gassäule von so grossem Querschnitt, dass die Krümmung der Erdoberfläche in Betracht kommt, so muss man z durch den Radiusvector r ersetzen und erhält

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g R}{p_0}\left(1-\frac{R}{r}\right)}$$
$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g R}{p_0}\left(1-\frac{R}{r}\right)}. \tag{7}$$

Diese Formeln haben ebenso wie die entsprechenden Formeln (5) die Eigenschaft, dass für wachsende z resp. r Druck und Dichte sich einer bestimmten endlichen Grenze nähern, nämlich

$$p_\infty = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g R}{p_0}} \qquad \rho_\infty = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g R}{p_0}}.$$

Setzt man abgerundet $\rho_0 = 0{\cdot}0013$, $p_0 = 9{\cdot}8 \times 13{\cdot}6 \times 0{\cdot}76$, $g = 9{\cdot}8$, $R = 6366200$ (in Metern), so findet man etwa

$$p_\infty = p_0 \cdot 10^{-346} \qquad \rho_\infty = \rho_0 \cdot 10^{-346}.$$

Wären die Voraussetzungen der Rechnung alle zutreffend, so könnte man hierin ein ungefähres Maass für Druck und Dichte des den Weltraum erfüllenden

[1]) Ueber den Zahlenfactor s. m. w. u.

Aethers erblicken. Um ferner eine Vorstellung von der Vertheilung der Luft auf die einzelnen Höhenschichten zu gewinnen, braucht man nur zu erwägen, dass nach Gleichung (6 a) bis zur Höhe von 18401 m schon $\frac{9}{10}$, bis zu der von 36802 m schon $\frac{99}{100}$ u. s. w. der ganzen Luftmasse enthalten sind.

Gasgemische; Zusammensetzung der Atmosphäre. Auf die die Atmosphäre bildende Luft sind die vorstehenden Betrachtungen ohne weiteres nur anwendbar, wenn eine von den beiden folgenden Annahmen gemacht wird: Entweder die, dass die Luft, obgleich ein Gemenge von Gasen (namentlich Sauerstoff und Stickstoff, in geringen Mengen aber auch Wasserdampf, Kohlensäure und Wasserstoff), sich wie ein einheitliches Gas verhalte; oder die entgegengesetzte, dass sich jeder der Bestandtheile des Gemisches so verhalte, als ob die übrigen nicht vorhanden wären. Nach den Anschauungen und Untersuchungen von DALTON[1]), MAXWELL[2]), STEFAN[3]) u. A. ist das letztere nahezu erlaubt, und folglich hat man für ein Gemisch zweier Gase:

$$\rho = \rho_0' e^{-\frac{\rho_0' g R}{p_0'} \frac{z}{R+z}} + \rho_0'' e^{-\frac{\rho_0'' g R}{p_0''} \frac{z}{R+z}}$$

$$p = p_0' e^{-\frac{\rho_0' g R}{p_0} \frac{z}{L+z}} + p_0'' e^{-\frac{\rho_0'' g R}{p_0''} \frac{z}{R+z}}.$$

Da p_0' und p_0'', ρ_0' und ρ_0'' verschiedene Grössen sind, so folgt, dass das Mengungsverhältniss der Gase nach der Höhe hin sich ändert, und zwar in dem Sinne, dass der schwerere Bestandtheil immer spärlicher, der leichtere immer vorwiegender wird. Für die Atmosphäre ergeben sich z. B., wenn man von den übrigen Bestandtheilen absieht, nach HANN's Berechnung[4]) folgende Volumprocente an Sauerstoff und Stickstoff:

Höhe in *m*	0	1000	10000	20000	40000	60000
Sauerstoff	21·00	20·71	18·35	15·92	11·54	8·89
Stickstoff	78·96	79·25	81·63	84·07	88·46	91·11
Gesammtdruck	760·0	670·7	218·0	62·8	5·2	0·4
	760·0	670·6	217·4	62·2	5·1	0·4

Der Gesammtdruck ist einmal aus den Theildrucken berechnet, das andere Mal unter der Annahme, dass die Luft sich wie ein einheitliches Gas verhalte; die Unterschiede sind, wie man sieht, verschwindend. Dagegen sind die Unterschiede in der Zusammensetzung der Luft sehr beträchtlich, und es muss sich daher die Atmosphäre in grossen Höhen einer reinen Stickstoffatmosphäre nähern, ferner muss der freie Wasserstoff, dessen Existenz in der Luft kaum noch bezweifelt werden kann, nach oben hin immer stärker vertreten sein, und es liegt der Schluss nahe, dass er es sei, welcher den Weltraum erfüllt. Die bisher ausgeführten Untersuchungen von Luftproben, welche von Ballonfahrten mitgebracht waren, haben freilich eine deutliche Abnahme des Sauerstoffs nicht erkennen lassen, was theils der verhältnismässigen Geringfügigkeit der erreichten Höhen, theils dem durch die Bewegungen der Atmosphäre bewirkten Ausgleich zuzuschreiben sein mag.

Gleichgewicht eines rotirenden Gases; Gestalt und Grenze der Atmosphäre. Unter den Fällen von Bewegungen, welche Körper ausführen können, befindet sich einer, nämlich der der stationären Rotation um eine Axe, den

1) DALTON, Mem. Manch. Soc. 5 Th. 1. 1798. — (2) 1; 1805 u. s. w.

2) MAXWELL, Rep. Brit. Ass. 1873, pag. 29.

3) STEFAN, Wien. Ber. 63 (2); 1871.

4) HANN, Oesterr. Z. f. Meteor. 10, pag. 25.

man durch Einführung der Centrifugalkraft (pag. 75) als Gleichgewichtsproblem behandeln kann, wie dies bei Flüssigkeiten denn auch mit Erfolg geschehen ist (pag. 366 ff). Führt man für die die Erde umgebende Atmosphäre die entsprechende Rechnung aus, so könnte man sich zunächst die Aufgabe stellen, die Grenze dieser Atmosphäre als diejenige Oberfläche zu bestimmen, in welcher Schwerkraft und Centrifugalkralt sich das Gleichgewicht halten; man erhielte alsdann eine Umdrehungsfläche, deren Meridiancurve, wenn r der Radiusvector und, die geographische Breite φ ist, die Gleichung

$$r^3 = \frac{const}{cos^2 \varphi}$$

hätte. Diese Formel zeigt aber schon in den einfachsten Anwendungen, z. B. durch die Erwägung, dass dann die Höhe der Atmosphäre von dem Aequator nach den Polen hin bis zu unendlicher Grösse zunehmen würde, die Unrichtigkeit der Grundlagen. In der That ist die Dichte als variable Grösse gänzlich unberücksichtigt geblieben. Diesen Fehler vermeidet man, wenn man das um das Centrifugalglied vergrösserte Potential in die Gleichung (4) einsetzt:

$$V = \frac{gR^2}{r} + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = \frac{p_0}{\rho_0} \log p + const$$

(ω Winkelgeschwindigkeit) und mittelst der Formel $y^2 + z^2 = r^2 cos^2 \varphi$ die geographische Breite einführt; setzt man dann zur Bestimmung der Constanten fest, dass die Werthe p_0, ρ_0 und $g = g_0$, für die Pole gelten, so erhält man

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}\left[g_0 R\left(1 - \frac{R}{r}\right) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 cos^2 \varphi\right]}.$$

Die Meridiancurve der Flächen gleichen Druckes und gleicher Dichte wird also

$$\frac{g_0 R^2}{r} - \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 cos^2 \varphi = c;$$

für grössere Werthe des Parameters c erhält man in's unendliche verlaufende, also hier unbrauchbare, für kleinere c ellipsenähnliche Curven, und die Grenzcurve, für welche der Parameter, der Aequatorialradius r_a und der Polarradius r_p die Werthe

$$c = 3\sqrt[3]{\omega^2 g^2 R^4} \qquad r_a = \sqrt{\frac{2c}{3\omega^2}} \qquad r_p = \frac{2}{3} r_a$$

haben, giebt alsdann die äusserste mögliche Grenze der Atmosphäre[1]). Die Abplattung hätte also den gewaltigen Werth von $\frac{1}{3}$, und die Höhe der Atmosphäre würde am Aequator 57000, am Pole 38000 *km* betragen. Für den Druck am Erdboden selbst erhielte man ($r = R$)

$$p = p_0 e^{\frac{\rho_0 \omega^2 R^2 cos^2 \varphi}{2 p_0}},$$

so dass der Druck am Aequator fast das Vierfache vom Druck am Pole sein würde. Alle diese Ergebnisse zeigen die Unhaltbarkeit auch dieser Theorie auf's Deutlichste, ganz besonders das letzte Resultat, da die Beobachtungen nicht entfernt derartige Verhältnisse festgestellt haben. Es folgt also, dass die Annahme, die Lufthülle nehme vollständig an der Erdrotation theil, nicht zulässig ist; in der That würde, sobald vom Aequator nach den Polen hin unmittelbar über dem Erdboden eine der obigen auch nur annähernd ähnliche Druckabnahme stattfände, ein entsprechender, die Drucke wieder ausgleichender Aequatorialstrom entstehen und somit das Problem zu einem entschieden dynamischen werden. Damit ist zugleich bei dem Mangel der betreffenden Daten jede Berechnung der wahren Grenze der Atmosphäre, soweit eine solche überhaupt vorhanden, unmöglich. Jedoch

[1]) VOIGT, Elementare Mechanik, Lpz. 1889, pag. 325

kann man dieser Berechnung eine praktische Fassung geben, indem man fragt, bis zu welcher Höhe sich die Atmosphäre bei den verschiedenen Erscheinungen geltend mache, und jede derartige Erscheinung wird ein Mittel für die Berechnung an die Hand geben; insbesondere sei hier auf die verschiedenen optischen, thermodynamischen und astronomischen Methoden hingewiesen, die naturgemäss zu sehr verschiedenen Werthen, im Mittel aber etwa zu einer Höhe von 300 km führen[1]).

Atmosphärische Fluth und Ebbe. Ohne die Untersuchung für Gase selbständig auszuführen, kann man das der statischen Theorie entsprechende Resultat aus der entsprechenden Untersuchung für Flüssigkeiten (pag. 391) ableiten; dort ergab sich ein Niveauunterschied des Wassers zu den Zeiten von Fluth und Ebbe, hier ergeben sich analoge Differenzen für den Luftdruck zur Zeit der Culminationen und Quadraturen von Mond resp. Sonne. Da nämlich zur Zeit der Fluth das Wasser 0·55 *m* resp. 0·24 *m* höher steht als bei Ebbe, so ist der Luftdruck in gleicher Höhenschicht zur Fluthzeit um den Druck einer Luftschicht von 0·55 *m* resp. 0·24 *m* grösser als bei Ebbe; in Quecksilberhöhe (s. u.) giebt dies nur 0·052 *mm* resp. 0·023 *mm*, also weniger, als durch Messung genau nachgewiesen werden kann. Indessen erhält man auch hier, wie bei den Gezeiten des Wassers, nicht unerheblich grössere Werthe, wenn man einmal von der statischen zur dynamischen Theorie übergeht und zweitens die Wirkung der Continente, der Bodenreibung, der Stauung der Luft in den Gebirgen u. s. w. berücksichtigt. Ein Zusammenhang zwischen Fluthen und Witterungserscheinungen erscheint daher, wenn auch experimentell nicht sicher nachgewiesen, doch im Princip nicht ausgeschlossen.

Gewicht der Gase. In allen Fällen, wo die Expansivkraft der Gase nach einer bestimmten Richtung zur Wirksamkeit gelangt, darf die Wirkung der Schwere auf sie, also ihr Gewicht, demgegenüber vernachlässigt werden. Bei der Dampfmaschine z. B. ist es absolut gleichgültig, ob der Dampf den Kolben nach oben, nach der Seite oder nach unten treiben soll. Dagegen macht sich, wenn die Spannungsverhältnisse durch Anordnung und Festigkeit der Wandungen gleichmässig nach allen Seiten vertheilt werden, das Gewicht der Gase sehr wohl geltend und kann leicht gemessen werden. Man braucht zu diesem Zwecke nur einen Ballon von Metall oder Glas einmal mit Gas gefüllt, das andere Mal leer zu wägen; die Differenz beider Grössen ist das Gewicht der benutzten Gasmenge, natürlich bezogen auf den gleichzeitig beobachteten Druck und Temperatur; soll der Druck z. B. der normale, d. h. der der Atmosphäre sein, so braucht man nur die zur Füllung dienende Ballonöffnung, je nachdem das Gas schwerer oder leichter als Luft ist, nach oben oder nach unten bringen und kann sie dann für die kurze Zeit der Wägung offen lassen. Bei Anwendung eines hinreichend grossen Ballons und Benutzung einer hinreichend empfindlichen Waage — freilich Anforderungen, welche sich gegenseitig erschweren — erhält man verhältnissmässig genaue Werthe. In ähnlicher Weise kann man natürlich auch zeigen, dass sich die verschiedenen Gase durch ihre Gewichte unterscheiden. Sehr einfach und anschaulich ist in dieser Hinsicht der folgende, von FARADAY angegebene Vorlesungsversuch. Hängt man an eine Waage zwei Bechergläser, das eine aufrecht, das andere verkehrt, und giesst man in jenes ein schweres Gas, z. B. Kohlensäure von oben, oder in dieses ein leichtes, z. B. Wasserstoff, von unten ein (was man nach der optischen Schlieren-Methode auch dem Auge sichtbar machen kann), so schlägt die Waage beide Mal nach jener Seite um.

[1]) S. z. B. GÜNTHER, Geophysik, Bd. 2, pag. 85.

Auftrieb. Die Differenzen der eben gemachten Wägungen liefern zwar die wahren Werthe der Gewichte der betreffenden Gase, die einzelnen Wägungen selbst geben aber nicht die wahren Gewichte des Ballons mit und ohne Gas, sondern, in Folge des Auftriebes (pag. 351), den die Luft ausübt, die scheinbaren Gewichte in Luft. Durch einfache Experimente kann man den Auftrieb in der Luft demonstriren und nachweisen, dass er dem Gewichte der verdrängten Luft gleich ist. Man hängt z. B. an das eine Ende eines Waagebalkens einen grossen, specifisch leichten Körper, z. B. eine grosse Hohlkugel, an das andere Ende einen kleinen, aber specifisch schweren Körper, z. B. ein Schälchen mit Schrot, und regulirt letzteres durch wiederholtes Probiren derart, dass die Waage im luftleeren Raume im Gleichgewichte ist. In der freien Luft wird sie alsdann nicht im Gleichgewichte sein, und sie wird dasselbe erst wiedererlangen, wenn man an die Hohlkugel ein bestimmtes Gewicht anhängt. Handelt es sich nur um den qualitativen Nachweis, so ist es natürlich bequemer, die Waage in der freien Luft zu äquilibriren und zu zeigen, dass unter der Glocke der Luftpumpe die Hohlkugel herabsinkt. Bei Wägungen in Luft operirt man also stets mit dem scheinbaren, nicht mit dem wahren Gewichte, d. h. mit der Grösse $G(1 - l/\rho)$, wo G das wahre Gewicht, l die Dichte der Luft und ρ einerseits die Dichte des gewogenen Körpers, andererseits die Dichte der Gewichtsstücke ist; man muss also entweder hiernach auf den leeren Raum reduciren (s. Art. Waage pag. 131) oder direkt Vacuumwaagen (pag. 133) benutzen. Ebenso ist das Drehungsmoment der Schwere auf ein Pendel, wie es in Luft beobachtet wird, $D = - Gs\sin\varphi[1 - (ls')/(\rho s)]$, wenn φ den Ablenkungswinkel, s und s' die Abstände des Massenschwerpunktes resp. des Volumenschwerpunktes von der Drehungsaxe bedeuten; im übrigen sehe man Art. Pendel pag. 176.

Dichte der Gase. In dieser Hinsicht kann einfach auf den Art. Dichte, pag. 146 ff. verwiesen werden, insbesondere sei auf die für Luft giltige Tabelle 1, pag. 154 aufmerksam gemacht. Die Dichte der Gase wird im allgemeinen auf die Dichte der Luft als Einheit bezogen; soll sie auf die Dichte des Wassers als Einheit bezogen werden, so muss das Verhältniss von Luft zu Wasser bekannt sein; wie die gedachte Tabelle resp. die ihr voranstehende Formel zeigt, ist dieses Verhältniss von zahlreichen Momenten abhängig; als gewöhnlich benutzter Normalwerth kann der REGNAULT'sche gelten, wonach 1 *ccm* trockene Luft bei 0° und normalem Druck, unter 45° Breite und am Meeresspiegel 0·00129277 *gr* und somit 773·533 Mal so viel wiegt, wie Wasser von 4° C.

Schwimmen. Auch in Gasen kann es sich ereignen, dass der Auftrieb, den ein in demselben befindlicher Körper erfährt, gleich oder grösser wird als sein Gewicht; er wird dann in dem Gase schweben resp. aufsteigen. In der Luft gestalten sich aber diese Verhältnisse insofern verwickelter, als der aufsteigende Körper fortwährend in Luftschichten gelangt, die weniger dicht als die vorhergehenden sind, und dass folglich der Auftrieb immer schwächer wird, bis er eventuell nur noch dem Körpergewichte gleich ist und somit Gleichgewicht eintritt. Das spielt z. B. eine grosse Rolle bei den Luftballons (s. w. u.); es lässt sich sogar in den Dimensionen eines Zimmers schon ganz gut demonstriren, da in einem solchen die Temperatur nach oben hin wächst, die Dichte also abnimmt. Schwimmt ein Körper an der Oberfläche einer Flüssigkeit, in die er nur zum Theil eintaucht, so wirkt streng genommen der Druck der über der Flüssigkeit befindlichen Luft als drittes Moment neben seinem Gewicht und dem Auftrieb, und der Satz am Schluss von pag. 352 ist durch den genaueren zu er-

setzen: Ein schwimmender Körper sinkt so tief ein, dass der Auftrieb, den die Flüssigkeit ihm ertheilt, also das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, um den Druck der Luft grösser ist, als das Eigengewicht des Körpers. Denkt man sich nun umgekehrt die Luft unten, das Wasser oben und wieder den Körper theils in jene, theils in dieses hineinragend, so erzeugt jetzt das Wasser den Druck nach unten, die Luft den Auftrieb, während das Eigengewicht unverändert nach unten wirkt. Bei sehr leichten Körpern kann dann ebenfalls ein Gleichgewichtszustand eintreten, den man durch Kunstgriffe experimentell demonstriren kann.

Communicirende Röhren. In der Hydrostatik konnte bei Betrachtung der communicirenden Röhren (pag. 346) von dem Luftdruck abgesehen werden, weil derselbe auf beiden Schenkeln in gleicher Weise lastet. Die Versuche, welche dort mit Flüssigkeiten angestellt wurden, können nun aber grösstentheils auch bei Gasen, wenn auch nicht mit derselben experimentellen Leichtigkeit, wiederholt werden. So lässt sich z. B. nachweisen, dass Kohlensäure in beiden Schenkeln gleich hoch steht, wobei es freilich auf grosse Genauigkeit nicht ankommen darf. Interessanter ist der Nachweis, dass, wenn auf beiden Seiten verschiedene Gassäulen sich befinden, ihr Druck ein verschiedener ist und folglich eine den untersten Theil der Röhren und ihr Verbindungsstück erfüllende gefärbte Flüssigkeit beiderseits verschieden hoch steht. Damit diese Niveaudifferenz merklich und messbar werde, muss man nur einerseits eine recht leichte Flüssigkeit, z. B. Ligroin, und andererseits Gase von sehr verschiedener Dichte, z. B. Luft und Wasserstoff, anwenden. Den einen Schenkel der *U*-Röhre wählt man kurz, den anderen 2 bis 3 Meter lang, versieht ihn dicht über dem Niveau des Ligroins mit einem Seitenrohr zur Zufuhr des Wasserstoffes und biegt sein oberes Ende nach unten um, damit das Gas nicht entweiche; das Ligroin steht dann in diesem Schenkel einige *mm* höher als in dem anderen; auch bei Anwendung von Leuchtgas statt des Wasserstoffes ist die Niveaudifferenz noch deutlich sichtbar. Unter den Begriff der communicirenden Röhren fallen auch Röhren oder unten offene (oben offene oder geschlossene) Gefässe, welche in weitere Gefässe tauchen, und ein Specialfall ist der, wo dieses letztere durch die freie Atmosphäre repräsentirt wird. Hierauf beruhen zahlreiche Erscheinungen, von denen nur eine als Beispiel angeführt sei. Gelänge es ein etwa mit Wasser gefülltes, cylindrisches Gefäss mit der Oeffnung nach unten ohne vorherige Drehung so aufzustellen, dass die Wassergrenze genau horizontal wäre und auch vor den leisesten Erschütterungen gezchützt bliebe, so müsste das Wasser vom Luftdruck getragen werden, würde also nicht ausfliessen. Man kann diesen Zustand in der That herstellen, wenn man das Gefäss, die Oeffnung nach oben, mit einem Maschennetz (etwa aus Tüll) bespannt und dann mit einer ebenen Glasplatte bedeckt, welche an die Wasseroberfläche genau anschliesst, nun umdreht, das Gefäss recht fest aufstellt und nun die Glasplatte vorsichtig wegzieht.

Barometer und Manometer.

Allgemeines. Die Apparate zur Messung des Druckes der Luft und der Gase beruhen theils auf dem Princip der communicirenden Röhren, d. h. sie vergleichen den Gasdruck mit dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, theils auf der Elasticität fester Körper, d. h. sie messen den Gasdruck durch die elastische Deformation einer Fläche, welche einen Theil der Wandung des Gasvolumens bildet; jene sind einer weit grösseren Genauigkeit fähig und daher für wissen-

schaftliche Zwecke meist allein brauchbar; letztere finden in der Technik und in solchen Fällen Anwendung, in denen sich die Benutzung hydrostatischer Druckmesser aus äusseren Gründen verbietet. Der allgemeinere Begriff ist der des Manometers, ein Specialbegriff, auf die Messung des Druckes der Atmosphäre bezüglich, ist das Barometer. Dieser Name ist deshalb nicht glücklich gewählt, weil er eine falsche Auffassung zulässt oder gar nahelegt, die Auffassung nämlich, als ob das Barometer das Gewicht der auf ihm lastenden atmosphärischen Luftsäule messe. In Wahrheit misst es die Spannkraft derjenigen Luft, welche es unmittelbar umgiebt; und wenn diese Spannkraft auch, in Anbetracht der grossen Höhe der Atmosphäre, in erster Linie von dem Luftgewicht, das sie zu tragen hat, bedingt wird, so wirken doch auch zahlreiche andere Einflüsse, namentlich Bewegungsvorgänge mit, und sie können unter Umständen recht erheblich werden.

Leerer Raum. Die Erfindungsgeschichte des Barometers hat ein doppeltes Interesse, nämlich ein theoretisches, auf die allgemeine Naturanschauung bezügliches, und ein praktisches, insofern es sich um einen der wichtigsten Messapparate der Physik und Meteorologie dabei handelte. Bei der Herstellung des Barometers wurde nämlich zum ersten Mal ein luftleerer Raum erzeugt und damit eine der der Entwickelung der Physik schädlichsten metaphysischen Vorstellungen, der sog. *Horror vacui* beseitigt[1]. Wie tief eingewurzelt diese Vorstellung war, ergiebt sich am deutlichsten aus dem Verhalten Galilei's, also eines Mannes, der mit zahllosen Vorurtheilen seiner Zeit aufgeräumt hat. Dieser war Zeuge der Entstehung eines Vacuums in einem besonders tiefen Brunnen; aber er schloss daraus nur, dass der *Horror vacui* nicht unbegrenzt, sondern von bestimmtem Zahlenwerthe sei[2]; und der *Horror vacui* fiel erst, als sich zeigte, dass er, wenn er existirte, je nach dem Orte der Beobachtung, der Witterung u. s. w. einen verschiedenen Werth haben müsste, was doch selbst seinen zähesten Anhängern nicht mehr einleuchtete.

Luftdruck und Barometer. Der unbestrittene Entdecker des Luftdruckes und Erfinder des Barometers ist Torricelli; er hatte einerseits den glücklichen Gedanken, den vermeintlichen *Horror vacui*, statt durch eine Wassersäule, wie Galilei, durch eine andere Flüssigkeit, nämlich Quecksilber zu messen, und er erkannte andererseits, dass die Luft, da sie ein Gewicht habe (dies wusste schon Galilei), auch Druck ausüben müsse; und indem er jenen Versuch mit dieser Erkenntniss in Zusammenhang brachte, setzte er an die Stelle des *Horror vacui* den Luftdruck. Der Torricelli'sche Versuch, der übrigens zuerst nach seinen Angaben von seinem Schüler Viviani ausgeführt wurde[3], wird am besten in der Weise wiederholt, dass man nach einander eine meterlange und eine halb so lange, einerseits zugeschmolzene Glasröhre mit Quecksilber füllt, alle Luft sorgfältig entfernt, am offenen Ende mit dem Finger schliesst, mit diesem

[1] Auch heutzutage haben sich manche Physiker von derartigen metaphysischen Vorstellungen noch nicht zu befreien vermocht, und das jetzige allgemeine Urtheil über den *Horror vacui* ist eine Mahnung an alle die, welche z. B. die Gravitation als die Ursache gewisser Bewegungen auffassen, während sie doch nur ein sprachliches und anschauliches Hilfsmittel zur Darstellung jener Bewegungen ist.

[2] Galilei, Discorsi e Dimostrazioni matematiche. Leyden 1638. Deutsche Ausgabe v. A. v. Oettingen, in Ostwald's »Klassikern d. exakten Wissensch.«, No. 11, Lpz. 1890.

[3] Torricelli hat seine Entdeckung und Versuche nur in Briefen an Freunde mitgetheilt, die später in die Ausgabe seiner Werke aufgenommen worden sind.

Ende nach unten in ein Gefäss mit Quecksilber taucht und vertikal aufstellt. Nimmt man nun den Finger weg, so bietet die kurze Röhre keine weitere Erscheinung dar, sie bleibt mit Quecksilber gefüllt; dagegen sinkt in der längeren Röhre das Quecksilber herab, bis nur noch eine Säule von etwa 76 *cm* übrig bleibt; das somit über der Säule entstandene Vacuum heisst die TORRICELLI'sche Leere. Dass wirklich die vertikale Säulenhöhe das maasgebende ist, sieht man am einfachsten daran, dass, wenn man die lange Röhre neigt, das Niveau stets in derselben Höhe bleibt, sich also dem Ende der Röhre immer mehr nähert, bis die Flüssigkeit die Röhre schliesslich ganz erfüllt. Alle Aenderungen, welche der Luftdruck erfährt, geben sich durch Aenderungen in der Höhe der Quecksilbersäule zu erkennen, und damit ist das Barometer im Princip hergestellt. Zugleich ergiebt sich der mittlere absolute Betrag des Luftdruckes auf 1 *qcm* gleich dem Gewichte von 76 *ccm* Quecksilber, also

$$p_0 = 13{\cdot}596 \times 76 = 1033{\cdot}2983\, gr,$$

und allgemein beim Barometerstande b

$$p = 13{\cdot}596\; b.$$

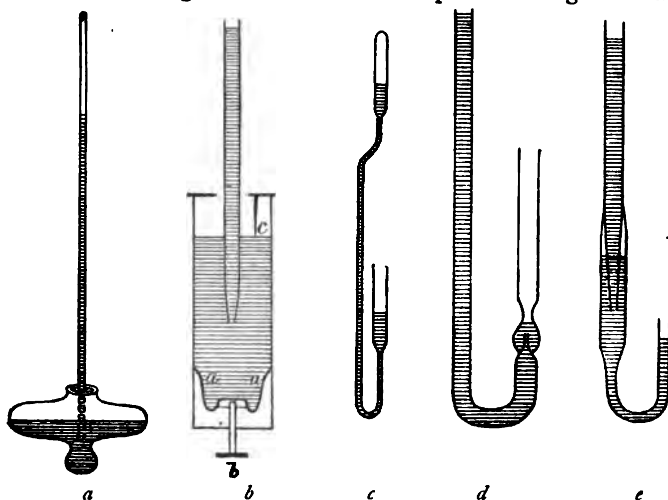
Man ist übereingekommen, den Druck von 76 *cm* Quecksilber als »eine Atmosphäre« zu bezeichnen und drückt häufig starke Drucke durch ihn als Einheit, also in Atmosphären, aus. Wenn hiernach die Luft, in der wir leben, auf unsere Körperoberfläche einen Druck von etwa 10000 *kgr* ausübt, so empfinden wir denselben doch nicht, weil er auch das Innere des Körpers durchdringt und seine Wirkungen dabei theils durch Vertheilung auf eine kolossale Oberfläche sich abschwächen, theils durch Erzeugung von Gegenwirkungen sich ausgleichen. Ueberhaupt verbreitet sich der Druck der Atmosphäre, fast ohne eine Aenderung zu erleiden, in alle nicht völlig luftdicht abgeschlossenen Räume, z. B. in die Zimmer, und es ist daher nahezu gleichgültig, wo man ein Barometer aufstellt (was beim Thermometer bekanntlich durchaus nicht der Fall ist).

Gefässbarometer. Diese Form hat sich unmittelbar aus dem TORRICELLIschen Apparate durch Einführung von für die Messung günstigen Verhältnissen entwickelt. Zunächst ist zu beachten, dass die Höhe der Quecksilbersäule vom Spiegel im Gefässe auszurechnen ist; soll dies ein constanter Nullpunkt sein, so muss man das Gefäss so weit wählen, dass das in die Röhre mehr eintretende oder in das Gefäss zurücktretende Quecksilber den Spiegel nicht merklich, nicht mehr als etwa um 0·05 *mm* verändere. Da sich nun die Schwankungen des Barometerstandes δb und des Gefässspiegels δS umgekehrt wie die Querschnitte, also umgekehrt wie die Durchmesserquadrate d^2 und D^2 verhalten, so bedarf es eines Gefässes vom Durchmesser

$$D = d\sqrt{\frac{\delta b}{0{\cdot}05}},$$

also, da δb nicht selten auf 40 *mm* ansteigt und d nicht unter 5 *mm* betragen soll, $D = 141$ *mm*. So grosse Gefässe sind schon für Standbarometer, die stets an demselben Orte aufgestellt werden, misslich, und man wird zum mindesten ein Gefäss wählen, das von der Mitte aus, wo der Spiegel sich befindet und wo es die obige Breite hat, nach oben und unten sich stark verjüngt (Fig. 197*a*). Zu Reisebarometern sind aber auch solche Gefässe des grossen Gewichtes und der leichten Zerbrechlichkeit halber unbrauchbar, und man muss dann auf andere Weise für Constanterhaltung des Spiegels sorgen. Hier ist namentlich das in der originalen Form wie in vielen Nachbildungen ausserordentlich verbreitete FORTINsche Barometer zu erwähnen, dessen Gefäss unten durch einen Beutel aus Leder

oder Kautschuk *a* abgeschlossen ist, sodass man mit Hilfe der Schraube *b* den Spiegel stets zur genauen Berührung mit der Elfenbeinspitze *c* bringen kann. (Fig. 197 *b*). Man könnte auch die Aenderungen im Gefässe messen, wird aber dabei in Anbetracht der Dimensionen, die das Gefäss immerhin haben muss, keine grosse Genauigkeit erzielen. Dagegen ist für gewöhnliche Barometer ein andrer Kunstgriff, die sogen. reducirte Skale, ganz wohl geeignet. Steigt z. B. das Quecksilber im Gefäss um $\frac{1}{10}$ seiner Senkung im Rohre, so ist die wahre Aenderung des Luftdrucks im Verhältniss $\frac{9}{10}$ kleiner als die am oberen Niveau abgelesene; und man braucht nur eine in demselben Verhältniss fehlerhafte Skale anzuwenden, um ohne jede Rechnung das wahre Resultat zu finden.



(Ph. 197.)

Heberbarometer.[1]) Für Zwecke genauer Messungen finden fast stets Heberbarometer Anwendung, deren Name sich lediglich auf die äussere, ungleichschenklig *U* förmige Gestalt der Röhre bezieht. Die Schwankungen des Quecksilberstandes sind hier in dem langen, geschlossenen und in dem kurzen, offenen Schenkel genau resp. nahezu die gleichen (je nachdem die Röhre genau kalibrisch ist oder nicht), und man wird die Berücksichtigung beider nicht umgehen können. Ist die Skale an dem Barometer fest angebracht, so muss man den unteren und den oberen Stand ablesen und ersteren von letzterem abziehen; zu diesem Zwecke muss also die Skale unterhalb des tiefsten Standes des unteren Spiegels beginnen und bis über den höchsten Stand des oberen Spiegels hinausreichen; um ferner die Ableitung leichter und sicherer zu machen, biegt man das lange Rohr derartig um (Fig. 197 *c*), dass beide Niveaus in dieselbe Verticale kommen und an derselben Skale abgelesen werden können. Bequemer ist es, wenn entweder das Rohr oder, was der grösseren Sicherheit halber und auch sonst vorzuziehen ist, die Skale, etwa mittelst Schraube und Zahnstange, verschiebbar ist; man stellt alsdann den Nullpunkt der Skale auf das untere Niveau ein und hat einfach das obere Niveau an der Skale abzulesen, deren Eintheilung hier erst bei etwa 700 *mm* anzufangen braucht, wenn nur der Abstand 0 bis 700 genau richtig ist. Natürlich erfolgt die Einstellung sowohl wie die Ablesung bei irgendwie feineren Apparaten mit Hilfe von Lupen oder mit Fadenkreuzen versehenen Mikroskopen und Nonien, sodass man mindestens zehntel, womöglich aber auch noch zwanzigstel *mm* mit Sicherheit erhält. Handelt es sich um Heberbarometer für die Reise, so sind wieder einige Vorsichts-

[1]) Während früher HOOKE, BORELLI, BOYLE u. s. w. als Erfinder dieser Barometerform angesehen zu werden pflegten, ist jetzt, namentlich durch GOVI (Rend. R. Acc. Nap. 25, pag. 286, 1886) nachgewiesen worden, dass auch diese schon von TORRICELLI (1644) ersonnen worden ist.

einrichtungen erforderlich. So muss die Oeffnung des kurzen Schenkels durch einen die Wirkung des Luftdruckes nicht beeinträchtigenden Pfropfen, etwa von Baumwolle, geschützt sein; noch besser aber ist es, wenn sie recht klein und überdies nicht oben, sondern an der Seite angebracht ist (Fig. 197 *d*), sodass man das Barometer gefahrlos neigen und selbst umkehren kann. Andere Vorrichtungen, wie die von GREINER (Fig. 197 *e*), erfüllen den Zweck, das Ausfliessen von Quecksilber zu verhindern, noch vollkommner und erschweren zugleich den Eintritt von Luft; wieder andre haben den Zweck, das Eindringen von Luft, die doch in den kurzen Schenkel getreten ist, in das Vacuum zu verhindern; bei der Einrichtung Fig. 197 *e* z. B., der sogen. BUNTEN'sche Spitze, wird die, etwa doch in den kurzen Schenkel eingedrungene Luft, die sich beim Aufsteigen in dem langen Schenkel fast stets an die Wand hält, und auch sonst durch die kleine Oeffnung der inneren Röhre nicht gut hindurchkann, in dem zwischen den beiden Röhren gelegenen todten Raum abgefangen. Sodann dient eine Reihe von Einrichtungen, z. B. an passenden Stellen angebrachte Einschnürungen der Röhren, dazu, das Anschlagen des Quecksilbers an die Röhre, wodurch dieselbe sehr leicht zerbrochen wird, zu verhindern; indessen ist es immer am besten, dies durch möglichste Vorsicht beim Transport, Schräghalten u. s. w. zu erreichen. Beim Schiffsbarometer endlich (zuerst von ADIE im Jahre 1853 construirt) ist der lange Schenkel nur oben, wo abgelesen wird, weit, im übrigen aber sehr eng, wodurch die fortwährenden Schwankungen des Niveaus (das sogen. Pumpen) vermieden, aber freilich auch bewirkt wird, dass dasselbe nur langsam den Aenderungen des Luftdrucks folgt; es muss eben in der Construction die richtige Mitte zwischen beiden Extremen gewahrt sein.

Gefässheberbarometer. Bei diesem, erst 1874 von WILD[1]) und FUESS construirten Apparate sind die Vorzüge beider Klassen von Barometern vereinigt und die Nachtheile beider vermieden. Die beiden Schenkel des Heberbarometers sind hier unten offen und reichen in ein Quecksilbergefäss mit beweglichem Lederboden; man hebt vor jeder Ablesung das Quecksilber in beiden Schenkeln ein wenig an und erreicht damit verschiedene Vortheile (s. u.).

Bedingungen für die Genauigkeit. Für alle diese Barometer im Allgemeinen ist noch zu bemerken, dass im Interesse der Richtigkeit und Genauigkeit der Angaben eine Reihe von Bedingungen erfüllt sein muss:

1) Die Röhre muss möglichst weit, jedenfalls aber nicht unter 5 und für feinere Instrumente nicht unter 15 *mm* Durchmesser sein (s. u.)

2) Das Quecksilber muss absolut rein sein, theils der sonst eintretenden Trübungen der Röhre halber, theils wegen der damit verbundenen Aenderungen des specifischen Gewichtes; genügt doch zur Erzeugung eines Fehlers von 0·1 *mm* im Barometerstande schon ein Fehler in der Dichte von 1/7600 ihres Werthes, also eine Dichte von 13·594 oder 13·598 statt der wahren 13·596. Man muss also entweder chemisch reines, aus rothem Oxyd bereitetes Quecksilber anwenden oder gewöhnliches Quecksilber nach den besten Reinigungsmethoden wiederholt behandeln, bis man genügender Reinheit sicher zu sein glaubt. Es sei hier nur kurz auf die Destillationsmethoden (z. B. die von L. WEBER, WRIGHT, WEINHOLD, BOSSCHA, NEBEL u. A.) hingewiesen[2]); weniger zeitraubend ist es, wenn man sich auf die wiederholte Behandlung mit verdünnter Salpetersäure und destillirtem Wasser, wiederholte Filtrirung und Trocknung durch Erwärmung beschränkt.

[1]) WILD, Rep. f. Meteor. 3, Heft 1. 1874.

[2]) NEBEL, Z. f. Instr. K. 1887, pag. 175; daselbst auch die übrige Literatur.

3) Die TORRICELLI'sche Leere darf auch keine Spuren von Luft oder Wasserdampf enthalten. Da nun selbst beim vorsichtigsten Einfüllen Luftbläschen in die Röhre eindringen, muss man die Röhre auskochen, was zwar die Gase, besonders bei öfterer Wiederholung, beseitigt, bei dem erforderlichen hohen Wärmegrade aber ziemlich gefährlich ist. Zur Verminderung dieser Gefahr sind mit gutem Erfolge verschiedene Modifikationen dieses Verfahrens vorgeschlagen worden und seither in Anwendung; z. B. giesst man das Quecksilber in mehreren Partieen nach und nach ein, indem man jedesmal das betreffende Röhrenstück vorsichtig auskocht; ferner kann man durch Verbindung der Röhre mit einer Luftpumpe und Auspumpen die erforderliche Siedetemperatur um 90° erniedrigen, u. s. w.[1]) Das Einzige, was in dem nach dem Sinken der Quecksilbersäule entstehenden Raume vorhanden sein, resp. sich bilden kann, sind Quecksilberdämpfe, deren Spannkraft aber bei gewöhnlichen Temperaturen unter 0·05 *mm* bleibt und somit nicht ins Gewicht fällt. Ob bei einem in Gebrauch befindlichen Barometer Luft im Vacuum sei oder nicht, kann man an den beim Neigen sich zeigenden Luftbläschen oder auch daran erkennen, dass das Quecksilber, wenn man es vorsichtig an die Röhre anschlagen lässt, in jenem Falle einen schwachen, weichen, in diesem einen kräftigen und harten Klang giebt; in ersterem Falle kann man die Luft durch festes Verschliessen des offenen Endes, Umkehren des Barometers und zweckentsprechendes Klopfen in Form von Bläschen mit einiger Mühe herausbringen. Andre Methoden, um sich über die Luftleere resp. die Spannung der Luft im TORRICELLI'schen Raum ein Urtheil zn verschaffen, sind die ARAGO'sche Hebungsmethode[2]) und die GRUNMACH'sche elektrische Methode,[3]) welche auf dem Gange der elektrischen Lichterscheinungen in verschieden stark luftverdünnten Räumen beruht.

4) Das Barometer muss genau vertikal stehen resp. hängen, da schon sehr kleine Neigungen den vertikalen Abstand der beiden Spiegel um einen Betrag ändern, welcher gegenüber den überhaupt vorkommenden Schwankungen des Barometerstandes in Betracht kommt. Ist nämlich der Neigungswinkel φ, so ist der wahre Barometerstand b im Vergleich zum abgelesenen b' im Verhältniss von $b = b' \cos\varphi$ kleiner, was bei $\varphi = 1°$ und einem mittleren Barometerstande schon einen Fehler von mehr als 0·1 *mm* bedingt; man muss also das Barometer mit einer genauen Lothvorrichtung versehen oder, wenn es ein für allemal fest aufgestellt werden soll, nicht nur oben, sondern auch unten, und zwar in richtiger Lage, mit der Wand u. s. w. verbinden; am besten aber ist es, insbesondere für Barometer, die man immer wieder neu aufzustellen hat, sie ganz frei, etwa in cardanischer Aufhängung herabhängen zu lassen, was in freie Natur am besten mittelst eines oben einen Ring bildenden, dreifüssigen Stativs geschehen kann.

5) Vor jeder Beobachtung ist das Quecksilber des Barometers zur Ueberwindung etwaiger Trägheits- und anderer Einflüsse (s. auch w. u.) ein wenig aus dem Gleichgewichtszustande zu bringen; es kann dies entweder bei unveränderter Lage des Barometers selbst geschehen mittelst Vorrichtungen zur Bewegung der Kuppe, wie sie an manchen Barometern angebracht sind, (»anheben«, s. ob.), eventuell auch durch leichtes Klopfen; oder aber das Barometer wird für gewöhn-

---

1) S. auch KLOBUKOW, Meteor. Z. 1884, pag. 289.

2) S. z. B. Z. f. Instr. K. 1886, pag. 380 und 392, oder SCHREIBER, Hdb. d. barom. Höhenmessungen, Weimar 1877, pag. 82.

3) GRUNMACH, WIED. Ann. 21, pag. 698. 1884.

lich schräg gestellt oder gehängt und erst vor der Ablesung vorsichtig in die vertikale Stellung gebracht; bei Standbarometern wird dies dadurch bewerkstelligt, dass das Barometer oben drehbar befestigt ist und unten je nach Wunsch in die eine oder die andere von zwei Wandschrauben eingeschraubt werden kann. Durch diese Behandlung vermeidet man gleichzeitig, dass in dem Theil der Skale, welcher den häufig vorkommenden Luftdrucken entspricht, also etwa zwischen 740 und 780 *mm*, in Folge des ununterbrochenen Anhaftens von Quecksilber bis zu bestimmten Stellen sich Trübungen des Glases herausstellen und die Ablesung erschweren.

6) Die Ablesung muss recht genau und namentlich ohne parallaktischen Fehler erfolgen; auch hierzu sind verschiedene erleichternde Einrichtungen, z. B. die sogen. Contactablesung, die Spiegelungsmethode von PERNET und THIESEN[1]) u. s. w. angegeben worden. Da ferner das Quecksilber einen Meniskus, d. h. eine gewölbte Kuppe bildet (im offenen Schenkel eine stark, im geschlossenen eine schwach gewölbte), so muss man genau darauf achten, den Meniskus abzulesen, d. h. den Nonius resp. den Contakt auf ihn einzustellen.

7) Die Skale muss durch Vergleichung mit einem Normalmaasstab als genau richtig erkannt sein, eventuell ist eine Correctionstafel anzulegen[2]). Die Eintheilung der Skale und des Nonius ist leider noch immer keine einheitliche, und es sei daher hier eine kurze Tabelle zur Vergleichung der drei üblichsten Maasse: Millimeter, engl. Zoll, pariser Linien eingeschaltet.

E. Z.	*mm*	E. Z.	*mm*	E. Z.	*mm*	E. Z.	*mm*
27·6	701·03	28·6	726·42	29·6	751·83	30·6	777·23
27·8	706·11	28·8	731·50	29·8	756·91	30·8	782·31
28·0	711·18	29·0	736·58	30·0	762·00	31·0	787·40
28·2	716·26	29·2	741·67	30·2	767·07	31·2	792·48
28·4	721·34	29·4	746·75	30·4	772·15	31·4	797·56

E. Z.	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05	0·06	0·07	0·08	0·09
mm	0·25	0·50	0·76	1·01	1·27	1·52	1·77	2·03	2·28

Pariser	*mm*	Pariser	*mm*	Pariser	*mm*
26″ 0‴	703·84	27″ 0‴	730·90	28″ 0‴	757·96
2	708·35	2	735·40	2	762·47
4	712·86	4	739·91	4	766·98
6	717·37	6	744·42	6	771·49
8	721·88	8	748·94	8	776·01
10	726·39	10	753·45	10	780·52

Par. Lin.	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
mm	0·23	0·45	0·68	0·90	1·13	1·35	1·58	1·80	2·03

Endlich lässt die folgende Tabelle erkennen, wie gross in *kgr* auf 1 *qm* der Druck der Luft bei verschiedenen Barometerständen ist.

---

1) PERNET, Trav. et Mém. Bur. int. Poids et Mes. Bd. 5. 1886. — THIESEN, Z. f. Instr. K. 1886, pag. 89. — MAREK, Rep. d. Phys. 16, pag. 585, 1880. — BOGUSKI u. NATANSON, WIED. Ann. 36, pag. 761. 1889. — KAYSER, Z. f. Instr. K. 1882, pag. 289.

2) SCHREIBER, a. a. O., pag. 72.

mm	kgr	mm	kgr	mm	kgr	mm	kgr
500	6798	580	7886	660	8974	740	10062
520	7070	600	8158	680	9245	760	10333
540	7342	620	8429	700	9517	780	10605
560	7614	640	8702	720	9789	800	10877

Correktionen. Auch wenn ein Barometer in jedem der betrachteten Punkte exakt construirt ist und exakt benutzt wird, sind die Angaben, welche es in verschiedenen Fällen macht, resp. die Angaben, welche verschiedene derartige Barometer machen, im allgemeinen noch nicht unmittelbar mit einander vergleichbar. Es müssen vielmehr folgende Correktionen resp. Reduktionen vorgenommen werden:

1) Wegen der thermischen Ausdehnung des Quecksilbers; das Volumen des Quecksilbers bei der Temperatur t lässt sich näherungsweise durch die Formel $v = v_0(1 + \beta t)$ darstellen, wo $\beta = 0{\cdot}000181$ ist; und diese Ausdehnung kommt, da das Quecksilber in eine Röhre eingeschlossen ist, fast ausschliesslich der Höhe der Säule zu gute. Die thermische Erweiterung der Röhre selbst kommt hier offenbar nicht in Betracht.

2) Wegen der thermischen Ausdehnung der Skale. Hier handelt es sich um die Längsdimension als Funktion der Temperatur, man hat also $l = l_0\ (1 + \gamma t)$, und hierin ist der lineare Ausdehnungscoëfficient:

für Messing	für Glas	für Platin
$\gamma = 0{\cdot}000019$	$\gamma = 0{\cdot}000009$	$\gamma = 0{\cdot}000009$.

Beide Correktionen zusammengefasst ergeben die Reduktion des Barometerstandes auf 0° nach der Formel (b' beobachtet, b reduzirt auf 0°):

$$b = b' \frac{1 + \gamma t}{1 + \beta t},$$

oder näherungsweise, da β und γ sehr klein sind:

$$b = b'[1 - (\beta - \gamma)t].$$

Kennt man die Temperatur von Quecksilber und Skale, so kann man hiernach b berechnen. Zu diesem Zwecke befindet sich an dem Barometer ein Thermometer (zuweilen auch deren zwei, je eines für Quecksilber und Skale, wobei dann in der ersten der obigen Formeln möglicher Weise t im Zähler und Nenner etwas verschiedene Werthe haben kann), und man liest gleichzeitig mit dem Barometerstande die Temperatur ab. Zur Erleichterung der Berechnung dienen dann folgende Tabellen, welche die für t^0 und den Stand b' abzuziehende resp. für Temperaturen unter 0° hinzuzufügende Correktion enthalten:

a) Für Messingskale.

	$t = 1°$	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°
$b' = 700$	0·11	0·23	0·34	0·45	0·57	0·68	0·79	0·90	1·02	1·13	1·24	1·36	1·47	1·58	1·70
710	0·11	0·23	0·34	0·46	0·57	0·69	0·80	0·92	1·03	1·15					
720	0·12	0·23	0·35	0·47	0·58	0·70	0·81	0·93	1·05	1·16	1·27	1·39	1·51	1·63	1·74
730	0·12	0·24	0·35	0·47	0·59	0·71	0·83	0·94	1·06	1·18					
740	0·12	0·24	0·36	0·48	0·60	0·72	0·84	0·96	1·08	1·19	1·31	1·43	1·55	1·67	1·79
750	0·12	0·24	0·36	0·48	0·61	0·73	0·85	0·97	1·09	1·21					
760	0·12	0·25	0·37	0·49	0·61	0·74	0·86	0·98	1·10	1·23	1·35	1·48	1·60	1·72	1·84
770	0·12	0·25	0·37	0·50	0·62	0·75	0·87	0·99	1·12	1·24					
780	0·13	0·25	0·38	0·50	0·63	0·76	0·88	1·01	1·13	1·26	1·39	1·51	1·64	1·76	1·89
790	0·13	0·26	0·38	0·51	0·64	0·77	0·89	1·02	1·15	1·28					
800	0·13	0·26	0·39	0·51	0·64	0·77	0·90	1·03	1·16	1·29	1·43	1·55	1·68	1·80	1·93

	t = 16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°
b' = 700	1·81	1·93	2·04	2·15	2·27	2·38	2·49	2·60	2·72	2·83	2·94	3·06	3·17	3·28	3·40
720	1·86	1·98	2·09	2·21	2·33	2·44	2·56	2·67	2·79	2·90	3·02	3·14	3·25	3·37	3·49
740	1·91	2·03	2·15	2·27	2·39	2·51	2·63	2·75	2·87	2·98	3·10	3·22	3·34	3·46	3·58
760	1·96	2·09	2·21	2·33	2·45	2·58	2·70	2·82	2·94	3·07	3·19	3·31	3·44	3·56	3·68
780	2·02	2·14	2·27	2·39	2·51	2·64	2·77	2·90	3·02	3·15	3·28	3·40	3·53	3·65	3·78
800	2·07	2·19	2·32	2·44	2·57	2·70	2·83	2·97	3·09	3·22	3·36	3·48	3·62	3·74	3·87

b) Für Glasskale.

	t = 1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
b' = 700	0·12	0·24	0·36	0·48	0·60	0·72	0·84	0·96	1·08	1·20
720	0·12	0·25	0·37	0·49	0·62	0·74	0·86	0·99	1·11	1·23
740	0·13	0·25	0·38	0·51	0·63	0·76	0·89	1·01	1·14	1·27
760	0·13	0·26	0·39	0·52	0·65	0·78	0·91	1·04	1·17	1·30
780	0·13	0·27	0·40	0·53	0·67	0·80	0·93	1·07	1·20	1·33
800	0·14	0·27	0·41	0·55	0·68	0·82	0·96	1·10	1·23	1·37

(Die Correction ist immer um 6 % grösser als bei Messingskale.)

3) Wegen der capillaren Depression. In Folge seiner, die Adhäsion an das Glas überwiegenden Cohäsion (s. Art. Capillarität) steht das Quecksilber in den Schenkeln des Barometers zu niedrig, und zwar in desto stärkerem Grade, je enger die Röhren sind. Bei einem Gefässbarometer ist hiernach die Depression im Gefäss so gut wie null, die im Rohre mehr oder weniger beträchtlich, und folglich die beobachtete Barometerhöhe zu klein. Selbst bei einem Heberbarometer, dessen beide Schenkel gleich weit sind, sind doch die Depressionen nicht gleich, weil die eine Kuppe sich im lufterfüllten, die andere sich im luftleeren Raume befindet, und weil hierdurch die Depression in einer noch sehr unsicher bekannten Weise beeinflusst wird. Für einen Randwinkel von 36° z. B. sind nach BRAVAIS[1]) folgende Grössen zum beobachteten Stande hinzuzufügen:

Röhrenweite .	4	6	8	10	12	14	16	18	20 *mm*
Correction . .	1·64	0·91	0·54	0·32	0·19	0·12	0·07	0·04	0·03 *mm*;

für andere Randwinkel werden die Zahlen abweichende. Andere, z. B. SCHLEIERMACHER, POHL und SCHABUS[2]) u. s. w. haben die Depression als Funktion der Kuppenhöhe k und der Röhrenweite d dargestellt, wobei sich u. A. folgende Zusatzgrössen ergeben:

	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6
d = 4	0·60	0·89	1·16	1·41	1·65	1·86	2·05	2·21	2·35	—	—	—	—	—	—
6	0·24	0·36	0·48	0·59	0·70	0·80	0·90	0·99	1·07	1·14	1·21	1·27	1·32	1·37	—
8	0·12	0·18	0·24	0·30	0·35	0·40	0·46	0·50	0·55	0·59	0·64	0·67	0·71	0·74	0·77
10	0·07	0·10	0·13	0·16	0·19	0·20	0·25	0·28	0·31	0·33	0·35	0·38	0·40	0·42	0·44
12	0·04	0·06	0·07	0·09	0·11	0·13	0·14	0·16	0·18	0·19	0·21	0·22	0·23	0·24	0·25
16	0·01	0·02	0·02	0·03	0·04	0·04	0·05	0·05	0·06	0·06	0·07	0·07	0·08	0·08	0·09

[1]) BRAVAIS, Ann. Chim. Phys. (3) Bd. 5.

[2]) POHL u. SCHABUS, Wien. Ber. 9, pag. 834. 1852. — DELCROS, POGG. Ann. 60, pag. 377. 1843.

Zu der Unsicherheit dieser Bestimmungen kommt offenbar noch die Mühseligkeit und Unsicherheit der jedes Mal auszuführenden Messungen der lichten Röhrenweite und des Randwinkels resp. der Kuppenhöhe; für erstere haben kürzlich MACÉ DE LÉPINAY und JORDAN[1]) eine einfache optische Methode angegeben; über letztere sehe man im Art. Capillarität[2]). Jedenfalls sieht man ein, dass man am besten thut, dem Barometerrohr eine solche Weite zu geben, dass die Capillarcorrektion vernachlässigt werden darf; zu diesem Zwecke muss bei ganz feinen Standbarometern die Weite mindestens 20 *mm*, bei besseren Reisebarometern wenigstens nicht unter 15 *mm* betragen; ausserdem ist es wesentlich, durch »Anheben« der Niveaus (s. ob.) resp. Klopfen für die reine Ausbildung der Kuppen zu sorgen.

4) Wegen der Schwereänderung mit der Höhe. Beim Transport eines Barometers an einen anderen Ort bleibt die Höhe der Quecksilbersäule deshalb nicht ein constantes Maass des Luftdruckes, weil sich die Schwere, also ihr Gewicht ändert, sobald der neue Ort eine andere Höhe über dem Meeresspiegel hat (s. Art. Gravitation, pag. 199). Der Einfluss der Höhe hat, wie dort gezeigt wurde, zwei verschiedene Grenzwerthe, je nachdem man sich in freier Luft, z. B. im Luftballon oder auf der Spitze eines Thurmes, oder aber auf einer Hochebene befindet; und demgemäss hat in der entsprechenden Barometercorrektion

$$b = b'(1 - \varepsilon h)$$

die Grösse ε einen zwischen den beiden Grenzwerthen 0·000000314 und 0·000000196 gelegenen, nach den jedesmaligen Verhältnissen abzuschätzenden Werth. Für die höchsten, im Luftballon erreichten Höhen ($h = 10000$ *m*) beträgt dieser Abzug immerhin $b'\varepsilon h = 2{\cdot}3$ *mm*, und schon für mässige Berghöhen beläuft er sich auf viertel bis halbe Millimeter[3]).

5) Wegen der Schwereänderung mit der geographischen Breite. Analog wird die Correktion wegen der geographischen Breite φ (pag. 202):

$$b = b'(1 - 0{\cdot}026 \cos 2\varphi),$$

also für $b' = 700, 760, 800$ (für $\varphi > 45°$ gilt das positive, für $\varphi < 45°$ das negative Zeichen):

$\varphi =$		0°	12°	18°	24°	30°	36°	42°	45°
700	∓	1·82	1·66	1·48	1 22	0·91	0·56	0·18	0·00 *mm*
760	∓	1·97	1·80	1·59	1·31	0·98	0·61	0·21	0·00 *mm*
800	∓	2·08	1·89	1·68	1·39	1·04	0·64	0·23	0·00 *mm*
$\varphi =$		90°	78°	72°	66°	60°	54°	48°	45°

wo die Breite von 45° als Norm zu Grunde gelegt ist. Von zwei Beobachtungen, die am Aequator und in der Nähe des Poles gemacht sind, muss also die eine um fast 4 *mm* corrigirt werden, um mit der anderen vergleichbar zu werden.

6) Reduktion auf den Meeresspiegel. Mit der in 4) besprochenen Reduktion ist selbstverständlich eine andere nicht zu verwechseln, welche für meteorologische Vergleiche oft ausgeführt wird und den Zweck hat anzugeben, wie gross zur Zeit der Beobachtung der Luftdruck an dem Beobachtungsorte wäre, wenn dieser im Meeresspiegel läge (s. auch w. u.).

---

1) MACÉ DE LÉPINAY, J. de Phys. (2) 4, pag. 35. 1886. JORDAN, Centr. Z. f. Opt. u. Mech. 1888, pag. 91.

2) S. auch PERNET, Z. f. Instr. K. 1886, pag. 377.

3) MASCART (Compt. R. 95, pag. 126. 1883) hat diese Beziehung benutzt, um mit Hilfe eines Barometers mit geschlossenem, mit Gas gefülltem kurzem Schenkel die Veränderung der Intensität der Schwere mit der Höhe zu messen.

7) Reduktion auf trockene Luft. Ebenfalls für meteorologische Zwecke kommt es häufig darauf an, den Druck der trockenen Luft anzugeben, zu welchem Zwecke man den (anderweitig bestimmten) Druck des Wasserdampfes vom Gesammtdruck abzuziehen hat.

Verschiedene Formen der Quecksilberbarometer. Ein in jeder Beziehung den obigen Anforderungen entsprechendes und in Bezug auf die genannten Correktionen untersuchtes Instrument heisst Normalbarometer, und zu genauen Messungen ist es erforderlich, entweder ein solches, oder aber ein Barometer zu benutzen, für welches man sich durch Vergleichung mit einem Normalbarometer eine Tabelle der Abweichungen von den Angaben des letzteren verschafft hat. Zu den vorzüglichsten Normalbarometern gehören die nach den Angaben von WILD (s. ob. Gefässheberbarometer), PERNET und THIESEN [1]), KÖPPEN, WIEBE [2]), KAYSER u. A. von FUESS, GREINER und andern Mechanikern construirten; diese Apparate sind in Folge der Weite der Gefässe, der Verbindung mit Kathetometern u. s. w. natürlich sehr umfangreich und schwer. Im übrigen giebt es eine grosse Zahl von Barometern in bestimmten Formen und zu bestimmten Zwecken; so ausser den schon genannten das Flaschen-, Birn- oder Kapselbarometer, das Kewbarometer, das Heberbarometer von DIAKONOFF [3]), das Barometer von KRAJEWITSCH [4]) mit doppeltem Vacuum und zwischengeschaltetem Quecksilbergefäss, das STOLZE'sche Reisebarometer u. s. w. Befestigt ist das Rohr entweder auf einem Holzbrett (für heisse Gegenden ungeeignet), oder besser, es ist in einen Holzkasten oder eine Metallröhre vollständig eingelassen, und nur die Stellen, an denen einzustellen resp. abzulesen ist, sind sichtbar. Eine besondere Klasse bilden die Zeigerbarometer. Da nämlich die Aenderungen des Standes im Quecksilberbarometer nur klein sind, hat man sich vielfach bemüht, sie durch mechanische Uebertragung auf einen Zeiger und ein Zifferblatt, das durch Vergleichung mit einem anderen Barometer graduirt worden ist, deutlicher sichtbar zu machen. Am einfachsten erreicht man dies mittelst eines Schwimmers, welcher auf den Spiegel im offenen Schenkel gesetzt wird, und die Uebertragung kann entweder durch einen um die Welle des Zeigers geschlungenen Faden (HOOKE'sches Radbarometer) oder mittelst Zahnstange und Zahnrad (JECKER) erfolgen; der Zeiger muss aber sehr genau balancirt sein, und auch dann ist selbstredend keine grosse Genauigkeit zu erzielen, so dass selbst für Demonstrationszwecke die optische Projektion der Quecksilberkuppe vorzuziehen sein dürfte. Auch eine andere Idee, die zuletzt jedenfalls relativ am vollkommensten von GREINER [5]) in seinem »Diagonalbarometer« ausgeführt worden ist, nämlich die Schräg-, resp. fast Horizontalstellung des obersten Theiles der Barometerröhre, wodurch allerdings die Aenderungen des Niveaus stark vergrössert werden, scheint sich nicht sonderlich bewährt zu haben. Dasselbe gilt von den Barometern mit zickzackförmigem oder spiralförmigem Röhrenende.

Barometer mit anderen Flüssigkeiten. Schon in Erinnerung an die Vorgeschichte des TORRICELLI'schen Versuches liegt es nahe, nach dem Princip des Quecksilberbarometers auch Wasserbarometer zu construiren, und in der That ist dies vielfach, z. B. im Jahre 1830 von DANIELL geschehen. Natürlich muss ein solches Barometer, da es höher als 10 *m* ist, in fester Verbindung mit

[1]) FUESS, Z. f. Instr. K. 1881, pag. 2.
[2]) WIEBE, Metronom. Beitr. d. Kais. Norm. Aich. Comm. 1885, Nr. 4.
[3]) DIAKONOFF, J. de Phys. (2) 3, pag. 27. 1884.
[4]) KRAJEWITSCH, Rep. der Phys. 23, pag. 339. 1887.
[5]) GREINER, Z. f. Instr. K. 1888, pag. 253.

einer Baulichkeit aufgestellt werden, z. B. vom Keller durch die Mauer in ein höheres Stockwerk geführt werden. Dafür erhält man aber den Vortheil, dass schon kleinen Luftdruckänderungen, resp. kleinen Aenderungen der Quecksilberhöhe grosse Aenderungen der Wasserhöhe entsprechen, z. B.

mm Quecksilber . .	0·05	0·20	1·00	5·00	20·00	100·00	760·00
mm Wasser	0·68	2·72	13·60	67·98	271·92	1359·60	10332·96

Man könnte also mit blossem Auge den stündlichen Gang des Barometerstandes sehr deutlich verfolgen. Leider wird die Genauigkeit sehr beeinträchtigt durch den Umstand, dass über dem Wasser sich Wasserdämpfe bilden, und dass, selbst wenn man die Skale hiernach für eine bestimmte Temperatur corrigirt, sie doch, in Anbetracht der starken Veränderlichkeit der Spannkraft der Wasserdämpfe mit der Temperatur, für alle anderen Temperaturen unrichtig bleiben würde. Diese Spannkraft beträgt nämlich:

	bei $t = 0°$	4°	8°	12°	16°	20°	24°	28°
mm Quecksilber . . .	4·60	6·10	8·02	10·46	13·54	17·39	22·18	28·19
mm Wasser	62·4	82·6	110	142	184	236	301	381

Die durch die gewöhnlichen Schwankungen der Temperatur bewirkte Druckänderung des Wasserdampfes wird daher Schwankungen des Wasserspiegels verursachen, welche die durch die Aenderungen des Luftdruckes verursachten Schwankungen desselben grossentheils, unter Umständen sogar völlig verdecken würden. Man müsste also, was zeitraubend und unsicher wäre, die Temperatur jedesmal beobachten und danach die Correktion berechnen. Von diesem Uebelstande fast frei ist das von JORDAN[1]) construirte Glycerinbarometer. Der Siedepunkt des Glycerins liegt sehr hoch und seine Dampfspannung ist daher bei gewöhnlichen Temperaturen sehr gering, und ihre Aenderung mit der Temperatur tritt daher ebenso wie die thermische Ausdehnung des Glycerins als verhältnissmässig unbedeutende Correktion auf. Die Dichte des Glycerins ist 1·26, die mittlere Höhe des Barometerstandes wird also 8·2 *m*, und die Schwankungen des Niveaus fast die 11 fachen wie beim Quecksilberbarometer. Auf den Spiegel im offenen Gefäss muss man, um die Absorption von Wasserdampf aus der Luft zu verhindern, etwas Steinöl giessen, das Glycerin färbt man der besseren Sichtbarkeit halber mit Anilin roth. Im übrigen sehe man über dieses Barometer, welches bereits vielfach fungirt, an der citirten Stelle.

Auch Barometer mit combinirten Flüssigkeiten hat man construirt, um die Empfindlichkeit von Barometern mit leichten Flüssigkeiten mit der Handlichkeit von Quecksilberbarometern zu vereinigen. Hierher gehört z. B. ein schon von HUYGENS[2]) construirtes Barometer. Der lange Schenkel erweitert sich oben zu einem Gefäss, das etwa zur Hälfte noch mit Queckilber gefüllt, zur Hälfte aber luftleer ist. Ebenso erweitert sich der kurze Schenkel zu einem, in eine enge Röhre auslaufenden Gefäss, die obere Hälfte des Gefässes und ein Theil der Röhre ist mit einer leichten, gefärbten Flüssigkeit gefüllt, deren Niveau man an einer empirisch producirten Skale ablesen kann. Ist die Ansatzröhre von n-mal so kleinem Querschnitt wie die beiden Gefässe und die Flüssigkeit s-mal so leicht wie Quecksilber, so steigt, wenn ein gewöhnliches Barometer um b fällt, das HUYGENS'sche um

[1]) JORDAN, Z. d. Oest. Ges. f. Meteror. 1881, pag. 25.
[2]) HUYGENS, Journal des Savants 1672, pag. 139.

$$B = \frac{sn}{2s + n - 1} b;$$

man erhält also leicht 5 bis 10fache Vergrösserungen. Bei dem STEINHAUSER-schen[1]) Barometer ragt in das Vacuum eines Quecksilberbarometers eine Spitze, und in einer an den kurzen Schenkel angesetzten weiten Röhre regulirt man den Stand eingefüllten Wassers derart, dass das Quecksilber oben die Spitze gerade berührt; aus den Aenderungen der Wasserhöhe kann man diejenigen des Luftdruckes berechnen. Auch das Barometer von O. BRAUN[2]) gehört in diese Klasse.

Aneroidbarometer. Man fasst unter diesem Namen alle Barometer zusammen, bei welchen der Luftdruck durch Vergleichung mit der Elasticität fester Körper, insbesondere dünner Platten, gemessen wird. Die meisten dieser Instrumente, wie sie zum Gebrauch im täglichen Leben weit verbreitet sind, können auf Genauigkeit keinen Anspruch machen, und zwar hauptsächlich aus drei Gründen, nämlich 1) weil die elastischen Deformationen fester Körper sich zeitlich in sehr verwickelter und schwer controllirbarer Weise abspielen, d. h. der Gang der elastischen Nachwirkung (s. ob. pag. 321) bei ihnen noch sehr wenig bekannt ist; neuerdings liegt hierüber freilich eine sehr eingehende Untersuchung von REINHERTZ vor[3]); 2) weil der thermische Einfluss sich nicht exakt angeben lässt, und 3) weil die mechanische Ausführung des Principes in Folge von Reibung u. s. w. Fehler bedingt. Derartige Barometer müssen daher möglichst oft mit Quecksilberbarometern verglichen werden, und zwar nicht bloss hinsichtlich des Standes, sondern auch hinsichtlich des Ganges[4]). Die wichtigsten Formen sind folgende. Das VIDI'sche Feder-, Dosen- oder Holosteric-Barometer (1847) besteht aus einer luftleeren Metalldose, deren vordere, dünne, wellig gebogene Wand vom Luftdruck mehr oder weniger stark nach innen gewölbt wird, und die Grösse dieser Einbiegung wird mittelst Fühlhebelübertragung an einem Zeiger und einem empirisch graduirten Zifferblatt abgelesen. Bei dem BOURDON'schen Metallbarometer (1854) (Fig. 198*a*) wirkt der Luftdruck auf die gekrümmte, bei *f* befestigte, fast luftleere Röhre *aa'*, krümmt sie mehr oder weniger zusammen, und die dadurch hervorgerufene Drehung des Hebels *c* überträgt sich mittelst des Zahnbogens *d* und des Getriebes *e* auf den Zeiger *z*, sodass dieser bei stärkerem Luftdruck mehr rechts, bei schwächerem mehr links auf der ebenfalls empirisch graduirten Theilung *s* sich einstellt.

Das BLACKWELL'sche Aneroid besteht aus einer eigenthümlichen Combination luftleerer Gefässe mit Spiralfedern, und es scheint, dass die Zuverlässigkeit hierdurch wesentlich erhöht wird.

Das LAMBRECHT'sche Aneroid hat statt der metallenen Glaskapseln und statt der Gegendruckfedern Zuggewichte; zur Beobachtung geringer Luftdruckschwankungen lässt es sich mit einer Vorrichtung zur Uebertragung der Bewegungen auf einen drehbaren Spiegel versehen.

Zu den brauchbarsten und relativ genauesten, übrigens für die Reise äusserst handlichen Apparaten gehört aber jedenfalls das Aneroid von GOLDSCHMID

---

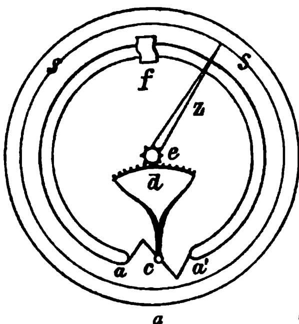
[1]) STEINHAUSER, Rep. d. Phys. 23, pag. 277. 1887.

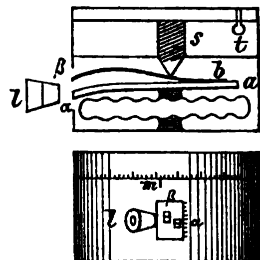
[2]) O. BRAUN, Z. f. Instr. K. 1883, pag. 151.

[3]) REINHERTZ, Z. f. Instr. K. 1887, pag. 153, daselbst weitere Literatur.

[4]) Näheres über die Theorie der Aneroidbarometer s. u. a. bei SCHREIBER, a. a. O., pag. 111. Methoden u. Apparate zur Prüfung von Aneroiden sind vielfach angegeben worden, z. B. von FUESS, Z. f. Instr. K. 1885, pag. 297 u. SCHREIBER, ebd. 1886, pag. 121.

(in Fig. 198 *b* in innerer und äusserer Ansicht skizzirt), bei welchem jede Hebelübertragung vermieden und statt dessen die Empfindlichkeit mittelst Mikrometerschraube und Lupe erzielt wird. *d* ist die Dose, *a* ein mit dem nachgiebigen Deckel derselben fest verbundenes Stäbchen mit der Spitze α, deren Einstellung auf einer kleinen Skale mit der Lupe *l* abgelesen wird; hierdurch erhält man den Luftdruck in runder Zahl, etwa auf 50 *mm*. Dreht man nun die feine





(Ph. 198.)

Schraube *s* so lange, bis die Spitze β der Feder *b* sich neben α auf denselben Theilstrich einstellt, so erhält man in dem Stande der Marke *m* auf der Kreistheilung *k* die Millimeter nnd Bruchtheile; eine beigegebene Tabelle gestattet nach Ablesung des Thermometers *t* die Temperaturcorrektion zu berücksichtigen. Neben dem Goldschmid'schen Barometer erfreuen sich namentlich diejenigen von Naudet, Reitz und Weilenmann (die sich mehr oder weniger nur in den Einzelheiten von einander unterscheiden) grosser Anerkennung und Verbreitung[1]).

Indirekte Messung des Luftdruckes. Da der Luftdruck auf zahlreiche Erscheinungen von mehr oder minder beträchtlichem Einflusse ist, so kann man durch messende Beobachtung jeder dieser Erscheinungen im Princip auch den Luftdruck messen. Von diesem Gedanken ist namentlich hinsichtlich gewisser thermischer Erscheinungen Gebrauch gemacht worden. Hierhin gehört das Siedepunkt-Barometer[2]), ein Thermometer, dessen Skale nur etwa von 80°—105° reicht, in diesem Intervall aber sehr lang und folglich empfindlich ist, sodass es den Siedepunkt des Wassers sehr genau und folglich (s. Wärmelehre) den Luftdruck einigermaassen genau ergiebt; die Bestimmung ist aber natürlich ziemlich zeitraubend. Bei einem anderen Thermo-Barometer wird aus dem Unterschied in den Angaben eines Quecksilberthermometers und eines eigenthümlichen Luftthermometers auf den herrschenden Luftdruck geschlossen. Als Beispiel eines indireckt mechanischen Verfahrens seien schliesslich das Differentialbarometer von Kopp[3]) und das Umkehrbarometer von Blakesley[4]) erwähnt.

Barographen[5]). Der Gedanke, die Aenderungen des Luftdruckes zu registriren, d. h. durch Apparate selbstthätig aufzeichnen zu lassen, ist jedenfalls

[1]) Vergleichungen der Güte dieser Instrumente s. Z. f. Instr. K. 1881, pag. 377, eine Correctionstabelle für das Naudet'sche ebd. 1886, pag. 69; eine Untersuchung der Genauigkeit des Reitz'schen ebd. 1887, pag. 98.

[2]) S. z. B. Schreiber, Hdb. d. bar. Höh., pag. 94.

[3]) Kopp, Pogg. Ann. 40, pag. 62. 1836. Es beruht auf der Vergleichung des Volumens und Drucks einer abgeschlossenen Luftmenge in gewöhnlichem und comprimirtem Zustande.

[4]) Blakesley, Phil. Mag. (5) 26, pag. 458. 1888.

[5]) Die Literatur findet man grossentheils in den letzten zehn Jahrgängen der Meteor. Zeitschr. und der Zeitschr. f. Instr. K. Insbesondere: Sprung, Met. Z. 1881, pag. 1. — Schreiber, ebd. pag. 497 und Z. f. Instr. K. 1881, pag. 257, 288, 333. Daselbst auch Citate der älteren Aufsätze des Verf. — Sprung, Z. f. Instr. K. 1886, pag. 189. — Eylert, ebd. pag. 269. — Sprung, ebd. pag. 419. — Sprung, Lehrb. d. Meteorologie, Hamburg 1885, pag. 393. — Fuess, Z. f. Instr. K. 1883, pag. 194. — Dufour, Met. Z. 1882, pag. 294. — Odin, Z. f. Instr. 1886, pag. 213. — Rung, Meteor. Z. 1884, pag. 34. — Rikli, Z. f. Instr. 1883, pag. 79.

schon sehr alt, denn schon vor mehr als hundert Jahren sind solche Apparate thatsächlich construirt worden. Hier muss es genügen, eine kurze Klassifikation der zahlreich bis jetzt construirten Barographen zu geben; zum grösseren Theil eignen sich dieselben nur zur Messung der Schwankungen des Luftdrucks resp. zur Interpolation zwischen von Zeit zu Zeit am Barometer gemachten Ablesungen, zum kleineren Theil aber wohl auch zu absoluten Bestimmungen. Vorangeschickt sei die Bemerkung, dass man natürlich die Angaben der meisten gewöhnlichen Barometer auf photographischem Wege registriren kann — ein Verfahren, das sich indess nicht bewährt zu haben scheint.

1) Aneroidbarographen. Diese sind aus naheliegenden Gründen die einfachsten und daher am meisten verbreitet; sie haben aber natürlich alle Fehler der Aneroidbarometer und meist ausserdem noch eigene, sodass ihre Brauchbarkeit sich auf Zwecke, die keine grosse Genauigkeit verlangen, oder bei feineren Untersuchungen auf die Interpolation beschränkt. Die Wirkungsweise ist wenigstens im Princip so einleuchtend, dass eine Angabe desselben überflüssig erscheint. Die verbreitetsten Apparate dieser Art sind die von HOTTINGER in Zürich und von REDIER und RICHARD in Paris; ersterer registrirt den Luftdruck von Zeit zu Zeit durch Punkte, letzterer durch eine stetige Linie, also in vollkommnerer Weise.

2) Schwimmer-Barographen. Um ein Quecksilberbarometer in einen Barographen zu verwandeln, liegt es nach der Analogie anderer Apparate nahe, auf das Quecksilber im offenen Schenkel einen Schwimmer zu setzen und dessen Schwankungen auf einen Schreibstift zu übertragen; diese Apparate schliessen sich also unmittelbar an die Quecksilber-Zeigerbarometer (pag. 540) an. Irgendwelche Genauigkeit lässt sich aber nicht erzielen.

3) Vacuum-Schwimmer-Barograph. Sehr interessant ist die von FUESS zur Ausführung gebrachte Idee, den Schwimmer auf den Spiegel im Vacuum zu setzen; wählt man nämlich für ihn einen Magneten, so kann man dessen Schwankungen auf einen zweiten, ausserhalb der Röhre angebrachten Magneten und von diesem auf den Schreibstift übertragen.

4) DUFOUR's Hebelbarograph. Das Heberrohr ist so aufgehängt, dass es, je nachdem bei Aenderungen des Luftdruckes mehr Quecksilber in den linken oder rechten Schenkel tritt, sich etwas nach rechts oder nach links dreht, bis es jedesmal im Gleichgewicht ist; an diesen Bewegungen nimmt der Schreibstift theil.

5) Spiralfeder-Barograph von DRAPER. Das Rohr eines Gefässbarometers ist fest aufgestellt, während das Gefäss an zwei Spiralfedern hängt und folglich bei Aenderungen des Luftdruckes sich auf- und abwärts bewegt.

6) STANLEY's Uhrbarometer. Das Barometerrohr bildet das Pendel einer Uhr, deren Gang somit vom Luftdruck abhängig wird (ein eigentlicher Registrirapparat ist dies nicht).

7) Waage-Barographen[1]). Die dieser Klasse angehörigen Instrumente sind einerseits die ältesten, andererseits grade in der letzten Zeit bis zu einem hohen Grade von Vollkommenheit ausgebildet worden, so dass sie für die feinsten Zwecke fast ausschliesslich in Betracht kommen. Das Princip, das veränderliche Gewicht des Barometerrohres zur Registrierung zu benutzen, ist einleuchtend, die Ausführung, resp. Vervollkommnung hat dagegen ausserordentlich viel Scharfsinn und Erfindungsgeschick erfordert. Die wichtigsten Typen sind folgende:

a) Der Winkelhebel-Barograph, insbesondere die von MORELAND und SECCHI.

b) Der Rollenbarograph.

c) Der hydrostatische Barograph von SCHREIBER.

d) Der Laufgewichts-Barograph von SPRUNG, der vollkommenste von allen (neuerdings in sinnreicher Weise mit einem Thermographen vereinigt). Hier werden nicht die Schwankungen des Waagebalkens zur Aufzeichnung benutzt, sondern die Hin- und Herbewegungen einer, den Wagebalken stets im Gleichgewicht erhaltenden Rolle.

Luftdruckerscheinungen. Mit Hilfe des Barometers hat man die Gesetze des Luftdruckes, d. h. seine Abhängigkeit von den verschiedensten Einflüssen, studiert; insbesondere ist es die Abhängigkeit von der Zeit, von der Höhe und von der geographischen Breite, welche allgemeines Interesse besitzt. Die aërostatische Theorie (s. o.) ist dadurch wenigstens insoweit annähernd bestätigt worden, als nicht, gerade wie bei der Erscheinung von Fluth und Ebbe des Wassers, die Bewegungen einerseits und die Gliederung der Erdoberfläche andererseits wesentliche Abweichungen bedingen; die verwickelte Untersuchung letzterer gehört in die Meteorologie (s. auch w. u.).

Die zeitlichen Aenderungen des Luftdruckes sind theils unregelmässiger und plötzlicher, theils mehr oder weniger regelmässig periodischer Natur. Insbesondere unterscheidet man eine tägliche Doppelperiode (Maxima am Vormittag und Abend, Minima am Morgen und Nachmittag) und eine jährliche Periode (an continentalen Orten Maximum im Sommer, Minimum im Winter). Von den örtlichen Verschiedenheiten des Luftdruckes verschafft man sich ein anschauliches Bild durch Zeichnung der sogenannten Isobaren, d. h. der Linien, welche alle Punkte von gleichem mittlerem, reducirtem Barometerstande verbinden. Diese Isobaren laufen nur an wenigen Stellen den Breitenkreisen annähernd parallel meistens bilden sie vielmehr geschlossene Curven; auch läuft die Curve höchsten Luftdruckes nicht am Aequator hin, sondern es giebt deren zwei in den Gürteln zwischen 20 und 30° nördlicher und südlicher Breite. Im einzelnen ändert sich aber das Isobarenbild von Tag zu Tag ganz wesentlich.

Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe. Dieselbe ergiebt sich unter idealen Verhältnissen, d. h., wenn die Temperatur, die Feuchtigkeit u. s. w bestimmte constante Werthe haben, ohne weiteres aus der Formel (6); nur wird der Zahlenfactor entsprechend dem Werthe von ρ_0 für die Temperatur t im Verhältniss von $(1 + 0{\cdot}00367\,t)$ grösser. Für 10° C. wird er z. B. 19076, und man erhält demgemäss folgende Zahlen für den Luftdruck b:

Höhe in *m*	*b*	Höhe in *m*	*b*	Höhe in *m*	*b*	Höhe in *m*	*b*
0	760	700	699	1400	642	2800	542
100	751	800	690	1600	627	3000	529
200	742	900	682	1800	612	3200	516
300	733	1000	674	2000	598	3600	492
400	724	1100	666	2200	584	4000	470
500	716	1200	658	2400	570	4400	449
600	707	1300	650	2600	556	4800	428

m	*b*
7500	307
15000	124
30000	20
55000	1

[1]) Diese Apparate sind in ihren einfachsten Formen übrigens auch als Ablese-Barometer von verschiedenen Seiten empfohlen worden, s. z. B. SCHREIBER, Rep. d. Phys. 8, pag. 245. 1872.

Stellt man hiernach b als Funktion von h graphisch dar, so findet man eine fallende, von der geraden Linie bis zu $h = 300$ *m* nur sehr wenig (bis höchstens 2%) abweichende, nach rechts oben concave Curve. Ferner giebt folgende Tabelle an, welche Höhe in *m* in verschiedenen Schichten der Atmosphäre (die durch ihren Luftdruck b charakterisirt sind) diejenige Luftsäule hat, deren Druck 1 *mm* beträgt und zwar bei verschiedenen Temperaturen t; mit andern Worten: wie weit man, wenn man sich bei t° unter dem Luftdruck b befindet, in die Höhe steigen muss, um in einen um 1 *mm* geringeren Luftdruck zu gelangen.

Der Erste, welcher die Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe durch Beobachtungen constatirte und hierdurch, wenige Jahre nach TORRICELLI's Entdeckung, jeden Zweifel an der Lehre vom Luftdruck beseitigte, war PASCAL[1]); der Versuch selbst wurde auf PASCAL's Veranlassung von PÉRIER auf dem Puy de Dome angestellt. In neuester Zeit hat man die Messungen mit Hülfe der Luftschifffahrt auf Höhen bis über 9000 *m* ausgedehnt.

b	$t = 28$	24	20	16	12	8	4	0	−4	−8	−12
780	11·4	11·2	11·1	10·9	10·7	10·6	10·4	10·2	10·1	9·9	9·7
760	11·7	11·5	11·4	11·2	11·0	10·9	10·7	10·5	10·4	10·2	10·0
740	12·0	11·8	11·7	11·5	11·3	11·2	11·0	10·8	10·6	10·5	10·3
720	12·4	12·2	12·1	11·8	11·6	11·5	11·3	11·1	10·9	10·8	10·6
700	12·7	12·5	12·3	12·2	12·0	11·8	11·6	11·4	11·2	11·1	10·9
680	13·1	12·9	12·7	12·5	12·3	12·1	11·9	11·8	11·6	11·4	11·2
660	13·4	13·3	13·1	12·9	12·7	12·5	12·3	12·1	11·9	11·7	11·5
640	13·8	13·7	13·5	13·3	13·1	12·9	12·7	12·5	12·3	12·1	11·9
620	14·3	14·1	13·9	13·7	13·5	13·3	13·1	12·9	12·7	12·5	12·1
600	14·7	14·5	14·3	14·1	13·9	13·7	13·5	13·3	13·1	12·9	12·5
580	15·2	15·0	14·8	14·5	14·3	14·1	13·9	13·7	13·5	13·3	13·0
560	15·8	15·6	15·4	15·1	14·8	14·6	14·4	14·2	14·0	13·7	13·4
520	17·2	17·0	16·8	16·5	16·1	15·7	15·3	15·0	14·8	14·5	14·3
480	18·8	18·6	18·4	18·0	17·6	17·2	16·9	16·6	16·3	16·0	15·7
440	20·7	20·5	20·2	19·9	19·5	19·1	18·7	18·4	18·1	17·8	17·6

Reduktion des Luftdruckes auf andere Höhe. Für viele Zwecke, z. B. für die Herstellung der Isobaren ist es erforderlich, einen beobachteten Barometerstand auf den Meeresspiegel zu reduciren (pag. 539); oder allgemeiner, von zwei an Orten verschiedener Seehöhe beobachteten Barometerständen den einen auf den andern zu reduciren. Um dies mit Genauigkeit zu thun muss man an der Formel (6), in welcher die Höhendifferenz jetzt mit h, die beiden Barometerstände mit B und b bezeichnet werden sollen, einige Correktionen anbringen, nämlich 1) die Breite-Correktion für die Schwere g, bezogen auf 45° (pag. 539); 2) die Höhencorrektion für die Schwere (pag. 539); 3) die Temperaturcorrektion $1 + \alpha t$; 4) die Correktion wegen der Feuchtigkeit; ist nämlich die Luft mit Wasserdampf vom Druck e gemischt, so wird hierdurch die Dichte ρ beeinflusst, und zwar den Gasgesetzen zufolge, nicht etwa um den relativen Betrag e/b, sondern in Anbetracht der im Verhältnis 0.622:1 grösseren Leichtigkeit des Wasserdampfes gegenüber der Luft, um den Betrag 0.378 e/b. Bei allen diesen Correktionen weiss man nun zwar nicht, welche Werthe der Seehöhe z, des Luftdruckes, des Dunstdruckes und der Temperatur man ihnen zu Grunde legen soll, da diese im allgemeinen für die beiden Orte verschiedene Werthe

[1]) PASCAL, Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs. Paris 1648.

haben werden; es wird aber meist genügen, die Mittelwerthe einzuführen, und somit erhält man die folgende Reduktionsformel:

$$log\, b = log\, B - \frac{h}{18401}\left[1 - \alpha\frac{(t+T)}{2}\right]\left[1 - 0\cdot378\frac{\left(\frac{e}{b}+\frac{E}{B}\right)}{2}\right](1 - 0\cdot0026\, cos\, 2\varphi)$$
$$\left[1 - \varepsilon\left(z + \frac{h}{2}\right)\right].$$

Je nach dem Grade der Genauigkeit und der Höhendifferenz wird man diese Formel mehr oder weniger abkürzen können.

Barometrische Höhenmessung[1]. Um mittelst barometrischer Beobachtungen Höhendifferenzen zu bestimmen, ein Gedanke, den ebenfalls schon PASCAL hatte — braucht man nur die letzten Betrachtungen umzukehren, und erhält sofort die exakte Höhenformel (RÜHLMANN'sche Formel; die PERNTER'sche ist ihr im wesentlichen sehr ähnlich):

$$h = 18401\left[1 + 0\cdot00367\left(\frac{t+T}{2}\right)\right]\left[1 + 0\,378\left(\frac{e/b + E/B}{2}\right)\right](1 + 0\cdot0026\, cos\, 2\varphi)$$
$$\left[1 + \varepsilon\left(z + \frac{h}{2}\right)\right] log\frac{B}{b}.$$

Indem man hierin lauter Mittelwerthe benutzt, macht man Fehler, und diese werden am kleinsten, wenn man zu bestimmten Jahres- und Tageszeiten beobachtet, nämlich einerseits im Frühjahr und Herbst und andererseits zu folgenden Stunden: Januar 12 U. M., Februar 10 V. und 4 N., März 8 V. und 6 N., April und Mai 7 V. und 7 N, Juni und Juli 6 V. und 9 N., August 7 V. und 8 N., September 8 V. und 6 N., Oktober 10 V. und 4 N., November 11 V. und 2 N., December 1 N. Vereinfachungen der Formel auf Grund angenäherter Betrachtungen sind die BRUHNS'sche Formel

$$h = 18432\,(1 + 0\cdot00390\, t)\,(1 + 0\cdot0026\, cos\, 2\varphi)\, log\frac{B}{b},$$

wo t schon die Mitteltemperatur bezeichnet, ferner die KÖPPEN'sche Formel

$$h = \left[18432 + 71\cdot9\left(t + \frac{45° - \varphi}{52}\right)\right] log\frac{B}{b},$$

welche hinreichend genau ist zwischen 10° und 80° Breite und 0° und 20° C., und für welche Tabellen herausgegeben worden sind; endlich die einfachste und das Rechnen mit Logarithmen ersparende Formel von BABINET:

$$h = 16002\,(1 + 0\cdot0039\, t)\frac{B-b}{B+b}(1 + 0\cdot0026\, cos\, 2\varphi),$$

welche für kleinere Höhenunterschiede (unter 800 m) bis auf 1 m theoretisch genau ist. Endlich sei bemerkt, dass VOGLER und FELD[2] eine graphische Methode und entsprechende Tafeln zur Höhenbestimmung herausgegeben haben, und dass PERNTER für seine Tafeln die Constanten in Tabellen zusammengestellt hat.

Manometer. Wie das Barometer zur Messung des Druckes der freien Atmosphäre, so dienen die Manometer zur Messung des Druckes von abgeschlossener Luft, Gasen und Dämpfen. Sie weisen sehr verschiedene Formen auf, je nachdem es sich um die Messung kleiner, mittlerer oder starker Drucke

---

[1]) RÜHLMANN, Die barometr. Höhenmessungen, Lpz. 1870. — SCHREIBER, Hdb. d. barom. Höhenmessungen, Weimar 1877. — KÖPPEN, Z. d. Oest. Ges. f. Met. 17, pag. 85. — SPRUNG, Lehrb. d. Met. Hamb. 1885, pag. 66. — PERNTER, Rep. d. Phys. 24, pag. 161. 1888. — SCHREIBER Meteor. Zeit. 1886, pag. 153.

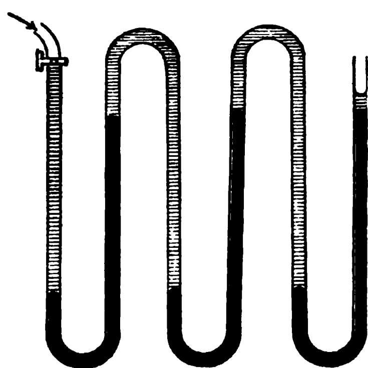
[2]) VOGLER u. FELD, Graphische Barometertafeln, Braunschweig 1880.

und je nachdem es sich um grössere oder geringere Genauigkeit handelt. Die wichtigsten Klassen sind folgende:

1) Das abgekürzte Barometer, auch Barometerprobe genannt. Es ist ein Barometer mit einer abgekürzten Röhre, dessen Gefäss resp. offenen Schenkel man mit dem Raume, dessen Gasdruck gemessen werden soll, verbindet; es dient also zur Messung von Drucken, die kleiner als eine Atmosphäre sind, insbesondere wird es an Luftpumpen angebracht, um, dem Boyle'schen Gesetz gemäss, den Grad der Verdünnung zu messen; vor dem Auspumpen erfüllt das Quecksilber die Röhre gänzlich, und erst nach Erreichung eines bestimmten Verdünnungsgrades löst es sich los und sinkt successiv. Natürlich kann man, wenn es erforderlich ist, auch ein unverkürztes Barometer benutzen.

2) Das offene Manometer. Es hat statt des geschlossenen Barometerrohres ein offenes, kann aber sonst Gefäss- oder Hebermanometer sein. Für gewöhnlich steht das Quecksilber im Rohr und Gefäss, resp. in beiden Schenkeln gleich hoch; verbindet man aber den Schenkel oder das Gefäss mit dem Gasraum, oder entwickelt man in dem Gefäss selbst, das hier natürlich von der freien Atmosphäre abgeschlossen sein muss, einen Ueberdruck oder Unterdruck, so steigt oder sinkt das Quecksilber im Rohr, und der zu messende Druck ergiebt sich durch Hinzufügung des Barometerstandes zur Steighöhe resp. Verminderung des ersteren um die Depression. Handelt es sich um sehr kleine Drucke, sodass die Depression beträchtlich wird, so muss man beim Hebermanometer beide Schenkel genügend lang machen, dem Gefässmanometer aber eine eigenthümliche Gestalt geben.

3) Offene Manometer für starke Drucke. Für grosse Drucke werden beim offenen Manometer sehr beträchtliche Rohrlängen erforderlich, z. B. bei 3 Atm. schon über 2 *m*, für 10 Atm. schon $7\frac{1}{2}$ *m* u. s. w. Solche Manometer hat man thatsächlich ausgeführt und geeignet aufgestellt, z. B. in Thürmen (Regnault), an Bergabhängen und in Brunnen (Amagat und Cailletet). Auch kann man, was bei Höhen über 2 *m* gewöhnlich geschieht, das Glas durch Eisen ersetzen und die Ablesung mittelst eines Schwimmers und Zeigerübertragung vornehmen. Immerhin sind hierzu grosse Höhen erforderlich, und daher compendiösere Apparate oft von grossem Werthe. Ein solcher ist das zusammengesetzte offene Manometer, bestehend aus einer Reihe von U-Röhren, von denen jede folgende mit der vorhergehenden oben verbunden ist, deren erste mit dem Gasraum, deren letzte mit der freien Luft zusammenhängt; die unteren Hälften sind mit Quecksilber, die oberen mit Wasser gefüllt. Wirkt jetzt der Druck, so wird in den ungraden Schenkeln das Quecksilber sinken, in den graden steigen und die Summe aller Niveaudifferenzen (d. h. das Sovielfache einer Höhendifferenz, als U-Röhren vorhanden sind), vermindert um den entsprechenden Wasserdruck und vermehrt um den Atmosphärendruck giebt den Gesammtdruck Bringt man nach dem Vorschlage von Thiesen[1]) abwechselnd oben und unten


(Ph. 199.)

[1]) Thiesen, Z. f. Instr. K. 1881, pag. 114. Daselbst giebt Thiesen dem an sich schon alten Apparat eine neue, sehr zweckmässige Form.

in den Verbindungsstücken Hähne an, so kann man nach Willkür einzelne Röhren ausschliessen.

4) Das geschlossene Manometer, in einigen Formen früher auch Sympiezometer genannt. Es besteht, wie das Barometer, aus geschlossenem Rohr einerseits und Gefäss oder offenem Schenkel andererseits. Das Rohr enthält aber eine gewisse Menge Luft (oder eines andern Gases), sodass für gewöhnlich das Quecksilber bis zu einer bestimmten, mit »1 Atm.« bezeichneten Marke reicht. Verbindet man jetzt Gefäss oder Schenkel mit dem Druckraum und herrscht daselbst Ueberdruck, so wird das Quecksilber steigen, und zwar dem BOYLE'schen Gesetz gemäss, jedoch unter Berücksichtigung des der Steigung des Quecksilbers entsprechenden Druckes. Bei 2 Atm. z. B. wird die Luft nicht ganz auf die Hälfte comprimirt; sie wird genau auf die Hälfte comprimirt, wenn der Druck im Gasraum so viel mehr als 2 Atm. $= 2 \times 760$ *mm* beträgt als das Quecksilber über der Marke steht. Die Marken, die man theoretisch oder empirisch für 2, 3 u. s. w. Atm. aufträgt, rücken natürlich immer näher zusammen, und somit entbehrt der Apparat irgend welcher Genauigkeit.

5) Das Mano-Barometer von REGNAULT. Zwei gleiche Röhren tauchen in die beiden durch eine Scheidewand getrennten Zellen eines offenen Gefässes mit Quecksilber, das eine Rohr wird mit dem Gasraum verbunden, das andere ist ein Barometerrohr. Entsteht jetzt in dem Gasraum ein Ueberdruck, so kann man diesen und den Barometerstand bestimmen, je nachdem man im Gefäss das Quecksilber über die Scheidewand hinweggreifen lässt oder nicht, zu welchem Zwecke ein Abflusshahn dient.

6) Die Metall- oder Federmanometer; sie entsprechen vollständig den Aneroidbarometern, nur dass sie für stärkere Drucke, oft bis zu 30 Atm., brauchbar sind. Sie sind namentlich für Messung des Drucks in Dampfkesseln sehr verbreitet; für wissenschaftliche Zwecke bedürfen sie, ihrer mit den Aneroidbarometern gemeinsamen Mängel halber, fortwährender Controlle[1]).

7) Die Pneumatometer, Variationsbaro- und Manometer u. s. w. Es sind Apparate zur Verfolgung kleiner Druckschwankungen, wie sie bei physikalischen und chemischen, besonders aber bei physiologischen Versuchen oft von Wichtigkeit ist. Es sei z. B. auf die bezüglichen Apparate von EDELMANN[2]) hingewiesen.

8. Manometer für sehr kleine Drucke (RAMSBOTTOM, MAC LEOD, LEWIS u. s. w.) werden im Anschluss an die Luftpumpe Erwähnung finden.

Luftpumpen.

Unter dem Namen Pumpen begreift man zwei verschiedene Klassen von Apparaten: einerseits solche, welche geeignet sind, um Gase, insbesondere Luft, aus Räumen, die sie erfüllen, theilweise oder gänzlich herauszuschaffen, also luftverdünnte, resp. luftleere Räume herzustellen, oder auch umgekehrt Gase in Räume hineinzupressen, also zu comprimiren und eventuell sogar zu condensiren; andererseits Apparate, um mittelst aërostatischer Saug- oder Druckwirkung Flüssigkeiten, insbesondere Wasser, emporzuschaffen. Jene Apparate heissen je nach den erwähnten Umständen Luftpumpen, Compressionspumpen oder Condensationspumpen — wobei gleich hier zu bemerken ist, dass eine Pumpe der einen Art

[1]) Einen geeigneten Apparat hierzu hat neuerdings GILTAY, Z. f. Instr. K. 1885, pag. 395, angegeben.

[2]) EDELMANN, Neuere Apparate, Stuttg. 1882.

auch oft umgekehrt als Pumpe der anderen Art wirken kann — diese heissen Saug- oder Druckpumpen (s. w. u.).

Luftverdünnungspumpen. Nachdem durch GALILEI und TORRICELLI die Möglichkeit und willkürliche Herstellbarkeit luftleerer Räume dargethan worden war, lag es nahe, auf systematische Methoden zur Erzeugung derartiger Vacua auszugehen. Es ist aber interessant zu constatiren, dass die erste Luftpumpe, welche in dieser Erwägung construirt wurde, die Luftpumpe OTTO's v. GUERICKE[1]), unabhängig von jenen Entdeckungen entstand, und dass diese Luftpumpe und ebenso alle Luftpumpen, welche in den darauf folgenden zwei Jahrhunderten gebaut wurden und in Gebrauch kamen, die sogen. Kolbenluftpumpen, dem TORRICELLI'schen Experiment weit ferner liegen, als die hydrostatischen Luftpumpen, deren Idee durch diese Experimente eigentlich ohne weiteres, sogar bis in gewisse Einzelheiten, z. B. die Benutzung des Quecksilbers, an die Hand gegeben wird, die aber, vermuthlich vorwiegend aus technischen Gründen, erst seit dem Vorangehen GEISSLER's in die praktische Erscheinung getreten sind. Theils dieser historischen Entwickelung halber, theils weil sie für gewöhnliche Zwecke immer noch am bequemsten und empfehlenswerthesten sind, mögen die Kolbenluftpumpen zuerst betrachtet werden, alsdann die hydrostatischen und zuletzt die auf einer dritten Idee beruhenden, die man als hydrodynamische bezeichnen kann, und welche unter Anwendung von Quecksilber von SPRENGEL, unter Anwendung von Wasser von BUNSEN angegeben sind.

Kolbenluftpumpen[2]). Diese Maschinen beruhen auf der durch Hin- und Herbewegung eines Kolbens bewirkten periodischen Vergrösserung und Verkleinerung eines oder mehrerer Räume, welche während der Vergrösserung mit dem auszupumpenden Raume, während der Verkleinerung aber mit der freien Atmosphäre in Verbindung stehen. Der auszupumpende Raum heisst Recipient, er ist gewöhnlich durch einen abgeschliffenen Teller und eine mit abgeschliffenem, eingefettetem Rande luftdicht auf ihn aufgesetzte Glasglocke begrenzt; durch ein in der centralen Oeffnung des Tellers mündendes Rohr, das Saugrohr, steht er in Verbindung mit dem Raume, welcher abwechselnd vergrössert und verkleinert wird, dem sogen. Kolbencylinder oder Stiefel, in welchem sich der Kolben luftdicht anschliessend hin und her bewegt. Es sei gleich hier bemerkt, dass in neuester Zeit DELEUIL[3]) eine Pumpe construirt hat, bei welcher der Kolben nicht dicht anschliesst, sondern eine, freilich sehr dünne, Luftschicht zwischen sich und der Cylinderwandung lässt, wodurch das Einfetten vermieden und der Kraftaufwand beim Pumpen erheblich verringert wird: bei schneller Bewegung nimmt der Kolben die Luftschicht mit, und diese wirkt somit selbst als luftdichter Verschluss, freilich nur bis zu einer gewissen Grenze. Das Spiel einer Kolbenluftpumpe ist also dies, dass während des ersten Theiles der Wirkung (Herausziehen des Kolbens) die Luft aus dem Recipienten sich mit in den Stiefel verbreitet, während des zweiten Theiles (Hineinstossen des Kolbens) die Luft des Stiefels in die freie Atmosphäre geschafft und zugleich die Kolbenstellung

---

[1]) OTTO V. GUERICKE, Experimenta Magdeburgica, Amst. 1672. Das Erfindungsjahr ist etwa 1650, und erst 1654 (auf dem Reichstag zu Regensburg) erfuhr GUERICKE von dem TORRICELLI'schen Versuche.

[2]) Nächst GUERICKE sind für die Entwickelung der Kolbenluftpumpe zu nennen: BOYLE und HOOKE (1658), HUYGENS (1661, Teller), PAPIN (1687), SENGUERD (1675, Zweiweghahn), STURM (1675, Kegelventile), HAWKSBEE (1705), 's GRAVESANDE (1725) u. s. w.

[3]) DELEUIL, Compt. rend. 60, pag. 571. 1865.

zu Beginn des ersten Theils der Wirkung wieder hergestellt wird, sodass dasselbe Spiel von neuem beginnen kann. Die verschiedenen Formen, welche der Luftpumpe gegeben worden sind, unterscheiden sich theils hinsichtlich der Art und Weise, wie die geschilderte abwechselnde Funktion eingeleitet wird, theils sind es Zusammensetzungen einfacher Formen zum Zwecke der Erleichterung der Handhabung, der Steigerung und Beschleunigung der Wirkung u. s. w. Ein wichtiger Zusatzbestandtheil aller Pumpen ist schliesslich das Manometer, entweder ein offenes Manometer oder ein abgekürztes Barometer (pag. 548). Es ist gewöhnlich durch eine Abzweigung vom Saugrohr mit dem Recipienten verbunden und dient, ausser zur Messung des erreichten Drucks b, also der erreichten Verdünnung b/B (wo B der Barometerstand), auch zur Prüfung der Vorfrage, ob die Pumpe dicht halte, oder ob, was sich an dem Stande des Manometers früher oder später, oft erst nach Stunden zeigt, schnell oder langsam Luft in den Recipienten einströmt, in welchem Falle die Dichtung zu vervollkommnen ist.

Leistungsfähigkeit der Kolbenluftpumpen. Dass man mit solchen Pumpen keinen wirklich leeren Raum erzeugen kann, ist schon insofern einleuchtend, als die Wirkung eines Kolbenhubes nicht darin besteht, eine bestimmte Menge Luft zu entfernen, also die Dichte der Luft im Recipienten um einen bestimmten Betrag zu verringern, sondern darin, sie auf einen bestimmten Bruchtheil zu reduciren. Der Recipient habe das Volumen R, der Stiefel bei völlig herausgezogenem Kolben das Volumen S, bei völlig hineingestossenem Kolben das Volumen null; dann hat man für das Verdünnungsverhältniss (Verhältniss der Dichte zur ursprünglichen) nach der ersten Periode $v = R/(R + S)$, und folglich nach n Perioden

$$v_n = \left(\frac{R}{R+S}\right)^n = \left(\frac{1}{1 + S/R}\right)^n,$$

und dieser Ausdruck nähert sich mit wachsendem n nicht anders als asymptotisch dem Nullwerthe. Es sei angegeben, dass, wenn man obige Gleichung nach n auflöst, man die theoretische Zahl von Kolbenhüben erhält, welche erforderlich ist, um die Dichte v_n, also den Druck b_n bei äusserem Barometerstande B zu erreichen:

$$n = \frac{\log 1/v_n}{\log(1 + S/R)} = \frac{\log B/b_n}{\log(1 + S/R)}.$$

Soll z. B. $b_n = 5\ mm$ resp. $b_n = 1\ mm$ werden, so erhält man für verschiedenes Raumverhältniss von Stiefel und Recipient folgende Periodenzahlen (nach oben abgerundet):

	$S = 3R$	$S = 2R$	$S = R$	$S = \frac{1}{2}R$	$S = \frac{1}{4}R$	$S = \frac{1}{10}R$
$b_n = 5\ mm$	$n = 4$	5	8	13	23	52
$b_n = 1\ mm$	5	7	10	17	30	70

In Wahrheit ist die oben gemachte Annahme, der Stiefelraum könne auf null reducirt werden, nicht erfüllbar, es bleibt immer ein kleines Volumen s, der sogen. schädliche Raum, übrig. Es wird somit nach dem ersten Kolbenhube $v_1 = (R + s)/(R + S)$, die Verdünnung also geringer als oben; die so verdünnte Luft mischt sich beim zweiten Hube mit der im schädlichen Raum beim Hineinstossen zurückgebliebenen Luft von natürlicher Dichte und vertheilt sich, so gemischt, in alle drei Räume; es wird also

$$v_2 = \frac{\frac{R+s}{R+S}R + 1\cdot s + 0\cdot(S-s)}{R+S} = \frac{R+s}{R+S}\left[\frac{R+s}{R+S} + s\frac{S-s}{(R+S)(R+s)}\right]$$
$$= \frac{R+s}{R+S}\left[1 - R\frac{S-s}{(R+S)(R+s)}\right];$$

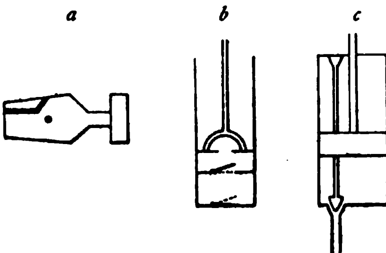
der letzte Ausdruck zeigt, dass eine weitere Verdünnung stattgefunden hat, der zweite Ausdruck zeigt aber, dass sie noch kleiner als die erste ist; so geht das fort, und schliesslich findet man, dass der Werth, welchem sich die Dichte asymptotisch nähert, nicht null, sondern endlich ist. Welcher Werth es ist, ergiebt sich aus der Schreibweise:

$$v_1 = 1 - \frac{S-s}{R+S}, \quad v_2 = 1 - \frac{S-s}{R+S}\left(1 + \frac{R}{R+S}\right)$$
$$v_\infty = 1 - \frac{S-s}{R+S}\left[1 + \frac{R}{R+S} + \left(\frac{R}{R+S}\right)^2 + \dots\right] = \frac{s}{S};$$

einfacher aber aus der Ueberlegung, dass, wenn man sich bei einem Kolbenhube den Recipienten abgesperrt denkt, die Luft des schädlichen Raumes durch Verbreitung in den Stiefel die Dichte s/S erhält, dass also, wenn die Luft im Recipienten diese Dichte bereits hat, keine Luft mehr aus ihm in den Stiefel treten wird, die Grenze der Verdünnung also erreicht ist. Es ist dies aber nicht, wie es oft dargestellt wird, so zu verstehen, als ob diese Grenze bei einem bestimmten Kolbenhube plötzlich erreicht würde, vielmehr zeigt das Obige ihren asymptotischen Charakter. Ist z. B. $R = S = 1$, $s = \frac{1}{10}$ (absichtlich grösser gewählt, als es in der Praxis sein wird), so erhält man statt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ .... 0 der Reihe nach die Dichten $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{40}$, $\frac{17}{80}$, $\frac{25}{160}$ ... $\frac{1}{10}$. Einige Constructionen suchen diesem Uebelstande wenigstens theilweise mit Erfolg abzuhelfen (s. u.). Es bleiben aber immerhin noch schädliche Einflüsse aus dieser und anderen Quellen, z. B. der mit dem Grade des Auspumpens sich steigernde Mangel an Dichte, mit der die einzelnen Theile der Pumpe schliessen, die Spannung der aus dem Schmierfett entwickelten Dämpfe, in beträchtlicher Menge zurück, und es ist daher eine Kolbenluftpumpe schon als recht gut zu bezeichnen, wenn sie eine Verdünnung auf $\frac{1}{1000}$, also auf etwa $\frac{3}{4}$ *mm* Quecksilberdruck gestattet (s. w. u.).

Einzelheiten. Die wichtigsten Formen der Kolbenluftpumpen und besonderen Einrichtungen an ihnen sind folgende:

1) Hahnluftpumpen. Zur abwechselnden Verbindung des Stiefels mit dem Recipienten und der freien Luft dienen zwei einfach durchbohrte Hähne oder ein doppelt durchbohrter, sogen. SENGUERD'scher Hahn (Fig. 200*a*) in zwei um 90° von einander abweichenden Stellungen; in einer dritten, aus letzterer durch Drehung um 180° sich ergebenden Stellung schliesst er den Stiefel ganz ab und verbindet die Glocke mit der freien Luft, sodass man nach Beendigung der Versuche die Luft in sie wieder eintreten lassen kann; letzterem Zwecke dient häufig ein besonderer, dicht unter dem Teller angebrachter, einfacher Hahn. Die Hahnluftpumpen sind constructiv am einfachsten und haben die hiermit verbundenen Vorzüge.



(Ph. 200.)

2) Ventilluftpumpen. Hier sind die Hähne, deren fortwährendes Stellen immerhin lästig ist, durch Ventile ersetzt. Der Kolben ist durchbohrt, und die Durchbohrung durch ein nach oben (aussen) sich öffnendes Ventil (Klappen-

Kegel-, Federventil u. s. w.) verschlossen; ebenso sitzt ein in den Stiefel (also in derselben Richtung) sich öffnendes Ventil auf der vom Stiefel zum Saugrohr führenden Oeffnung (Fig. 200*b*). Beim Herausziehen des Kolbens wird die Luft zwischen beiden Ventilen verdünnt, und folglich das Bodenventil durch den Druck der Luft in der Glocke geöffnet, das Kolbenventil durch den Druck der äusseren Luft geschlossen, die Luft aus der Glocke verbreitet sich also in den Stiefel; beim Hineinstossen des Kolbens verhält es sich gerade umgekehrt, und die Luft aus dem Stiefel entweicht ins Freie. Der hierin liegende Gedanke, das Oeffnen und Schliessen der Ventile durch die Ueberdrucke besorgen zu lassen, stösst hinsichtlich des Bodenventils bei fortgeschrittener Verdünnung auf die praktische Schwierigkeit, dass der Ueberdruck im Recipienten nicht mehr hinreicht, das Bodenventil zu heben. Man überträgt daher die Bedienung dieses Ventils dem Kolben, indem man (Fig. 200*c*) die Bodenöffnung etwas seitlich anbringt und das Ventil an einer durch den Kolben hindurchgeführten Stange befestigt, welche dieser bei seinem Auf- und Niedergange ein kleines Stück weit mitnimmt, gerade so viel, um die Oeffnung abwechselnd zu öffnen und zu schliessen. Neuerdings hat WORTH[1]) eine Vorrichtung zum elektrischen Betriebe der Ventile angegeben.

3) Doppelt wirkende Luftpumpen. Es sind hier zu unterscheiden: a) Einstiefelige[2]). Das von der Glocke kommende Rohr führt getheilt zu beiden Enden des Cylinders, und beide Hälften desselben dienen abwechselnd als Stiefel; damit, auch wenn der äussere Theil als Stiefel dient, die Luft aus dem inneren Theile entweichen könne, ist die Kolbenstange hohl, und diese Höhlung communicirt mit der freien Luft. b) Zweistiefelige Luftpumpen. Zwei gleiche Stiefel stehen nebeneinander, die Kolben haben gezahnte Stangen und werden mittelst Zahnrad und eines zweiarmigen Hebels so bewegt, dass der eine aufsteigt, wenn der andere sich senkt und umgekehrt. Handelt es sich um eine Ventilpumpe, so führt das getheilte Saugrohr einfach zu den beiden Bodenventilen; bei Hahnpumpen muss in das ungetheilte Stück des Saugrohrs ein Hahn eingeschaltet werden, welcher abwechselnd die Verbindung mit dem einen und dem anderen Stiefel herstellt. Die doppelt wirkenden Luftpumpen haben nicht nur den Vortheil schnelleren Arbeitens, sondern sie beseitigen auch den Uebelstand, den die einfach wirkenden bei fortgeschrittener Verdünnung zeigen und der darin besteht, dass zum Heben des Kolbens ein beträchtlicher Kraftaufwand zur Ueberwindung des äusseren Luftdrucks erforderlich ist, während hier in dieser Hinsicht zwei entgegenstehende Wirkungen einen fast völligen Ausgleich erzielen[3]). c) Rotationspumpen. Die Kolbenstange wird durch gleichförmiges Drehen einer Kurbel auf- und abbewegt. Diese Maschinen sind am vollkommensten, weil die Handhabung am günstigsten und in Anbetracht des grossen, mit der Kurbel verbundenen Schwungrades am leichtesten ist.

4) Hähne von GRASSMANN und BABINET. Dieselben sind vielfach durchbohrt und dienen bei zweistiefligen Pumpen dazu, die Wirkung des schädlichen Raumes herabzumindern, indem sie bei vorgeschrittener Verdünnung gestatten, die beiden Stiefel einander unterzuordnen, d. h. durch den einen den Recipienten

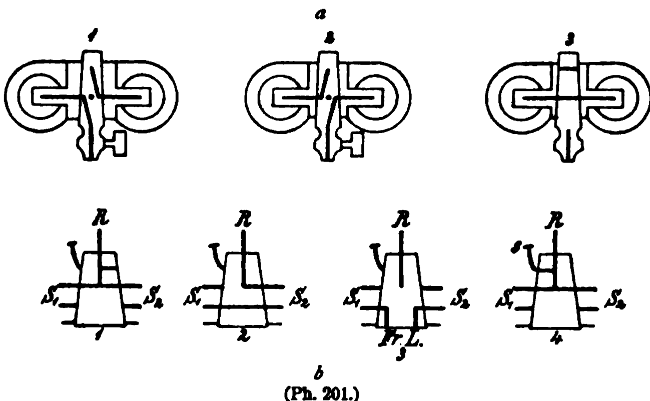
---

1) WORTH, Z. f. Instr. 1887, pag. 258.

2) Zuerst von BIANCHI mit Erfolg eingeführt; neuere Construction von REDIKER, DINGL. Pol. J. 237, pag. 330. 1880.

3) Eine zweistieflige Hahnluftpumpe mit selbstthätiger Umstellung der Hähne hat kürzlich KLEEMANN, Z. f. Instr. K. 1882, pag. 25, angegeben.

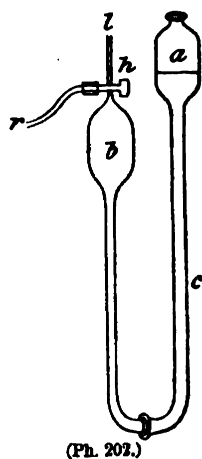
durch den anderen den schädlichen Raum des ersteren zu entleeren. Der GRASSMANN'sche Hahn ist für Hahnluftpumpen bestimmt und wird anfangs nur abwechselnd in den beiden Stellungen 1 und 2 (Fig. 201 *a*), später aber jedes Mal auch noch in der Zwischenstellung 3 benutzt. Der BABINET-sche Hahn (Fig. 201 *b*) dient für Ventilluftpumpen und wird anfangs dauernd in der Stellung 1, später dauernd in der Stellung 2 benutzt, in einer dritten Stellung gestattet er bei abgeschlossener Glocke, beide Stiefel mit der freien Luft zu verbinden, in einer vierten mittelst des Stiftes *s* Glocke und Stiefel nach der freien Luft zu öffnen oder von ihr abzuschliessen; übrigens existirt der BABINET'sche Hahn auch in andern Construktionen. Durch derartige Einrichtungen wird die Leistungsfähigkeit theoretisch fast auf das halbe Quadrat der früheren gesteigert, nämlich von dem Verdünnungsverhältniss s/S (s. o.) fast auf $s^2/2S^2$.



(Ph. 201.)

Von anderen Einrichtungen mit ähnlicher Wirkung, die aber auch für einstiefelige Pumpen brauchbar sind, seien hier nur zwei genannt: die von STAUDINGER und STÖHRER eingeführte, wo die Kolbenstange durch eine luftdichte Stopfbüchse geht und am äusseren Ende des Stiefels ein Ventil angebracht ist, welches sich beim Hineinstossen des Kolbens schliesst, sodass der schädliche Raum sich nur mit verdünnter Luft füllen kann; und die Ein- und Auspressung von Oel aus dem schädlichen Raum.

Hydrostatische oder Quecksilberluftpumpen. Eine solche Luftpumpe erhält man, wenn man sich an einem Heberbarometer drei Aenderungen vorgenommen denkt: 1) Am offenen sowohl wie am geschlossenen Ende erweitert sich die Röhre zu geräumigen Gefässen *a* und *b*, 2) die beiden Schenkel sind nicht durch eine Glasröhre, sondern durch einen langen Kautschukschlauch *c* verbunden, so dass man das offene Gefäss *a* nach Belieben senken und heben kann. 3) das Gefäss *b* ist nicht fest verschlossen, sondern kann mittelst des doppelt durchbohrten Hahns *h* entweder mit der freien Luft *l* oder mit dem Recipienten *r*, welcher ausgepumpt werden soll, verbunden oder gänzlich abgeschlossen werden. Während *b* mit *l* verbunden ist, wird *a* so hoch gehoben, dass das — in genügender Menge eingefüllte — Quecksilber über *h* hinausreicht; wird nun *b* gänzlich abgesperrt und *a* etwa um ein Meter gesenkt, so entsteht in *b* das TORRICELLI'sche Vacuum, und in dieses strömt, nachdem *b* mit *r* verbunden ist die Luft aus dem Recipienten; schliesslich wird *b* wieder mit *l* verbunden und durch Hebung von *a* die Luft aus *b* in's Freie befördert. Dieses Spiel kann nun beliebig oft wiederholt werden. Die Quecksilberluftpumpe arbeitet zwar, da man das Volumen von *b* nicht zu gross wählen darf, langsamer als die Kolbenluft-



(Ph. 202.)

pumpen, desto langsamer, je grösser der Recipient, und sie eignet sich daher nur zur Auspumpung kleiner Räume; andererseits leistet sie aber, da sie keinen schädlichen Raum hat, vollkommener dicht hält und die beiden einzigen schädlichen Einflüsse, die Luftbläschen und die Quecksilberdämpfe, sehr gering sind (der Druck der Quecksilberdämpfe beträgt nach neueren Messungen bei 0° noch nicht 0·001 *mm*) und überdies grösstentheils beseitigt werden können, weit grössere Verdünnungen (s. w. u.), sodass sie für alle wissenschaftlichen und technischen Zwecke, die annähernde Vacua verlangen, z. B. Radiometer, GEISSLER'sche und CROOKES'sche Röhren, Glühlampen u. s. w. eine grosse Rolle spielen.

Verschiedene Formen der Quecksilberluftpumpe. Die GEISSLER'sche Pumpe hat eine überaus grosse Anzahl von Abänderungen, in denen zum Theil wesentliche Verbesserungen liegen, erfahren, theils zur Erhöhung, theils zur Beschleunigung der Wirkung, theils zur Vereinfachung und Herabminderung der Zerbrechlichkeit, theils endlich zum Zwecke der Reinerhaltung resp. leichteren Reinigung; nur einige dieser Neuerungen können hier angeführt werden. Zunächst hat man die Aufstellung der Pumpe verbessert, und es hat sich namentlich die Form, welche G. JOLLY[1]) der Pumpe gegeben hat, allgemeine Verbreitung verschafft; der ganze Apparat ist in handlicher und geschützter Weise auf und an einem Holzstativ befestigt, und die Hebung und Senkung des Gefässes kann mittelst einer Kurbel in bequemer und gefahrloser Weise erfolgen. Statt des GEISSLER'schen Hahns haben GREINER und FRIEDRICHS[2]) bei ihrer Pumpe einen andern angebracht, der den Vortheil hat, dass seine verschiedenen Stellungen nicht, wie dort, um nur 45°, sondern um 90° resp. 180° abweichen. A. GEISSLER[3]) hat die Hähne überhaupt durch Ventile, DE ROMILLY[4]) durch ein Röhrensystem ersetzt. Statt das feste Gefäss oben direkt durch den Hahn in die freie Luft münden zu lassen, versieht man es jetzt meist mit einem Ansatzstück, jenseits dessen sich noch ein zweiter, einfacher Hahn befindet; es kommt also das Gefäss überhaupt nicht mehr direkt mit der Luft in Verbindung. Einige Pumpen, so diejenigen von GÖBEL und KULENKAMP[5]) und die von GUGLIELMO[6]) haben eine doppelte Schlauchverbindung, und ihr Spiel ist von einem eigenthümlichen, cyklischen Charakter.

Die Pumpe von SERRAVALLE[7]) hat statt eines beweglichen Gefässes deren zwei, die abwechselnd herauf und heruntergehen und durch besonders construirte Dreiweghähne automatisch evacuiren. Andere Modificationen betreffen technische, aber zum Theil sehr wichtige Einzelheiten. So hat NARR[8]) die Kittungen zwischen Glas und Metall durch Schrauben ersetzt. Mit der Zeit hat man es so weit gebracht, die Pumpe incl. der Hähne im wesentlichen ganz aus Glas herzustellen, wobei die einzelnen Theile eventuell durch Schliffe verbunden sind. Den Kautschukschlauch muss man recht dickwandig wählen und im Innern besonders behandeln, damit er das Quecksilber trage und reinerhalte, am besten nimmt man schwarzes Kautschuk.

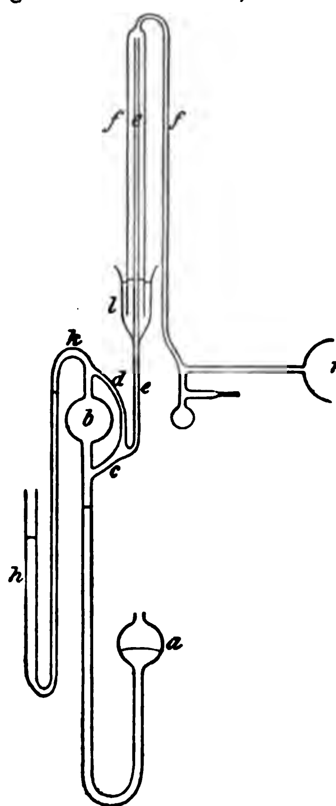
Während die übrigen Pumpen ihrer Form nach dem Heberbarometer ent-

---

[1]) G. JOLLY, Rep. d. Phys. 1, pag. 144. 1866.
[2]) GREINER u. FRIEDRICHS, WIED. Ann. 29, pag. 672. 1886.
[3]) ALB. GEISSLER, Z. f. Opt. u. Mech. 7, pag. 12. 1886.
[4]) DE ROMILLY, Soc. franç. de Phys. 7, pag. 4. 1888.
[5]) GÖBEL u. KULENKAMP, Z. f. Opt. u. Mech. 3, pag. 167. 1882.
[6]) GUGLIELMO, Atti R. Acc. di Torino 19, (27. Apr.) 1884.
[7]) SERRAVALLE, Riv. scient.-industr. 13, pag. 205. 1881 u. 14, pag. 401. 1882.
[8]) NARR, WIED. Ann. 25, pag. 542. 1885.

sprechen, ist die Pumpe von ROCK[1]) dem Gefässbarometer vergleichbar, es ist nämlich ein oben geschlossenes, weites Rohr von einem noch weiteren und unten geschlossenen umgeben und beide mit Quecksilber gefüllt; hebt man ersteres oder senkt man letzteres, so entsteht das TORRICELLI'sche Vacuum, das mit dem Recipienten verbunden wird u. s. w.

Von besonderer Bedeutung ist der in der TÖPLER'schen Pumpe[2]) dadurch gemachte Fortschritt, dass alle Hähne vermieden sind, Oeffnung und Schluss der Verbindungen vielmehr durch Quecksilber, das gewissermaassen die Rolle von Ventilen spielt, bewerkstelligt wird. Die Einrichtung der Pumpe in der ihr von HAGEN[3]) gegebenen Form ist aus Fig. 203 ersichtlich. Hebt man das Gefässs *a* genügend hoch, so tritt das Quecksilber gleichzeitig in das Gefäss *b* und in den Ast *c* mit seinen Verzweigungen *d* und *e*, und hierdurch wird *b*, das vorher oben und unten mit *e* und durch dieses mit dem Recipienten *r* in Verbindung steht, von diesem abgeschlossen. Es wird also die Luft in *b* comprimirt und schliesslich in Bläschenform durch das Barometer *h* hinausgetrieben. Ist das Quecksilber bis über die Kugel hinausgelangt, so senkt man *a* wieder, *b*, *c*, *d* und *e* werden wieder frei, und nun kann die Luft aus *r* nach *b* treten. Hierzu dient statt einer gewöhnlichen Verbindung die aus dem übermeterlangen Rohr *e*, dem an dasselbe angesetzten, mit Quecksilber gefüllten Gefäss *l* und der umgekehrten, mit ihrem weiten Schenkel über die Röhre *e* gestülpten Heberröhre *f* zusammengesetzte Einrichtung, die den Vorteil hat, ohne Schliff und Hahn jederzeit die Verbindung aufheben zu können. Treten, nach mehrfacher Wiederholung des Hebens und Senkens von *a*, keine Luftblasen mehr aus *h* heraus, so hebt man noch einmal und zwar (mit Vorsicht) so hoch, dass das Quecksilber sich durch Ueberfliessen mit dem im Barometer vereinigt, wodurch die Luft aus dem schädlichen Raum *k* fortgeschafft wird, während das übergetretene Quecksilber nachher beim Senken automatisch wieder aus *h* in die Pumpe zurückbefördert wird. — Modifikationen der TÖPLER-HAGEN'schen Pumpe sind u. a. die Pumpen von KARAVODINE[4]) (oberhalb *b* noch eine kleine Kugel angesetzt, das Steigrohr *e* durch ein Schwimmerventil ersetzt), SUNDELL[5]) (kleine Kugel über *b*, ausserdem kleines *U*-Rohr mit Kugel zwischen *k* und *h*) und T. J. SMITH[6]) (Betrieb durch eine hydraulische Pumpe). Auch die Pumpe von COUTTOLENC[7]) ist der TOEPLER'schen in mancher Beziehung ähnlich.



(Ph. 203.)

[1]) ROCK, Z. f. Opt. u. Mech. 4, pag. 159. 1883.
[2]) TÖPLER, DINGL. Polyt. J. 163, pag. 426. 1862.
[3]) BESSEL-HAGEN, WIED. Ann. 12, pag. 425. 1881.
[4]) KARAVODINE, J. de Phys. (2) 2, pag. 558. 1883; J. d. russ. ch. phys. Ges. 14, pag. 254. 1884.
[5]) SUNDELL, Acta Soc. Scient. Fenn. 14. 1884, und 15, 1885.
[6]) T. J. SMITH, Phil. Mag. (5) 25, pag. 313. 1888.
[7]) COUTTOLENC, C. R. 91, pag. 920. 1880.

Hydrodynamische Luftpumpen. Mit Anwendung von Quecksilber sind sie von SPRENGEL[1]), mit Anwendung von Wasser von BUNSEN angegeben worden. Wenn Quecksilber aus einem Gefäss durch ein barometerhohes Fallrohr abfliesst, so ist oben der Druck gleich null; verbindet man also den Recipienten mit dem Gefäss, so wird die Luft aus dem ersteren angesaugt und mit dem Quecksilber herabgerissen. Das Fallrohr muss so eng sein, dass ein Tropfen den Querschnitt ganz ausfüllt; ein Quetschhahn und Schlauchstück dienen zum Abschliessen des Quecksilbers vom Fallrohr. Eine beträchtliche Vervollkommnung hat die SPRENGEL'sche Pumpe durch GIMINGHAM[2]) erfahren, theils durch Anwendung von drei Fallröhren, theils durch Einführung des sog. Vacuumzapfens, der Luftfalle und anderer sinnreicher Einrichtungen, die u. a. das herabgeflossene Quecksilber in geeigneter Weise wieder zu heben gestatten; diese Pumpe hat sich bei der Herstellung der CROOKES'schen Röhren und Radiometer glänzend bewährt. Andere Modificationen rühren von MACALUSO[3]), JOANNIS[4]), MAXWELL und HUGHES[5]) u. A. her. Endlich hat HANNAY[6]) für gewisse Zwecke das Quecksilber durch leicht flüssiges Metall ersetzt (50$\frac{0}{0}$ Bi, 25$\frac{0}{0}$ Sn, 25$\frac{0}{0}$ Pb, auch in der Hitze geringe Verdampfung).

Die BUNSEN'sche Wasserluftpumpe[7]) ist ganz analog wie die SPRENGEL'sche Pumpe construirt. Sie kann übrigens aus leicht ersichtlichen Gründen einen hohen Verdünnungsgrad nicht erzielen, ist dagegen als Apparat zur Luftverdünnung in geringem Maasse, zum Durchsaugen von Luft, zum Filtriren, Trocknen u. s. w. sehr wichtig und bequem für physikalische und chemische Laboratorien; durch Schläuche kann sie direkt mit der Wasserleitung einerseits und dem betreffenden Apparat andererseits verbunden werden. Auf zahlreiche ähnliche Apparate, wie die Wasserstrahlpumpe von ARZBERGER (s. z. B. SCHREIBER, Handb. d. bar. Höhenmess., pag. 306), die Aspiratoren, Aeolus, Wassertrommelgebläse, die Apparate von DE ROMILLY, LUX, ALVERGNIAT u. s. w. kann hier nicht eingegangen werden (s. a. w. u.).

Combination von Pumpen verschiedener Systeme. Zum Zwecke der Erhöhung der Leistungsfähigheit oder Erleichterung und Beschleunigung des Betriebes hat man vielfach Pumpen construirt, die Combinationen verschiedener Pumpen bilden. Namentlich sind zu nennen: 1) Die POGGENDORFF'sche Quecksilberpumpe[8]), bei welcher das Heben und Senken des unteren Gefässes einer Quecksilberluftpumpe durch Anwendung einer Kolbenluftpumpe unnöthig gemacht wird. Das obere Gefäss reicht nämlich mit einer Röhre luftdicht tief in das untere hinab, die Lufträume beider können abwechselnd mit einer Kolbenluftpumpe evacuirt werden; wird das obere evacuirt, so steigt das Quecksilber in ihm auf; wird dann das untere evacuirt, so sinkt es wieder herab, und das entstehende Vacuum kann man mit dem Recipienten verbinden. Wie die POGGENDORFF'sche zur GEISSLER'schen, so verhält sich die NEESEN'sche Luftpumpe[9]) zur TOEPLER'schen; die Verdichtung resp. Verdünnung der Luft durch eine ge-

---

1) SPRENGEL, J. Chem. Soc. (2) 3, pag. 9. 1865.
2) GIMINGHAM, Proc. R. Soc. 25, pag. 396. 1877.
3) MACALUSO, Appendice alle Mem. di Spettr. It. 8, pag. 3. 1879; Bbl. 4, pag. 516. 1880.
4) JOANNIS, Ann. de Ch. Phys. (6) 11, pag. 285. 1887.
5) MAXWELL und HUGHES, Z. f. Instr. K. 1887, pag. 367.
6) HANNAY, Phil. Mag. (5) 13, pag. 229. 1882.
7) BUNSEN, DINGL. Pol. Journ. 195, pag. 34. 1870.
8) POGGENDORFF, POGG. Ann. 125. 1864.
9) NEESEN, Z. f. Inst. K. 2, pag. 285. 1882; u. 3, pag. 245. 1883; 9, pag. 343. 1889 (frühere Mitth. in WIED. Ann. 3, pag. 608. 1878 u. 11, pag. 522. 1880).

wöhnliche Pumpe braucht hier nur im unteren Gefäss zu erfolgen. Die Pumpe von v. BABO [1]) ist eine Combination der SPRENGEL'schen mit einer Wasserluftpumpe. Um ferner das Mitreissen von Luft aus dem Gefäss, aus welchem bei der SPRENGEL'schen Pumpe das Quecksilber kommt, zu verhüten, pumpt man nach ROOD [2]) dieses Gefäss selbst mittelst einer leistungsfähigen Pumpe aus. In ähnlicher Absicht ist die Pumpe von BOTTOMLEY [3]) construirt. Bei verschiedenen dieser Pumpen ist ferner mit Erfolg versucht worden, die Quecksilberdämpfe durch absorbirende Substanzen unschädlich zu machen. Endlich ist auf eine eigenthümliche Luftpumpe von KRAVOGL [4]) hinzuweisen, bei welcher der Kolben einer gewöhnlichen Luftpumpe von Quecksilber umgeben ist und dieses im Stiefel vor sich hertreibt [5]).

Vergleichung von Verdünnungsgrenzen. Die folgende Tabelle giebt für verschiedene Pumpen die erreichbare Grenze in milliontel Atmosphären Druck und in *mm* Quecksilberhöhe (beidemal in runden Zahlen); man erkennt aus ihr die grosse Ueberlegenheit der hydromechanischen über die Kolbenluftpumpen und die besondere Vorzüglichkeit der Pumpen von TOEPLER-HAGEN, SPRENGEL-GIMINGHAM und SPRENGEL-ROOD.

Pumpe	Milliontel Atmosphären	*mm*
Wasserluftpumpe	14000	10
DELEUIL'sche Kolbenpumpe	7000	5
Gewöhnliche Kolbenpumpe	1200	1
Kolbenluftpumpe, mit Ventilen und BABINET'schem Hahn	500	0·4
Hahnluftpumpe mit GRASSMANN'schem Hahn . . .	300	0·2
Vollkommenste Kolbenluftpumpe	150	0·1
Aeltere GEISSLER'sche Pumpe	145	0·1
KRAVOGL's Kolben-Quecksilberpumpe	50	0·04
Neuere GEISSLER'sche Pumpe	12	0·01
SPRENGEL'sche Luftpumpe	1	0·0008
SPRENGEL-GIMINGHAM'sche Pumpe	0·06	0·000045
TÖPLER-HAGEN'sche Pumpe	0·015	0·000012
SPRENGEL-ROOD'sche Pumpe	0·005	0·000004

Die Messung so überaus kleiner Drucke kann natürlich nicht direct erfolgen, vielmehr sind hierzu besondere Apparate construirt und mit den betreffenden Pumpen verbunden worden. Es sei hier beispielsweise auf die Einrichtungen von MAC LEOD [6]), TÖPLER [7]), RAMSBOTTOM und LEWIS [8]) hingewiesen.

Schliesslich kann man die Frage aufwerfen, ob, wenn die Luft aus Molekeln besteht, die leistungsfähigsten Pumpen es dahin bringen, dass in endlichen, d. h. sichtbaren Räumen, nur noch wenige Molekeln sich befinden. Da nun nach der kinetischen Gastheorie in einem *cmm* Luft sich etwa 20000 Billionen Molekeln befinden, erhält man für den Raum von $(0{\cdot}1\ mm)^3$, d. h. den kleinsten,

1) v. BABO, Ber. d. Nat. Ges. Freiburg 2. 1879.
2) ROOD, Sill. J. (3) 20, pag. 57. 1880, u. (3) 22, pag. 90. 1881.
3) BOTTOMLEY, Rep. Brit. Ass. 1886, pag. 519.
4) v. WALTENHOFEN, Wien. Ber. 44 (2), pag. 603. 1861. POGG. Ann. 117, pag. 606. 1862.
5) Eine recht eingehende Monographie über Quecksilberpumpen ist die von S. P. THOMPSON (J. Soc. of Arts 1888).
6) MAC LEOD, Phil. Mag. (4) 48, pag. 110. 1874.
7) TÖPLER, s. BESSEL-HAGEN, a. a. O., pag. 434.
8) LEWIS, Chem. News. 47, pag. 55. 1883.

mit blossem Auge wahrnehmbaren Raum, bei 100 Millionen Verdünnung immer noch 200000 Molekeln, also die Verneinung obiger Frage. Anders unter dem Mikroskop, wo man ein *cbμ*, d. h. den Raum (0·001 *mm*)^3 noch unterscheiden kann, also einen Raum, von welchen erst fünf zusammen eine Molekel enthalten.

Experimente unter der Luftpumpe. Von ihren wissenschaftlichen und technischen Anwendungen abgesehen ist die Luftpumpe zur Demonstration zahlreicher, von der Luft, ihrer Dichte, ihrem Druck, ihrem Sauerstoffgehalt u. s. w. abhängiger Erscheinungen geeignet. Die Betrachtung dieser Erscheinungen erfolgt sachgemäss am besten an den betreffenden Stellen; es seien hier aber wenigstens einige der wichtigeren genannt: Magdeburger Halbkugeln. Die originalen, von Guericke 1654 in Regensburg demonstrirten, bildeten eine Hohlkugel von 70 *cm* Durchmesser und liessen sich erst durch je 12 nach beiden Seiten ziehende Pferde trennen, und auch die weit kleineren, jetst meist üblichen, bieten der Trennung durch zwei Menschen erhebliche Schwierigkeiten dar. Hängt man die ausgepumpte Kugel auf und Gewichte an sie, bis die untere Halbkugel losreisst, so kann man den Luftdruck bestimmen und mit dem aus der Oberfläche der Kugel berechneten vergleichen. Gewichtsverlust der Körper in Luft (s. ob. pag. 529). — Zerdrückung einer Membran oder einer Glasscheibe durch einseitigen Luftdruck. — Quecksilberregen (Durchpressung von Quecksilber durch Holz unter einseitigem Luftdruck). — Aufblähung eines Luftballons. — Anschwellen von Seifenschaum. — Der Heber (s. u.) hört auf zu fliessen; der Heronsball (s. u.) fängt an zu springen. — Gleich schnelles Fallen aller Körper im leeren Raum (pag. 108). — Lange Dauer der Kreiselbewegung (bis zu 3 Stunden). — Ein in Schwung gesetztes Flügelrädchen dreht sich in der Luft sehr viel länger, wenn die Flügelebenen in der Drehungsebene, als wenn sie senkrecht dazu stehen; unter der Luftpumpe dauert die Drehung in beiden Fällen gleich lange. — Aus Selterwasser, Bier u. s. w. entweicht die Kohlensäure mit Aufschäumen. — Laues Wasser siedet. — Kühles Wasser, bei Anwesenheit von Schwefelsäure, verdunstet so rasch, dass es weit über 0° gefriert. — Der Schall einer Glocke wird mit zunehmender Luftverdünnung immer schwächer und zuletzt unhörbar. — Die Verbrennung hört sofort auf u. s. w.

Compressionspumpen. Die einfachste Methode, um stark komprimirte Gase zu erhalten, ist jedenfalls die, sie von vornherein in beschränktem Raum in grosser Menge sich aus den sie entwickelnden Substanzen bilden zu lassen. Derartige Apparate, unter denen der von Thilorier der bekannteste ist, müssen aber sehr widerstandsfähig gearbeitet sein und mit grösster Vorsicht gehandhabt werden — eine Bemerkung, die übrigens mehr oder weniger auch für die folgenden Apparate gilt. Ein anderer, in gewissen Fällen geeigneter und neuerdings viel benutzter Apparat ist das bereits besprochene Piezometer (pag. 356). Ferner sind, was ohne weiteres einleuchtet, die Hahnluftpumpen, wenn man nur die Hähne jedesmal umgekehrt stellt, als Compressionspumpen zu gebrauchen. Bei den Ventilpumpen ist dies nicht der Fall, es muss vielmehr hier die constructive Aenderung getroffen werden, dass alle Ventile sich in entgegengesetztem Sinne wie dort öffnen. Ausserdem ist ganz allgemein zu bemerken, dass dem Zwecke der Verdichtung entsprechend, Compressionspumpen, die nur als solche dienen sollen, im einzelnen anders gebaut werden müssen als Luftpumpen, wenn sie bequem und leistungsfähig sein sollen. Als Recipient ist ein starkwandiges Gefäss zu wählen, welches den höchsten zu erreichenden Druck noch gut auszuhalten im Stande ist, nicht nur, ohne zu zerspringen, sondern auch ohne wesentlich deformirt zu werden (was freilich für die

grössten, in neuester Zeit erzielten Drucke kaum noch möglich ist); wählt man zu Demonstrationszwecken Teller und Glocke, so genügt es nicht, letztere aufzusetzen und mit Fett zu dichten, sondern sie muss fest, am besten zwischen zwei Platten, eingeschraubt sein, überdies aber hinreichende Wandstärke haben. Der Stiefel muss von geringem Querschnitt sein, da die zu überwindende Druckdifferenz, die bei Luftpumpen höchstens 1 Atm. beträgt, hier sehr viel grösser wird und somit das Einstossen des Kolbens nach den ersten Zügen einen grossen und immer wachsenden Kraftaufwand erfordert; da nun andererseits, im Interesse raschen Wirkens, der Stiefel auch hier nicht klein im Vergleich mit dem Recipienten sein darf, so muss man ihn möglichst lang wählen. Im übrigen gilt alles bei den Kolbenluftpumpen Gesagte hier in umgekehrter Weise, betreffend den schädlichen Raum, die Ueberdrucke, die Grenze der Verdichtung, die Zahl und Wirkungsweise der Stiefel u. s. w.; nur haben sich zweistiefelige Compressionspumpen bisher, wie es scheint, nicht sonderlich bewährt.

Kleine Compressionspumpen bestehen aus starkwandigen Eisen- oder Messingröhren und haben entweder am Boden einen Hahn zur Verbindung resp. Trennung von Stiefel und Recipient und in der Nähe des anderen Endes eine Oeffnung ins Freie; oder sie haben am Boden zwei Ventile, deren eines, mit der freien Luft oder dem das zu comprimirende Gas enthaltenden Reservoir verbunden, nach oben, deren anderes, mit dem Recipienten communicirendes, nach unten aufgeht; sie werden mit der Hand hin- und hergesteuert. Grössere Pumpen sind mit Schubstange, Kurbel und Schwungrad versehen und können eventuell auch mechanisch betrieben werden; bei den technischen Zwecken dienenden ist für eine praktische Verbindung mit dem Recipienten derart, dass derselbe sich leicht lösen und sicher versenden lässt, durch verschiedene Einrichtungen gesorgt worden. Einer der bekanntesten unter den älteren Apparaten ist die Compressionsmaschine von NATTERER, neuerdings von STÜCKRATH[1]) vervollkommnet. Unter den neueren ist diejenige von CAILLETET[2]) hervorzuheben; der schädliche Raum ist hier dadurch vermieden, dass der Kolben mit einer ziemlich beträchtlichen Quecksilberschicht bedeckt ist, wodurch zugleich ein besonders guter Verschluss erzielt wird; nur muss man statt der gewöhnlichen Schmierfette des Quecksilbers halber Vaseline anwenden. Die Leistungsfähigkeit dieser Maschine erstrekt sich bis zu 200 Atmosphären.

Die meisten Compressionspumpen finden nicht nur zur Erzeugung stark comprimirter Gase, sondern und ganz besonders auch zu ihrer Verflüssigung Anwendung und heissen dann auch Condensationspumpen; in grossem Maassstabe wird namentlich flüssige Kohlensäure fabricirt. Für die verschiedenen Gase sind zur Verflüssigung sehr verschiedene Drucke erforderlich, z. B. für schweflige Säure 1·5, für Ammoniak 4·4, für Schwefelwasserstoff 10, für Kohlensäure 37 Atm. Diese Zahlen gelten überdies nur für die Temperatur von 0°, für andere Temperaturen gelten andere Zahlen, und oberhalb einer gewissen, für jedes Gas verschiedenen Temperatur bringt kein noch so grosser Druck die Condensation hervor; liegt jene Temperatur wie bei Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff u. s. w. sehr tief, so muss man zum Zwecke der Condensation gleichzeitig hohe Drucke und tiefe Temperaturen wirken lassen; die Unterlassung des letzteren hat bis in die neueste Zeit zu der Annahme geführt, dass diese Gase nicht condensirbar seien. Das Weitere gehört, wie man sieht, in die Wärmelehre.

---

[1]) STÜCKRATH, Z. f. Instr. K. 1882, pag. 238.

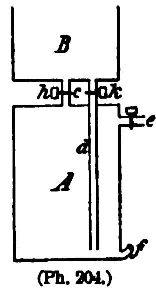
[2]) CAILLETET, Compt. rend. 94, pag. 623. 1882.

Andere aëromechanische Apparate und Maschinen.

Von den aërostatischen oder auch sog. pneumatischen Apparaten und Maschinen, die also ihrer Grundlage oder ihrem Zwecke nach mit dem Gleichgewicht, dem Druck und der Bewegung der Gase zu thun haben, können hier nur einige wenige und auch diese nur ganz kurz angeführt werden.

MARIOTTE'sche Flasche. Sie besteht aus einer grösseren Theils mit einer Flüssigkeit gefüllten Flasche. Am Boden hat sie eine seitliche Ausflussöffnung, in die Oeffnung am Halse ist luftdicht eine Röhre eingesetzt, welche ein Stück weit in die Flüssigkeit hineinragt. Fliesst diese aus, so sinkt zwar ihr Niveau im Gefäss allmählich, in die Röhre wird aber die äussere Luft bis ans Ende hineingedrückt, steigt in Blasen in die Flasche auf, und der die Ausflussgeschwindigkeit bestimmende Druck ist stets der von der Säule vom Ende der Röhre bis zum Ausflussniveau herrührende; er, also auch die Ausflussgeschwindigkeit ist daher constant, und dieser constante Werth kann durch Stellung der Röhre grösser oder kleiner gewählt werden. Diese und ähnliche Einrichtungen werden überall da, wo Druck und Geschwindigkeit während einiger Zeit constant erhalten werden sollen, in den Kreis der Versuchsapparate geeignet eingeschaltet.

Gasometer. Die grossen, in der Praxis dienenden Gasometer wirken ganz analog wie die MARIOTTE'sche Flasche, nur die Form und Bestimmung sind andere. In einen oben offenen Cylinder taucht eine cylindrische Glocke; auch hier würde das im Cylinder enthaltene Wasser constant ausfliessen. Statt dessen führen durch das Wasser in die Glocke hinein zwei Röhren, eine zum Füllen mit Gas, die andere zur Fortleitung desselben; je nach dem Gasinhalt steht die Glocke höher oder tiefer, und ihr Gewicht drückt das Gas zusammen. Auch im kleinen werden derartige Gasometer hergestellt und benutzt; üblicher ist aber ein etwas anders construirter Apparat. Auf den Deckel eines hohen Cylinders *A* ist mittelst Stäben ein zweiter, kürzerer, oben offener, *B*, aufgesetzt; von ihm ragt eine Röhre *c* bis an das untere Gefäss, eine zweite *d* bis fast an seinen Boden; sie können durch die Hähne *h* und *k* verschlossen werden; das Gefäss *A* hat oben die Hahnöffnung *e*, unten die nach oben gerichtete Pfropfen-Oeffnung *f*. Bei geschlossenem *f*, offenem *eh* und *k* füllt man durch *B* Wasser ein, bis *A* gefüllt ist. Nun schliesst man *h* und *k*, füllt *B* mit Wasser, und leitet bei *f* das Gas durch ein gebogenes Rohr ein, welches dem verdrängten Wasser nebenher auszufliessen gestattet. Nun schliesst man *f*, öffnet *k*, das aus *B* herunterfliessende Wasser comprimirt das Gas, und man kann es mit dem gewünschten Druck bei *c* ausfliessen lassen oder durch *h* in ein über *B* gestülptes Gefäss füllen.



(Ph. 204.)

Druckregulatoren. Zur möglichst exakten Constanterhaltung des Druckes sind noch zahlreiche andere Apparate construirt worden, die zum Theil auch mit den obigen oder unter einander combinirt werden.

Pneumatische Wanne. Wenn man ein Gas aus dem Apparat, in welchem man es entwickelt hat, in ein mit Luft gefülltes Gefäss treten lässt, so erhält man es nicht rein, sondern mit Luft gemischt. Man füllt daher eine offene Wanne und ein Gefäss mit kleiner Oeffnung, z. B. eine einseitig offene Röhre mit der sogen. Sperrflüssigkeit (Quecksilber, Wasser u. s. w.), taucht die Röhre, sie mit dem Finger verschliessend, in die Wanne, nimmt den Finger fort und führt mittelst gebogener Röhre das Gas in das obere Gefäss in Bläschenform und unter allmählicher Verdrängung der Flüssigkeit ein; Bedingung ist, dass der

Druck im Entwickelungsapparat grösser ist als der der emporragenden Sperrflüssigkeitssäule.

Heber. Der einfachste dieser zur Entnahme von Flüssigkeiten aus Gefässen resp. Entleerung derselben dienenden Klasse von Apparaten ist der Stechheber, ein oben und unten offenes und enges, in der Mitte erweitertes Gefäss, das man in die Flüssigkeit taucht, und, es oben mit dem Finger verschliessend, wieder heraushebt; die Flüssigkeit kann dann unten nicht ausfliessen. Wichtiger ist der Saugheber, auch schlechtweg Heber genannt. Es ist eine aus zwei ungleichen Schenkeln bestehende, gebogene Röhre, die mit dem kürzeren Schenkel in die Flüssigkeit getaucht und an dem Ende des längeren angesaugt wird; falls und so lange dies Ende tiefer steht als das Niveau der Flüssigkeit, fliesst dieselbe aus; Bedingung ist, dass die höchste Stelle, also die Biegung des Hebers, nicht höher über dem Flüssigkeitsspiegel liege, als die Höhe der dem Luftdruck entsprechenden Säule der betreffenden Flüssigkeit, also bei Quecksilber höchstens 750 *mm*, bei Wasser höchstens 10 *m*. Um das Ansaugen zu ersparen, bringt man kurz über dem Saugende ein nach oben gehendes, in der Mitte kugelig erweitertes Glasrohr an, an dessen Ende man dann bequemer und gefahrloser saugen kann (Giftheber). Bei leichtflüssigen Flüssigkeiten setzt man dieses Rohr nicht einfach an, sondern lässt es in den an dieser Stelle erweiterten Schenkel mit einer offenen Spitze hineinragen; man braucht dann am oberen Ende des Ansatzrohres nur zu blasen und bekommt keine Dämpfe in den Mund. Beim französischen Heber, der auch andere Namen hat, ist der Uebelstand, dass der Heber beim Herausheben nach beendigter Thätigkeit ausläuft, durch Umbiegen der Enden nach oben resp. beim äusseren Ende nach oben und wieder nach unten, beseitigt.

Heronsball, ein z. Thl. mit Wasser gefülltes Gefäss mit luftdicht eingesetzter Röhre, aus welcher bei Erhöhung des inneren oder Herabminderung des äusseren Luftdrucks das Wasser als Strahl emporspritzt. Die Verdünnung der äusseren Luft findet statt, wenn man den Heronsball unter die Luftpumpe bringt. Die Compression der inneren Luft kann auf verschiedene Weise erfolgen; beim Heronsbrunnen z. B. erfolgt sie durch den Druck einer Wassersäule.

Andere Apparate dieser Art sind die Waschflasche, die Spritzflasche, die bekannte Oellampe, das verschlossene Dintenfass, die Siphonflasche, der Zauberbecher, der intermittirende Brunnen, die verschiedenen Aspiratoren, der Aeolus u. s. w.

Gebläse. Das einfachste ist der gewöhnliche Blasebalg, dessen Beschreibung sich erübrigt. Der einfache Blasebalg giebt nur einen intermittirenden Luftstrom, nämlich nur beim Niedergange des Deckels; um einen continuirlichen zu erhalten, muss man zwei Luftkammern, und ausser dem Saugventil am Boden noch ein Druckventil in der Scheidewand anwenden. Grössere derartige Bälge sind an Blasetischen befestigt. Andere trockene Gebläse sind die Cylindergebläse und die Ventilatoren oder Centrifugalgebläse. Den trockenen Gebläsen stehen die hydraulischen (Glockengebläse, Wassertrommelgebläse u. s. w.) gegenüber. Ein ähnlicher Apparat ist endlich das Löthrohr, bestimmt zur Erzeugung einer Stichflamme durch Blasen mit dem Munde.

Saug- und Druckpumpen. Sie dienen zur Hebung des Wassers aus der Tiefe. Die Saugpumpe besteht aus Stiefel und Kolben mit Druckventil, dem mittelst des Saugventils unten sich anschliessenden Saugrohr, das in das Grundwasser reicht, der Ausflussöffnung und dem zur Bewegung des Kolbens mit der Hand oder Dampf dienenden Mechanismus. Beim Aufsteigen des Kolbens öffnet

sich das Saugventil, und das Wasser tritt in den unteren Stiefelraum: beim Sinken des Kolbens öffnet sich das Druckventil, das Wasser gelangt in den oberen Stiefelraum und fliesst aus der Oeffnung aus. Die aufzuwendende Kraft ergiebt sich gleich dem Gewicht einer Wassersäule vom Querschnitt des Stiefels und der Höhe vom Grundwasserspiegel bis zur Ausflussöffnung. Die ersten Gänge bringen gewöhnlich noch kein Wasser zum Ausfluss, bei den folgenden ist die Ausflussmenge gleich dem Produkt des Stieielquerschnitts und der Länge der Kolben bahn. Das Bodenventil darf theoretisch höchstens 10 *m*, praktisch aber meist nur 6—9 *m* über dem Wasserspiegel liegen. Bei der Druckpumpe ist der erste Theil der Wirkung derselbe; beim Niedergang des Kolbens aber, der hier massiv ist, wird das Wasser in ein vom unteren Theil des Stiefels ausgehendes, mit Ventil versehenes Steigrohr gepresst und aus diesem ins Freie gefördert. Aehnlich wie bei den Luftpumpen giebt es auch doppelt wirkende Druckpumpen, deren beide Hälften abwechselnd wirken und bei denen zur gleichmässigeren Gestaltung der Wirkung ein als Heronsball fungirender Windkessel hinzugefügt ist. Eine derartig eingerichtete Pumpe ist z. B. die Feuerspritze. Eine sehr eigenthümliche, nämlich ganz ohne Kolben, nur durch Dampfdruck wirkende Pumpe ist das von HALL in Newyork erfundene Pulsometer.

Windbüchse und Feuerbüchse. Der aus starkem Eisenblech bestehende Kolben der Windbüchse wird mit einer Compressionspumpe geladen und dann mit dem die Kugel enthaltenden Lauf zusammengeschraubt; wird durch einen Drücker das trennende Ventil geöffnet, so fliegt die Kugel heraus. Beim Feuergewehr wird der Gasdruck durch Verbrennung des Pulvers erzeugt. Während bei der Windbüchse der Druck höchstens auf 30 Atm. gesteigert werden kann, erhält man beim Feuergewehr mit Berücksichtigung der Temperatur und unter Abzug der unvermeidlichen Verluste mit Leichtigkeit 300 Atm., also das Zehnfache.

Bathometer. Auf dem Princip der Compression der Luft durch Wasserdruck beruhen einige Apparate zur Messung der Tiefe von Gewässern. Ein Gefäss hat unten eine Oeffnung mit Stöpsel und weithineinreichender Capillare. Ist P_0 das Gewicht leer, P_2 das Gewicht mit Wasser, P_1 das Gewicht mit soviel Wasser, als sich beim Emporziehen aus der Tiefe T vorfindet, und B der Stand des Wasserbarometers, so hat man

$$T = B\frac{P_1 - P_0}{P_2 - P_0}.$$

Bei der viel einfacheren Lothmaschine von W. THOMSON erspart man die Wägungen ganz; das Gefäss besteht in einer unten offenen Röhre, die Höhe, bis zu welcher beim Hinablassen das Wasser in sie gedrungen ist, wird durch Farbänderung der präparirten Innenwand nachgewiesen und aus dieser die Tiefe berechnet.

Anemometer. Diese Apparate sind zur Messung der Richtung und Stärke des Windes bestimmt, können aber, eventuell mit gewissen Abänderungen, unter Umständen auch für künstliche Luft- oder Gasströme Anwendung finden. Zur Bestimmung der Richtung des Windes dient die um die vertikale Axe drehbar aufgestellte Windfahne, für welche die Keilform am günstigsten zu sein scheint; an derselben Axe ist etwas tiefer ein fester, die Himmelsrichtung angebender Kranz von Stäben befestigt. Zur Messung der Windgeschwindigkeit dient am häufigsten das Schalenkreuz, bestehend aus vier an den Enden von Stäben angebrachten, in gleichem Sinn gestellten, hohlen Halbkugeln, deren Umdrehungszahl für einen bestimmten Zeitraum von einem Zifferblatt abgelesen werden kann.

Sowohl für die Windrichtung, als für die Windgeschwindigkeit besitzt man gegenwärtig auch registrirende Apparate, Anemographen, unter denen die von BECKLEY-CASELLA und HARDY die verbreitetsten, der von SIEMENS[1]) der neueste ist. Zur Messung des Winddrucks dient am einfachsten die WILD'sche Windplatte, die mit der Windfahne so verbunden ist, dass sie stets dem Winde die volle Fläche darbietet, durch den Winddruck aber um ihre obere Kante gedreht und somit mehr oder weniger geneigt werden kann; an einem getheilten Bogen liesst man den Winddruck ab. Geschwindigkeit und Druck des Windes stehen offenbar in eindeutiger Beziehung zu einander, und die neueste bezügliche Formel, die von FERREL[2]), lautet, wenn b und t Luftdruck und Temperatur und b_0 mittleren Luftdruck bedeutet:

$$P = \frac{0\cdot002698\,V^2}{1+0\cdot004\,t}\,\frac{b}{b_0};$$

also z. B. für $b = b_0 = 760\ mm$ und $t = 15°$: $P = 0\cdot00255\,V^2$; indessen ist dieses Problem noch nicht als endgiltig gelöst anzusehen.

Empirisch hat man für eine Windplatte von den günstigsten Dimensionen, nämlich 30 *cm* Länge, 15 *cm* Breite und 250 *gr* Gewicht folgende entsprechende Werthe ermittelt:

Windgeschwindigk. in *m/sec*	1	2	3	4	6	8	10	12	14
Neigungswinkel	2·0°	7·0°	14·0°	22·8°	42·3°	62·0°	69·9°	74·2°	77·0°.

Betriebe durch Gasdruck. Die wichtigsten, resp. historisch interessantesten sind: 1) Die Gaskraftmaschine (Druck durch Explosion resp. Verbrennung eines Gemisches von Leuchtgas und Luft erzeugt). 2) Atmosphärische Eisenbahn. 3) Rohrpost (bei beiden Bewegung eines Kolbens durch comprimirte Luft). 4) Druckluftvertheilung. 5) Windmühlen und andere Anemomotoren.

Aërodynamik.

Ausströmen der Gase. Der Ausgangspunkt ist ganz derselbe wie bei Flüssigkeiten (pag. 404); nur ist hier p nicht von ρ unabhängig, vielmehr besteht zwischen ihnen eine Beziehung, die am einfachsten, nämlich $p = a^2\rho$, wird, wenn die Temperatur sich soweit ausgleichen kann, dass sie überall dieselbe ist, was bei langsamerem Ausströmen der Fall sein wird. An die Stelle des dortigen Gliedes p/ρ in Gleichung (3) tritt also $\int\frac{dp}{\rho} = a^2 \log p$. Dafür kann man hier die Wirkung der Schwere gänzlich vernachlässigen und erhält für stationären Bewegungszustand die der dortigen Gleichung (4)[3]) entsprechende Gleichung für die Ausflussgeschwindigkeit (in *m*):

$$v = a\sqrt{\frac{2\log\frac{p_1}{p'}}{1-\left(\frac{q'\rho'}{q_1\rho_1}\right)^2}},$$

und die Ausflussmenge

$$M = \rho' q' v = \rho_0' q' v \frac{p'}{0\cdot76}\,\frac{1}{1+\alpha t},$$

wo $p_1 q_1 \rho_1$ für das Gefäss, $p' q' \rho'$ für den Gasstrahl im contrahirten Querschnitt (pag. 407) gelten, ρ_0' sich auf 0° und 760 *mm* Druck bezieht und t die Tempe-

1) W. SIEMENS, s. A. KÖPSEL, Z. f. Instr. K. 1887, pag. 14.

2) FERREL, Amer. Met. J. 1887, pag. 173.

3) Daselbst muss v^2 statt v_2 gelesen werden.

ratur ist. Früher hat man hierin $p' = p_2$, d. h. gleich dem Druck im äusseren Raume gesetzt; dass dies nicht zulässig ist, geht schon daraus hervor, dass alsdann für $p_2 = 0$, also für das Ausströmen in den leeren Raum, $v = \infty$ werden würde. Für rasches Ausströmen, wobei die Temperatur sich überhaupt nicht ausgleicht, sondern an jeder Stelle nur von den dortigen Vorgängen abhängt, ergiebt sich diese Folgerung nicht; es wird nämlich, wenn $\varkappa$ das Verhältniss der specifischen Wärmen (s. Wärmelehre) ist,

$$v^2 = \frac{2\varkappa p_1^{1/\varkappa}\left[p_1^{(\varkappa-1)/\varkappa} - p'^{(\varkappa-1)/\varkappa}\right]}{(\varkappa-1)\rho_1\left[1 - \left(\frac{q'}{q_1}\right)^2\left(\frac{p'}{p_1}\right)^{2/\varkappa}\right]},$$

und somit für $p_2 = p' = 0$

$$v = \sqrt{\frac{2\varkappa p_1}{(\varkappa-1)\rho_1}},$$

also von endlicher Grösse. Elementar kann man v ableiten, indem man sich in der Formel $v = \sqrt{2gh}$, wobei der meist kleine Oeffnungs- resp. Strahlquerschnitt vernachlässigt ist, die Druckhöhe h als Quotient des inneren Ueberdrucks durch die Gasdichte auffasst; es wird hierdurch $v = \sqrt{2(p_1 - p)/\rho_1}$, also speciell für das Ausströmen ins Vacuum $v = \sqrt{2p_1/\rho_1}$. Für Luft von 0°, die unter dem Druck von 1 Atm. stehend, ins Vacuum strömt, giebt dies $v = a\sqrt{2} = 396$ *m*.

Das complicirtere Problem des nicht stationären, also variablen Ausflusses der Gase hat Haton de la Goupillière[1]) untersucht, und zwar wiederum für beide thermischen Grenzfälle. Dieses Problem gestaltet sich ganz verschieden, je nachdem das Gas aus einem Gefäss von constantem Druck in ein Gefäss strömt, in dem der Druck dadurch allmählich bis zu demselben Werthe steigt, oder aber aus einem Gefäss ausströmt, in welchem der Druck allmählich bis auf den Werth sinkt, der dauernd in dem Gefässe herrscht, in welches das Gas einströmt; ersterer Fall ist allgemein lösbar und liefert u. a. die zum Füllen eines Gefässes nöthige Zeit, letzteres ist nur in bestimmten Fällen lösbar und giebt dann die zur Entleerung eines Gefässes erforderliche Zeit.

In neuester Zeit hat sich über die Theorie des Ausströmens der Gase und insbesondere über die Frage, wie sich der Druck p' im contrahirten Querschnitt zum inneren und äusseren Druck p_1 und p_2 verhalte, eine sehr ausgedehnte Diskussion zwischen Hirn, Hugoniot, Parenty, Sandrucci u. A.[2]) entwickelt, welche, soweit sie sich nicht auf die mechanische Wärmetheorie und die kinetische Gastheorie bezieht, von Hugoniot im wesentlichen durch den Nachweis erledigt worden ist, dass, wenn bei einem Falle stationären Ausströmens $p_2 > \beta p_1$ ist, die Gleichung $p' = p_2$, dass dagegen, wenn $p_2 < \beta p_1$ ist, die Gleichung $p' = \beta p_1$ gilt, und hierin ist für die beiden thermischen Grenzfälle

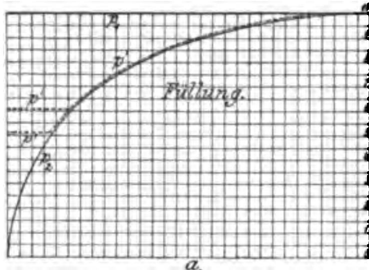
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0{\cdot}607 \quad \text{resp.} \quad \beta = \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)} = 0{\cdot}522,$$

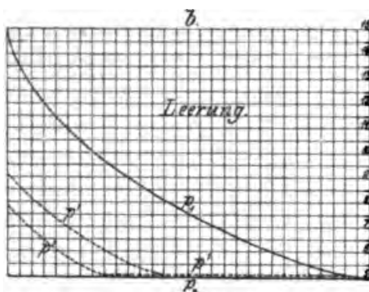
wo die Zahlenwerthe für Luft und ähnliche Gase gelten, für die $\varkappa = 1{\cdot}4$ ist. Ist der Ausfluss variabel, und zwar so, dass, bei constantem p_1, p_2 von 0 auf p_1 zunimmt (Füllung eines Gefässes mit Gas), so fängt p' gleich mit dem Werthe βp_1 an, bleibt zunächst constant so gross, und erst wenn p_2 diesen Werth er-

[1]) Haton de la Goupillière, Compt. rend. 103, pag. 661 u. 709. 1886.

[2]) Hirn, Mém. Ac. Belg. 46. 1886; Ann. de Ch. Phys. (6) 9. 1886. — Hugoniot, Compt. rend. 102, pag. 1545 u. 103, pag. 241. 1886. — Reynolds, Phil. Mag. (5) 21, pag. 185. 1886. — Parenty, Compt. rend. 103, pag. 125. 1886. — Sandrucci, N. Cim. (3) 20, pag. 193. 1886.

reicht hat, nimmt p' identisch mit diesem bis auf p_1 zu; ebenso nimmt, wenn, bei constantem p_2, p_1 von einem hohen Werth auf p_2 abnimmt (Entleerung eines Gefässes), p' zunächst nach der Gleichung $p' = \beta p_1$ mit p_1 ab; hat aber p_1 den Werth p_2/β und somit p' den Werth p_2 erreicht, so bleibt bei weiterem Abnehmen von p_1 nun p' constant $= p_2$. Mit anderen Worten: p' kann nie kleiner als βp_1 sein; so weit diese Bedingung es erlaubt, ist es gleich p_2. Zur Veranschaulichung dienen Fig. 205 *a* und *b*; die Zeit ist die Abscisse, die Curven für p_1 und p_2 sind voll ausgezogen, die für p' (in beiden thermischen Grenzfällen) gestrichelt. Die hiernach erforderlichen Modificationen der HATON-schen Lösungen hat HUGONIOT[1]) ebenfalls berechnet. Schliesslich ergiebt sich, wie man einsieht, für die Ausflussgeschwindigkeit ein analoges Verhalten.





(Ph. 205.)

Die obigen Formeln enthalten einige interessante Sätze, deren wichtigster dieser ist: Die Ausflussgeschwindigkeiten zweier Gase verhalten sich bei gleichen Drucken umgekehrt, die Ausflussmengen direkt wie die Wurzeln aus ihren Dichten. Dieser Satz ist von GRAHAM und BUNSEN[2]) experimentell bestätigt worden. Während also Luft mit 396 *m* Geschwindigkeit ins Vacuum strömt, werden die entsprechenden Zahlen für Wasserdampf 502, für Leuchtgas 499, für Kohlensäure 320 u. s. w. Der Gegensatz, in welchem hiernach die Gase zu den Flüssigkeiten stehen, beruht darauf, dass bei den Gasen der Druck, bei den Flüssigkeiten die Schwere meist die einzige treibende Kraft ist; in Fällen, wo Flüssigkeiten nicht durch die Schwere, sondern durch den Ueberdruck ausfliessen, gilt auch für sie das obige Gesetz (letzte Gleichung auf pag. 404). Die Beobachtungen haben dies Gesetz sogar so genau bestätigt, dass man nach BUNSEN aus den Ansflussgeschwindigkeiten der Gase ihre Dichten in befriedigender Weise berechnen kann.

Beobachtungen über die Abhängigkeit der Ausflussmenge eines und desselben Gases vom Druck sind sehr vielfach ausgeführt worden, insbesondere von KOCH[3]), ST. VENANT und WANTZEL[4]), WEISBACH[5]), ZEUNER[6]), HIRN[7]), WILDE[8])

---

[1]) HATON DE LA GOUPILLIÈRE, Compt. rend. 103, pag. 785 und 925. 1886. — HUGONIOT, Compt. rend. 103, pag. 922 und 1002. 1886.

[2]) GRAHAM, Trans. R. Soc. Edinb. 1834, pag. 222; Phil. Mag. 2, pag. 175. 1833; Trans. R. Soc. Lond. 1846, pag. 573 und 1863, pag. 385. — BUNSEN, Gasometr. Methoden, Braunschw. 1857, pag. 128.

[3]) KOCH, POGG. Ann. 2, pag. 39. 1823.

[4]) ST. VENANT und WANTZEL, Compt. rend. 17. 1843.

[5]) WEISBACH, Experim. Hydraulik, Freiberg 1855, pag. 184.

[6]) ZEUNER, Civilingenieur, 1874.

[7]) HIRN, a. a. O. (s. vor. Seite).

[8]) WILDE, Phil. Mag. (5) 20, pag. 531. 1885, u. 21, pag. 494. 1886. Ausführl. Ref. in WIED. Ann., Beibl. 10, pag. 749. 1886.

und für besonders grosse Ueberdrucke von SALCHER und WHITEHEAD[1]). Aus diesen Versuchen folgen zunächst ähnliche Abweichungen von der Theorie wie bei den Flüssigkeiten (Ausflusscoëfficient[2]), Contraction des Strahls u. s. w.) Aber selbst in Rücksicht hierauf war es schwierig, Formeln aufzustellen, und selbst die beliebteste derselben, die WEISBACH'sche, hat keine allgemeine Bedeutung. Durch die Entdeckung HUGONIOT's ist nun dieser Widerspruch gelöst worden. In der That zeigen alle diese Versuchsreihen, dass, je grösser der Ueberdruck ist, desto grösser die Ausflussgeschwindigkeit ist, aber nur, so lange das Verhältniss beider Drucke den Grenzwerth 0·5—0·6 nicht übersteigt; bei grösseren Ueberdrucken ist die Ausflussgeschwindigkeit constant. Für sehr grosse Ueberdrucke fanden SALCHER und WHITHEAD überdies, dass, je grösser der Ueberdruck, desto grösser das Grenzverhältniss der Drucke ist, bei welchem Constanz des Ausflusses eintritt.

Das Ausströmen von Gasen aus zwei übereinander gelegenen Oeffnungen hat NEYRENEUF[3]) untersucht, er fand u. A., dass bei vermindertem Drucke nur noch durch die obere Oeffnung Gas ausströmt, durch die untere aber Luft von aussen einströmt; und diese Reaction ist so empfindlich, dass sie sich zur Construction eigenthümlicher Flammen-Niveauapparate (»Gaslibelle« u. s. w.) verwenden liess.

Den Ausfluss von Flüssigkeiten aus geschlossenen und zum Theil mit Gas gefüllten Gefässen hat v. SCHAEWEN[4]) theoretisch und experimentell behandelt; die Resultate sind z. B. für die Theorie der MARIOTTE'schen Flasche von Wichtigkeit.

Abfluss durch Röhren. Auch hier haben die Beobachtungen zu ähnlichen Ergebnissen und empirischen Formeln wie bei Flüssigkeiten geführt. Von dem Ueberdrucke P geht ein Theil p' verloren und es bleibt nur übrig

$$p = P - p' = \frac{sv^2}{2g}$$

(s specifisches Gewicht). Erfahrungsgemäss ist der Druckverlust p' der Länge l und dem inneren Umfange der Röhre u, ferner mit v^2 und s direkt, endlich dem Querschnitt q der Röhre umgekehrt proportional; nennt man den Faktor α und die Röhrenweite d, so wird hiernach

$$v = \sqrt{2g\frac{P}{s}\frac{d}{d + 8\alpha gl}};$$

$8\alpha g = \varepsilon$ heisst der Widerstandscoëfficient und ist für Glas etwa 0·022, für Metall 0·024. In neuester Zeit hat BAILLE[5]) interessante Studien über das Ausströmen durch ein langes Rohr von 100 m Länge veröffentlicht.

Atmosphärische Bewegungen. Auf diese der Meteorologie angehörigen Probleme kann hier nur kurz hingewiesen werden. Die Isobaren (pag. 545) sind die Linien gleichen Drucks, also müsste sich die Luft senkrecht zu ihnen, den sogen. Gradienten entlang bewegen. Das ist nicht der Fall, und zwar einmal, weil wir nicht die wahre, sondern die scheinbare Bahn auf der ruhend gedachten Erde beobachten, und sodann, weil die schon vorhandenen Bewegungen, die

[1]) SALCHER und WHITEHEAD, Wien. Ber. 98 (2), pag. 267. 1889.

[2]) Siehe z. B. BUFF, Lehrb. d. phys. Mechanik, 2, pag. 443, für verschiedene Oeffnungen und Ansatzröhren.

[3]) NEYRENEUF, Compt. rend. 90, pag. 1487. 1880; Ann. de Chim. Phys. (5) 25, pag. 167. 1882; Mém. Ac. Caen. 1883, pag. 1.

[4]) v. SCHAEWEN, Rep. d. Phys 18, pag. 141. 1881.

[5]) BAILLE, Journ. de Phys. (2) 8, pag. 29. 1889.

Schwere, die Reibung u. s. w. ablenkend wirken. In ersterer Hinsicht hat man analog zu Werke zu gehen, wie beim FOUCAULT'schen Pendel (pag. 178), und es ist das Verdienst von SPRUNG und ROTH, theoretisch abgeleitet zu haben, wie sich ein Theilchen auf der rotirenden Erde scheinbar bewegen muss, wenn es nur der Trägheit unterworfen ist und wenn Schwere und Reibungswiderstände es beeinflussen. Das Resultat SPRUNG's[1]) ist folgendes: Die »Trägheitsbahn« ist in der Nähe des Nordpols ein rechts herum (am Südpol links herum) in 12 Stunden beschriebener Kreis vom Radius $\rho = v/2\omega$ (v Trägheitsgeschwindigkeit, ω Winkelgeschwindigkeit der Erde), in der Breite $+\varphi$ ein nach rechts beschriebener Kreis mit dem Radius $\rho = v/(2\omega sin\varphi)$, der sich aber, da sich während der Bahn ρ mit φ ändert, nicht schliesst, sodass die Bahn sich in eine immer mehr nach links gerathende Schleifenlinie verwandelt. ROTH[2]) untersucht allgemeinere Fälle und erhält daher auch complicirtere Curven: Kreisevolventen, Spiralen und deren Verzerrungen. In Wahrheit beschreiben die Winde nicht Trägheitsbahnen und folglich stimmen die Beobachtungen zahlenmässig nicht mit der Theorie überein; qualitativ aber wird die Theorie bestätigt: Auf der nördlichen Halbkugel werden die Winde nach rechts vom Gradienten abgelenkt, und zwar desto stärker, je höher die geographische Breite und je kleiner die Reibung ist. Dies ist das sogen. BUYS-BALLOT'sche Gesetz. Sodann handelt es sich darum zu verfolgen, wie zwei an einander vorbeiziehende Luftströme durch Reibung Wirbel und diese wieder durch Centrifugalwirkung Luftverdünnungen erzeugen. Man kommt so auf die theoretische Darstellung der Cyclonen, Tornados, Minima u. s. w. Es erweist sich dabei als nothwendig, die vollständigen Gleichungen der atmosphärischen Bewegungen mit Rücksicht auf Schwere, Reibung, Spannungen und Temperaturunterschiede aufzustellen und zu behandeln. Am einfachsten ist der Fall kreisförmiger concentrischer Isobaren mit einem barometrischen Minimum oder Maximum als Centrum (einfacher Cyclon oder Anticyclon); seiner Lösung haben sich namentlich GULDBERG und MOHN[3]), FERREL[4]), OBERBECK[5]) und MARCHI[6]) gewidmet. In Bezug auf die complicirteren Fälle und die atmosphärischen Bewegungen im allgemeinen muss hier auf die hochinteressanten Abhandlungen von OBERBECK[7]), v. SIEMENS[8]), v. HELMHOLTZ[9]) verwiesen werden. Nur sei noch bemerkt, dass von verschiedenen Seiten mit Erfolg versucht worden ist, die Luftbewegungen in kleinem Maasstabe experimentell nachzuahmen[10]).

---

1) SPRUNG, Annalen der Hydrographie 1880, pag. 603. — Lehrbuch d. Meteor. Hamb. 1885.

2) F. ROTH, Rep. d. Phys. 22, pag. 354; 23, pag. 1, 455, 553; 24, pag. 90 u. 648. 1886—88.

3) GULDBERG und MOHN, Oester. Met. Z. 1877, pag. 258.

4) FERREL, Meteor. Researches, Wash. 1877 ff.

5) OBERBECK, WIED. Ann. 17. 1882. Der wesentlichste Fortschritt besteht in der Einführung der Bedingung der Continuität der Erscheinungen innerhalb und ausserhalb des Wirbels.

6) MARCHI, Ann. della Meteor. 1882. — Oest. Met. Z. 1884, pag. 278.

7) OBERBECK, Berl. Sitz. Ber. 1886, pag. 383 und 1129. Berechnung der Luftströmung und Druckvertheilung.

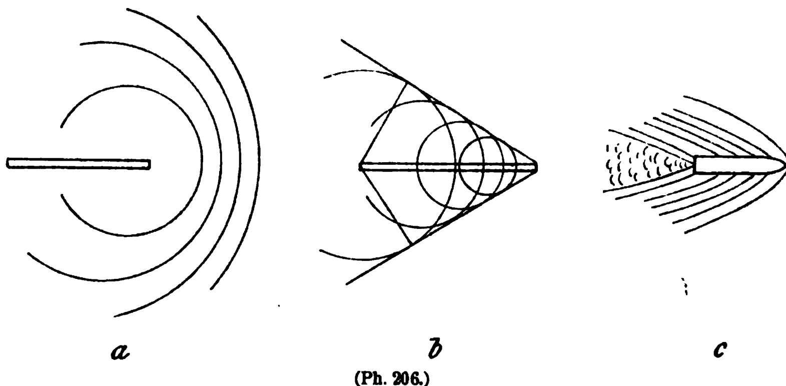
8) v. SIEMENS, Berl. Sitz. Ber. 1886, pag. 261. (Erhaltung der Energie im Luftmeere.)

9) v. HELMHOLTZ, Berl. Sitz. Ber. 1888, pag. 647; 1889, pag. 761. Discontinuitätsflächen an der Grenze verschiedener Gebiete und dadurch bedingte Entstehung atmosphärischer Wirbel und atmosphärischer Wogen.

10) VETTIN, POGG. Ann. 102, pag. 246. 1857; Met. Z. 1, pag. 227 u. 271. 1884. — WEYHER, Compt. rend. 104, pag. 494. 1887. — Ueber Strudel, Tromben, Wirbelstürme u. s. w. Paris 1887. — Ferner COLLADON, FAYE, DECHEVRENS u. A., Compt. rend. 1886—87. — SCHWEDOW, J. d. russ. phys.-chem. Ges. (8) 18, pag. 279. 1886.

Bewegung fester Körper in Gasen. Von Erscheinungen dieser Art ist schon mehrfach die Rede gewesen. So sind Formeln für den Wurf mit Rücksicht auf den Luftwiderstand im Art. Fall und Wurf pag. 120, Formeln für den Einfluss der Luft auf das Pendel daselbst pag. 176 angegeben. Einer allgemeinen Untersuchung des hydrodynamischen Widerstandes, deren Ergebnisse zum Theil, wie dort bereits bemerkt, auch für Gase giltig sind, ist der Art. »Gemeinschaftliche Bewegung fester und flüssiger Körper« (pag. 422) gewidmet. Den Gasen eigenthümlich sind namentlich solche Fälle, in welchen sich die Variabilität der Dichte des umgebenden Mediums in ihrem Einflusse auf die Bewegung des festen Körpers in hervorragendem Grade geltend macht, was insbesondere bei grossen Geschwindigkeiten des festen Körpers der Fall ist, weil die Theile des Gases alsdann nicht Zeit haben, vollständig auszuweichen. Eine hierher gehörige Klasse von Erscheinungen ist die der raschen Schwingungen eines festen Körpers in Luft. Von welcher Wichtigkeit dieselbe ist, erhellt schon daraus, dass die Verdichtungen und Verdünnungen der Luft es sind, welche die Schwingungen des festen Körpers fortpflanzen und somit eigentlich erst den Schall erzeugen; gleichzeitig aber ergiebt sich aber auch die Zugehörigkeit dieser Erscheinungen zur Akustik. Hier sei nur der Vergleichung halber bemerkt, dass, wenn man in ähnlicher Weise wie bei Flüssigkeiten die Geschwindigkeitspotentiale bildet, diese hier complicirter als dort werden.

Ein anderer Fall ist die Verdichtung der Luft, welche durch ein Geschoss in seiner Umgebung erzeugt wird. Diese theoretisch inter-



(Ph. 206.)

essante und praktisch wichtige Erscheinung hat ihrer experimentellen Schwierigkeiten halber die Physiker lange vergeblich beschäftigt, bis es kürzlich MACH und SALCHER[1]) gelungen ist, das Problem theoretisch und experimentell in überraschend befriedigender Weise zu lösen. Denkt man sich einen Cylinder seiner Axe entlang durch die Luft fortschreitend, so wird seine Spitze unausgesetzt Verdichtungswellen erzeugen. Diese werden, wenn die Geschossgeschwindigkeit der Schallgeschwindigkeit nachsteht, sich zerstreuen (Fig. 206 *a*), dagegen wenn jene diese übertrifft, sich kreuzen und einen Verdichtungskegel erzeugen (Fig. 206 *b*). Ein begrenztes Verdichtungsgebiet wird man also nur erhalten, wenn man Geschossgeschwindigkeiten von mehr als 340 *m* anwendet, und in dem Sinus des halben Oeffnungswinkels des Kegels wird man alsdann das Verhältniss der Schallgeschwindigkeit zur Geschossgeschwindigkeit haben. Dieses theoretische Resultat

[1]) MACH und SALCHER, Wien. Ber. 95 (2), pag. 764. 1887; 97 (2), pag. 41. 1889; s. a. Die ballistischen Experimente von MELSENS, Ann. de Chim. Phys. (5) 25. 1882.

wurde nun durch Versuche mit Gewehr- und Kanonenkugeln bestätigt, bei welchen die nach der Schlierenmethode sichtbar gemachte Luftverdichtung durch elektrische Momentphotographie fixirt wurde; nur zeigte sich, in Folge der abweichenden Geschossgestalt, statt des Kegels ein Hyperboloid, ferner traten ähnliche, aber schwächere Grenzen auch am Rande und Boden des Geschosses auf, und schliesslich zeigte sich der Kanal hinter dem Geschoss von Wirbeln nachströmender Luft erfüllt (Fig. 206 *c*). Im übrigen, namentlich hinsichtlich der Berechnung und der »elektrochemischen« Darstellung der Linien gleichen Drucks, sei auf die genannten Abhandlungen verwiesen.

Von anderen Problemen des Luftwiderstandes hat namentlich eines seit NEWTON unausgesetzte Behandlung erfahren und ist kürzlich, mit Hilfe eines von SCHELLBACH construirten Apparates, durch von THIESEN[1]) aufgestellte Formeln zu einem gewissen praktischen Abschluss gebracht worden: Der Luftwiderstand gegen einen senkrecht zu seiner Axe fortschreitenden oder um eine auf seiner Axe senkrechte Mittellinie rotirenden Cylinder. Sind l und d Länge und Dicke des Cylinders, so hat man im ersten Falle, wenn v die Geschwindigkeit ist, den Luftwiderstand

$$W = 10^{-6}\, l(7{\cdot}25\, v + 0{\cdot}486\, dv^2 + 0{\cdot}0000698\, d^2 v^2),$$

im zweiten, wenn t die Umdrehungszeit ist, das Moment des Luftwiderstandes:

$$M = 10^{-6}\, l^3 \left(3{\cdot}80\, \frac{1}{t} + 0{\cdot}599\, l\, \frac{d}{t^2} + 0{\cdot}000216\, l^2\, \frac{d^2}{t^2}\right),$$

alles in *gr*, *cm*, *sec* ausgedrückt.

Von Apparaten, welche in Folge des Luftwiderstandes eigenthümliche Bahnen beschreiben, seien hier erwähnt: der Bumarang (eigenthümlich gekrümmtes und gewölbtes, bei Wilden als Wurfwaffe dienendes Holz), dessen Theorie u. A. von GERLACH[2]) behandelt ist; der Tennis-Ball, welchem Lord RAYLEIGH[3]) eine Studie gewidmet hat; der der Schiffsschraube in der Wirkung ähnliche »Flieger«, der neuerdings auch zu wissenschaftlichen Zwecken vielfach benutzte Drachen, der Fallschirm, bestimmt die Beschleunigung beim freien Fall in Gleichförmigkeit oder gar Verzögerung zu verwandeln u. s. w.

Reaction der Gase. Wie Flüssigkeiten (pag. 400), so können auch Gase, ausser durch Druck und Widerstand, auch durch Reaction Wirkungen ausüben und Bewegungen hervorrufen. Ein hierauf beruhender Apparat ist die Aeolipile; in einem um eine vertikale Axe drehbaren Gefäss wird durch eine untergestellte Flamme Wasser in Dampf verwandelt, welcher durch einige strahlenförmig vom Gefäss auslaufende, am Ende in horizontaler Ebene rechtwinkelig umgebogene Röhren ausströmt; der ganze Apparat fängt dann an, in entgegengesetzter Richtung zu rotiren. Während diese Wirkung ziemlich schwach ist, erhält man sehr kräftige bei Entwickelung von Gasen aus der Verbrennung von Schiesspulver und ähnlichen Mischungen; hierauf beruht die Feuerwerkerei und insbesondere die Bewegung der Raketen. Auf die überaus mannigfaltigen Formen, die man den Feuerwerkskörpern für Kriegs-, Schau- und andere Zwecke gegeben, und auf die Flugbahnen, die man dadurch erzielt hat, kann hier nicht eingegangen werden; es sei nur bemerkt, dass die Steighöhe mit zunehmendem Gewichte der Füllung stark anwächst (einpfündige Raketen gehen unter Umständen 2 bis 3 *km* hoch), und dass die Form der Bahn sich wesentlich von der gewöhnlichen

---

1) THIESEN, WIED. Ann. 26, pag. 309. 1885. Daselbst die ältere Literatur.

2) GERLACH, Z. d. Ver. z. Förd. d. Luftsch. 5. 1886.

3) Lord RAYLEIGH, Mess. of Math. 1877; Beibl. 1879, pag. 135.

Wurfbahn unterscheidet, theils weil statt des dortigen Impulses hier eine dauernde, allerdings abnehmende Kraft wirkt, theils, weil die jedesmalige Richtung der Bewegung durch die Form der Patrone mitbestimmt wird, wie denn z. B. eine winkelig gebogene Patrone sogar eine eckige Flugbahn zur Folge hat. Andererseits kann man bestimmte Flugbahnen erzielen, indem man, wie bei den Kriegsraketen vielfach geschehen, der Patrone eine Rotation um die Axe giebt und die Ausflusslöcher in bestimmter Weise anordnet.

Luftschifffahrt.

Allgemeines. Nachrichten über Ideen und Versuche, in der Luft aufsteigende Apparate zu bauen, reichen sehr weit zurück, sind aber theils unbeglaubigt, theils sachlich verfehlt. Letzteres gilt auch noch von dem naheliegenden Gedanken, aus Ballons die Luft auszupumpen, weil solche Ballons durch die äussere Luft zerdrückt werden müssen. Einen wesentlichen Fortschritt machte GALIEN mit dem Vorschlage, den Ballon mit leichterer Luft zu füllen, ohne dass er jedoch hierzu Rath gewusst hätte. Der Erste, der einen Ballon zum Steigen brachte, durch die Inquisition aber an der Fortsetzung seiner Versuche verhindert wurde, war der Portugiese GUSMAN (1736). So kam es, dass nicht er, sondern die Brüder MONTGOLFIER (1783) als Begründer der Luftschifffahrt zu nennen sind. Eine Montgolfière enthält Luft, die aber durch ein unter ihr unterhaltenes Feuer auf hoher Temperatur, also geringer Dichte erhalten wird. In demselben Jahre 1783 wandte CHARLES das Wasserstoffgas an, welches 1766 entdeckt und 1782 von CAVALLO bereits benutzt worden war, um damit gefüllte Seifenblasen emporsteigen zu lassen. Solche Ballons heissen Charlièren. Endlich ersetzte GRENIER (1836) den Wasserstoff durch Leuchtgas.

Bestandtheile. Der Ballon wird aus leichtem Seidenstoff hergestellt, mit Leinölfirniss oder ähnlichem Material luftdicht gemacht und, theils zur Erhöhung der Widerstandsfähigkeit, theils zur Befestigung der Gondel mit einem Netzwerk dünner Stricke umgeben. Ausserdem gehört zu seiner Ausrüstung noch eine genügende Quantität Ballast (Säcke mit Sand u. s. w.), (bei der Charlière) ein von der Gondel aus zu regierendes Ventil zum Oeffnen und Schliessen des Ballons, und der Anker zum Landen; endlich hat GREEN ein „Leitseil« angegeben, welches, wie die Federn bei Wagen, der Gondel einen ruhigeren Gang verleiht. Die beliebteste Form ist stets die einer Kugel, eventuell mit schlauchförmigem Ansatz nach unten, geblieben (s. jedoch w. u.); von der Vereinigung mehrerer Ballons und selbst von Charlièren und Montgolfièren zu einem einzigen Luftschiff und ähnlichen Abänderungen ist man schliesslich wieder zurückgekommen. Da das Gas in grösseren Höhen sich auszudehnen strebt, darf man Charlièren anfangs nicht vollständig füllen. Zu Demonstrationszwecken stellt man kleine Ballons aus Collodium her.

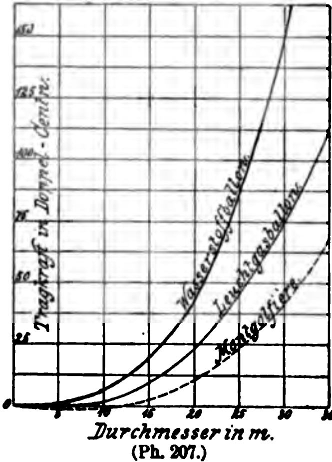
Vergleichung der drei Arten von Luftballons. Es sei v das Volumen des Ballons, s' das specifische Gewicht seines gasförmigen Inhaltes, s das der äusseren Luft, m das Gewicht aller festen Bestandtheile des Ballons; dann muss, damit überhaupt ein Aufstieg erfolge, $m + vs' < vs$ sein. Die Steigkraft des Ballons ist also

$$S = v(s - s') - m,$$

und seine Tragkraft, d. h. das Gewicht, welches er ausser dem Gewicht seiner nothwendigen Theile m_0 noch emporheben kann, ist,

$$T < v(s - s') - m_0.$$

In diesen Formeln ist zu beachten, dass s keine Constante ist, sondern mit der Höhe, die der Ballon erreicht, abnimmt (pag. 545), und dass folglich die Steigkraft eines Ballons nach oben hin ebenfalls abnimmt, während für T sich die Vorsichtsmaassregel ergiebt, es um einen solchen Betrag unter der obigen Grenze zu wählen, dass es auch beim Aufstieg stets unter dieser Grenze bleibt.



(Ph. 207.)

In Fig. 207 sind die Tragkräfte der drei Arten von Ballons für verschiedene Grössen, kuglige Gestalt und den der Erdoberfläche entsprechenden Werth von s dargestellt, sodass eine Tabelle sich erübrigt; unter m_0 ist dabei nur das Gewicht der Hülle verstanden und dieses für die Montgolfière zu 600 *gr*, für die beiden anderen Ballons zu 200 *gr* auf das *qm* angenommen; s' ist gleich $\frac{3}{4}s$ für die Montgolfière, $\frac{1}{7}s$ (in Rücksicht auf die Unreinheit des gewöhnlich benutzten Wasserstoffs) für den Wasserstoffballon, $\frac{1}{2}s$ für den Leuchtgasballon gesetzt. Wie man sieht, steht die Montgolfière an Steigkraft erheblich zurück, bei kleinerer Grösse hat sie überhaupt keine Steigkraft, und ebenso ist die Höhengrenze, welche ihr gesteckt ist, eine niedrige; da sie überdies feuergefährlich ist, darf man sich nicht wundern, dass sie längst veraltet ist. Die Entscheidung zwischen den beiden anderen Arten wird durch die grössere Wohlfeilheit und bequemere Einfüllung des Leuchtgases einerseits, durch die fast doppelt so grosse Tragkraft des Wasserstoffballons andererseits in jedem einzelnen Falle bedingt werden.

Exakte Formeln[1]). Sind b_0 und b_1 die Barometerstände am Erdboden und in der Grenzhöhe h, c eine Constante (etwa 8000 m) und v die Geschwindigkeit des Aufsteigens in der vertikalen Richtung z, so hat man die Gleichung

$$v\,dv = -\left(\frac{b_0}{b_1}e^{-z/c} - 1\right)g\,dx$$

und ihr Integral

$$\frac{v^2}{2g} = c\frac{b_0}{b_1}\left(e^{-z/c} - e^{-h/c}\right) + z - h;$$

für $z = 0$ erhält man eine entsprechende Gleichung für v_0, und wenn man mittelst der Gleichung $v_0^2 = 2gh_0$, also

$$\frac{h_0}{c} = \frac{b_0}{b_1} - 1 - \log\frac{b_0}{b_1}$$

die Grösse h_0 einführt, erhält man als Zeit des Steigens bis zur Höhe z

$$t = \sqrt{\frac{c}{2g}}\int\frac{d\frac{z}{c}}{\sqrt{\frac{b_0}{b_1}\left(e^{-z/c} - 1\right) + \frac{z}{c} + \frac{h_0}{c}}},$$

also als Zeit des Steigens bis zum höchsten Punkte

$$T = \sqrt{\frac{c}{g}\frac{b_1}{b_0}}\log\frac{1 - \frac{b_0}{b_1} + \frac{b_0}{b_1}\log\frac{b_0}{b_1} + \frac{b_0}{b_1}\sqrt{1 - 2\frac{b_0}{b_1} + \left(1 - \log\frac{b_0}{b_1}\right)^2}}{1 - \frac{b_0}{b_1} + \sqrt{2\frac{b_0}{b_1}\left(\frac{b_0}{b_1} - 1 - \log\frac{b_0}{b_1}\right)}}.$$

---

[1]) OEKINGHAUS, Arch. f. Math. Phys. (2) 7, pag. 445. 1889.

Lenkung des Luftballons. Dieses Problem hat die Experimentatoren im letzten Jahrhundert fast unausgesetzt beschäftigt, und es sind dabei zahlreiche, theils im Princip, theils hinsichtlich der Ausführbarkeit verfehlte Vorschläge aufgetaucht. Ernstlich in Betracht kann nur eine Methode gezogen werden, nämlich der Betrieb mittelst Schraube oder Ruder, letztere, wie es ja auch bei Wasserrudern vorzugsweise geschieht, in breitseitiger Lage hin, in flachseitiger herbewegt. Eine strenge theoretische Behandlung dieses Problems auf Grund der aërodynamischen Gleichungen würde auf grosse Schwierigkeiten stossen, und man bedient sich daher mit vielem Erfolg einer sinnreichen Methode, welche v. HELMHOLTZ[2]) angegeben und als Methode der geometrisch ähnlichen Flüssigkeitsbewegungen bezeichnet hat. Die hydrodynamischen Gleichungen mit Rücksicht auf Reibung haben nämlich die Eigenschaft, dass, wenn sie durch das Werthsystem $x\,y\,z$ (Coordinaten), u, v, w (Geschwindigkeiten), t (Zeit), p (Druck), ρ (Dichte), k Reibungsconstante) erfüllt werden, sie auch durch ein zweites Werthsystem X, Y, Z, U, V, W, T, P, R, K erfüllt werden, welches sich ergiebt, wenn man, unter n, q, r Constanten verstanden, setzt

$$X=\frac{q}{n}x \qquad U=nu \qquad T=\frac{q}{n^2}t \qquad K=qk$$

$$Y=\frac{q}{n}y \qquad V=nv \qquad P=n^2rp+const \qquad R=r\rho$$

$$Z=\frac{q}{n}z \qquad W=nw,$$

q und r sind ihrer Bedeutung nach von selbst klar, n erweist sich leicht als Verhältniss der Schallgeschwindigkeiten.

Kennt man nun die erstere Flüssigkeitsbewegung, sei es theoretisch oder aus der Erfahrung, so kann man sich auch von der anderen ein Bild machen. Auf unseren Fall angewandt heisst das: man kann aus den Verhältnissen bei Schiffen auf die Verhältnisse bei Luftschiffen schliessen; nur muss man sich ein ganz in Wasser gehendes Schiff vorstellen, dessen Form man erhält, wenn man auf den eingetauchten Theil eines gewöhnlichen Schiffes diesen noch einmal umgekehrt aufsetzt. Man erhält dann für Luft und Wasser:

$$\frac{1}{r}=773 \qquad \frac{q}{n}\text{ (Verhältniss der Lineardimensionen)} = 3\cdot4928$$

$$q=0\cdot8082 \qquad \left(\frac{q}{n}\right)^3\text{ (Verhältniss der Volumina)} = 42\cdot61$$

$$n=0\cdot2314 \qquad q^2nr\text{ (Verhältniss der Arbeitsaufwände)} = \frac{1}{5114\cdot3}.$$

Ferner ergiebt sich aus dem archimedischen Princip das entsprechende Gewicht für einen Wasserstoffballon zu 42·6/837 = 1/19·6, für einen Leuchtgasballon zu 42·6/2208·5 = 1/51·83 von dem des Schiffes. Man findet also: Ein Luftschiff von 3½mal so grossen Lineardimensionen und dem 20. resp. 52. Theil des Gewichts bewegt sich durch die Kraft seiner Maschine nicht ganz ¼ so schnell wie ein Schiff, erfordert aber auch nur den 5000. Theil der Arbeit. Man kann nun freilich, da hiernach die dem Gewichte des Luftschiffes entsprechende Arbeitsfähigkeit desselben bei weitem nicht ausgenutzt ist, das Verhältniss zwischen Arbeit und Gewicht, also n^3, noch erheblich, etwa auf das Hundertfache (für Leuchtgas) steigern, aber auch dann wird n selbst, also auch die Geschwindigkeit nur auf das 4·62fache sich erhöhen, d. h. sie wird etwa 1·07 von der des

[2]) v. HELMHOLTZ, Berl. Mon. Ber. 1873, pag. 501; Wiss. Abh. I, pag. 158.

Schiffes. Damit also ein Luftballon die Schnelligkeit eines grossen Schiffes erreiche (für Leuchtgas) oder um die Hälfte übersteige (für Wasserstoff), müsste er das 40fache Volumen desselben haben. Für Ballons, wie sie sich selbst mit grossen Mitteln wirklich ausführen lassen, würde man dagegen hinter der Geschwindigkeit der Kriegsschiffe nicht unerheblich zurückbleiben. Noch ungünstiger wird das Resultat, wenn man auf die bei der Ausführung der betreffenden Maschine sich einstellenden Anforderungen an Gestalt, Festigkeit u. s. w. Rücksicht nimmt. In der That haben alle wirklich ausgeführten, lenkbaren Luftschiffe und selbst noch die neuesten und sinnreichsten von DUPUY DE LÔME, KREBS und RENARD, WOLFF u. s. w. dies Resultat bestätigt, indem es nicht gelang, mehr als 10—12 *km* in der Stunde in ruhiger Luft zurückzulegen, resp. gegen einen annähernd so starken Wind mit Erfolg anzukämpfen. Es braucht daher auch auf die Einzelheiten dieser Constructionen, als: Gestalt (Ellipsoïd, Cigarrenform, segelförmige Anhänge u. s. w.) und Motor (insbesondere elektrische Motoren) nicht näher eingegangen zu werden.

Ein gewisses Interesse beansprucht ferner der Gedanke, bei Luftfahrten die verschiedenen, in den einzelnen Höhenschichten herrschenden Luftstömungen zu benutzen. Seine Ausführung setzt zunächst voraus, dass man zum beliebigen steigen- und fallenlassen bessere Mittel besitze, als der sich rasch erschöpfende Gebrauch von Ballast und Ventil es ist; in der That sind solche Mittel vielfach angegeben worden, z. B. der im Innern des Ballons angebrachte Luftbeutel MEUSNIER's, die in der Gondel anzubringende Luftpumpe JOULIE's u. s. w. Dagegen ist die zweite Bedingung, die Kenntniss der verschiedenen Luftströmungen, nicht annähernd erfüllt, ja es ist gar nicht anzunehmen, dass, selbst bei ihrer Kenntniss ein irgendwie regelmässiger Betrieb sich auf sie gründen liesse.

Endlich sei noch auf den Vorschlag EMSMANN's u. A. hingewiesen, die Triebkraft von, etwa mit fester Kohlensäure gefüllten Raketen zur Lenkung des Luftballons zu benutzen.

Flug und Flugmaschinen. Fast noch mehr als der Luftballon hat die Idee der Flugmaschine die Menschen beschäftigt, also der Gedanke, nicht durch leichtes Gewicht, sondern nach Art der Vögel und Insekten oder nach Art des im Wasser schwimmenden Menschen, trotz grossen Gewichtes, sich durch Bewegungen in die Luft zu erheben und in ihr zu erhalten und fortzubewegen. Der Hinweis auf das Schwimmen des Menschen im Wasser erledigt sich ohne weiteres als verfehlt, weil hier beide specifischen Gewichte (des Menschen und des Wassers) nahezu gleich, das der Luft aber im Vergleich zu dem des Menschen so gut wie null ist. Dass auch der Hinweis auf den Flug der Vögel durchaus nicht zu irgend welchen Hoffnungen berechtigt, hat v. HELMHOLTZ[1]) nach der obigen Methode gezeigt; der Arbeitsaufwand wächst eben bedeutend schneller als das Volumen des Körpers und der arbeitenden Muskeln, und es scheint, dass die Natur mit den Werthen, welche diese Grössen bei den grössten Vögeln haben, schon die äusserste Grenze erreicht habe. Thatsächlich sind die überaus zahlreichen Flugmaschinen, über die man sich u. a. bei PETTIGREW[2]) orientiren kann, ohne praktischen Nutzen geblieben.

Wissenschaftliche Anwendung des Luftballons. Es genüge ein kurzes Verzeichniss: 1) Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe (pag. 545).

---

1) v. HELMHOLTZ, a. a. O.

2) PETTIGREW, Die Ortsbewegung der Thiere nebst Bemerkungen über Luftschifffahrt. Leipz. 1875, pag. 179 ff.

2) Abnahme der Schwere mit der Höhe (pag. 199). 3) Ermittelung der Luftströmungen in verschiedenen Höhen. 4) Abnahme der Temperatur mit der Höhe. 5) Aenderung der Feuchtigkeit mit der Höhe. 6) Schallfortpflanzung. 7) Optische Erscheinungen. 8) Wolkenstudien. 9) Elektrischer Zustand der Atmosphäre. 10) Physiologische Wirkung auf Menschen und Thiere. 11) Chemische Untersuchung der Atmosphäre u. s. w.

F. AUERBACH.

Reibung.

A. Reibung von Flüssigkeiten und Gasen.

Eine in ihren Theilen bewegte Flüssigkeit (tropfbare oder gasförmige) kommt wenn ihre Bewegung nicht durch Kräfte unterhalten wird, in längerer oder kürzerer Zeit in Ruhe. Ferner bringt eine Schicht einer Flüssigkeit, die in Bewegung versetzt ist, die benachbarten vorher ruhenden Schichten ebenfalls in Bewegung. Diese Erscheinungen legen die Annahme nahe, dass die Moleküle der Flüssigkeiten auf einander mit gewissen Kräften wirken, vermöge welcher eben eine Schicht der benachbarten einen Theil ihrer Bewegungsenergie überträgt. Diese Annahme ist übrigens nicht nothwendig, da die kinetische Gastheorie derartige Vorgänge auch ohne Zuhilfenahme von Molekularkräften erklärt (s. kinetische Gastheorie). Man nennt die angeführte Erscheinung Reibung, oder speciell innere Reibung von Flüssigkeiten und Gasen und nennt die Kräfte, durch welche Reibung hervorgebracht wird, Reibungskräfte, wobei man jetzt bei Gasen diese Kräfte als kinetischen Ursprungs ansieht, während man sie bei Flüssigkeiten noch als besonderen Fall der Molekularkräfte betrachtet. Die Eigenschaft der Flüssigkeiten, innere Reibung zu besitzen, nennt man auch Zähigkeit, oder wenn sie sehr stark ist, Klebrigkeit. In jedem Fall bewirkt die Reibung einer Flüssigkeit, dass eine gewisse Kraft erforderlich ist, um eine Flüssigkeitsschicht mit bestimmter Geschwindigkeit an einer anderen vorbei zu schieben und diese Kraft bezeichnet man eben als Reibungskraft, aber auch häufig bloss als Reibung oder Zähigkeit. Ferner aber zeigt die Erfahrung auch, dass eine gewisse Kraft dazu gehört, um eine Flüssigkeit an einer festen Wand vorbei zu schieben, ja dass in den meisten Fällen sogar die Flüssigkeiten an festen Wänden mit ihrer Grenzschicht haften. Diese Erscheinung bezeichnet man als äussere Reibung und ebenso bezeichnet man die Kraft, die dazu gehört, um eine Schicht Flüssigkeit mit bestimmer Geschwindigkeit an einer festen Wand vorüber zu schieben. Haftet die Flüssigkeit an der Wand, so ist die äussere Reibung unendlich gross.

Ueber die Grösse der inneren Reibung hat zunächst NEWTON[1]) die Hypothese aufgestellt, dass die Reibung zwischen zwei benachbarten Schichten erstens vom Druck der Flüssigkeiten unabhängig ist (was auch später durch Versuche von COULOMB[2]), DARCY[3]) u. A. bewiesen wurde), dass sie ferner der Grösse der reibenden Schicht proportional ist und dass sie endlich dem Geschwindigkeitsunterschied der Schichten proportional ist.

Haben also eine Reihe paralleler Schichten von der Grösse f die Geschwindig-

---

[1]) NEWTON, Phil. nat. princ. math. Lib. II, Sect. IX. 1687.

[2]) COULOMB, Mém. de l'Institut III, pag. 287.

[3]) DARCY, Mém. des divers. sarants XV, pag. 141. 1857.

keiten u, u_1, u_2 ... so wird pro Flächeneinheit die Kraft, die die Schicht mit u auf die mit u_1 ausübt (positiv im Sinne der Bewegung gerechnet), gegeben sein durch

$$-k(u_1 - u)$$

wenn k eine Constante ist. Da die Geschwindigkeiten in der Flüssigkeit sich stetig ändern, so ist, wenn die Normale der Schichten die y-Axe ist

$$u_1 - u = \frac{du}{dy} dy,$$

und wenn man für die Constante $k\,dy$ die neue Constante η einführt, so wird die Kraft

$$-\eta \frac{du}{dy} \cdot .$$

Die Constante η nennt man den Reibungscoëfficienten der Flüssigkeit.

Von der Schicht mit u_2 wirkt auf die Schicht mit u_1 die entgegengesetzt gerichtete Kraft

$$+\eta\left(\frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dy^2} dy\right).$$

Die gesammte Kraft auf einer Schicht von der Grösse f ist daher

$$f\eta \frac{d^2u}{dy^2} dy.$$

Diese Kraft ist gleich der Beschleunigung $\frac{du}{dt}$, die die Schicht erfährt, multiplicirt mit der Masse derselben. Wenn also ρ die Dichtigkeit, also $\rho f\,dy$ die Masse dieser Schicht ist, so ist

$$\rho \frac{du}{dt} = \eta \frac{d^2u}{dy^2}.$$

Dieses Resultat für den einfachsten Fall lässt sich sofort auf den allgemeinen Fall übertragen, dass die Flüssigkeitsschichten nicht alle parallel strömen und dass ausserdem noch Druckkräfte und äussere Kräfte auf die Theile der Flüssigkeit wirken. Herrscht an einem Punkt xyz des Raumes, den die Flüssigkeit einnimmt, die Geschwindigkeit V mit den Componenten u, v, w und ist p der Druck der Flüssigkeit, so ergeben sich, wenn X, Y, Z die äusseren Kräfte sind, die auf die Flüssigkeit wirken, die Differentialgleichungen [1]).

$$\rho \frac{du}{dt} = \eta \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} + X$$
$$\rho \frac{dv}{dt} = \eta \Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} + Y$$
$$\rho \frac{dw}{dt} = \eta \Delta w - \frac{\partial p}{\partial z} + Z,$$

worin $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ist.

Dazu kommt die Continuitätsgleichung $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + 0.$

An der Grenze zwischen einem festen Körper und einer Flüssigkeit resp. zwischen zwei Flüssigkeiten muss, aus derselben Grundhypothese, die Bedingung erfüllt sein, dass, wenn σ_1 und σ_2 die Geschwindigkeitscomponenten nach zwei auf einander senkrechten Richtungen in der Oberfläche und N die Normale ist, dass

$$o = \eta \frac{\partial \sigma_1}{\partial N} + \lambda(\sigma_1 - \sigma_1')$$

[1]) O. E. Meyer, Crelle's Journ., Bd. 59, pag. 237. 1861.

$$o = \eta \frac{\partial \sigma_2}{\partial N} + \lambda(\sigma_2 - \sigma_2').$$

Darin sind σ_1' und σ_2' die Geschwindigkeiten des festen Körpers.

Die Constante λ ist der äussere Reibungscoëfficient. Ist $\lambda = \infty$, wie es bei der Berührung einer Flüssigkeit mit einer festen Wand meistens der Fall ist, so kommt

$$\sigma_1 = \sigma_1', \quad \sigma_2 = \sigma_2'$$

als Grenzbedingung.

Die Grösse $\gamma = \frac{\eta}{\lambda}$ nennt man den Gleitungscoëfficienten. Ist $\gamma = 0$, so haftet die Flüssigkeit an der Wand. Hat γ von 0 verschiedene Werthe, so gleitet die Flüssigkeit längs der Wand.

Die Grösse η, die Reibungsconstante, hängt nur von der Flüssigkeit allein ab, während λ oder γ von der Natur der beiden sich berührenden Substanzen abhängt. Den Werth $\varphi = \frac{1}{\eta}$ bezeichnet man als den Fluiditätscoëfficienten. Eine Flüssigkeit mit geringer Reibung hat grosse Fluidität.

Die Reibungsconstante η lässt sich nach POISSON[1]) und MAXWELL[2]) noch in anderer Weise auffassen, welche Betrachtung sowohl für feste, als für flüssige und gasförmige Körper gilt.

Es sei in einem Körper irgend eine Deformation S vorhanden und die dadurch entstehende elastische Kraft sei F, dann ist $F = ES$, wo E der Coëfficient der Elasticität für die betreffende Deformation ist. Ist der Körper frei von Reibung, so bleibt $F = ES$ und also auch $\frac{dF}{dt} = E\frac{dS}{dt}$. Hat dagegen der Körper die Eigenschaft der Zähigkeit, so strebt F abzunehmen und zu verschwinden, in einem Verhältniss, das von F und der Natur der Flüssigkeit abhängt. Man kann daher für einen solchen Körper setzen

$$\frac{dF}{dt} = E\frac{dS}{dt} - \frac{F}{T},$$

wo T eine Constante ist, von den Dimensionen einer Zeit. Ist daher S constant, so ist

$$F = ESe^{-\frac{t}{T}},$$

was anzeigt, dass die innere Spannung allmählich verschwindet. Ist $\frac{dS}{dt}$ constant, also eine stationäre Bewegung in dem Körper vorhanden, so wird

$$F = ET\frac{dS}{dt} + Ce^{-\frac{t}{T}},$$

welches zeigt, dass die Kraft mit wachsender Zeit sich einem Grenzwerth $ET\frac{dS}{dt}$ nähert. Die Grösse ET, mit welcher die Verschiebungsgeschwindigkeit multiplicirt werden muss, um die Kraft zu geben, ist der Coëfficient der Zähigkeit η. Es ist also die Zähigkeit aufzufassen als das Produkt aus einem Elasticitätsmodul E und einer Zeit, welche MAXWELL die Relaxationszeit nennt.

Wenn man mehr auf molekulare Verhältnisse eingeht, so lässt sich der Reibungscoëfficient η nach HAGENBACH[3]) definiren als diejenige Kraft, welche nöthig ist, um zwei Flüssigkeitsschichten von der Einheit der Oberfläche mit

---

[1]) POISSON, Journ. de l'école polytechn. Bd. 13, pag. 139. 1831.

[2]) MAXWELL, Phil. Mag. (4), Bd. 35, pag. 133 u. 210. 1868.

[3]) HAGENBACH, POGG. Ann. Bd. 109, pag. 401. 1860.

einer solchen Geschwindigkeit an einander zu verschieben, dass die eine in Bezug auf die andere in der Sekunde um die Entfernung zweier Moleküle vorrückt. Die Kraft, welche diese Schichten mit der Einheit der Geschwindigkeit an einander vorbeiführte, wäre $n$mal so gross, wo n die Anzahl Moleküle auf der Längeneinheit ist.

Die Dimensionen wo η ergeben sich aus der Definition

$$K = \eta f \frac{du}{dx}, \quad \text{also} \quad \eta = \left(\frac{M}{LT}\right) = \left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right).$$

Bestimmung der Reibungscoëfficienten für Flüssigkeiten.

Es ist die nächste Aufgabe, die Reibungscoëfficienten für verschiedene Flüssigkeiten und Gase zu bestimmen und zu sehen, ob und in welcher Weise sie von anderen Grössen, insbesondere der Temperatur, dann von der chemischen Zusammensetzung derselben abhängen.

Die Methoden nun, die Grösse η zu bestimmen, sind bisher im Wesentlichen dreifacher Art, da es nur in drei Fällen gelungen ist, die Differentialgleichungen der Bewegung ziemlich vollständig aufzulösen. Die erste und am meisten angewendete Methode besteht darin, dass man die Flüssigkeiten unter constantem Druck durch enge Capillarröhren fliessen lässt. Die zweite Methode besteht darin, dass man eine Scheibe oder eine Kugel in der Flüssigkeit Schwingungen ausführen lässt und die Dämpfung beobachtet, welche diese erleiden. Die dritte endlich besteht darin, dass man eine mit der Flüssigkeit erfüllte Kugel Drehungen machen lässt und die Kraft bestimmt, welche die Flüssigkeit auf die Wände des Gefässes ausübt.

Statt die direkten Werthe der Reibung von Flüssigkeiten anzugeben, hat es sich eingebürgert, die »specifische Zähigkeit« oder specifische Reibung der Flüssigkeiten zu bestimmen, d. i. die Reibung einer Flüssigkeit bei irgend einer Temperatur t, bezogen auf die Reibung des Wassers bei 0°, letztere = 100 gesetzt. Die zahlreichsten Versuche sind nach der Methode des Durchflusses durch Röhren angestellt. Sie mögen zuletzt besprochen werden.

a) Methode von v. Helmholtz und Piotrowski.

Die Methode der Schwingungen einer mit Flüssigkeit erfüllten Kugel ist von v. Helmholtz und Piotrowski[1]) ausgearbeitet und benutzt worden.

Eine hohle Metallkugel, deren Innenfläche vergoldet war, war an einem Draht aufgehängt und wurde um diesen in drehende Schwingungen versetzt, nachdem die Kugel mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt war. Es wurde die Schwingungsdauer dieser Drehungen und ihr logarithmisches Dekrement gemessen. Aus diesen kann man direkt ableiten einen Werth von K, welcher das Verhältniss des Maximums der Reibungskraft zum Maximum der Drehungsgeschwindigkeit angiebt und ferner einen Winkel ϑ, welcher den Phasenunterschied zwischen Geschwindigkeit und Kraft bestimmt. Es ergab sich so für diese Grössen bei

	K	ϑ
Brunnenwasser	99·860	27° 58′ 37″
Ausgekochtes Wasser . . .	90·7087	7° 38′ 26″
ClNa-Lösung I, gesättigt . .	184·89	45° 38′ 0″
„ „ II, „ . .	150·61	40° 50′ 33″

[1]) Helmholtz und Piotrowski, Wien. Ber. Bd. 50, pag. 107. 1860. Abgedr. in v. Helmholtz Wissensch. Abh. I, pag. 172.

	K	ϑ
ClNa-Lösung III, gesättigt . .	138·93	40° 25′ 12″
„ „ IV, „ . .	112·35	32° 42′ 8″
Schwefelkohlenstoff	80·242	34° 58′ 43″
Aether	60·284	44° 54′ 26″
Alkohol	156·39	53° 4′ 4″
Glycerin	339·17	81° 31′ 49″
Olivenöl	313·58	84° 56′ 41″
Zuckersyrup	102·17	88° 31′ 34″
Eiweisslösung	137·51	44° 18′ 17″
Eiweissölemulsion	216·13	52° 14′ 48″
Defibrinirtes Blut	248·86	48° 9′ 10″
Milch	162·35	45° 38′ 48″.

Diese Werthe gelten nur für das benutzte Gefäss mit Goldwandung und für mittlere Sommertemperatur.

HELMHOLTZ hat nun durch mathematische Analyse diesen Vorgang verfolgt und die Gleichungen entwickelt, durch welche aus diesen Werthen von K und ϑ sich sowohl die innere Reibung η als die äussere Reibung λ, resp. der Gleitungscoëfficient $\gamma = \frac{\eta}{\lambda}$ berechnen lassen. Die Gleichungen sind so complicirt, dass auf die Abhandlung verwiesen werden muss und nur das Resultat angegeben werden kann. Es zeigte sich, dass die Gleitung an dieser Metallwand nicht gleich 0 ist, wie man es aus früheren Versuchen vermuthen konnte, sondern zum Theil recht beträchtliche Werthe hat und dass aus diesem Grunde die beobachteten Schwingungsdauern nicht genügend genau sind, um sichere Resultate zu erhalten. Es ergab sich für Brunnenwasser

$$\eta = 0{\cdot}011858 \left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$$
$$\gamma = 0{\cdot}23534\ cm.$$

Aus POISEUILLE's Versuchen für dieselbe Temperatur 24·5° (s. u.) ergab sich $\eta = 0{\cdot}0095206 \left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$, also nahe im Verhältniss 4 : 5 kleiner. Die Phasendifferenz zwischen der Bewegung des Gefässes und der anliegenden Flüssigkeit beträgt 25° 15′ oder 1·616 Zeitsekunden für Wasser. Für Alkohol, Aether, Schwefelkohlenstoff ergaben sich dagegen so kleine Werthe von γ, dass es vielleicht gleich 0 gesetzt werden kann. Doch ist auch bei ihnen η zu gross. Es fand sich

	Alkohol	Aether	Schwefelkohlenstoff
η	0·013754	0·0059213	0·0053401 $\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$
γ	0·01096	0·01243	0·04430 cm
Phasenunterschied zwischen Flüssigkeit und Gefäss	1° 37′	4° 7′	13° 39′ 10″
Temperatur	24·05°	21·6°	21·33°.

b) Methode der schwingenden Scheiben.

Die zweite Methode besteht darin, die Schwingungsdauer und das logarithmische Dekrement einer Scheibe zu bestimmen, welche in einer Flüssigkeit drehende Schwingungen macht. Diese Methode wurde von COULOMB[1]) zuerst

[1]) COULOMB, Mém. de l'Institut national III, pag. 261.

angewendet, dann von O. E. MEYER[1]) theoretisch und experimentell ausgearbeitet, MEYER brachte auf eine Axe zwei Scheiben parallel an, von denen die untere in einem mit der Flüssigkeit gefüllten Gefässe Schwingungen ausführte, während die obere, die sich in Luft drehte, eine Theilung trägt, welche durch ein Fern rohr beobachtet wurde. Die Axe war an einem langen Messingdraht befestigt. Die Theorie der Versuche ist von MEYER ausführlich entwickelt worden. Sie kann natürlich nur in mehr oder minder grosser Annäherung entwickelt werden, da die Differentialgleichungen sich nicht exakt integriren lassen. Es konnte nur diejenige Reibung berücksichtigt werden, welche zwischen den horizontalen Schichten der Flüssigkeit stattfindet, nicht aber diejenige, durch welche die Bewegung über den Rand der Scheibe hinaus übertragen wird. In Folge dessen ergaben sich zu grosse Werthe für die Reibungscoëfficienten, im Vergleich zu den mittelst Strömung durch Capillarröhren ermittelten. Die Beobachtungen selbst liefern unmittelbar nicht η selbst, sondern $\sqrt{\eta}$. Es ergab sich z. B. für destillirtes Wasser bei 8·7° der Reibungscoëfficient 0·01689, während er nach den Strömungsversuchen für diese Temperatur ist 0·0136, also etwa im Verhältniss 6:5 zu gross. In der jüngsten Zeit hat O. E. MEYER[2]) nach dem Vorgang von W. KÖNIG eine Correction an seinen Formeln angebracht, durch welche die Zahlen seiner Versuche in viel bessere Uebereinstimmung mit den aus Strömungsversuchen erhaltenen gebracht sind. Die Flüssigkeiten, welche MEYER untersucht hatte, gaben folgende Werthe der Reibungscoëfficienten.

1) Destillirtes Wasser.

Temp.	η
10·1	0·0129
21·6	0·0102
33·7	0·0081

2) Kali-Alaunlösung.
3·650 Thle. Alaun in 100 Thln. Wasser.

Temp.	η
10·4	0·0164
12·15	0·0150
22·3	0·0120

Die Reibungscoëfficienten nehmen hier und bei allen anderen Flüssigkeiten sehr erheblich mit steigender Temperatur ab. In dem Intervall von 10 bis 20 Graden lassen sich die erhaltenen Werthe darstellen durch Formeln von der Gestalt

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \beta\vartheta},$$

wo ϑ die Temperatur in Celsius-Graden, η_0 der Werth der Reibung für 0° ist. So ist für destillirtes Wasser $\eta_0 = 0{\cdot}0183$, $\beta = 0{\cdot}0369$. Es ergab sich weiter für

3) Lösung von schwefelsaurem Natron.

Salzgehalt	η_0	β
10·425	0·0296	0·0580
7·780	0·0253	0·0502
5·160	0·0230	0·0459
2·567	0·0205	0·0412

4) Lösung von schwefelsaurem Kali.

Salzgehalt	η für 17—18°
13·80	0·0133
8·865	0·0123
4·43	0·0124

5) Lösung von salpetersaurem Natron.

Salzgehalt	η_0	β
57·11	0·0291	0·0233
35·26	0·0233	0·0280
16·31	0·0191	0·0306

6) Lösung von salpetersaurem Kali.

Salzgehalt	η_0	β
76·76	0·0155	0·0279
11·81	0·0166	0·0307
9·70	0·0169	0·0322
4·79	0·0179	0·0349

[1]) O. E. MEYER, CRELLE's Journal Bd. 59, pag. 229. 1861; POGG. Ann. 113, pag. 85. 1861.
[2]) O. E. MEYER, WIED. Ann. Bd. 32, pag. 642. 1887.

Die Versuche an Salzlösungen zeigen also eine wesentliche Abhängigkeit der Reibung vom Salzgehalt. MEYER versuchte diese Abhängigkeit dadurch darzustellen, dass er annahm, die Reibung einer solchen Lösung bestehe aus drei Theilen, der Reibung der Wassertheilchen an einander, der Salztheilchen aneinander und der Wasser- und Salztheile gegen einander. Je dichter der reibende und der geriebene Bestandtheil ist, um so grösser muss die Reibung sein. Daraus ergab sich für η die Formel

$$\eta = [\eta_w + 2\sigma\eta_{ws} + \sigma^2\eta_s]\left(\frac{\rho}{1+\sigma}\right)^2,$$

worin ρ die Dichtigkeit der Lösung, σ der Salzgehalt in 1 Thl. Wasser, η_w, η_s, η_{sw}, die drei Reibungscoëfficienten sind. Diese müssen natürlich bei dieser Annahme positiv sein. Indess zeigen die Versuche von SPRUNG u. A., die unten angeführt worden, dass η für viele Salze kleiner als Wasser ist, bei anderen ein Minimum bei bestimmtem Salzgehalt hat, so dass η_s oder η_{ws} negativ würde. Daher ist diese Darstellung, wenn überhaupt, so jedenfalls nicht allgemein zulässig. Bei den von O. E. MEYER untersuchten Stoffen ist für die Temperatur von 17° $\eta_w = 0{\cdot}0110$, ferner bei

	η_s	η_{ws}	
Na_2SO_4	0·186	0·0112	
K_2SO_4	0·000	0·0127	$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$
$NaNO_3$	0·033	0·0078	
KNO_3	0·000	0·0029.	

Ausserdem hat MEYER noch gemischte Salzlösungen und Rüböl auf ihre innere Reibung untersucht.

Lässt man die Scheibe in der Grenzfläche zwischen zwei Flüssigkeiten schwingen, so erhält man die äussere Reibung der beiden Flüssigkeiten gegen einander. Dies hat MEYER für Oel und Wasser gethan.

Nach derselben Methode hat GROTRIAN[1]) Wasser und einige Salzlösungen untersucht, namentlich zu dem Zweck, um die Abhängigkeit der Reibung von der Temperatur zu ermitteln, für welche Grösse nämlich ein naher Zusammenhang zwischen Fluidität und elektrischem Leitungsvermögen sich ergiebt. Als Temperaturcoëfficienten der Fluidität $\varphi \left(= \frac{1}{\eta}\right)$ für eine bestimmte Temperatur (18°) bezeichnet GROTIAN die Grösse $\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$. Sind also t_1 und t_2 zwei Temperaturen, η_1, η_2 die dabei beobachteten Reibungscoëfficienten, so ist

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{t_2 - t_1}\,\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_{18}} = \left(\frac{d\frac{1}{\eta}}{dt}\eta\right)_{18}$$

der Temperaturcoëfficient β_{18} der Fluidität. Es ergaben sich so bei den einzelnen Lösungen vom Procentgehalt p (p Gramm Salz in 100 gr Lösung) folgende Zahlen für β_{18}

NaCl		KCl		$CaCl_2$		$MgCl_2$		$BaCl_2$		$ZnSO_4$	
p	β_{18}	p	β_{18}	p	β_{18}	p	β_{18}	p	β_{18}	p	β_{18}
4·97	0·0309	9·93	0·0225	5·00	0·0264	4·51	0·0318	5·25	0·0247	7·41	0·0291
15·00	0·0276	20·95	0·0206	9·98	0·0282	19·83	0·0336	15·08	0·0204	11·08	0·0326
23·86	0·0359			19·93	0·0245	33·6	0·0406	23·56	0·0213	14·85	0·0333
				25·38	0·0257					19·61	0·0370
				29·81	0·0277					22·61	0·0373
				35·2	0·0293					29·75	0·0516

[1]) GROTRIAN, POGG. Ann. Bd. 157, pag. 130. 1876.

Der Gang von β mit wachsendem p stimmt zuweilen sehr auffallend überein mit dem Gang der entsprechenden Coëfficienten für die galvanische Leitungsfähigkeit.

Abänderungen der MEYER'schen Versuchsmethode durch TH. S. SCHMIDT[1]) und der Berechnungsweise durch GROSSMANN[2]) seien nur erwähnt. Dagegen hat W. KÖNIG[3]) diese Versuche zweckmässig in der Weise modificirt, dass er statt drehender Scheiben drehende Kugeln anwendete[4]). Es ergab sich, mittelst einer auch von O. E. MEYER acceptirten Correktur der Berechnung, für den Reibungscoëfficienten des Wassers ein Werth, der mit dem aus Ausflussversuchen bestimmten bis auf 1 ₰ übereinstimmt, nämlich für 17°

$$\eta = 0{\cdot}01112,$$

während die Ausflussversuche von	POISEUILLE . . .	0·01089
„ „ „ „	GROTRIAN . . .	0·01106
„ „ „ „	KÖNIG	0·01105

ergaben

KÖNIG's Versuche mit schwingenden Scheiben[5]) ergaben mit dieser Correktur bei

	η	t
Aethyläther	0·00256	15°
Schwefelkohlenstoff . . .	0·00388	15°
Leichtes Benzol	0·00523	19·3°
Schweres Benzol	0·00688	16·5°
Terpentinöl	0·001865	11·9°

c) Methode der Strömung durch Capillaren.

Bei weitem die meisten Untersuchungen über die innere Reibung sind jedoch mittelst der Methode des Durchflusses durch capillare Röhren gemacht worden, da einerseits hierbei die Theorie vollständig exakt zu entwickeln ist, andererseits die Beobachtungen leicht mit grosser Genauigkeit und ohne grosse Mühe anzustellen sind.

Rein empirisch hatte schon POISEUILLE im Jahre 1842 gezeigt[6]) dass die Gesetze der Strömung von Flüssigkeiten durch capillare Röhren von nicht zu geringer Länge und unter nicht zu hohem Drucke sehr einfache seien. Er hatte aus seinen Versuchen die Formel aufgestellt:

$$Q = \frac{kHD^4}{L},$$

worin Q die pro Zeiteinheit ausgeflossene Flüssigkeitsmenge, H der Druck (in Millimetern Quecksilber), D der Durchmesser, L die Länge der Röhre und k ein Coëfficient ist, der nur von der Natur der Flüssigkeit und der Temperatur abhängt. Es gelang dann HAGENBACH[7]), F. NEUMANN[8]), HELMHOLTZ[9]) u. A., dieses Gesetz auch aus den Grundgleichungen der Hydrodynamik reibender Flüssigkeiten

1) TH. S. SCHMIDT, WIED. Ann. 16, pag. 633. 1882.

2) GROSSMANN, Inaug.-Diss. Breslau 1880.

3) W. KÖNIG, WIED. Ann. 32, pag. 194. 1887.

4) Eine andere Modifikation dieser Methode s. MARGULES, Wien. Ber. 83, pag. 588. 1881; COUETTE, Compt. rend. 107, pag. 388. 1888.

5) W. KÖNIG, WIED. Ann. 25, pag. 618. 1885.

6) POISEUILLE, Compt. rend. Bd. 15, pag. 1167. 1842.

7) HAGENBACH, POGG. Ann. Bd. 109, pag. 385. 1860.

8) F. NEUMANN, Einl. in d. theor. Physik, pag. 246. 1883 (1858/59).

9) HELMHOLTZ, Wien. Ber. Bd. 40, pag. 607. 1868.

abzuleiten. Die Grundvoraussetzung ist dabei nur, dass alle einzelnen Flüssigkeitsfäden in der Röhre parallel sind, d. h. dass jedes einzelne Theilchen nur eine fortschreitende Bewegung in Richtung der Axe der Röhre hat, keine Bewegung in einem Querschnitt. Aus dieser Annahme ergiebt sich, dass das Gesetz erst für einigermaassen lange und enge Röhren gelten kann, da an der Einströmungsöffnung innere Wirbelbewegungen stattfinden müssen, die sich erst innerhalb der Röhre verlieren[1]). Die Röhre muss also so lang sein, dass dieser störende Theil nichts am Resultate ändert. Ist diese Annahme aber erfüllt, so ist in die Differentialgleichungen der Bewegung einzuführen $u = 0$, $v = 0$, wenn die Röhrenaxe als z-Axe genommen wird.

Dann ergiebt sich aus dem Princip der Continuität $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ und weiter $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$. Es wird dann

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - \eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Da w also nur von x und y, dagegen p nur von z abhängig ist, so ist $\frac{\partial p}{\partial z} = c$ und

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} - \eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -c.$$

Wenn die Bewegung eine stationäre ist, so ist $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ und

$$\eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = c.$$

Die Grenzbedingungen, die an der Grenze der Flüssigkeit, d. h. an der Röhrenwand, zu erfüllen sind, reduciren sich auf

$$\frac{\partial w}{\partial N} = \frac{\lambda}{\eta},$$

wenn λ der Coëfficient der äusseren Reibung, N die Normale der Röhre ist. Für kreisförmige Röhren vom Radius R wird

$$w = -\frac{c}{4\eta}\left[R^2 + \frac{2\eta}{\lambda}R - (x^2 + y^2)\right].$$

Da $\frac{\partial p}{\partial z} = c$ also $p = cz$, ist d. h. der Druck sich linear in der Röhre ändert, so lässt sich c aus der Druckhöhe, d. i. der Differenz von Anfangs- und Enddruck $p_a - p_e$ und der Länge L, ausdrücken durch

$$c = \frac{p_e - p_a}{L} = -\frac{P}{L},$$

also

$$w = \frac{P}{4\eta L}\left[R^2 + \frac{2\eta}{\lambda}R - (x^2 + y^2)\right].$$

Das in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt ausfliessende Volumen V ist

$$V = 2\pi\int_0^R w\rho\, d\rho = \frac{\pi P}{8\eta L}\left(R^4 + \frac{4\eta}{\lambda}R^3\right).$$

Wenn die Flüssigkeit an der Wand haftet, also $\lambda = \infty$ ist, so ergiebt sich

$$V = \frac{\pi P}{8\eta L}R^4.$$

[1]) Ludwig und Stefan, Wien. Ber. 32. 1858.

Diese Formel stimmt genau mit der POISEUILLE'schen überein. Man nennt das durch diese Formel ausgedrückte Gesetz das POISEUILLE'sche Gesetz.

Die Constante k der POISEUILLE'schen Formel ist also gleich $\frac{\pi}{128\eta}$, wenn man alle Grössen in den von POISEUILLE gewählten Einheiten ausdrückt.

Das POISEUILLE'sche Gesetz gilt nur für Röhren, deren Länge mehr als ein gewisses Vielfaches des Querschnitts ist. Je enger die Röhre, um so kürzer darf sie sein.

Für weite oder für verhältnissmässig kurze Röhren gelten andere Gesetze, die experimentell vielfach studirt und auch von HAGENBACH, O. E. MEYER[1]) u. A. in Formeln gefasst wurden. (Weiteres darüber s. Hydrodynamik.)

Uebrigens lassen sich nicht nur für kreisförmige, sondern für Röhren mit einer Menge anderer Querschnitte die betreffenden Bewegungen vollständig ermitteln[2]). Die Grenze für die Länge einer Röhre, die noch dem POISEUILLE'schen Gesetz genügen soll, ist nach F. NEUMANN dann gegeben, wenn die Geschwindigkeit des centralen Fadens gleich der freien Fallgeschwindigkeit wäre[3]). Diese Bedingung führt auf die Formel für die Grenzlänge

$$l_0 = \frac{\sqrt{2gH} \cdot \rho \cdot R^2}{8\eta},$$

worin H die Höhe der drückenden Flüssigkeitssäule, ρ ihre Dichtigkeit ist. Die Versuche von HAGEN[4]) ergeben in der That diesen Grenzwerth.

Was nun die Versuche anbetrifft, so sind diese mit geringen Modificationen gewöhnlich so angestellt worden[5]), dass die Capillarröhre in einem Bade von bestimmter Temperatur sich befand, und einerseits in einem Rohr befestigt war, welches die Flüssigkeit enthielt und das oben in ein weites Gefäss auslief. Das Volumen dieses Gefässes wird bestimmt und die Zeit gemessen, in welcher dieses Volumen sich durch die Capillare entleert. Die grösste Schwierigkeit bei diesen Versuchen besteht in der Abhaltung der Staubtheilchen in der Capillare.

Nach den erwähnten Versuchen von POISEUILLE, die sich auf Wasser, Gemische von Alkohol und Wasser, stark verdünnte Salzlösungen bezogen, untersuchte GRAHAM[6]) Gemische von Säuren und Wasser, RELLSTAB[7]) eine Reihe von organischen Flüssigkeiten, HÜBENER[8]) einige Salzlösungen, SPRUNG[9]) eine grosse Reihe von Salzlösungen, ferner GUEROUT[10]), dann PRIBRAM und HANDL[11]) in drei Abhandlungen eine sehr grosse Menge organischer Verbindungen, ROSENCRANZ[12]) Wasser und Glycerin, GROTRIAN[13]), WIJKANDER[14]) Schwefelsäure, Natronlauge,

---

[1]) O. E. MEYER, POGG. Ann. Jubelband pag. 1 1874.
[2]) GRAETZ, SCHLÖMILCH's Zeitschrift für Mathematik. Bd. 25. pag. 316 1879.
[3]) F. NEUMANN, Einl. in d. theor. Physik, pag. 257. 1883 (1859).
[4]) HAGEN, Berl. Akad. 1854.
[5]) G. WIEDEMANN, POGG. Ann. Bd. 99, pag. 221. 1856.
[6]) GRAHAM, Phil. Mag. (4), Bd. 24. 1862.
[7]) RELLSTAB, Transpir. homol. Flüssigk. Diss. Bonn. 1868.
[8]) HÜBENER, POGG. Ann. Bd. 150, pag. 248. 1873.
[9]) SPRUNG, POGG. Ann. Bd. 159, pag. 1. 1876.
[10]) GUEROUT, Compt. rend. Bd. 81, pag. 1027. 1875; 83, pag. 1291. 1876.
[11]) PRIBRAM u. HANDL, Wien. Ber. Bd. 78 (2), pag. 113. 1878; Bd. 80, pag. 1. 1879. Bd. 84, pag. 1, 1881.
[12]) O. E. MEYER, WIED. Ann. 2, pag. 387. 1877.
[13]) GROTRIAN, POGG. Ann. 160, pag. 238, 1877; WIED. Ann. 8, pag. 529. 1879.
[14]) WIJKANDER, Beibl. III, pag. 8, 1879.

SLOTTE[1]), WAGNER[2]), KÖNIG[3]) ARRHENIUS[4]) REYHER[5]) eine Reihe von Lösungen. von Salzen und organischen Stoffen. Endlich wurde von WARBURG[6]) die Reibung des Quecksilbers und von WARBURG und BABO[7]) diejenige der flüssigen Kohlensäure untersucht.

Bei allen diesen Substanzen zeigte es sich, dass die Reibung ausserordentlich stark mit wachsender Temperatur abnimmt, pro Grad oft um 3—6 %. In Bezug auf die Temperaturabhängigkeit der Reibung hat GRAETZ[8]) aus Betrachtungen über die Art, wie die Reibung zu Stande kommt, (nämlich ausgehend von den oben pag. 577 angeführten MAXWELL'schen Erörterungen geschlossen, dass für homogene Flüssigkeiten (nicht für Lösungen) die Reibung sich in erster Annäherung darstellen lassen muss durch

$$\eta = A \frac{t_0 - t}{t - t_1},$$

worin t_0 die kritische Temperatur der Substanz, t_1 eine Temperatur unterhalb des Erstarrungspunktes, die absolute Erstarrungstemperatur ist. Bei 55 von 61 untersuchten Flüssigkeiten zeigt sich diese Formel in guter Uebereinstimmung mit den Beobachtungen.

Ich gebe im Folgenden in der Tabelle eine Zusammenstellung der untersuchten Flüssigkeiten und zwar erstens der homogenen Flüssigkeiten, zweitens der Lösungen von Salzen und Säuren. Bei allen ist die specifische Zähigkeit angegeben, d. h. die Zähigkeit × 100, dividirt durch die Zähigkeit des Wassers bei 0°. Es sind ausser bei Wasser die Werthe von z für drei Temperaturen aufgeführt, ferner, wo die Berechnung möglich war, die Constanten A und t_1 angegeben, die in obiger Formel auftreten.

R. bedeutet RELLSTAB. P. H. I., P. H. II., P. H. III. bedeuten die drei Abhandlungen von PRIBRAM und HANDL.

I. Tabelle der specifischen Zähigkeiten z homogener Flüssigkeiten.

A. Wasser.

0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	Beobachter	A	t_1
100	73·5	56·7	45·2	37·0	30·8	—	—	POISEUILLE		
100	73·57	55·95	44·70	36·84	31·07	27·14	—	GRAHAM I.		
100	72·93	56·04	45·01	36·95	31·00	26·89	—	GRAHAM II.		
100	73·5	55·5	45·0	37·2	31·2	—	—	RELLSTAB	7·338	— 28·619
100	73·18	56·23	45·14	37·08	31·245	26·76	—	SPRUNG		
100	—	56·43	45·25	36·93	—	—	—	SLOTTE		
100	—	56·2	44·6	36·7	31·7	—	—	WAGNER		

1) SLOTTE, WIED. Ann. 14, pag. 13. 1881.
2) WAGNER, WIED. Ann. 18, pag. 259. 1883.
3) KÖNIG, WIED. Ann. 25, pap. 618. 1885.
4) ARRHENIUS, OSTWALD Zeitschr. 1, pag. 285. 1887.
5) REYHER OSTWALD, Zeitschr. 2, pag. 744. 1888.
6) WARBURG, POGG. Ann. 140, pag. 367. 1870.
7) WARBURG u. BABO, WIED. Ann. 17, pag. 390. 1882.
8) GRAETZ, WIED. Ann. 34, pag. 25. 1888.

B. Fettsäuren.

Name	Formel	z_{10}	z_{20}	z_{50}	Beobachter	A	t_1
Ameisensäure . . .	CH_2O_2	122·5	81·7	57·0	Rellstab (R.)	19·881	— 36·72
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	84·4	61·4	46·3	R.	18·416	— 58·19
		84	61	46	P. H. III.		
Propionsäure	$C_3H_6O_2$	70·3	51·5	40·9	R.	18·078	— 66·46
		78	57	45	P. H. III.		
Gährungsbuttersäure .	$C_4H_8O_2$	110·2	77·4	57·6	R.	17·333	— 44·19
		114	79	57	P. H. I.		
Isobuttersäure . . .	$C_4H_8O_2$	—	65·1	48·5	P. H. I.	16·015	— 49·43
Isovaleriansäure . . .	$C_5H_{10}O_2$	152·4	103·3	71·5	R.	19·168	— 35·51
Isocapronsäure . . .	$C_6H_{12}O_2$	222·2	139·7	97·8	R.	21·939	— 27·94

C. Alkohole und Glycole.

Name	Formel	z_{10}	z_{20}	z_{50}	Beobachter
Methylalkohol . . .	CH_4O	39	31·7	23·8	R.
Aethylalkohol . . .	C_2H_6O	86·2	58·8	40·7	R.
„ . . .	„	88·3	55·7	39·5	Graham I.
„ . . .	„	82·3	56·2	39·6	Graham II.
Normalpropylalkohol .	C_3H_8O	170	100	63	P. H. II.
„ .	„	175	105	68	P. H. III.
Isopropylalkohol . . .	C_3H_8O	111·8	76·8	50·6	R.
„ . . .	„	170	98	58	P. H. III.
„ . . .	„	184	103	60	P. H. III.
Normalbutylalkohol . .	$C_4H_{10}O$	212	121	77	P. H. III.
Isobutylalkohol . . .	$C_4H_{10}O$	213·1	125·0	78·0	R.
„ primär (?)	„	325	169	94	P. H. III.
Isoamylalkohol . . .	$C_5H_{12}O$	—	188·2	103·5	R.
„ . . .	„	366	193	110	P. H. III.
Allylalkohol	C_3H_5OH	116	72	47	P. H. III.
Aethylenglycol . . .	$C_2H_4(OH)_2$	—	—	z_{55} = 350	P. H. III.

D. Aether und Fettsäureester.

Namen	Formel	z_{10}	z_{20}	z_{50}	Beobachter	A	t
Aethyläther	$C_4H_{10}O$	19·3	18·9	—	R.		
„	„	14·5	11·7	—	P. H. II.		
Methylacetat	$C_3H_6O_2$	26·3	21·4	16·4	R.	13·896	— 108·5
„	„	26	20	17	P. H. II.		
Methylpropionat . . .	$C_4H_8O_2$	31	24·5	20	P. H. III.	13·62	— 96·5
Methylnormalbutirat . .	$C_5H_{10}O_2$	35·5	28·6	21·7	R.	13·44	— 90·96
Methylisobutirat . . .	$C_5H_{10}O_2$	35	27·5	23	P. H. III.	16·37	— 113·0
Methylisovalerat . . .	$C_6H_{12}O_2$	40·8	33·7	26·7	R.	18·15	— 117·2
Aethylformiat	$C_3H_6O_2$	27·8	22·7	17·7	R.	13·94	— 114·8
„	„	25·5	20·1	16·1	P. H. I.		
Aethylacetat	$C_4H_8O_2$	29·9	25·0	20·3	R.	13·05	— 102·4
„	„	28·8	22·2	17·9	P. H. I.		
Aethylpropionat . . .	$C_5H_{10}O_2$	36·5	28	24	P. H. III.	13·75	— 89·59
Aethylnormalbutirat . .	$C_6H_{12}O_2$	38·2	31·0	23·8	R.	13·18	— 80·38
„ . . .	„	42·9	32·9	25·7	P. H. I.		
Aethylisobutyrat . . .	$C_6H_{12}O_2$	41	31	25	P. H. III.	14·40	— 88·52

Namen	Formel	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter	A	t
Aethylisovalerat . . .	$C_7H_{14}O_2$	48·0	38·4	29·9	R.	12·35	— 65·31
" . . .	"	50·2	37·2	28·5	P. H. I.		
Normalpropylformiat . .	$C_4H_8O_2$	33·5	26	21	P. H. II.	15·22	— 107·6
Normalpropylacetat . .	$C_5H_{10}O_2$	37	29	22	P. H. II.	14·57	— 98·05
Normalpropylpropionat .	$C_6H_{12}O_2$	48	36	29	P. H. III.	15·18	— 81·74
Normalpropylnormalbutirat	$C_7H_{14}O_2$	58	43	33	P. H. II.	12·24	— 57·17
Normalpropylisobutirat .	$C_7H_{14}O_2$	53	40	31·5	P. H. III.	14·98	— 76·97
Isopropylformiat . . .	$C_4H_8O_2$	32	25	20	P. H. III.	15·24	— 105·45
Isopropylacetat	$C_5H_{10}O_2$	36	28	22	P. H. III.	14·67	— 97·14
Isopropylpropionat . .	$C_6H_{12}O_2$	42	33	26	P. H. III.	15·35	— 93·39
Isopropylnormalbutirat .	$C_7H_{14}O_2$	52	38·5	30	P. H. III.	14·39	— 76·13
Isopropylisobutirat . .	$C_7H_{14}O_2$	47·5	36	28	P. H. III.	13·31	— 75·79
Normalbutylformiat . .	$C_5H_{10}O_2$	46	34·5	27·5	P. H. III.	15·32	— 82·57
Normalbutylacetat . .	$C_6H_{12}O_2$	52	40	30·5	P. H. III.	13·49	— 67·04
Isobutylformiat	$C_5H_{10}O_2$	44	33	26	P. H. II.	14·64	— 79·44
Isobutylacetat	$C_6H_{12}O_2$	45·5	34·1	26·3	P. H. I.	13·81	— 76·19
Isobutylpropionat . . .	$C_7H_{14}O_2$	55·5	41·5	32	P. H. III.	14·29	— 69·56
Amylacetat	$C_7H_{14}O_2$	59·4	43·0	32·7	P. H. I.		
Isoamylformiat	$C_6H_{12}O_2$	51·4	40·7	31·1	R.		
Isoamylacetat	$C_7H_{14}O_2$	89·4	63·0	44·1	R.		
Isoamylvalerat	$C_{10}H_{20}O_2$	94·1	65·4	48·4	R.		
Allylacetat	$C_5H_8O_2$	38·5	30·5	25	P. H. III.		

E. Halogenverbindung der Fettgruppe.

Namen	Formel	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter	A	t_1
Aethylenchlorid	$C_2H_4Cl_2$	—	40·5	31·7	P. H. I.	18·35	— 84·89
Aethylidenchlorid . . .	$C_2H_4Cl_2$	32	26	22	P. H. III.	24·17	— 147·7
Aethylenbromid . . .	$C_2H_4Br_2$	—	83·5	—	P. H. I.		
Jodmethyl	CH_3J	31·5	27		P. H. III.		
Bromäthyl	C_2H_5Br	24	19·5	—	P. H. II.	16·45	— 143·8
Jodäthyl	C_2H_5J	36	29	25	P. H. II.		
Chlornormalpropyl . . .	C_3H_7Cl	21·5	17·7	—	P. H. I.	18·038	— 164·5
Bromnormalpropyl . . .	C_3H_7Br	31·3	26·2	—	P. H. I.	20·99	— 163·65
Jodnormalpropyl . . .	C_3H_7J	47·2	37·7	28·1	P. H. I.		
Chlorisopropyl	C_3H_7Cl	22	18	—	P. H. III.	22·494	— 192·42
Bromisopropyl	C_3H_7Br	32	27	22	P. H. III.	23·273	— 171·65
Jodisopropyl	C_3H_7J	47	37	29	P. H. III.		
Normalbutyljodid . . .	C_4H_9J	58	46	38	P. H. III.		
Isobutylchlorid	C_4H_9Cl	30	23·5	19	P. H. II.	16·548	— 113·75
Isobutylbromid	C_4H_9Br	39	31	25·5	P. H. II.	16·37	— 102·14
Isobutyljodid	C_4H_9J	55·5	43	34·5	P. H. II.		
Isoamylchlorid	$C_5H_{11}Cl$	35	27·5	22	P. H. II.	15·354	— 104·95
Isoamylbromid	$C_5H_{11}Br$	80	55·5	40·3	P. H. III.	14·647	— 45·84
Isoamyljodid	$C_5H_{11}J$	67	51	40	P. H. II.		
Chloroform	$CHCl_3$	36	29	24	P. H. II.	20·65	— 132·85
Chlorkohlenstoff . . .	CCl_4	61	46	35	P. H. II.	19·45	— 70·09
" . . .	"	65	48	37	P. H. II.		
Chlorpikrin	CCl_3NO_2	76	57	45	P. H. II.	26·56	— 268·5
Allylchlorid	C_3H_5Cl	22	18·5	—	P. H. III.		
Allylbromid	C_3H_5Br	34	27	23	P. H. III.		
Allyljodid	C_3H_5J	45	36·5	30	P. H. III.		
Aethylmonochloracetat .	$C_4H_7ClO_2$	84·5	61	46	P. H. III.		

F. Aldehyde und Ketone.

Namen	Formel	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter	A	t_1
Aceton	C_2H_6CO	22·0	20·3	18·6	R.	17·915	— 155·45
"	"	24	20	16	P. H. III.		
Acetaldehyd	CH_3COH	20·7	—	—	R.	23·715	— 244·5
"	"	16	—	—	P. H. III.		
Propylaldehyd	C_2H_5COH	26	20·5	—	P. H. III.	18·09	— 127·2
Normalbutylaldehyd . .	C_3H_7COH	45	31	23	P. H. III.	12·61	— 54·75
Isobutylaldehyd	C_3H_7COH	36·5	26	21	P. H. III.	16·79	— 87·52
Isoamyladehyd	C_4H_9COH	39·7	32·4	25·1	R.		
"	"	39·5	30·5	24·5	P. H. III.		

G. Mercaptane.

Namen	Formel	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter
Aethylsulfid	$(C_2H_5)_2S$	27	22	18	P. H. II.
Aethylsulfhydrat	C_2H_5SH	24	19·5	—	P. H. II.

H. Nitroverbindungen der Fettreihe.

Namen	Formel	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter
Nitroäthan	$C_2H_5NO_2$	45	36	29	P. H. III.
Nitropropan	$C_3H_7NO_2$	55·5	43	34·5	P. H. III.
Isonitropropan	$C_3H_7NO_2$	47	36·5	28	P. H. III.
Nitrobutan (norm.)	$C_4H_9NO_2$	67	50	39	P. H. III.
Isonitrobutan	$C_4H_9NO_2$	72	54	41	P. H. III.
Salpetrigsäurenormalpropylester	$C_3H_7NO_2$	25	21	17	P. H. III.
Salpetrigsäureisobutylester	$C_4H_9NO_2$	47·5	35·5	26	P. H. III.

I. Aromatische Stoffe.

Namen	Formel	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter	A	t_1
Benzol	C_6H_6	42·4	31·5	24·4	P. H. I.	13·71	— 78·35
Toluol	$C_6H_5CH_3$	38·2	29·3	23·8	P. H. I.	12·11	— 89·02
Xylol (Meta)	$C_6H_4(CH_3)_2$	42·4	32·7	26·4	P. H. I.		
Benzoesaurer Methyläther .	$C_8H_8O_2$	103·3	90·1	64·8	R.		
Benzoesaurer Aethyläther .	$C_9H_{10}O_2$	148·8	98·0	69·6	R.		
Benzoes. Normalpropyläther .	$C_{10}H_{12}O_2$	206	126	88	P. H. III		
Methylsalicylsäure	$C_8H_8O_3$	192·1	119·8	80·5	R.		
Bittermandelöl (Benzaldehyd)	C_6H_5CHO	96·1	71·9	53·8	R.		
Salicylaldehyd	$C_6H_5O \cdot CHO$	179·8	125·1	84·2	R.		
Monochlorbenzol	C_6H_5Cl	53·1	41·2	33·2	P. H. I.		
Monobrombenzol	C_6H_5Br	78	59	48	P. H. III.		
Nitrobenzol	$C_6H_5NO_2$	—	95·3	69·8	P. H. I.		
Chlortoluol	$C_6H_4ClCH_3$	62·8	47·5	37·1	P. H. I.		
Benzylchlorid	$C_6H_5ClCH_2$	—	65·5	49·5	P. H. I.		
Orthonitrotoluol	$C_6H_4NO_2CH_3$	—	107·0	76·5	P. H. I.		

II. Tabelle der specifischen Zähigkeiten der Lösungen von Salzen und Säuren in Wasser.

Es bedeutet p die Anzahl Gramme des gelösten Stoffes (im wasserfreiem Zustand) in 100 Gramm Lösung. z_{10}, z_{20}, z_{30} die specifische Zähigkeit bei 10°, 30°, 50°. Bei einigen Lösungen sind die Grössen z_{15}, z_{25}, z_{40} für die Temperaturen 15°, 25°, 40° angegeben.

1. Chloride.

Namen	p	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter
NH_4Cl .	3·67	71·46	44·98	31·90	Sprung
„ . .	8·671	69·07	45·33	32·62	„
„ . .	15·678	67·30	46·23	34·01	„
„ . .	23·37	67·45	47·66	36·06	„
KCl . .	10·230	70·05	46·06	33·13	Sprung
„ . .	22·215	70·05	48·60	36·38	„
$NaCl$ . .	7·955	82·39	52·03	31·82	Sprung
„ . .	14·312	94·76	60·07	36·91	„
„ . .	23·219	128·30	79·44	47·38	„
$LiCl$ . .	7·757	96·1	59·7	41·2	Sprung
„ . .	13·91	121·3	75·9	52·6	„
„ . .	26·93	229·4	142·1	98·0	„
$BaCl_2$ . .	7·605	77·9	44·0	35·2	Sprung
„ . .	15·402	86·4	56·0	39·6	„
„ . .	24·34	100·7	66·2	47·7	„
$SrCl_2$ . .	7·18	81·6	51·3	36·4	Sprung
„ . .	12·53	90·4	58·0	41·1	„
„ . .	21·45	112·8	73·5	52·5	„
„ . .	31·62	170·4	113·7	81·2	„
$CaCl_2$ . .	15·17	110·9	71·3	50·3	Sprung
„ . .	31·60	272·5	177·0	124·0	„
„ . .	39·75	670·1	379·0	245·5	„
„ . .	44·087	—	593·1	363·2	„

Namen	p	z_{15}	z_{25}	z_{45}	
HCl . .	8·14	70·97	57·94	40·10	Wagner
„ . . .	16·125	79·98	66·54	48·09	„
„ . . .	23·045	91·84	76·92	56·37	„
$HgCl_2$ . .	0·226		z_{30} = 46·78	z_{40} = 38·29	Wagner
„ . .	3·55	z_{10} = 76·75	46·57	38·29	„
$CdCl_2$ . .	11·09	77·46	60·53	40·73	Wagner
„ . .	16·30	88·94	70·47	47·21	„
„ . .	24·786	104·02	80·37	53·58	„
$CoCl_2$ . .	7·970	83·01	65·07	44·86	Wagner
„ . .	14·858	111·60	85·11	58·76	„
„ . .	22·270	161·60	126·60	82·58	„
$ZnCl_2$ . .	15·334	93·61	72·74	48·21	Wagner
„ . .	23·487	111·50	86·62	57·49	„
„ . .	33·752	151·70	117·90	72·64	„
$NiCl_2$ . .	11·449	90·40	70·03	48·25	Wagner
„ . .	22·690	140·20	109·70	72·71	„
„ . .	30·400	229·50	171·80	111·94	„
$MnCl_2$ . .	8·007	92·81	71·12	48·11	Wagner
„ . .	15·650	130·90	104·20	68·69	„
„ . .	30·33	256·30	193·20	123·70	„
„ . .	40·132	537·30	393·40	246·50	„
$CuCl_2$ . .	12·006	87·18	67·82	45·58	Wagner
„ . .	21·349	117·40—124·50	95·85	63·25	„
„ . .	33·027	178·40	137·40	87·08	„

II. Bromide.

Namen	p	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter
NH_4Br .	15·97	65·2	43·2	31·5	Sprung
„ .	25·33	62·6	43·3	32·2	„
„ .	36·883	62·4	44·6	34·3	„
KBr . .	14·023	67·6	44·8	32·1	Sprung
„ . .	23·164	66·2	44·7	33·2	„
„ . .	34·639	66·6	47·0	35·7	„
NaBr . .	9·775	75·6	48·7	34·4	Sprung
„ . .	18·579	82·6	53·5	38·2	„
„ . .	27·266	95·9	61·7	43·8	„

III. Jodide.

Namen	p	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter
KJ . . .	8·419	69·5	44·0	31·3	Sprung
„ . . .	17·015	65·3	42·9	31·4	„
„ . . .	33·035	61·8	42·9	32·4	„
„ . . .	45·98	63·0	45·2	35·3	„
„ . . .	54·0	68·8	48·5	37·6	„
NaJ . .	8·829	73·1	46·0	32·4	Sprung
„ . .	17·15	73·8	47·4	33·7	„
„ . .	35·686	86·0	55·7	40·6	„
„ . .	55·47	157·2	96·4	66·9	„

IV. Chlorate.

Namen	p	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter
$KClO_3$.	3·506	71·7	44·7	31·5	Sprung
„ .	5·687	—	45·0	31·4	„
$NaClO_3$.	11·50	78·7	50·0	35·3	Sprung
„ .	20·59	88·9	56·8	40·4	„
„ .	33·543	121·0	75·7	53·0	„

V. Nitrate.

Namen	p	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter
NH_4NO_3 .	5·975	69·6	44·3	31·6	Sprung
„ .	12·19	66·8	44·3	31·9	„
„ .	27·08	67·0	47·7	34·9	„
„ .	37·22	71·7	51·2	38·8	„
„ .	49·83	88·1	63·3	48·9	„
KNO_3 . .	6·316	70·8	44·6	31·8	Sprung
„ . .	12·19	68·7	44·8	32·3	„
„ . .	17·60	68·8	46·0	33·4	„
$NaNO_3$.	7·25	75·6	47·9	33·8	Sprung
„ .	12·35	81·2	51·0	36·1	„
„ .	18·20	87·0	55·9	39·3	„
„ .	31·547	121·2	76·2	53·4	„

Namen	p	z_{15}	z_{25}	z_{45}	Beobachter
$Ba(NO_3)_2$	2·98	62·01	51·14	34·82	WAGNER
„	5·24	68·06	54·24	36·86	„
HNO_3 . .	8·37	66·41	54·83	37·50	WAGNER
„ . .	18·20	69·55	57·29	40·68	„
„ . .	28·31	80·35	65·47	46·25	„
$Cd(NO_3)_2$	7·81	61·95	50·13	34·04	WAGNER
„ .	15·71	71·80	58·75	41·31	„
„ .	22·36	85·11	69·03	47·53	„
$Sr(NO_3)_2$.	10·29	69·35	55·98	39·08	WAGNER
„ .	21·19	87·30	69·18	48·08	„
„ .	32·61	116·90	93·33	62·33	„
$Pb(NO_3)_2$	17·93	74·04	59·13	40·33	WAGNER
„	32·22	91·85	72·49	50·56	„
$Co(NO_3)_2$	8·280	74·66	57·95	39·84	WAGNER
„	15·960	86·96	69·21	44·95	„
„	24·528	110·40	88·02	59·06	„
$Ni(NO_3)_2$.	16·493	90·72	70·13	48·87	WAGNER
„ .	30·006	135·60	105·90	70·69	„
„ .	40·953	222·60	169·70	108·30	„
$Zn(NO_3)_2$	15·955	80·73	64·28	43·76	WAGNER
„	30·626	104·72	85·72	57·69	„
„	44·500	167·90	130·60	87·91	„
$Ca(NO_3)_2$	17·55	93·76	74·59	49·91	WAGNER
„	30·10	144·10	112·70	75·15	„
„	40·13	242·60	217·10	128·10	„
$Mn(NO_3)_2$	18·309	95·96	76·38	55·60	WAGNER
„	29·602	167·50	126·00	88·65	„
„	49·309	396·85	301·10	188·80	„
$Cu(NO_3)_2$	18·99	97·28	76·04	51·29	WAGNER
„	26·68	126·21	98·83	68·56	„
„	46·71	382·88	283·83	172·24	„
$Mg(NO_3)_2$	18·62	99·79	81·29	56·23	WAGNER
„	34·19	213·32	164·40	109·90	„
„	39·77	317·05	250·05	158·13	„

VI. Sulfate.

Namen	p	z_{10}	z_{30}	z_{50}	Beobachter
$(NH_4)_2SO_4$	8·1	107·9	52·3	37·0	SPRUNG
„	15·94	120·2	60·4	43·2	„
„	25·51	148·4	74·8	54·1	„
K_2SO_4 .	5·173	77·4	48·6	34·3	SPRUNG
„ .	9·769	81·0	52·0	36·9	„
Na_2SO_4 .	3·352	80·4	50·0	—	SPRUNG
„ .	6·626	88·9	55·8	38·9	„
„ .	12·71	—	70·0	48·1	„
$MgSO_4$.	4·984	96·2	59·0	40·9	SPRUNG
„ .	9·497	130·9	77·7	53·0	„
„ .	14·031	187·9	107·4	71·1	„
„ .	19·325	302·2	166·4	106·0	„

Namen	p	z_{15}	z_{25}	z_{45}	Beobachter
$CuSO_4$.	6·79	79·63	61·81	41·40	Wagner
„ .	12·57	98·18	73·98	52·00	„
„ .	17·49	124·52	96·85	61·80	„
H_2SO_4 .	7·875	77·81	60·96	41·69	Wagner
„ .	15·503	95·07	74·99	49·77	„
„ .	23·429	122·71	95·50	64·27	„
$CdSO_4$.	7·140	78·90	61·81	41·31	Wagner
„ .	14·660	96·17	72·36	48·78	„
„ .	22·011	120·81	91·85	60·13	„
$CoSO_4$.	7·239	86·72	68·72	45·08	Wagner
„ .	14·156	117·81	95·51	61·66	„
„ .	21·167	193·60	146·20	89·95	„
$MnSO_4$.	11·45	129·42	98·64	63·39	Wagner
„ .	18·80	228·63	172·21	107·42	„
„ .	22·08	661·80	474·30	266·80	„
$ZnSO_4$.	7·12	97·06	79·26	51·53	Wagner
„ .	16·64	156·03	118·61	73·46	„
„ .	23·09	232·82	177·41	108·11	„
$NiSO_4$.	10·62	94·63	73·46	49·78	Wagner
„ .	18·19	154·93	119·91	75·70	„
„ .	25·35	298·55	224·93	152·43	„

VII. Chromate.

Namen	p	z_{10}	z_{30}	z_{40}	Beobachter
$(NH_4)_2CrO_4$.	10·52	79·06	62·20	42·2	Slotte
„ .	19·75	87·6	69·7	48·7	„
„ .	28·04	100·7	80·3	55·1	„
$(NH_4)_2Cr_2O_7$	6·85	72·2	55·1	37·9	Slotte
„	13·00	72·3	56·9	38·3	„
„	19·93	73·5	58·4	40·7	„
K_2CrO_4 . .	11·93	75·84	62·54	40·97	Sprung
„ . .	19·61	85·29	68·70	47·95	„
„ . .	24·26	97·30	77·4	53·24	Slotte
„ . .	32·78	109·5	88·88	62·61	Sprung
$K_2Cr_2O_7$ . .	4·71	72·2	55·0	72·7	Slotte
„ . .	6·97	72·1	55·1	72·8	„
Na_2CrO_4 . .	5·76	85·2	66·0	43·7	Slotte
„ . .	10·62	102·9	79·06	52·0	„
„ . .	14·81	127·0	97·2	62·3	„
$MgCrO_4$ . .	12·31	110·8	84·0	54·7	Slotte
„ . .	21·86	166·3	125·2	79·1	„
„ . .	27·71	231·9	172·0	106·7	„

Um alle diese Zahlen in absolutem $C \cdot G \cdot S$-Maass auszudrücken, muss man sie mit dem hundertsten Theil des Werthes des Reibungscoëfficienten des Wassers bei 0° multipliciren, also mit $\frac{\eta_0}{100}$, wenn η_0 diesen Coëfficienten bedeutet. Die einwurffreiesten Bestimmungen dieses Coëfficienten sind die durch Ausflussversuche. Aus Poiseuille's Versuchen berechnet sich nach v. Helmholtz für Wasser

$$\frac{\eta}{\rho} = \frac{0\cdot017790}{1 + 0\cdot0336793\,T + 0\cdot0002209936\,T^2},$$

woraus für 0° sich ergeben würde

$$\eta_0 = \rho_0 \cdot 0\cdot017790 = 0\cdot017788 \left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right).$$

O. E. MEYER berechnet aus POISEUILLES Beobachtungen

$$\eta = \frac{0\cdot01775}{(1 + 0\cdot01104\,T)(1 + 2 \cdot 0\cdot01104\,T)} \left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right),$$

woraus $\eta_0 = 0\cdot01775$ sich ergiebt.

Für 17° ergaben die Versuche von GROTRIAN 0·01106, von KÖNIG 0·01101, während nach dieser Formel sich berechnet 0·01089. Der Werth von η_0 ist also nur bis auf 1—2 % bekannt, wenn man auch die Ausflussversuche allein berücksichtigt.

Die in den Tabellen angeführten Zahlen stellen also absolute Reibungscoëfficienten in *CGS* dar, wenn man sie mit 0·000178 multiplicirt.

Einige andere absolute Werthe sind von KÖNIG[1]) angegeben:

Schwefelkohlenstoff	$\eta = 0\cdot00383$	bei 17·6°	$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$.
Aethyläther	$\eta = 0\cdot90256$	„ 17·7°	
Leichtes Benzol	$\eta = 0\cdot00523$	„ 17·7°	
Schweres Benzol	$\eta = 0\cdot00689$	„ 17·1°	

Auch für Quecksilber zeigte WARBURG[2]) entgegen der Beobachtung von POISEUILLE, dass die äussere Reibung gegen Glas unendlich gross ist. Es ergab sich der Reibungscoëfficient bei 17·2°

$$\eta = 0\cdot016329 \left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right).$$

Beziehungen zwischen Reibung und chemischer Constitution sind sowohl bei homogenen Flüssigkeiten als auch bei Salzlösungen zu erkennen, namentlich, wenn man die Zahlen umrechnet auf äquivalente Mengen, d. h. durch die relative Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit dividirt. Indess sind diese Beziehungen bisher doch noch ziemlich unsicher.

Von Interesse ist, dass sich die vom Temperatureinfluss befreiten Zähigkeiten, nach der oben pag. 585 angegebenen Formel von GRAETZ[3]), für die verschiedensten organischen Flüssigkeiten innerhalb sehr enger Grenzen bewegen, nämlich fast durchweg zwischen den Werthen 0·0028 und 0·0038 liegen. Ebensolche geringe Verschiedenheiten wurden nämlich bei der Reibung der Dämpfe organischer Substanzen gefunden (s. weiter unten).

Bei Mischungen von Alkohol und Wasser beobachtete POISEUILLE, dass der Mischung $C_2H_6O + 3H_2O$ ein Maximum der Ausflusszeit entspricht und später fand GRAHAM ebenfalls bei Mischungen Maximalwerthe der Reibung für bestimmt charakterisirte Hydrate[4]).

Die Frage, ob Magnetisiren oder Elektrisiren einer Flüssigkeit einen Einfluss auf ihre Reibung hat, ist negativ zu beantworten[5]). Ob die Zähigkeit der Flüssigkeiten auch eine »additive« Eigenschaft[6]) ist, ist noch nicht zu entscheiden.

---

[1]) KÖNIG, WIED. Ann. 25, pag. 621. 1885.

[2]) WARBURG, POGG. Ann. 140. 1870.

[3]) GRAETZ, WIED. Ann. 34 pag. 25. 1888.

[4]) KÖNIG, WIED. Ann. 25, pag. 622. 1885.

[5]) Weiter darüber s. PAGLIANI, Ac. Torino 20, pag. 615. 1885; 22, pag. 1. 1887; NOACK, WIED. Ann. 27, pag. 289. 1886.

[6]) ARRHENIUS, OSTWALD, Ztschr. 1, pag. 285. 1887; REYHER, OSTWALD, Ztschr. 2, pag. 744. 1888.

Endlich haben WARBURG und BABO die Zähigkeit der Kohlensäure sowohl im flüssigen, wie im gasförmigen Zustand untersucht[1]), indem sie ebenfalls die Methode der Strömung durch Capillare anwendeten. In Bezug auf die Einzelheiten der schwierigen Versuche muss auf die Abhandlung verwiesen werden. Es ergaben sich für flüssige Kohlensäure unter dem Druck ihres gesättigten Dampfes folgende Reibungscoëfficienten η, die zugleich mit der Dichtigkeit ρ zusammengestellt sind

Die Reibung von Flüssigkeiten ändert sich etwas bei höheren Drucken. Bersuche darüber, nach der Ausflussmethode angestellt, liegen vor von RÖNTGEN[2]) und WARBURG und SACHS[3]). Uebereinstimmend fanden sie, dass die Reibungsconstante des Wassers bei höherem Drucke kleiner wird. Setzt man die Reibungsconstante bei der bestimmten Temperatur t und dem Druck 1 Atmosphäre $= \eta_0$, so ist bei derselben Temperatur und einem Ueberdruck von $p \frac{kgr}{cm^2}$ nach WARBURG und SACHS

$$\eta = \eta_0 (1 + ap),$$

wobei sich für α folgende Werthe ergaben

	Kohlensäure	Aether	Benzol	Wasser
$\alpha \cdot 10^6$	7470	730	930	—170
t	25·1	20	20	20

Die Drucke gingen dabei bis zu 150 Atmosphären.

t	ρ	η
5°	0·922	0·000925
10°	0·895	0·000852
15°	0·864	0·000784
20°	0·827	0·000712
25°	0·783	0·000625
29°	—	0·000539.

Die flüssige Kohlensäure hat also bei weitem die geringste Zähigkeit von allen untersuchten Flüssigkeiten, bei 15° ist ihre Zähigkeit der 14·6. Thl. von der des Wassers. Allerdings ist auch noch keine andere Flüssigkeit so nahe bei ihrer kritischen Temperatur untersucht worden.

II. Gesetze der Reibung und Bestimmung der Reibungscoëfficienten für Gase.

Auch Gase und Dämpfe zeigen innere Reibung und diese Eigenschaft ergiebt sich sogar mit Nothwendigkeit aus den Vorstellungen über die Natur der Gase, welche die kinetische Gastheorie giebt. Nach dieser Theorie besteht die Reibung bei Gasen nicht in einer Wirkung von Molekularkräften, sondern vielmehr darin, dass von zwei ungleich rasch bewegten Schichten eines Gases aus der Schicht mit grösserer Geschwindigkeit durch die Stösse, die die nach allen Seiten fliegenden Moleküle ausüben, ein gewisses positives Bewegungsmoment auf die langsamere Schicht übertragen wird. Die auf die Einheit der Geschwindigkeitsdifferenz bezogene Grösse dieses übertragenen Momentes ist gleich dem Reibungscoëfficienten (s. kinetische Gastherie). Aus dieser Auffassung hat zuerst MAXWELL entwickelt, dass der Reibungscoëfficient eines Gases vom Druck unabhängig sein muss, und diese Forderung wurde durch Versuche von O. E.

1) WARBURG und BABO, WIED. Ann., Bd. 17. pag. 290. 1882.

2) RÖNTGEN, WIED. Ann. 22, pag. 510. 1884.

3) WARBURG und SACHS, WIED. Ann. 22, pag. 518. 1884.

MEYER, MAXWELL u. A. bestätigt. Diese Unabhängigkeit der Reibung vom Druck (das MAXWELL'sche Gesetz) gilt aber nur bis zu einer gewissen, sehr niedrigen unteren Grenze, bis zu welcher die allgemeinen Voraussetzungen der Gastheorie gültig sind. Unterhalb dieser Grenze muss der Reibungscoëfficient abnehmen, wie es auch KUNDT und WARBURG experimentell gezeigt haben. Ebenso gilt dasselbe nicht mehr bei sehr hohen Drucken, wie WARBURG und BABO bewiesen haben.

Im Bereich einer Atmosphäre ist die Unabhängigkeit der Reibung vom Druck des Gases z. B. durch folgende Zahlen von KUNDT und WARBURG bewiesen, welche das logarithmische Dekrement der Schwingungen einer Scheibe massen, die sich in dem betreffenden Gase befand. Es ergaben sich für dieses logarithmische Dekrement ε, aus welchem die Reibung bestimmt wird, bei der Temperatur 15° unter den Drucken p folgende Zahlen für

Luft.		Wasserstoff.		Kohlensäure.	
p	ε	p	ε	p	ε
750 *mm*	0·0580	750 *mm*	0·0283	750 *mm*	0·0468
2·4 „	0·0567	20 „	0·0281	2·4 „	0·0461

Die kinetische Gastheorie in der Entwicklung von CLAUSIUS verlangt ferner, dass der Reibungscoëfficient der Gase mit wachsender Temperatur zunehmen (nicht wie bei Flüssigkeiten abnehmen) muss und dass er der Wurzel aus der absoluten Temperatur proportional, also $\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}}$ sein soll. Die Forderung, dass η mit der Temperatur wachsen soll, hat sich bei allen Gasen erfüllt gezeigt, aber nicht das Gesetz des Wachsthums, vielmehr wurde allgemein ein stärkeres Wachsen von η mit der Temperatur constatirt. Es ist in Gebrauch gekommen, die Abhängigkeit der Reibung von der Temperatur darzustellen durch eine Formel

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^x,$$

worin x der aus den Beobachtungen zu entnehmende Temperaturexponent ist. Diese Darstellung hat jedoch gar keine rationelle Bedeutung. Zweckmässiger hat SCHUMANN[1]) vorgeschlagen, diese Abhängigkeit darzustellen, durch

$$\eta = \eta_0 \sqrt{1 + \alpha t}\,(1 + \gamma t)^2,$$

worin α der Ausdehnungscoëfficient des Gases, also für Luft $= 0·003665$ und γ der zu bestimmende Temperaturcoëfficient ist.

Der Reibungscoëfficient der Luft liess sich schon angenähert ermitteln aus den Versuchen von BESSEL über die Pendelbewegung, indem sowohl die Veränderung der Schwingungsdauer eines Pendels als namentlich die Abnahme der Amplitude desselben von der Reibung der Luft abhängen. O. E. MEYER[2]) berechnete aus BESSEL's Beobachtungen den Werth $\eta = 0·00275$, gültig für etwa 12°. Ebenso berechnete er aus GIRAULT's Pendelmessungen[3]) den Werth $\eta = 0·0003842$ und stellte dann selbst[4]) Pendelbeobachtungen zu diesem Zweck mit 3 Pendeln von 14·5, 9·5 4·5 *m* Länge an, aus denen sich für 18° C. ergab $\eta = 000216 \left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$.

Direkte Beobachtungen über die Reibung der Gase wurde sowohl mittelst der Methode der schwingenden Scheiben, als mittelst der Methode des Durchflusses durch capillare Röhren angestellt.

Die Methode der schwingenden Scheiben wurde zuerst von O. E. MEYER bei

[1]) SCHUMANN, WIED. Ann. 23, pag. 351. 1884.
[2]) O. E. MEYER, POGG. Ann. 125, pag. 177. 1863.
[3]) GIRAULT, Mém. de l'Académie de Caën. 1860.
[4]) O. E. MEYER, POGG. Ann. 142, pag. 513. 1871.

Gasen angewendet[1]). Der Apparat wurde so gegenüber dem bei Flüssigkeiten benutzten verändert, dass an einer bifilar aufgehängten Axe drei Scheiben parallel befestigt waren, die nach Bedarf zu einer einzigen zusammengeschoben werden konnten. Die horizontalen Schwingungen des Apparates wurden durch Spiegel und Skala beobachtet. Durch diese Versuche konnte MEYER zuerst die Unabhängigkeit der Reibung vom Drucke nachweisen und die ersten sicheren Werthe für η ermitteln. Es ergab sich für

t	η
8·3°	0·000333
21·5°	0·000323
34·4°	0·000366

$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$.

Dieselbe Methode wurde von MAXWELL[2]) 1866 angewendet, aber insofern wesentlich verbessert, als er zwischen die drei beweglichen Scheiben und auch über und unter dieselben noch 4 feste Scheiben in überall gleichem, sehr geringem Abstand von ihnen anbrachte. Dadurch wird erstens die Reibungswirkung der Luft auf den Apparat vergrössert, die Beobachtung also genauer, zweitens aber lässt sich die Theorie strenger entwickeln. O. E. MEYER[3]) acceptirte dann diese Versuchsabänderung von MAXWELL. MAXWELL fand für trockne Luft bei 0° $\eta = 0{\cdot}0001878$, MEYER mit derselben Anordnung $\eta = 0{\cdot}000200$ für 18° resp.[4]) $\eta = 0{\cdot}000196$ für 19°.

Eine sehr eingehende Untersuchung haben KUNDT und WARBURG[5]) über die Reibung der Gase ausgeführt, indem sie die MAXWELL'sche Anordnung so umformten, dass sie nur eine sich drehende Scheibe zwischen zwei in genau ermitteltem Abstande stehenden festen Scheiben anwendeten. Sie bestätigten ebenfalls innerhalb weiter Grenzen die Unabhängigkeit der Reibung vom Druck, erhielten aber bei sehr geringen Drucken eine nicht geahnte Erscheinung, dass nämlich dann die Gase an den festen Wänden Gleitung zeigten. Diese letztere Eigenschaft wird weiter unten behandelt werden. Als Resultat ihrer Versuche über den Reibungscoëfficienten ergab sich für

Luft	$\eta = 0{\cdot}000179$	bei 15°
Wasserstoff . . .	$\eta = 0{\cdot}0000923$	„ 15°
Kohlensäure . . .	$\eta = 0{\cdot}000152$	„ 15°
Wasserdampf . .	$\eta = 0{\cdot}0000975$	„ ca. 20°

$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$.

Den Apparat von KUNDT und WARBURG benutzte PULUJ[6]) um die Abhängigkeit der Reibung von der Temperatur genauer festzustellen, als es bisher durch MAXWELL und O. E. MEYER geschah. Er experimentirte zwischen 3 und 30° und fand für

Luft . . . . $\eta = \eta_0(1 + 0{\cdot}00265\ t) = \eta_0 T^{0{\cdot}72}$

Kohlensäure . . . $\eta = \eta_0(1 + 0{\cdot}003378\ t) = \eta_0 T^{0{\cdot}92}$

Wasserstoff . . . $\eta = \eta_0(1 + 0{\cdot}002535\ t) = \eta_0 T^{0{\cdot}69}$.

Endlich hat SCHUMANN[7]) die MEYER-MAXWELL'sche Methode in der Anordnung von KUNDT und WARBURG benutzt, und gezeigt, dass die Versuche bei verschie-

1) O. E. MEYER, POGG. Ann. Bd. 125, pag. 177. 1863.

2) MAXWELL, Phil. Trans. 156, pag. 249. 1866.

3) O. E. MEYER, POGG. Ann. 143, pag. 14. 1871.

4) O. E. MEYER, POGG. Ann. 148, pag. 222. 1873.

5) KUNDT und WARBURG, POGG. Ann. 155, pag. 337. 1875.

6) PULUJ, Wien. Ber. 73 (2) pag. 589. 1876.

7) SCHUMANN, WIED. Ann. 23, pag. 351. 1884.

dener Anordnung des Apparates einigermaassen verschiedene Werthe für η geben, die er durch eine Correktionsformel eliminirte. Er fand für

$$\text{Luft } \eta_0 = 0{\cdot}0001679 \text{ bei } 0°$$
$$\text{Kohlensäure } \eta_{12{\cdot}8} = 0{\cdot}0001422 \qquad \eta_{100} = 0{\cdot}0001972.$$

Die Abhängigkeit der Reibung von der Temperatur stellt sich nach SCHUMANN dar für

Luft . . . . $\eta = \eta_0 \sqrt{1+\alpha t}\cdot(1+\gamma t)^2$, wo $\gamma = 0{\cdot}000802$ $\alpha = 0{\cdot}003665$
Kohlensäure . $\eta = \eta_0 \sqrt{1+\alpha t}\cdot(1+\gamma t)^2$, $\gamma = 0{\cdot}000899$ $\alpha = 0{\cdot}003701$.

SCHUMANN hat weiter, wie vorher PULUJ[1]) mittelst der Schwingungsmethode einige Dämpfe untersucht. So fand sich für Benzoldampf

bei	16·8°	$\eta = 0{\cdot}0000759$	PULUJ
„	19·0°	$\eta = 0{\cdot}00007915$	SCHUMANN
„	70·1°	$\eta = 0{\cdot}0001007$	SCHUMANN
„	100°	$\eta = 0{\cdot}0001176$	SCHUMANN

Als Resultat seiner Untersuchungen mit Estern stellt SCHUMANN hin, dass die Abhängigkeit der Reibung mit der Temperatur für alle dieselben zu sein scheint, nämlich

$$\eta = \eta_0 \sqrt{1 + 0{\cdot}004\, t}\,(1 + 0{\cdot}00164 t)^2.$$

Die Werthe von η_0 ergaben sich für die Dämpfe von

	η_0
Methylformiat	0·00008380
Isobutylformiat	0·00007139
Propylacetat	0·00006855
Isobutylacetat	0·00007010
Aethylpropionat	0·00007079
Methylisobutirat	0·00007011

Eine zweite Methode zur Bestimmung der Reibungscoëfficienten der Gase ist, wie bei Flüssigkeiten, die Methode der Transpiration, d. i. des Durchströmens der Gase durch enge Röhren.

Schon GRAHAM[2]) hatte in den Jahren 1846 und 1849 eine Reihe von sorgfältigen Versuchen über das Durchströmen von Gasen durch Röhren von verschiedener Länge und verschiedenem Durchmesser angestellt und gefunden, dass das Verhältniss der Durchflusszeiten unter gleichen Umständen für 2 Gase dasselbe ist bei jeder Art der Röhre. Er hatte daraus für jedes Gas einen Transpirationscoëfficienten ermittelt, bezogen auf Sauerstoff als Einheit. Diese Coëfficienten sind den Reibungscoëfficienten proportional. O. E. MEYER[3]) hat dann gezeigt, dass unter der Annahme des MAXWELL'schen Gesetzes von der Unabhängigkeit der Reibung vom Druck sich für den Durchfluss der Gase durch capillare Röhren ebenfalls das POISEUILLE'sche Gesetz ergiebt. Ist p_1 der Druck am Anfang, p_2 der Druck am Ende des Capillarrohres und misst man das durchströmte Gasvolumen unter dem Druck $\frac{p_1+p_2}{2}$, so ist, wenn V_0 dieses Volumen bedeutet

$$V_0 = \frac{\pi}{8\eta}(p_1 - p_2)\frac{R^4}{L}\,t.$$

Zur Ausführung dieser Versuche bediente sich O. E. MEYER zweier kupferner Ballons, die durch die Capillare miteinander verbunden waren. Der Druck in

1) PULUJ, Wien Ber, 78. 1878.
2) GRAHAM, Phil. Trans. 1846, pag. 513. 1849.
3) O. E. MEYER, POGG. Ann. 127, pag. 253. 1866; 148, pag. 1 u. 203. 1873.

beiden Ballons konnte durch Verbindung derselben mit je einer Luftpumpe verändert und an je einem Manometer abgelesen werden. Diese Versuche wurden von v. OBERMAYER[1]), v. LANG[2]), PULUJ[3]) weitergeführt. So fanden für Luft

O. E. MEYER	$\eta_0 = 0{\cdot}000171$
„	$\eta_0 = 0{\cdot}000170$
„	$\eta_0 = 0{\cdot}000174$
v. OBERMAYER	$\eta_0 = 0{\cdot}000167$
PULUJ	$\eta_0 = 0{\cdot}000180$
MITTEL	$\eta_0 = 0{\cdot}000172$.

Aus den Transpirationscoëfficienten von GRAHAM berechnen sich nach O. E. MEYER[4]) folgende Werthe der Reibungscoëfficienten, giltig für mittlere Temperatur (15—20°).

	η $\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$
Wasserstoff, H_2	0·000093
Grubengas, CH_4	0·000120
Ammoniak, NH_3	0·000108
Wasserdampf, H_2O	0·0000975
Kohlenoxyd, CO	0·000184
Aethylen, C_2H_4	0·000109
Stickstoff, N_2	0·000184
Stickoxyd, NO,	0·000186
Sauerstoff, O_2	0·000212
Schwefelwasserstoff, H_2S	0·000130
Chlorwasserstoff, HCl	0·000156
Kohlensäure, CO_2	0·000160
Stickoxydul, N_2O	0·000160
Methyläther, C_2H_6O	0·000102
Chlormethyl, CH_3Cl	0·000116
Cyan, C_2N_2,	0·000107
Schweflige Säure, SO_2	0·000138
Chloräthyl, C_2H_5Cl	0·000105
Chlor, Cl_2	0·000141

Nach der Transpirationsmethode hat weiter S. KOCH[5]) den Reibungscoëfficienten des Quecksilberdampfes bestimmt, insbesondere, um zu untersuchen, ob bei diesem einatomigen Molekül die Forderung der kinetischen Gastheorie erfüllt ist, dass die Reibung wie die Wurzel aus der absoluten Temperatur variirt. Aber auch hier zeigt sich dieses Gesetz durchaus nicht erfüllt, vielmehr ergab sich für die Temperaturabhängigkeit des Hg-Dampfes eine Formel

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{1{\cdot}60}.$$

Der Exponent, der $= 0{\cdot}5$ sein sollte, ist also 1·60. Es giebt keine genügende Erklärung für dieses Verhalten aus der Gastheorie allein. Es scheint, dass diese erheblichen Abweichungen darauf zurückzuführen sind, dass eben doch, was die Gastheorie ausser Acht lässt, die Gasmoleküle mit Kräften auf einander wirken, und dass bei dem Vorgang der Reibung diese Kräfte ganz wesentlich ins Spiel

[1]) v. OBERMAYER, CARL's Repertorium, Bd. 12, pag. 13. 1876.
[2]) v. LANG, Wien. Ber. Bd. 66 (2). 1871.
[3]) PULUJ, Wien. Ber. Bd. 69 (2) 1874. Bd. 70 (2). 1874.
[4]) O. E. MEYER, Kinet. Theorie d. Gase, pag. 142.
[5]) S. KOCH, WIED. Ann. 19, pag. 587. 1883.

kommen[1]). Bei den Versuchen von KOCH bestand die grösste Schwierigkeit darin, die hohen Temperaturen constant zu erhalten, bei denen η gemessen wurde. Die Einrichtungen seiner Apparate sind im Original nachzulesen. Es wurde mit 2 Capillaren η zwischen den Temperaturen 272° und 380° gemessen und es ergab sich bei 300° und 380°

$$\left.\begin{array}{l}\eta_{300} = 0{\cdot}000532 \\ \eta_{380} = 0{\cdot}000656\end{array}\right. \left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right).$$

Unter der Annahme, dass noch bei 0° das MAXWELL'sche Gesetz bei Hg-Dampf erfüllt ist, berechnet sich aus obiger Formel

$$\eta_0 = 0{\cdot}000162.$$

Eine Reihe sehr ausführlicher Untersuchungen sind von LOTHAR MEYER[2]) theils allein, theils in Verbindung mit SCHUMANN[3]) und STEUDEL[4]) angestellt worden über Transpiration von Dämpfen. Der Apparat, dessen sie sich bei diesen Untersuchungen bedienten, bestand in der Hauptsache aus einer spiralförmig gewundenen Glascapillare, welche sich in einem weiten Glasrohr befand, das nach unten in das Siedegefäss auslief. Die Flüssigkeiten wurden zum Sieden gebracht, umhüllten mit ihren Dämpfen die Capillare, welche dabei also stets die Siedetemperatur hatte, und strömten durch die Capillare von oben nach unten in ein gekühltes Messrohr. Die überschüssigen Dämpfe wurden durch einen Rückflusskühler verdichtet und in das Siedegefäss zurückgeleitet. Die ersten Beobachtungen für Benzoldampf ergaben bei der Temperatur 85° $\eta = 0{\cdot}000152$, bei der Temperatur 72° $\eta = 0{\cdot}000127$, während PULUJ bei 16·8° gefunden hatte $\eta = 0{\cdot}000076$.

Die Versuche von MEYER und SCHUMANN erstreckten sich auf Fettsäuren und ihre Ester und ergaben folgende Werthe, die alle gültig sind für die Siedetemperatur der einzelnen Substanzen (bei 760 *mm*).

	H	Methyl	Aethyl	Propyl	Isobutyl	Amyl
Ameisensäure	0·000172	0·000173	0·000156	0·000159	0·000172	0·000160
Essigsäure	0·000106	0·000152	0·000152	0·000160	0·000155	—
Propionsäure	0·000118	0·000150	0·000158	0·000153	0·000164	0·000158
Normale Buttersäure . .	0·000129	0·000159	0·000160	0·000164	0·000167	0·000155
Isobuttersäure	0·000121	0·000152	0·000151	0·000153	0·000158	0·000155
Valeriansäure	0·000136	0·000163	0·000165	0·000167	0·000154	—

Es ergiebt sich daraus, dass alle Ester bei ihrem Siedepunkt nur äusserst wenig verschiedene Reibungscoëfficienten besitzen.

STEUDEL untersuchte Alkohole und die entsprechenden Chloride, Bromide und Jodide auf ihre Reibung und fand folgende Zahlen, die ebenfalls für die betreffenden normalen Siedepunkte gelten:

	Alkohol	Chlorid	Bromid	Jodid
Methyl	0·000135	—	—	0·000245
Aethyl	0·000142	—	0·000183	0·000216
Propyl	0·000142	0·000146	0·000184	0·000210
Isopropyl	0·000162	0·000148	0·000176	0·000201
Butyl	0·000143	0·000149	—	0·000202
Isobutyl	0·000144	0·000150	0·000179	0·000204
Tertiäres Butyl . .	0·000160	0·000150	—	—

[1]) GRAETZ, WIED. Ann, Bd. 7, pag. 497. 1879.

[2]) LOTHAR MEYER, WIED. Ann. Bd. 25, pag. 340. 1885.

[3]) L. MEYER und SCHUMANN, WIED. Ann. 13, pag. 1. 1881.

[4]) STEUDEL, WIED. Ann 16, pag. 368. 1882; L. MEYER, WIED. Ann. 16, pag. 394. 1882.

Ferner noch folgende Stoffe:

	η	
Aethylenchlorid	0·000168	$\left(\frac{gr}{cm \cdot sec}\right)$
Aethylidenchlorid	0·000161	
Aethylenchlorobromid	0·000200	
Aethylenbromid	0·000221	
Monochloräthylenchlorid	0·000181	
Trichloräthan	0·000190	
Chloroform	0·000189	
Tetrachlorkohlenstoff	0·000195	
Bromoform	0·000253.	

Es zeigt sich durch diese Untersuchungen, dass homologe Verbindungen auch bei sehr verschiedenem Molekulargewicht meist nahezu die gleiche Reibungsconstante haben. Als ungefähre Mittelwerthe ergeben sich — je für die Siedepunkte genommen — für die

Alkohole, $C_nH_{2n+2}O$	$\eta = 0·000142$
Chloride, $C_nH_{2n+1}Cl$	$\eta = 0·000150$
Ester, $C_nH_{2n}O_2$	$\eta = 0·000155$
Bromide, $C_nH_{2n+1}Br$	$\eta = 0·000182$
Jodide, $C_nH_{2n+1}J$	$\eta = 0·000210.$

Abweichungen zeigen dagegen diejenigen Verbindungen, welche nur 1 Kohlenstoffatom enthalten. Indess sind von SCHUMANN[1]) auf Grund seiner Schwingungsbeobachtungen wesentliche Einwände gegen die Methode der Transpiration überhaupt gemacht worden, so dass diese Zahlen nur als ungefähr gelten können. In der That geben die oben angeführten Zahlen von SCHUMANN viel kleinere Werthe, die zum Theil über 50 % Abweichungen gegen die hier angeführten zeigen.

Abhängigkeit der Reibung von der Dichte.

In dem Intervall von einer Atmosphäre, d. h. von 760 *mm* bis 1—10 *mm* Quecksilberdruck ist das MAXWELL'sche Gesetz der Unabhängigkeit der Reibung von der Dichte (dem Druck) experimentell bestätigt worden. Dagegen bei äusserst geringen und sehr grossen Dichten zeigt sich eine wesentliche Abhängigkeit der Reibungscoëfficienten von derselben.

Für äusserst geringe Dichten haben KUNDT und WARBURG gezeigt, dass von einer gewissen Grenze der Dichtigkeit an, die für verschiedene Gase verschieden ist, die Reibung sehr rasch abnimmt. Es liessen sich die Drucke, bei denen das stattfand, nicht mehr in Zahlen genau angeben. Sie sind bezeichnet als 1. bis 6. Vacuum. Es ergaben sich für das logarithmische Dekrement λ der Schwingungen ihrer Scheibe folgende Werthe, denen η proprotional ist:

Luft.

	λ
750 *mm* Druck	0·0800
1. Vacuum	0·0531
2. „	0·0462
3. „	0·0416
4. „	0·0374
5. „	0·0353
6. „	0·0326

Das 1. Vacuum entsprach einem Druck von etwa 0·04 *mm* Quecksilber.

[1]) SCHUMANN, WIED. Ann. 23, pag. 353. 1884.

Wasserstoff.

	λ
750 *mm* Druck	0·0387
1. Vacuum	0·0216
2. „	0·0175
3. „	0·0169
4. „	0·0181

Den entgegengesetzten Einfluss hat eine starke Vergrösserung der Dichte. Dies ist von WARBURG und BABO[1]) an der Kohlensäure constatirt worden. Sie haben in der bereits oben erwähnten Arbeit die gasförmige Kohlensäure sowohl unterhalb als oberhalb als bei der kritischen Temperatur sehr hohen Drucken (bis über 100 Atmosphären) unterworfen und durch Transpiration die Reibung bestimmt.

Während gasförmige Kohlensäure bei 40·3° unter Atmosphärendruck, also bei normaler Dichte $\eta = 0·000165$ hat, fanden sie bei ca. 45 Atmosphären, wenn die Dichte 0·1 geworden ist (etwa das 500fache der normalen) $\eta = 0·000180$ also nur ca. 9% grösser. Dagegen wuchs dann mit steigendem Druck und steigender Dichte die Reibung kolossal. Es ergab sich bei den Temperaturen 40·3° und 32·6° folgendes:

Dichtigkeit	$t = 40·3$		$t = 32·6$	
	Druck	η	Druck	η
0·100	45·3	0·000180	43·1	—
0·170	64·3	0·000196	60·3	0·000188
0·240	75·9	0·000218	69·9	0·000213
0·310	82·7	0·000243	74·6	0·000239
0·380	86·8	0·000275	76·6	0·000270
0·450	89·2	0·000316	77·2	0·000304
0·520	91·7	0·000366	77·6	0·000351
0·590	94·9	0·000426	78·2	0·000414
0·660	101·6	0·000499	80·7	0·000493
0·730	114·6	0·000580	88·5	0·000574
0·800	—	—	107·3	0·000677

Da bei 32·6° und 40·3° die Werthe von η für gleiche Dichten wenig von einander abweichen, während die entsprechenden Drucke sehr verschieden sind, so schliessen die Verfasser, dass die Reibung mit der Dichte viel einfacher als mit dem Druck zusammenzuhängen scheint.

Gleitung der Gase.

Dass die Gase an festen Wänden nicht haften, sondern an ihnen entlang gleiten können, war nicht bemerkt worden, so lange man die Gase in nicht zu sehr verdünntem Zustand auf ihre Reibung untersuchte. Erst als KUNDT und WARBURG[2]) bei ihren oben angeführten Versuchen zu sehr geringen Drucken, zwischen 0·6 *mm* und 20 *mm* Quecksilber übergingen, fanden sie Erscheinungen, welche auf eine Gleitung der Gase hinwiesen. Als Gleitungscoëfficient γ ist wieder das Verhältniss der inneren Reibung η zur äussern λ definirt, also $\gamma = \frac{\eta}{\lambda}$. Ihre Versuche ergaben, dass γ der Dichtigkeit des Gases umgekehrt proportional ist. Daher macht sich die Gleitung eben nur bei verdünnten Gasen bemerkbar. So

[1]) WARBURG und BABO, WIED. Ann., Bd. 17, pag. 390. 1882.

[2]) KUNDT und WARBURG, POGG. Ann. 155, pag. 337. 1875.

fanden sie bei Luft, Wasserstoff, Kohlensäure Zahlen für die Gleitung, aus welchen O. E. MEYER[1]) die folgenden Gleitungscoefficienten γ berechnet hat

	γ		γ
Luft . .	0·0000108	Wasserstoff .	0·0000186
„ . .	0·0000090	Kohlensäure .	0·00000652
„ . .	0·0000113	„ .	0·00000647

O. E. MEYER hat aus diesen Zahlen geschlossen, dass der Gleitungscoëfficient gleich der mittleren Weglänge der Moleküle ist. Die mittlere Weglänge L variirt ebenfalls umgekehrt mit der Dichte.

Da die Transpirationszeit eines Gases durch ein Capillarrohr von dem Gleitungscoëfficienten abhängt, so hat WARBURG[2]) das erhaltene Resultat durch Transpirationsversuche geprüft und bestätigt. Bei Benützung eines Capillarrohres von 0·15 *mm* Radius bewirkt die Gleitung schon bei 38 *mm* Druck eine Abweichung (Verkleinerung) von der Transpirationszeit von 4 bis 5§ bei Luft, von 9§ bei Wasserstoff gegen die bei normalem Druck. Die Werthe der Gleitungscoëfficienten fand WARBURG bei diesen Versuchen nahezu ebenso gross, wie früher bei den Schwingungsversuchen.

B. Reibung fester Körper.

Auch feste Körper besitzen innere Reibung. Dass diese der Reibung von Flüssigkeiten und Gasen analog ist, ist vielfach vermuthet worden. Jedoch lassen sich die hier in Betracht kommenden Erscheinungen nicht genügend von denen der elastischen Nachwirkung trennen. Es werde deshalb auf diesen Artikel verwiesen und hier nur einige Litteratur erwähnt.

WILLIAM THOMSON[3]) hat den Begriff der Zähigkeit fester Körper eingeführt, definirt und aus einigen Versuchen diese Einführung motivirt. Experimentelle und theoretische Arbeiten sind weiter geliefert worden von WARBURG[4]), STREINTZ[5]), O. E. MEYER[6]), BOLTZMANN[7]), BRAUN[8]), P. M. SCHMIDT[9]), TOMLINSON[10]). Zu exakter Formulirung einer inneren Reibung, ihrer Gesetze und ihrer Constanten, haben diese Arbeiten bisher nicht geführt (s. Elastische Nachwirkung).

Die äussere Reibung fester Körper an einander, d. h. der Widerstand, welcher einer Bewegung zweier fester Körper auf einander sich entgegensetzt, rührt davon her, dass die Flächen, welche auf einander sich bewegen, nie absolut glatt, sondern stets mehr oder minder rauh sind, wodurch der bewegte Körper fortwährend über die Unebenheiten der Unterlage hinweggehoben werden muss. Ausserdem kann auch die direkte Molekularanziehung der Theilchen der beiden Körper, welche man als Adhäsion bezeichnet, der Bewegung hindernd entgegen wirken. Je glatter die Flächen sind, die sich längs einander bewegen, um so wirksamer ist die Adhäsion, je rauher die Flächen sind, um so mehr

1) O. E. MEYER, Kinetische Theorie d. Gase, pag. 152.

2) WARBURG, POGG. Ann., Bd. 159, pag. 339. 1876.

3) W. THOMSON, Proc. Roy. Soc., Mai 1865, s. auch Artikel Elasticity in Encyclopädia Britannica Section 29—36. 1878.

4) WARBURG, POGG. Ann., Bd. 139, pag. 89. 1869.

5) STREINTZ, POGG. Ann., Bd. 153, pag. 386. 1874.

6) O. E. MEYER, POGG. Ann., Bd. 151, pag. 1. 1874.

7) BOLTZMANN, POGG. Ann., Ergbd. 7, pag. 653. 1876.

8) F. BRAUN, POGG. Ann., pag. 151. 1874.

9) P. M. SCHMIDT, WIED. Ann 2, pag. 48. 1877.

10) TOMLINSON, Proc. Lond. Roy. Soc. 38, pag. 42. 1885; 40, pag. 240. 1886.

kommt der ersterwähnte Widerstand der Reibung in Betracht. Es erhellt daraus, dass die Reibung fester Körper auf einander keine einfache mechanische Bedeutung hat. Sie ist auch hauptsächlich für die angewandte Mechanik, die Technik von Bedeutung. Man unterscheidet gleitende Reibung und wälzende oder rollende Reibung. Bei der gleitenden Reibung bewegen sich alle Punkte der bewegten Berührungsfläche zu gleich über der ruhenden Fläche. Die ruhende Fläche ist immer mit denselben Punkten des bewegten Körpers in Berührung. Bei der rollenden Reibung kommen dagegen immer andere Punkte des bewegten Körpers mit der ruhenden Fläche in Berührung. Versuche über die gleitende sowohl wie die rollende Reibung sind namentlich von COULOMB[1]), MORIN[2]), BRIX[3]), RENNIE[4]) u. A. angestellt worden. Für die Untersuchung der gleitenden Reibung construirte COULOMB einen Apparat, Tribometer, welcher gestattete, direkt die Kraft in Gewichten zu messen, welche nöthig ist, um einen Körper von gewissem Gewicht mit einer gleitenden Fläche von bestimmtem Material auf einer ruhenden Fläche von bestimmtem Material in Bewegung zu erhalten. Es ergab sich 1) die Reibung ist dem Druck proportional, mit welchem die Flächen, welche auf einander gleiten, aneinander gedrückt werden, 2) die Reibung ist unabhängig von der Grösse der reibenden Flächen, 3) die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der bewegten Flächen. (Letzteres Gesetz nennt man das COULOMB'sche Gesetz für die Reibnng.) Die Zahl, welche angiebt, der wievielte Theil der Last zur Ueberwindung der Reibung verwandt werden muss, heisst der Reibungscoëfficient. Allgemein: bewegt sich ein Körper auf einer Fläche $U = 0$, so übt er in Richtung der Normale einen Druck N auf dieselbe aus, welcher bekanntlich gleich ist der Normalcomponente der wirkenden Kräfte abzüglich der Centrifugalkraft. Den Widerstand in der Fläche setzt man dann $= fN$, worin f der Reibungscoëfficient ist. Aus Versuchen der Praxis ergab sich, dass für einige Materialien f folgende Werthe hat:

			f
Schmiedeeisen	auf	Schmiedeeisen	0·14
Messing	„	Gusseisen	0·19
Schmiedeeisen	„	Gusseisen	0·20
Buchenholz	„	Buchenholz (Fasern ‖)	0·36
Eichenholz	„	Eichenholz (Fasern ‖)	0·48
„	„	„ (Fasern +)	0·32

Für Eisen auf Eis (Schlittschuhe) bestimmte J. MÜLLER[5]) den Coëfficienten $f = 0·016$ bis $0·032$.

Der Reibungscoëfficient ist nach COULOMB wesentlich derselbe für alle Geschwindigkeiten der reibenden Flächen. Nach LANDSBERG[6]) soll die äussere Reibung wesentlich beeinflusst werden durch condensirte Gasschichten, die auf den reibenden Flächen stets vorhanden sind. Ob die Reibung herrührt von Molekularattraktion oder von Unebenheiten der reibenden Flächen, haben WARBURG und BABO[7]) durch eine optische Methode an bestpolirten Gläsern zu entscheiden gesucht. Sie schliessen sich der Annahme an, dass die Reibung dadurch

1) COULOMB, Mem. des savant étrang. X, pag. 254. 1785.
2) MORIN, Mém. de l'Acad. française II III. 1834. 1835.
3) BRIX, Verhandl. d. Vereins für Gewerbefleiss in Preussen 16, pag. 186. 1850.
4) RENNIE, DINGL. Journ. 34, pag. 165. 1829.
5) J. MÜLLER, POGG. Ann. 139, pag. 505. 1870.
6) LANDSBERG, POGG. Ann. 121, pag. 283. 1864.
7) WARBURG und BABO, WIED. Ann. 2, pag. 406. 1877.

entsteht, dass die kleinen Unebenheiten der Flächen bei der Bewegung gebogen werden, wodurch die reibende Kraft ihre Quelle in Elasticitätskräften hätte.

Auch für die wälzende Reibung hat COULOMB die Gesetze festgestellt, indem er Walzen von Holz auf Unterlagen durch bestimmte Gewichte ins Rollen brachte. Zugleich änderte er auch durch übergehängte Gewichte den Druck, mit dem die Walzen auf die Unterlagen drückten. Es ergab sich, dass die reibende Kraft R dem Druck P proportional und dem Radius L der Walze umgekehrt proportional ist:

$$R = \varphi \frac{P}{\rho}.$$

Den Faktor φ nennt man den Coëfficienten der rollenden Reibung. Er ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung. Es ergab sich:

für Walzen aus Gujakholz auf Eichenholz $\varphi = 0{\cdot}018$
„ „ „ Elmenholz „ „ $\varphi = 0{\cdot}031$
„ gusseiserne Räder auf Gusseisen $\varphi = 0{\cdot}018$.

Durch Schmieren der reibenden Theile wird die Reibung kleiner. Ueber diese technischen Fragen sind die technischen Handbücher nachzusehen.

L. GRAETZ.

Diffusion[1]).

Unter Diffusion versteht man das langsame, ohne Einwirkung äusserer Kräfte erfolgende Eindringen zweier Körper (fester, flüssiger, gasförmiger) in einander, das erst sein Ende erreicht, wenn in allen Raumtheilen des Gemenges jeder einzelne der beiden Körper in gleicher Weise vertheilt ist. Die Erscheinung wird hervorgerufen durch die Molekularkräfte, welche die Theilchen der beiden Körper auf einander ausüben. Genauer untersucht sind bisher nur die Diffusion der Flüssigkeiten und der Gase. Wir beginnen mit der

I. Diffusion der Flüssigkeiten.

Bei ihr ist zu unterscheiden die freie Diffusion und die Diffusion durch Scheidewände.

a) Freie Diffusion.

Der Name rührt her (übertragen von der analogen Erscheinung für Gase) von FRANKENHEIM (1835), während die Existenz des Diffusionsvermögens schon viel früher (PRIESTLEY, DALTON, BERTHOLLET) bekannt war. Eingehendere Untersuchungen lieferte zuerst GRAHAM (1850—51), FICK suchte dann (1855) die Theorie der Erscheinung unter der Annahme zu entwickeln, dass die freie Diffusion einer Flüssigkeit in die andere (meist einer Salzlösung in ihr Lösungsmittel) nach demselben Gesetz geschähe, wie die Verbreitung der Wärme in den Leitern. Nach dieser Hypothese berechneten SIMMLER und WILD (1857) einige einfache Versuchsanordnungen und schlugen optische Methoden der Untersuchung vor. Derartige Hülfsmittel wandten später HOPPE-SEYLER, E. VOIT (1867) und JOHANNISJANZ (1877) an, aber schon im folgenden Jahre zeigte STEFAN die grosse Ungenauigkeit ihrer

---

[1]) Die Zahlen bei den Namen beziehen sich, soweit sie nicht als Jahreszahlen leicht erkennbar sind, auf das Literaturverzeichniss.

Methoden. Eine scharfe Prüfung der FICK'schen Anschauungen versuchte (1879) H. F. WEBER auf elektrischem Wege und fand sie bis auf kleine Correctionen richtig. Dann haben noch LONG (1880), LENZ (1882), J. D. R. SCHEFFER (1881 und 1884) u. A. die Abhängigkeit der Diffusion von der Natur des diffundirenden Stoffs und DE HEEN (1885) die Aenderung mit der Temperatur festzustellen sich bemüht. Endlich hat in neuester Zeit (1884—87) VAN'T HOFF den aus osmotischen Versuchen abgeleiteten Begriff des osmotischen Drucks entwickelt und seine Gesetze untersucht, mit Hilfe dessen es dann NERNST (1887) gelungen ist, zum erstenmal eine Molekulartheorie der Diffussion aufzustellen und deren Folgerungen mit der Erfahrung zu vergleichen. —

Schichtet man von zwei mit einander mischbaren Flüssigkeiten die leichte über die schwerere, so tritt Diffusion ein, welche (bei Ausschluss von Temperaturschwankungen) bewirkt, dass nach langer, streng genommen nach unendlich langer Zeit, eine vollständig gleichförmige Mischung der beiden Flüssigkeiten zu Stande kommt. Beim Studium dieses Processes hat man fast ausschliesslich die Verbreitung eines Salzes in seinem Lösungsmittel (oder einer Säure in Wasser) d. h. die Diffusion einer concentrirteren Lösung in eine verdünntere, oder in eine solche von der Concentration 0 betrachtet. Wir sprechen deshalb der Einfachheit halber im Folgenden fast nur von diesem Falle. Die Aufgabe besteht hiernach darin: über eine Salzlösung von bekanntem Salzgehalt so Wasser zu schichten, dass dabei noch keine Mischung eintritt, dann die beiden Flüssigkeiten bei constanter Temperatur sich selbst zu überlassen und nach gemessenen Zeiten den Fortgang der Mischung festzustellen.

Die ersten Versuche von GRAHAM (2) wurden in folgender Weise angestellt: Kleine Gläser mit kurzem Halse, dessen obere Oeffnung eben geschliffen war, wurden bis zu constantem Abstand von der Oeffnung mit der zu untersuchenden Salzlösung gefüllt und in ein grösseres Gefäss gestellt. Indem man auf die Lösung ein Korkscheibchen legte und langsam auf sie Wasser tropfen liess, füllte man den übrigen Theil des Halses vorsichtig mit Wasser und goss endlich in das äussere Gefäss so viel Wasser, dass dasselbe etwa einen Zoll hoch über der Mündung des Diffusionsgläschens stand. Nach einem bestimmten Zeitraum wurde das Gläschen mit einer Glasplatte bedeckt, aus dem Wassergefäss herausgenommen und untersucht, wie viel Salz in das letztere übergegangen war. GRAHAM fand so, die übergegangenen Salzmengen bei ganzen Gruppen von Stoffen für sehr geringe (1 %) Concentration einander gleich, für wenig grössere (1—4 %) Concentrationen diesen merklich proportional und mit der Temperatur zunehmend. Diese Resultate sind nur als annähernd richtig zu betrachten und lassen eine Verfolgung des Diffusionsvorganges in seinen einzelnen Stadien nicht zu.

Eine solche gelingt eher nach einer von WILLIAM THOMSON[1]) angegebenen Methode. Derselbe legte in das mit den beiden Flüssigkeiten gefüllte Gefäss eine Anzahl von Glaskügelchen von verschiedenem specifischen Gewicht, die anfangs auf der Grenzfläche der Flüssigkeiten schwammen. Im Verlauf der Diffusion trennten sie sich von einander uud gaben durch ihre Lage das specifische Gewicht der Mischung und so deren Concentration in verschiedenen Tiefen an. Die Flüssigkeiten müssen bei diesem Versuche sorgfältig ausgekocht sein, damit sich keine Luftbläschen an die Kügelchen ansetzen und das Resultat fälschen.

Die Theorie der Diffusion von FICK (3) ist FOURIER's Theorie der Wärmeleitung nachgebildet. Sie nimmt an, dass die Salzmenge dS, die im

---

1) S. MAXWELL: Theorie der Wärme, deutsch von NEESEN, pag. 311.

Zeitelement dt von einer Horizontalschicht von der Grösse q zu der nächst über ihr gelegenen tritt, proportional sei $q\,dt$ und der Concentrations-Differenz der beiden Schichten. Denken wir uns die Diffusion in einem Gefäss von constantem Querschnitt vor sich gehend, rechnen von einer beliebigen Horizontalschicht aus, die x in vertikaler Richtung nennen u die Concentration (d. h. die Gewichtsmenge Salz in der Volumeneinheit der Lösung) und k einen Proportionalitätsfaktor, so heisst das:

$$dS = kq\frac{\partial u}{\partial x}dt. \tag{1}$$

k ist nach dieser Theorie die sogen. Diffusionsconstante, die nur von der Natur des Salzes und Lösungmittels abhängt und somit die Diffusion für jeden Körper charakterisirt. Sie ist also diejenige Salzmenge, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt eines Gefässes von der Querschnittseinheit geht, wenn die Concentrationsdifferenz für die Längeneinheit $= 1$ ist.

Es ist nach dieser Hypothese der Salzzuwachs, der in der Schicht von der Dicke dx zwischen den zwei Horizontalebenen xy und $x + dx$ stattfindet, $q\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dt$; dieser Zuwachs lässt sich aber auch schreiben $q\frac{\partial u}{\partial t}dt$, also ist die Gleichung, nach der die Diffusion vor sich geht

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Um seine Theorie zu prüfen, versuchte Fick den stationären Zustand herzustellen, bei dem $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ist und wo aus $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$ folgt $u = A + Px$. Er kittete zu dem Zweck das oben und unten offene Diffussionsgefäss in ein Reservoir mit Salz ein, so dass unten stets gesättigte Salzlösung war und brachte das Ganze in einen grossen Behälter mit Wasser, um am oberen Ende des Diffusionsrohrs beständig die Concentration 0 zu erhalten. Ist u_0 die Concentration der gesättigten Salzlösung und h die Höhe des Diffusionsgefässes, und rechnet man x von der oberen Mündung des Diffusionsgefässes positiv nach unten, folglich:

$$u = \frac{xu_0}{h},$$

d. h. die Concentrationen müssen x proportional sein. Durch hydrostatische Wägung eines in die Salzlösung gesenkten Glaskügelchens wurde, nachdem der Apparat längere Zeit ruhig gestanden hatte, um den stationären Zustand herbeizuführen, diese Beziehung in den Grenzen der nicht grossen Beobachtungsgenauigkeit als richtig befunden. Bestimmte Fick die Salzmenge, die bei diesen Versuchen nach Eintritt des stationären Zustandes in einer gemessenen Zeit in das äussere Wassergefäss übergetreten war, so erhielt er aus Gleichung (1):

$$S = k\frac{qu_0 t}{h},$$

woraus sich k angenähert für gesättigte Kochsalzlösung berechnete:

$$k = 108\left[10^{-7}\frac{cm^2}{sec}\right] \text{ bei } 15°\text{ C.},$$

$$k = 131\left[10^{-7}\frac{cm^2}{sec}\right] \text{ ,, } 20°\text{ C.}$$

Der bei diesen Versuchen vorausgesetzte Eintritt des stationären Zustandes lässt sich aber nicht nachweisen und deshalb bietet die angeführte Untersuchungsmethode keine grosse Sicherheit.

Bessere Resultate lassen die späteren Versuche von GRAHAM (11) erwarten, die sich auf den nicht stationären Zustand beziehen und die dann nach der FICK'schen Theorie von STEFAN (22) berechnet wurden. GRAHAM verfuhr in folgender Weise: In ein cylindrisches Gefäss von ungefähr 152 *mm* Höhe und 87 *mm* Durchmesser wurden 0·7 Liter Wasser gebracht und danach unter dasselbe mittelst einer feinen Pipette 0·1 Liter einer Salzlösung geschichtet. Die ganze Flüssigkeitssäule hatte dann 127 *mm* Höhe. Das Gefäss blieb ruhig in einem Zimmer von nahezu constanter Temperatur stehen. Nach einer bestimmten Zeit wurde die Flüssigkeit durch einen kleinen Heber von oben ab in Portionen von je 50 *ccm* oder $\frac{1}{16}$ des ganzen Volums abgezogen und die Salzmenge bestimmt, die in jeder dieser gleich hohen Schichten enthalten war. Nur für die beiden untersten Schichten ermittelte GRAHAM die Salzmenge nicht für jede gesondert, sondern für beide zusammen. Zur Berechnung dieser Versuche und Vergleichung mit der FICK'schen Theorie ist Gleichung (2) unter folgenden Bedingungen zu lösen: $\frac{\partial u}{x} = 0$ für $x = 0$ und $x = H$ für jedes t, wo x vom Boden des Gefässes an positiv nach oben gerechnet ist und H die Höhe der ganzen Flüssigkeitssäule bedeutet. Bezeichnet noch $2h$ die Höhe der Salzlösung am Anfang des Versuchs d. h. $2h = H/8$ und u_0 deren Concentration, so muss für $t = o : u = u_0$ für alle x zwischen 0 und $2h$, und $u = 0$ für alle x zwischen $2h$ und H. Die allgemeine Lösung ist:

$$u = \frac{u_0}{8} + \frac{2u_0}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi}{8} \cos\frac{n\pi x}{H} e^{-\frac{n^2\pi^2 k t}{H^2}}.$$

Der von GRAHAM bestimmte Salzgehalt der $p$ten Schicht wird daraus gefunden als

$$s_p = \int_{(p-1)\frac{H}{16}}^{p\frac{H}{16}} u\,dx.$$

Die Dauer ist aber nur für einen 14 Tage währenden Versuch gross genug, um ohne zu grosse Umstände k mit Hülfe der langsam convergirenden Reihe u zu berechnen. Es ergab sich für eine $10\frac{1}{8}$ proc. Kochsalzlösung $k = 105 \left[10^{-7} \frac{cm^2}{sec}\right]$ bei 10° C. Für kürzer dauernde Versuche, bei denen noch keine merkliche Salzmenge in die obersten Schichten der Flüssigkeit gestiegen ist, lässt sich diese Wassersäule als unendlich hoch betrachten und rechnet man x von der ursprünglichen Trennungsebene von Salz und Wasser positiv nach oben, so wird die Concentration nach STEFAN gegeben durch die Formel

$$u = \frac{u_0}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{4h+x}{2\sqrt{kt}}} e^{-\eta^2}\,d\eta - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-\eta^2}\,d\eta\right].$$

Der Salzgehalt einer der Schichten von der Höhe h findet sich aus $s = \int_{nh}^{(n+1)h} u\,dx$.
STEFAN berechnet nun Tafeln, die den Salzgehalt der 16 einzelnen Schichten für Werthe von $\frac{h}{2\sqrt{kt}}$ zwischen 0·10 und 0·60 geben und berücksichtigte dabei, wenn schon beträchtliche Salzmengen in die obersten Schichten diffundirt sind, die vollständigen Reflexionen, welche die Salztheilchen an der Grenzschicht erfahren. Der hierzu nöthige genäherte Werth für k wurde erhalten aus der Gleichung

$$\delta = \frac{S}{2h}\sqrt{\frac{kt}{\pi}},$$

wo S die in das Gefäss gebrachte Salzmenge und δ die Salzmenge bedeutet, die in der Zeit t aus einer unendlich langen Säule von Salzlösung in eine darüber befindliche unendlich hohe Wassersäule tritt. δ ergiebt sich aus den von GRAHAM gefundenen Salzgehalten s_3, s_4 etc. für die 3., 4. etc. Schicht vom Boden des Gefässes an, als:

$$\delta = s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + 2(s_7 + s_8 + s_9 + s_{10}) + 3(s_{11} + s_{12} + s_{13} + s_{14}) + 4(s_{15} + s_{16}).$$

Auf diese Weise berechnet geben GRAHAM's Versuche, bei denen stets 10proc. Lösungen in Wasser (d. h. 10 *gr* Substanz in 100 *ccm* Lösung) benutzt wurden nachstehende Resultate: Es ist die Diffusionsconstante $k = 10^{-7}\,\frac{cm^2}{sec}$ multiplicirt mit den folgenden Zahlen:

Caramel	Albumin	Gerbsäure	Arabisches Gummi	Schwefels. Magnesia	Rohrzucker	Kochsalz		Salzsäure
b. 9—10°	b. 13-15°	bei 10°	bei 10°	bei 10°	b. 9—10°	bei 5°	b. 9—10°	bei 5°
5·4	7·3	11·7	15·0	41·0	39·9	88·5	107·8	201·6

Hier sind die Angaben für Gerbsäure und Arabisches Gummi unsicher und gaben mehr nur die Grössenordnung an.

Alkoholische Lösungen ergaben für $\left\{\begin{array}{ll}\text{Jod} \;.\;.\;.\;.\;. & k = 61{\cdot}7 \\ \text{Essigsaures Kali} & k = 44{\cdot}0 \\ \text{Harz} \;.\;.\;.\;. & k = 21{\cdot}5\end{array}\right\} \cdot 10^{-7}\,\frac{cm^2}{sec}$,

doch sind auch diese Werthe nur rohe Annäherungen an die Wahrheit.

Soweit überhaupt aus den GRAHAM'schen Beobachtungen eine Prüfung des FICK'schen Elementargesetzes möglich war, fand STEFAN dasselbe für die Diffusion eines einzelnen Salzes bestätigt. Die Versuche, die zu demselben Zweck E. VOIT (16) und später JOHANNISJANZ (20) mit optischen Methoden machten, erreichten, wie STEFAN (21) zeigte, ihr Ziel nicht, weil sie übersahen, dass eine diffundirende Flüssigkeit, deren Brechungsquotient von unten nach oben abnehmen muss, sich dem horizontal einfallenden Lichtstrahl gegenüber verhält wie ein Prisma, dessen Kante nach oben gekehrt ist und also den Strahl nach unten ablenken muss.

Dagegen hat H. F. WEBER (24) eine sehr scharfe Prüfung der Richtigkeit der FICK'schen Hypothese mittelst einer elektrischen Beobachtungsmethode vorgenommen. Den Boden eines Glascylinders bildete dabei eine ebene, kreisrunde, amalgamirte Zinkplatte von etwa 11 *cm* Durchmesser, auf sie wurde eine Zinkvitriollösung (0·25 bis 0·35 *gr* in 1 *ccm* Lösung) geschüttet und über diese eine zweite verdünntere (0 15—0·20 *gr* im *ccm*) geschichtet, welche oben wieder eine der ersten gleiche amalgamirte Zinkplatte berührte. Die elektromotorische Kraft zwischen den Platten ändert sich mit der Zeit durch die Diffusion der Lösungen, und da durch Vorversuche diese elektromotorische Kraft bestimmt war, als:

$$E = A(u_2 - u_1)\,[1 + B(u_2 + u_1)],$$

wo die Concentrationen u_2 und u_1 zwischen 0·15 und 0·35 liegen dürfen, so gab eine Messung der Aenderung von E ein Maass für die Concentration an den zwei Platten und dadurch die Möglichkeit FICK's Gesetz zu prüfen. Die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

hat hier, wenn die x positiv von der oberen Elektrode nach unten gerechnet

werden, wenn l_1 die Höhe der unteren, l_2 die der oberen Lösung ist und $l_1 + l_2 = L$ gesetzt wird, den Grenzbedingungen zu genügen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } x = 0, & \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \text{,, } x = L, & \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \text{ für alle } t,$$

und den Anfangsbedingungen

$$\text{für } t = 0 \begin{cases} u = u_1 \text{ für alle } x \text{ von } x = 0 \text{ bis } x = l_1 \\ u = u_2 \text{ ,, ,, } x \text{ ,, } x = l_1 \text{ ,, } x = L. \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$u = \frac{u_1 l_1 + u_2 l_2}{L} - \frac{2(u_2 - u_1)}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi l_1}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Bestimmt man hieraus die Concentrationen u' und u'' an den Grenzschichten $x = 0$ und $x = L$, wählt L so klein (etwa 3 *cm*), dass die vierten Glieder der Reihe schon nach Verlauf eines Tages ($t = 1$) kleiner als $\frac{1}{400}$ werden und macht l_1 möglichst gleich $L/3$, wodurch das dritte Glied der Reihe verschwindet, so erhält man für $t > 1$ den Werth:

$$E = A(u'' - u')[1 + B(u'' + u')] = A \frac{4(u_2 - u_1)}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt}$$

$$\left[1 + 2B\left(\frac{u_1 l_1 + u_2 l_2}{L} - \frac{u_2 - u_1}{\pi} \sin \frac{2\pi}{3} \cdot e^{-\frac{4\pi^2}{L^2}kt}\right)\right] = A_1 e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} - B_1 e^{-\frac{5\pi^2}{L^2}kt},$$

wo A_1 und B_1 constante Grössen bezeichnen. Nach den Versuchen war B sehr klein gegen A, also wird nach kurzer Zeit schon der Ausdruck für die elektromotorische Kraft sich reduciren auf:

$$E = A_1 e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt}.$$

E wurde mit der Dubois-Reymond'schen Modifikation der Compensationsmethode bestimmt, bei der die zu bestimmende elektromotorische Kraft gegeben ist durch $E = C \cdot \lambda$, wo C eine Constante und λ die Länge des Messdrahtes ist, die als beiden galvanischen Kreisen gemeinschaftlicher Theil eingeschaltet werden muss, um völlige Compensation der zu messenden elektromotorischen Kraft im zweiten Kreise herzustellen. Man hat folglich

$$\lambda = C\left[A_1 e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} - B_1 e^{-\frac{5\pi^2}{L^2}kt}\right]$$

für $t > 1$, und für grössere Werthe von t:

$$\lambda = CA_1 e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt}.$$

Sind in gleich weit von einander abstehenden Zeitmomenten t_0, t_1, t_2 etc. die Längen λ_0, λ_1 etc. gefunden worden, so muss $lg\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + 1}\right)$ ziemlich bald constant werden und zwar, wenn $t - t_0 = t_2 - t_1$ ect. $= \Delta t$, wird:

$$log\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + 1}\right) = \frac{\pi^2}{L^2} k \Delta t = \eta,$$

woraus die Diffusionsconstante:

$$k = \eta \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\Delta t}.$$

Die Beobachtungsmethode war so empfindlich, dass, wenn die untere Grenzschicht einen Salzverlust von $\frac{1}{120}$ *mgr* pro Cubikcentimeter und die obere Grenzschicht einen gleichen Salzgewinn erlitt, diese Diffusionswirkung noch deutlich wahrgenommen werden konnte. Die Temperatur schwankte während der zwölf Beob-

achtungstage zwischen 9·9 und 9·4° C. und es zeigte sich schon vom vierten Tag an die Grösse η als merklich constant. Sonach ist das FICK'sche Elementargesetz für die benutzten Concentrationen als richtig erwiesen. Die Diffusionsconstante wird für die mittlere Temperatur 9·5° und die angewandten Lösungen von Zinkvitriol (unten 31·82 $\frac{0}{0}$ und oben 15·20 $\frac{0}{0}$) $k = 21{\cdot}4 \left[10^{-7} \frac{cm^2}{sec}\right]$.

Die angeführte Methode hat noch den einen Uebelstand, dass die Zeit der Beobachtung lang ist und während derselben ein Constanthalten der Temperatur kaum möglich sein wird. Wollte man die Höhe der Zinkvitriollösung noch beträchtlich kleiner als bisher (2·99 *cm*) nehmen, so würde sich die Beobachtung zwar abkürzen, der Anfangszustand aber kaum scharf definiren lassen. Deshalb hat H. F. WEBER (24) noch folgende Versuchsanordnung angewendet, bei der es möglich ist die Diffusionsconstante binnen einigen Stunden zu bestimmen. In einer etwa 0·5 *cm* hohen, zu beiden Seiten durch amalgamirte Zinkplatten begrenzten Säule von Zinkvitriol werden Concentrationsunterschiede durch einen elektrischen Stromhergestellt, den man eine Zeit lang durch die Säule gehen lässt. Dann unterbricht man den Strom und misst nun von Zeit zu Zeit wie früher die durch Diffusion bewirkten Aenderungen der Concentration an den Zinkplatten. Da der von unten nach oben durch die Lösung gehende elektrische Strom von der Intensität J den oberen Grenzschichten nach HITTORF die Salzmenge $hJ\,dt$ (wo h eine Constante ist) entzieht und dieselbe der unteren Grenzschicht zuführt, so werden die Grenzbedingungen andere als bei der vorigen Methode. Macht man die Annahme, dass der elektrische Strom den Vorgang der Diffusion nicht beeinflusste und dass der stationäre Zustand der Concentrationsvertheilung eingetreten sei, so muss durch Diffusion der oberen resp. unteren Grenzschicht so viel Salz zu resp. abgeführt werden, als durch die Thätigkeit des elektrischen Stroms diesen Schichten entzogen resp. zugeführt wird. Es muss folglich erstens u der alten Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ genügen und ferner muss an der oberen Grenzschicht ($x = 0$) durch den Strom der Salzverlust $hJdt$ und durch die Diffusion der Salzgewinn: $kq\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 dx\right] dt$ stattfinden, wo q der Querschnitt des Gefässes ist. Der gesammte Salzgewinn lässt sich aber auch durch $q\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 dx\,dt$ darstellen, folglich als Ausdruck der Salzbewegung in der Grenzschicht $x = 0$ gilt:

$$q\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 dx\,dt = \left[kq\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 - hJ\right] dt + kq\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 dx\,dt,$$

demnach muss für diese Grenzschicht in jedem Momente sein

$$kq\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = hJ;$$

eine analoge Bedingung gilt für die untere Grenzschicht. Rechnet man die Zeit von dem Moment an, wo der elektrische Strom die Lösung zu durchfliessen beginnt und ist u_0 die anfängliche Concentration, so wird die allgemeine Lösung von $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ jetzt:

$$u = u_0 + \frac{Jh}{kq}\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}\frac{Jh}{kq} L \left[\cos\frac{\pi x}{L} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi}{L} x e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kt} + \ldots\right].$$

Unterbricht man nach der Zeit T den elektrischen Strom, so ist in diesem Moment die Concentration der Lösung gegeben durch

$$U_0 = u_0 + \frac{Jh}{kq}\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}\frac{Jh}{kq}L\left[e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt}\cdot\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{9}e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kT}\cdot\cos\frac{3\pi x}{L} + \ldots\right].$$

Verfolgt man von diesem Zeitpunkt $t = 0$ an die jetzt noch allein bestehende Diffusion, so hat man die alte Gleichung (2) mit den bekannten Grenzbedingungen und der Anfangsbedingung für $t = 0 : u = U_0$ zu lösen. Aus der so sich ergebenden allgemeinen Lösung erhält man (wie früher) nach Verlauf einer gewissen Zeit ($1\frac{1}{2}$ Stunde und bei der Wahl des sehr kleinen Werthes von $L = 0{\cdot}522\ cm$:

$$E = A(1 + 2Bu_0)\frac{8}{\pi^2}\frac{Jh}{kq}L(1 - B_1)e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} = C\cdot e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt},$$

wo C eine Constante und $B_1 = e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kT}$.

Die Diffusion lief jetzt so schnell ab, dass E nur noch durch den ersten Ausschlag s eines Galvanometers gemessen werden konnte und man endlich erhielt

$$s = C_1\cdot e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt},$$

welche Beziehung die Beobachtungen durchaus bestätigen. Als Diffusionscoëfficient ergab sich bei 18·4° C.

$$k = 27{\cdot}8\cdot 10^{-7}\left[\frac{cm^2}{sec}\right],$$

wenn $u_0 = 31{\cdot}20$ proc. war.

Den Einfluss der Temperatur giebt die Formel: $k = 13{\cdot}7\ (1 + 0{\cdot}0557\ \vartheta)\ 10^{-7}\frac{cm^2}{sec}$ zwischen 0 und 45°.

Die im Fick'schen Gesetz enthaltene Annahme, dass k unabhängig von der Concentration sei, erwies sich als nicht streng richtig, denn eine Lösung für die bei 17·9° C. $u_0 = 2{\cdot}114\%$ war, gab $k = 27{\cdot}8\cdot 10^{-7}\frac{cm^2}{sec}$ und eine Lösung für die bei 18·0° C. $u_0 = 31{\cdot}8\%$ war gab $k = 26{\cdot}5\left[10^{-7}\frac{cm_2}{sec}\right]$.

Es nimmt also k mit steigender Concentration sehr langsam ab. Abweichende Resultate geben die Beobachtungen Schuhmeister's (23). Sein Apparat bestand in 2 gut auf einander geschliffenen Glas- oder Messingplatten, jede von ihnen war in gleicher Weise durchbohrt und in die Bohrungen waren cylindrische, am andern Ende geschlossene Glasröhren von möglichst derselben Länge eingekittet. Nach Füllung der Röhren mit den Lösungen, die gegen einander diffundiren sollten, wurden sie mittelst Schrauben über einander geschoben. Nachdem 1—16 Tage lang die Diffusion gedauert, trennte man die Röhren wieder und untersuchte sie auf ihren Salzgehalt. Bei anderen Versuchen wurde nur eine der Röhren benutzt, über deren Mündung dann ganz langsam stets reines Wasser strömte. Wegen der relativ kurzen Versuchsdauer und der Länge jeder Röhre (9—10 cm) konnte man die Flüssigkeitssäulen als unendlich hoch ansehen. Dann wird die aus einer der Röhren vom Querschnitt q in der Zeit t ausgetretene Salzmenge S durch den Ausdruck gegeben:

$$S = (U - u)q\sqrt{\frac{kt}{\pi}},$$

wo U und u die anfänglichen Concentrationen in der untern und oberen Röhre bezeichnen. Da die Temperatur während eines einzelnen Versuchs oft um 2—3° schwankte und auch die Beobachtungen bei verschiedenen Temperaturen und nicht regelmässig wechselnden Concentrationen (Gewicht des Salzes in 100 ccm) angestellt wurden, so sind die auf gleiche Salzgehalte und die Temperatur von

10° C. reducirten Zahlen der folgenden Tabelle für *k* in ihrer letzten Stelle meist unsicher. Sie sind alle mit 10^{-7} zu multipliciren und im $\frac{cm^2}{sec}$ Maass gegeben.

Chlorkalium		Bromkalium		Jodkalium			Salpeters. Kali	Kohlens. Kali	Schwefels. Kali	Chlornatrium	
10%	30%	10%	30%	10%	30%	90%	15%	20%	13%	10%	30%
k = 127	147	131	144	130	145	168	93	69	87	97	106

Bromnatrium	Jodnatrium		Salpeters. Natron	Kohlens. Natron	Schwefels. Natron	Chlorlithium	Bromlithium		Jodlithium	Kupferchlorid
30%	15%	30%	10%	13%	10%	14%	20%	38%	17%	10%
k = 99	93	100	69	45	76	81	93	100	93	50

Kobaltchlorid	Chlorcalcium	Kupfervitriol	Zinkvitriol	Schwefels. Magnesia	Chlorammonium
10%	10%	10%	10%	10%	23%
k = 53	79	24	23	32	135

Hier zeigen also, im Gegensatz zum Verhalten des Zinkvitriols bei Weber, alle untersuchten Lösungen ein Wachsen des *k* mit der Concentration.

Die ausgedehnten Versuche J. D. R. Scheffer's (33) wurden nach beiden Graham'schen Methoden angestellt. Bei Anwendung der ersten stellte er das Diffusionsglas nicht auf den Boden des grossen Wassergefässes, sondern brachte es so hoch wie möglich an diesem an, indem er so an der Mündung des Diffussionsglases besser die Concentration Null zu erreichen glaubte. Die Berechnung von *k* geschah nach den Formeln von Simmler und Wild (9.) Die zweite Graham'sche Methode wurde mit einer cylinderförmigen Glasflasche ausgeführt, die durch einen weiten eingeschliffenen Stöpsel mit angeschmolzenem Abflussrohr geschlossen war. Durch den Stöpsel ging eine eingeschmolzene Pipette bis auf den Boden der Flasche. Der obere aus der Flasche herausragende Theil der Pipette endigte in einer Kugel, die etwa $\frac{1}{4}$ des Flascheninhalts fasste, und konnte mit einem Hahn verschlossen werden. $\frac{3}{4}$ der Flasche füllte Scheffer mit Wasser und liess dann zur Füllung des letzten Viertels durch die Pipette vorsichtig Salzlösung unter das Wasser treten. Nach einiger Zeit wurden die 3 obersten Schichten nach einander durch die Abflussröhre entleert, indem man sie durch Wasser aus der Pipette verdrängte. *k* wurde als Mittel aus den Ergebnissen für die 1. und 2. und für die 4. Schicht nach den von Stefan für die Graham'schen Beobachtungen aufgestellten Tabellen berechnet, nachdem man die Salzgehalte der 3 oberen Schichten direkt und den des letzten Viertels der Flasche aus diesen und der im ganzen benutzten Salzmenge bestimmt hatte. Die so gefundenen Werthe von *k* in der folgenden Tabelle sind wieder mit $10^{-7}\frac{cm^2}{sec}$ zu multipliciren.

Salzsäure, $HCl \cdot nH_2O$.

Temp.	*n*	*k*	Temp.	*n*	*k*	Temp.	*n*	*k*	Temp.	*n*	*k*
0°	5	267	0°	27·1	176	9°	66	213	11·5°	7·5	317
0°	5	345 [1])	0°	129·5	161	9°	70	213	11·5°	9·2	292
0°	6·9	241	3·5°	8	233	11°	7·2	309	11·5°	69·4	240
0°	9·8	215	3·5°	44	187	11°	27·6	245	12°	11·3	295
0°	9·8	322 [2])	5°	130·7	179	11°	69·4	234	12°	69·4	256
0°	14	193	8°	22	240	11°	108·4	213	13°	5·2 [3])	480
0°	14·2	198	8·5°	7·9	284	11·5°	4·6	339	15·5°	22	296

[1]) Diffundirt statt in H_2O in $HCl\,6\cdot 9H_2O$. [2]) Diffundirt in $HCl\,14\cdot 2H_2O$. [3]) Diffundirt in $HCl\,12\cdot 1H_2O$.

Salpetersäure, $NO_3H \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k	Temp.	n	k
5·5°	59	181	8·5°	66	198
5·5°	66	174	8·5°	87	192
6°	16·5	178	9°	2·9	225
6°	66	174	9°	7·3	234
7°	1·9	241	9°	35	206
8°	5	237	9°	426	200
8·5°	28	201	9·5°	73·5	205

Schwefelsäure, $H_2SO_4 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k	Temp.	n	k
7·5°	686	121	8°	84	118
8°	18·8	124	8·5°	84	118
8·5°	125	115	11·3°	71	130
9°	686	132	13°	0·5	150
8°	36	117	13°	35	144

Essigsäure, $C_2H_4O_2 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
8°	38	76·4
13°	46	84·5
13·3°	208	90·3
13·5°	60	88·0
13·5°	84	89·1
14°	128	93·8
14·5°	38	90·3

Oxalsäure, $C_2H_2O_4 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k	Temp.	n	k
3·5°	315	70·6	10°	720	97·2
4°	297	75·2	13·5°	1247	122
5°	315	76·4	14°	415	109
7·5°	135	82·2	14°	689	117
9·5°	720	93·8			

Weinsäure, $C_4H_6O_6 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
2°	417	39·4
3·5°	417	41·7
5°	155	42·8
5°	417	42·8
9°	155	52·1

Traubensäure, $C_4H_6O_6 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
5°	155	45·1
4·8°	487	44·0

Bernsteinsäure, $C_4H_6O_4 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
15°	125	63·7

Citronensäure, $C_6H_8O_7 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
3·5°	516	37·0
4·5°	516	39·4
9°	150	47·5

Kali, $KOH\ 1665H_2O$

Temp.	k
13·5°	192

Natron, $NaOH\ 329H_2O$

Temp.	k
8°	123

Ammon, $NH_5 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
4·5°	16	123
4·5°	85	123

Natriumchlorid, $NaCl \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
5·5°	11	84·5
5·5°	25	84·5
5·5°	52	85·6
5·5°	58	88·0
6°	107	86·8
7°	99	89·1
8°	11·1	94·9

Chlorammonium $NH_4Cl\ 61H_2O$.

Temp.	k
17·5°	152

Chlorcalcium, $CaCl_2 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
8·5°	19·1	81·0
8·5°	19·1	86·8[1]
9°	13	83·3
9°	297	74·1
9°	384	78·7
10°	27·6	78·7
10°	27·6	82·2[2]

Chlorbarium, $BaCl_2 \cdot nH_2C$.

Temp.	n	k
8°	46	76·4
8°	337	75·2

Kaliumnitrat, $KNO_3 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
7°	32	98·3
7°	107	106

Natriumnitrat, $NaNO_3 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
2·5°	7·7	66·0
2·5°	44	71·8
10·5°	18	88·0
10·5°	95	96·1
11·5°	28	94·9
11·5°	95	99·5
13°	6·9	89·1
13°	95	104

Silbernitrat, $AgNO_3 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
3·5°	435	93·8
6·5°	10·6	47·5[3]
6·5°	10·6	66·0
7·5°	11·8	75·2
7·5°	25	89·1
7·5°	189	104

Bleinitrat, $PbN_2O_6 \cdot nH_2O$.

Temp.	n	k
12°	136	76·4
12°	514	82·2

Natriumformiat, $CO_2NaH \cdot nH_2O$

Temp.	n	k
8°	135	79·9
9·5°	64	84·5

[1]) Diffundirt in $CaCl_2\ 30·6H_2O$. [2]) Diffundirt in $CaCl_2\ 111·6H_2O$. [3]) Diffundirt in $AgNO_3\ 14·2H_2O$.

Natriumacetat, $C_2H_3O_2Na \cdot nH_2O$.		
Temp.	n	k
4·5°	243	60·2
14·5°	69—161	79·9

Benzolsulfonsaures Natrium, $C_6H_5SO_3Na$ 184 H_2O.	
Temp.	k
14·5°	77·5

Natriumoxalat, $C_2O_4Na_2$ 376 H_2O.	
Temp.	k
6°	60·2

Natriumtartrat, $C_4H_4Na_2O_6$ 483 H_2O.	
Temp.	k
4°	48·6

Natriumhyposulfit, $Na_2S_2O_3 \cdot nH_2O$.		
Temp.	n	k
10·5°	49	62·5
10·5°	245	74·1

Natriumcarbonat, Na_2CO_3 224 H_2O.	
Temp.	k
4·5°	50·9

Magnesiumsulfat, $MgSO_4 \cdot nH_2O$.		
Temp.	n	k
5·5°	45	32·4
5·5°	184	37·0
7°	98	34·7
7°	430	37·0
10°	30	31·2
10°	248	39·4

Harnstoff, CON_2H_4 110 H_2O.	
Temp.	k
7·5°	93·8

Choralhydrat, CCl_3COH 134 H_2O.	
Temp.	k
9°	63·7

Mannit, $C_6H_{14}O_6$ 220 H_2O.	
Temp.	k
10°	44·0

Der Einfluss der Concentration auf die Diffusionsgeschwindigkeit ergiebt sich nach den angeführten Untersuchungen als für verschiedene Stoffe verschieden. So fand GRAHAM für Salzsäure und Schwefelsäure mit zunehmender Concentration steigende, für die meisten anderen Stoffe bei Concentration zwischen 1 und 8 § dagegen abnehmende Diffusionscoëfficienten. H. F. WEBER constatirte zwischen 21 und 32 § Zinkvitriol eine kleine Abnahme der Diffusionsgeschwindigkeit bei zunehmender Concentration, während SCHUHMEISTER für alle von ihm untersuchten Stoffe das Gegentheil beobachtete. Zu dem letzten Resultat kam auch von WROBLEWSKI (30), als er die Diffusion von 3 Kochsalzlösungen, deren Concentrationen ungefähr im Verhältniss 6:58:177 standen, mit einander verglich und ein Wachsen der Diffusionscoëfficienten in demselben Verhältniss wahrnahm. Nach den obigen Tabellen SCHEFFER's wirkt in der That eine Aenderung der Concentration je nach der Natur des gelösten Stoftes verschieden auf die Diffusionsgeschwindigkeit. Ein starkes Wachsen derselben mit der Concentration zeigt die Salzsäure, ein viel geringeres Salpetersäure, Schwefelsäure, wenig verändern sich Weinsäure, Traubensäure, Ammon, Kochsalz, Chlorcalcium, Chlorbarium, und mit der zunehmenden Concentration wird die Diffusionsgeschwindigkeit kleiner bei den Nitraten, Natriumhyposulfit und Magnesiumsulfat. Dies verschiedene Verhalten sucht SCHEFFER durch die Annahme zu erklären, dass bei vielen dieser Lösungen (was auch aus anderen Gründen wahrscheinlich) das chemische Molekül während der Lösung oder der Diffusion mehr oder weniger zerfällt, je nachdem die Concentration kleiner oder grösser ist. Man kann also von einer Diffusionsconstanten für concentrirte Lösungen überhaupt nicht mehr sprechen, sondern dürfte, wie dies auch OSTWALD[1]) hervorhebt, die Prüfung des FICK'schen Gesetzes nur an sehr verdünnten Lösungen vornehmen, in denen die Molekeln nach ARRHENIUS schon als dissociirt angesehen werden können und sich demnach beim Diffundiren nicht mehr verändern. Man würde so aus Diffusionsbeobachtungen einen Schluss ziehen können über den Grad des Zerfalles eines Salzes in der Lösung.

Der Einfluss des Stoffes auf die Geschwindigkeit der Diffusion, wie er sich in der Grösse der Diffusionscoëfficienten ausdrückt, ist schon von GRAHAM (11), BEILSTEIN (4) u. A. hervorgehoben worden. GRAHAM fand z. B.

[1]) S. OSTWALD, Zeitschrift für phys. Chem. Referat 2, pag. 441. 1888.

als Zeiten, in denen der Diffusionsprocess für gleiche Gewichtsmengen der verschiedenen Substanzen gleich weit vorgeschritten war, für

Salzsäure = 1; Chlornatrium = 2·33; Rohrzucker = 7; Schwefelsaure Magnesia = 7; Eiweiss = 49; Caramel = 98

und unterschied danach Colloide und Krystalloide.

Für die ersten wie Caramel, Eiweiss etc. war die sehr langsame Diffusion ein wesentliches Merkmal gegenüber den schnell diffundirenden Krystalloiden. Aehnliche Versuche hat COLEMAN (37) mit der ein wenig abgeänderten GRAHAM'schen Methode angestellt und fand z. B. bei 12·5° C. nach der Grösse ihrer Diffusionsgeschwindigkeit geordnet: Salzsäure, Salpetersäure, Kalihydrat, Salmiak, Schwefelsäure, Natronhydrat, Kochsalz, schwefelsaure Magnesia. Ferner beobachte GRAHAM schon, dass die Kalisalze schneller als die Natronsalze diffundirten, wie dies aus der Tabelle von SCHUHMEISTER hervorgeht, die auch zeigt, dass die Diffusion der Lithiumsalze noch langsamer geschieht als die der Natriumsalze. Zugleich macht SCHUHMEISTER die Bemerkung, dass dieselbe Reihenfolge für den Reibungscoëfficienten und die elektrische Leitungsfähigkeit dieser Salze besteht.

Specieller hat sich LONG (29) mit dieser Frage beschäftigt. Seine von LOTHAR MEYER angegebene Methode war folgende: An eine der Biegungen eines mehrfach *U*förmig gebogenen, engen Glasrohres war ein kurzes weiteres Glasrohr angeblasen, so dass durch dasselbe eine freie Communication des Innern der engen Röhre nach aussen stattfand. Dieser Theil der *U*Röhre ragte tief in ein Becherglas hinein, das bis zu passender Höhe mit der zu untersuchenden Lösung gefüllt war. Durch die enge Röhre strömte sehr langsam reines Wasser. Dies fing man beim Ausfliessen auf und sein durch die Analyse bestimmter Salzgehalt rührte her von der im Becherglas befindlichen Salzlösung, die durch das kurze Ansatzrohr in die enge gebogene Röhre diffundirt war, und gab ein relatives Maass für die Schnelligkeit dieser Diffussion. Man liess mehrere derartige gleich functionirende Apparate zur selben Zeit arbeiten. Die benutzten Lösungen waren stets Normallösungen oder standen in einfachen Verhältnissen zu diesen, d. h. es war stets in einem Liter Wasser eine dem Aequivalentgewicht gleiche oder in einfachem Verhältniss zu ihm stehende Anzahl Gramme der Substanz gelöst. Die Bestimmung des Salzgehalts geschah erst nach 1—2 Tagen, wenn pro Stunde merklich die gleiche Salzmenge ausfloss. Bestimmte LONG aus den diffundirten Salzmengen die relative Anzahl der diffundirten Molekeln, so ordnen sich die Stoffe in folgende Reihe:

Stoff	Relative diffundirte Mol.-Zahl	Stoff	Relative diffundirte Mol.-Zahl	Stoff	Relative diffundirte Mol.-Zahl	Stoff	Relative diffundirte Mol.-Zahl	Stoff	Relative diffundirte Mol.-Zahl
KCl	803	$BaCl_2$	450	KBr	811	NH_4NO_3	680	$(NH_4)_2SO_4$	724
NH_4Cl	689	$SnCl_2$	432	NH_4Br	629	KNO_3	607	Na_2SO_4	678
NaCl	600	$CaCl_2$	429	NaBr	509	$NaNO_3$	524	$MgSO_4$	348
LiCl	541	$MgCl_2$	392	KJ	823	$LiNO_3$	512	$ZnSO_4$	332
KCy	767	$CoCl_2$	306	NaJ	672	BaN_2O_6	656	$CuSO_4$	316
		$NiCl_2$	304			SrN_2O_6	552	$MnSO_4$	298

In dieser Tabelle zeigt sich dieselbe Reihenfolge in der Diffusionsgeschwindigkeit für die K, Na, Li Salze wie in SCHUHMEISTER's Zusammenstellung. Ferner ergaben sich noch folgende Beziehungen: Im Allgemeinen diffundiren die Salze am raschesten, die nach KOHLRAUSCH's Untersuchungen in wässrigen Lösungen am besten leiten. Bezeichnet man mit *n* die von HITTORF sogen. Ueberführungszahl bei der Wanderung der Ionen während der Elektrolyse, und mit *d* die

Diffusionsgeschwindigkeit, wie sie die relative diffundirte Molekelzahl der obigen Tabelle giebt, so ist für die 2werthigen Chloride: $BaCl_2$, $SrCl_2$, $CaCl_2$, $MgCl_2$ das Produkt *dn* nahezu dieselbe Zahl. Das gleiche findet für die Sulfate von Mg, Zn, Cu statt und für die 3 Salze KCl, KBr, KJ. Endlich stehen die Chloride der Alkalien für die Diffusionsgeschwindigkeit in derselben Reihenfolge wie sie das für ihre Molekularvolumina und Lösungswärmen thun. Aehnliches gilt für die 2werthigen Chloride für Diffusion und Lösungswärme.

Nach der LONGschen Methode hat auch R. LENZ (32) Diffusionsversuche von alkoholischen Lösungen verschiedener Salze angestellt und gefunden, dass die Diffusionsgeschwindigkeiten dem galvanischen Leitungsvermögen derselben Lösungen proportional sind. Ferner soll sich das Verhältniss der beiden Grössen weder mit der Natur des Salzes noch mit der Stärke der Lösung, noch mit dem Lösungsmittel oder der Temperatur ändern. Als Beleg für diese Sätze giebt LENZ folgende Tabellen, in denen *v* die Stärke des benutzten Alkohols in Volumprocenten bei ca. 15·6° C, *d* die Diffusionsgeschwindigkeit, *L* das Leitungsvermögen bedeuten. Die letzten Grössen sind für eine Lösung von $\frac{1}{4}$ Molekül, K_2J_2, d. h. von $\frac{1}{4}$ des Molekulargewichts von Jodkalium in Grammen im Liter = 100 gesetzt:

v	$\frac{1}{2}K_2J_2$		$\frac{1}{4}K_2J_2$		$\frac{1}{8}K_2J_2$		$\frac{1}{16}K_2J_2$		$\frac{1}{32}K_2J_2$		$\frac{1}{4}Na_2J_2$		$\frac{1}{2}K_2CrO_4$		$\frac{1}{2}CdJ_2$		$\frac{1}{4}CdJ_2$	
	d	*L*	*d*	*L*	*d*	*L*	*d*	*L*	*d*	*L*	*d*	*L*	*d*	*L*	*d*	*L*	*d*	*L*
0	195	—	100	100	51	52	27	27	13	14	82	80	—	164	84	30	44	18
27·9	—	—	50	50	25	25	—	—	—	—	38	40	64	63	40	14	19	7·5
51·0	—	—	38	35	19	18	11	9	—	—	—	—	—	—	37	9	17	4·5
74·7	—	—	29	26	15	13	8	8	—	—	27	23	—	—	39	6	17	3·5

Die Nichtübereinstimmung der Zahlen für Jodcadmium sucht LENZ daraus zu erklären, dass er bei stärkeren Lösungen dieses Salzes eine Entstehung von Complexmolekülen annimmt, die bei der Diffusion wieder zerfielen und so die Diffusion mit der Leitungsfähigkeit unvergleichbar machten.

Alle die im Vorstehenden angeführten Analogien weisen auf eine Molekulartheorie der verschiedenen, erwähnten physikalischen Vorgänge hin, zu der für die Diffusion von W. NERNST mit Hilfe des Begriffs des osmotischen Drucks ein bedeutsamer Anfang gemacht worden ist.

Die Diffusion von Salzgemengen hat GRAHAM (11) zuerst untersucht und dabei schon frühere von ihm gelegentlich angestellte Beobachtungen bestätigt, wonach Salze durch Diffusion aus einem Gemenge getrennt werden können, und zwar findet die Scheidung der Salze in stärkerem Maasse statt als man nach ihren relativen Diffusionsgeschwindigkeiten erwarten sollte. Ein Gemisch von 5proc. Chlorkalium und 5proc. Chlornatrium-Lösung folgte als Ganzes dem einfachen Diffusionsgesetz, während die einzelnen Bestandtheile dies nicht mehr thaten. Während Chlorkalium und Chlornatrium einzeln im Verhältniss von 1·19 zu 1 diffundirten, geschah das im Gemisch nach dem Verhältniss 1·47 zu 1 und zwar rührte das nur von der schnelleren Diffusion des Chlorkaliums her, wogegen die Diffusion des Chlornatriums nicht geändert erschien. Ebenso ergab die Diffusion einer Lösung von 5§ Chlornatium und 5§ wasserfreiem, schwefelsaurem Natron eine beträchtliche Steigerung der Diffusionsgeschwindigkeit für das Erstere und fast keine derartige Veränderung für das Letztere.

MARIGNAC (18) hat später ausgedehnte und sorgfältige Beobachtungen der Diffusion von Salzgemengen angestellt, aber einfache Gesetze aus ihnen nicht ableiten

können. Sein allgemeinstes Resultat ist eine Bestätigung der GRAHAM'schen Beobachtung, dass im Gemenge der Unterschied der Diffusionsgeschwindigkeiten der beiden Salze immer grösser erschien, als wenn jedes Salz für sich diffundirte und zwar verminderte stets das weniger diffusible der beiden Salze im Gemisch seine Diffusibilität.

Als Gemenge diffundiren nach RÜDORFF (40) auch viele Doppelsalze, die sich in nicht völlig concentrirter Lösung zersetzen und von denen dann sich die einzelnen Bestandtheile für sich bewegen, doch stets mit geringerer Geschwindigkeit als wenn sie allein wären. Es zersetzten sich z. B. in Lösung alle untersuchten Sulfatdoppelsalze, während die meisten Doppelsalze der Oxalsäure und Weinsäure dies nicht thaten. RÜDORFF lässt bei seinen Versuchen die Lösungen durch eine Membran (Blinddarm des Ochsen) diffundiren, doch controllirte er, dass dieselben Resultate bei freier Diffusion erhalten wurden.

Auch über die Diffusion in Colloiden rühren die ersten Beobachtungen von GRAHAM (11) her. Er verglich die Geschwindigkeit der Diffusion von Kochsalz in erstarrter Gelatine mit der in Wasser und fand sie ziemlich gleich, so dass also die Bewegung einer Krystalloidsubstanz in einem Colloid keine merkliche Verzögerung erfährt, während ein Colloid sich nur sehr langsam durch ein zweites hindurchbewegt. Dieser Versuch wurde in einer verticalen Röhre angestellt, dessen untere Hälfte mit einem Gemisch von Gelatine und Kochsalz, dessen obere Hälfte nur mit Gelatine gefüllt war. DE VRIES (35) hat die Beobachtung bestätigt, indem er u. A. aus gesättigter Lösung Kupfersulfat durch Gelatine und chromsaures Kali durch Kieselsäuregallerte diffundiren liess und sie mit Diffusion durch Wasser verglich. Dass die Schwere keinen merklichen Einfluss auf die Diffusion hat, zeigte DE VRIES, indem er die farbige Salzlösung einmal über, das anderemal unter die Gelatine schichtete, wobei die Färbung derselben in beiden entgegengesetzten Richtungen gleich schnell fortschritt. Ganz ähnliche Versuche sind später von DETLEFSEN (36) und von CHABRY (42) beschrieben worden, welch letzterer bei Gelatine und hyalinem Knorpel die aus dem FICK'schen Gesetz folgende Beziehung $\frac{h}{\sqrt{t}} = Const$ (h = Wegstrecke, um die in der Zeit t die farbige Grenze in der Gelatine etc. fortgerückt ist) im Ganzen bestätigt fand. Endlich mögen hier Platz finden die Versuche von TIETZEN-HENNIG's (43), der mit Gelatine oder Gyps gemischte Zinkvitriollösung in von dem Salz freie Gelatine etc. diffundiren liess. Die Bestimmung des Salzgehalts in der vorher salzfreien Gelatine etc. lieferte für den Diffusionscoëfficienten Werthe, die bei den einzelnen Versuchen sehr von einander abweichen, so dass der folgende Mittelwerth demnach nur die Grössenordnung bezeichnet.

	Mischung.				
	Gyps oder Gelatine	wasserfr. Zinkvitriol	Wasser	k	
Gypspräparat	75	10	90	22	$\cdot 10^{-7} \frac{cm^2}{sec}$
Gelatinepräparat	28	48·7	438	24	

Den Einfluss der Temperatur auf die Diffusion hat ausser H. F. WEBER für Zinkvitriol (s. oben), GRAHAM (11) nach seiner oft erwähnten Methode für einige Substanzen bestimmt. Er fand, dass die diffundirten Salzmengen, wenn man sie bei 15·5° mit 1 bezeichnete, bei 48·8° waren: für Chlornatrium 2·515, Chlorkalium 2·426, Salzsäure 2·181. Ferner die diffundirten Mengen bei 5·3° = 1 gesetzt, erhielt man bei 17·4° für Kochsalz 1·423, Salpetersaures Natron 1·4475

Salpetersaures Silber 1·3914. Es schien GRAHAM somit die Diffusibilität der Säuren weniger mit der Temperatur zuzunehmen als die der Salze, und überhaupt je diffusibler eine Substanz ist, desto geringer sollte die Zunahme ihrer Diffusibilität mit der Temperatur sein. Diese Sätze sind jedoch durch zu wenige Beobachtungen gestützt, um als richtig angenommen zu werden. Zu einem andern freilich ebensowenig sicheren Resultat kam DE HEEN (34), der die Diffusion in folgender Weise untersuchte: Flache, höchstens 5 Millim. hohe, breite Büchsen sind mit der Salzlösung gefüllt, durch 5 kurze, enge, auf der oberen Seite der Büchsen angebrachte Tubulaturen communiciren diese nach aussen. Ueber dem Ganzen sitzt eine schützende Glocke, die unten durch eine enge Rille, oben durch ein kleines Loch Oeffnungen nach aussen hat. Diese Apparate werden auf passenden Trägern in ein weites Wassergefäss gesetzt, so dass die auch Salzlösung enthaltenden Tubulaturen senkrecht nach oben stehen. Langsam dringt das Wasser durch die Rille der Glocke ein, und die Luft entweicht durch das obere Loch. Diffusion findet durch die kurzen Tubuli statt, wo sehr bald, wie DE HEEN annimmt, der stationäre Zustand eingetreten sein wird, da die Menge der Lösung in der Büchse und des umgebenden Wassers als sehr gross gegen den Inhalt der Tubulaturen angesehen werden darf. Nach einiger Zeit werden die Apparate herausgenommen und der Salzgehalt in ihnen bestimmt. Nach der (doch jedenfalls nicht genau gültigen) Formel für den stationären Zustand werden die Diffusionscoëfficienten berechnet. Um bei höheren Temperaturen zu beobachten, wird das ganze in ein weiteres Gefäss gesetzt, in dem man durch erwärmtes Wasser die Temperatur constant erhält. DE HEEN findet, wenn der Nullpunkt der Temperatur t auf 60° C. gelegt und von da ab nach abwärts positiv gezählt wird, für:

$$MgSO_4: k_t = 85(1-0{\cdot}0119\,t)\left[10^{-7}\frac{cm^2}{sec}\right];\ KNO_3: k_t = 307(1-0{\cdot}0127\,t)\cdot 10^{-7}\left[\frac{cm_2}{sec}\right];$$

$$NaCl: k_t = 272(1-0{\cdot}0121\,t)\left[10^{-7}\frac{cm^2}{sec}\right];\ Na_2HPO_4: k_t 206(1-0{\cdot}0128\,t)\cdot 10^{-7}\left[\frac{cm^2}{sec}\right];$$

$$K_2CO_3: k_t = 163\,(1-0{\cdot}0127\,t)\left[10^{-7}\frac{cm^2}{sec}\right].$$

Hiernach soll die Veränderlichkeit der Diffusion mit der Temperatur unabhängig von der Natur des Salzes sein, und diese Ausdrücke sollen eine weitere Analogie zwischen Diffusion und elektrischer Leitungsfähigkeit sehr verdünnter Lösungen begründen, für welche nach BOUTY die Abhängigkeit von der Temperatur (auf denselben Nullpunkt der Temperatur reducirt) durch den Ausdruck $C_t = C_{t_0}(1 - 0{\cdot}0111\,t)$ gegeben ist.

Eine durch Temperaturverschiedenheiten hervorgerufene Diffusion hat LUDWIG (5) und eingehender SORET (25) beobachtet. Der Letzte erwärmte eine lange mit Salzlösung gefüllte Röhre in ihrem oberen Theile auf 78—80° und kühlte das untere Ende auf 15—20° ab. Wenn dieser Zustand 10—56 Tage gedauert hatte, zeigte sich, wie bei LUDWIG für Glaubersalz, der kühlere Theil der Lösung stets concentrirter als das erwärmte, und die allerdings stets kleine Concentrationsdifferenz war um so grösser, je concentrirter die Lösung zu dem Versuch gewählt wurde. Nur wenige Salze, (Salpeter, Chlorkalium, Chlornatrium, Chlorlithium) sind so untersucht, und manche geben quantitativ sehr verschiedene Resultate, wenn auch alle den angeführten qualitativen Effekt zeigen.

b) Diffusion durch Scheidewände (Osmose).

Die ältesten Versuche stammen von NOLLET (1748), PARROT (1803), N. W. FISCHER (1812) etc., doch wurden sie nur wenig beachtet, bis DUTROCHET (1826 etc.)

zahlreiche Arbeiten über unsern Gegenstand veröffentlichte und auch den Namen Endosmose und Exosmose einführte. Von dieser Zeit ab erschienen zahlreiche Untersuchungen, oft freilich mehr physiologischen als physikalischen Inhalts. Brücke (1842) suchte eine Theorie der Erscheinung zu geben, Vierordt (1845 und 48) stellte als Erster genaue Versuche an, Jolly (1848) entwickelte den Begriff des endosmotischen Aequivalentes, der in seiner Bedeutung von Ludwig (1849) bestritten wird. Fick (1855 und 57) sucht die Brücke'sche Theorie weiter auszubilden und findet sie als unzulänglich, Graham (1861) stellt die Unterscheidung von Colloiden und Krystalloiden auf, Traube (1867) lehrt Niederschlagsmembranen darstellen, die dann Pfeffer (1878) zu eingehenden experimentellen Bestimmungen benützt, denen sich die von de Vries (1884) und Tamann (1888) anreihen. —

Die schon von N. W. Fischer (3), Magnus (8), Dutrochet (6) beobachtete Grunderscheinung ist die folgende: Trennt eine Scheidewand (die wir oft Membran nennen werden) 2 mit einander mischbare Flüssigkeiten, von denen wenigstens die eine im Stande ist, in den Raum der Scheidewand einzudringen (zu imbibiren), so findet ein Durchströmen dieser Flüssigkeit durch die Membran und ein Mischen der beiden Flüssigkeiten statt. Bis zu Traube's Entdeckung der Niederschlagsmembranen wandte man, abgesehen von einigen Versuchen Graham's, stets solche Membranen an, welche von beiden Flüssigkeiten (meist eine Salzlösung und das Lösungsmittel) durchdrungen wurden und betrachtete diesen doppelseitigen Strom als eine bei der Osmose nothwendige Erscheinung. Da bei weitem die meisten Versuche mit Membranen angestellt wurden, für welche diese Ansicht richtig ist' so werden wir zunächst nur die Osmose betrachten, bei der zwei entgegengesetzt gerichtete Flüssigkeitsstöme durch die Scheidewand gehen, d. h. bei denen beide Flüssigkeiten diosmiren.

Die älteren Untersuchungen sind meist mit Apparaten angestellt, die dem von Dutrochet (6) benutzten Endosmometer ähnlich waren. Dies einfache Instrument besteht in einem Trichter, dessen Ausflussröhre verlängert und mit einer Theilung versehen ist, während seine weite Oeffnung durch die Membran verschlossen wird. In den mit der Oeffnung nach unten gekehrten Trichter wird die eine Flüssigkeit (kurz die Salzlösung) gegossen, und er dann in ein weiteres Gefäss mit der anderen Flüssigkeit (dem Wasser) gesetzt. Durch die Membran tritt die Osmose ein, deren Stärke man an dem Stand der Flüssigkeit im getheilten Rohr ablesen kann. Will man mit diesem Instrumeut einigermaassen genaue Resultate haben, so muss man den Druck auf die beiden Seiten der Membran angenähert gleich d. h. die Flüssigkeiten in gleichem Niveau erhalten, was durch Zu- oder Abfüllen bei der äusseren Flüssigkeit leicht zu erreichen ist. Die Osmose geht so lange vor sich, bis beide Flüssigkeiten gleiche Zusammensetzung haben und es kann, wenn z. B. die Osmose des Wassers sehr viel stärker ist als die der Salzlösung bei Vernachlässigung der angeführten Vorsichtsmaassregel zu grossen Druckdifferenzen in beiden Gefässen kommen, die dann einen Filtrationsstrom durch die Membran erzeugen, der das Resultat vollkommen falsch machen würde. Diese Fehlerquelle wurde zuerst sorgfältig vermieden von Vierordt (18), der die Osmose von Zuckerlösung gegen Wasser und von Kochsalzlösung gegen Wasser durch Stücke der Schweinsharnblase beobachtete. Sein Apparat war von dem oben beschriebenen sehr verschieden, indem die bei ihm vertical ausgespannte Membran 2 horizontale mit den Flüssigkeiten gefüllte Glasröhren trennte. Vierordt kam zu dem, schon von Dutrochet gewonnenen Resultat, dass die Stärke der Endosmose bei verschieden concentrirten Lösungen desselben Körpers proportional

sei den Differenzen zwischen den Concentrationen der Lösungen. Freilich zeigen die Versuche, aus denen dieser Satz geschlossen wurde, grosse Unterschiede unter einander.

Zu demselben, nur anders formulirten, Gesetz wurde JOLLY (19) geführt, indem er eine unten mit der Blase zugebundene und mit der Salzlösung gefüllte Röhre in oft erneuertes Wasser tauchen liess und die Aenderungen der Lösung in der Röhre durch Wägung bestimmte. Er bezeichnet diejenige Menge Wasser, durch die eine Gewichtseinheit Stoff ersetzt wurde, als das endosmotische Aequivalent des Stoffes und schliesst aus seinen Versuchen, dass für dieselbe Temperatur und Membran das endosmotische Aequivalent für einen Stoff eine constante Grösse sei. Unter dieser Annahme berechnet JOLLY nach seinen Beobachtungen die Zeit, die eine gewisse Menge des Stoffes braucht, um zum Wasser überzugehen, und findet die Menge der in der Zeiteinheit übertretenden Stoffe, unter sonst gleichen Verhältnissen, der Dichtigkeit der Lösung proportional. Alle Versuche sind mit Schweinsblase angestellt und geben eigentlich nur für dieselbe Blase vergleichbare Resultate. Deshalb hat die folgende Uebersicht, bei denen verschiedene Blasen, verschiedene Concentrationen und Temperaturen benutzt wurden, nur einen orientirenden Werth.

Endosmotisches Aequivalent.

Kochsalz	Glaubersalz	Schwefelsaures Kali	Schwefelsaure Magnesia	Schwefelsaures Kupferoxyd	Schwefelsäurehydrat	Kalihydrat
3·8—4·6	11·0—12·4	11·4—12·8	11·5—11·8	9·6	0·3—0·4	200—231

Alkohol	Zucker	Saures schwefelsaures Kali
4·1—4·3	7·0—7·2	2·3

Schon die Versuche von JOLLY ergaben aber, dass das endosmotische Aequivalent nicht unabhängig von der Concentration der diosmirenden Lösungen ist, was LUDWIG (21), CLOETTA (23) u. A. hervorgehoben haben, doch ist diese Abhängigkeit für die verschiedenen Stoffe und Membranen eine verschiedene und Allgemeines lässt sich nicht über sie sagen. ECKHARD und seine Schüler (33, 43, 44) haben deshalb die Aequivalente zu bestimmen gesucht für während des Versuchs concentrirt bleibende Lösungen und den Herzbeutel der Kuh, der sich durch Dauerhaftigkeit und Unveränderlichkeit während der Versuche auszeichnen soll. Nach C. E. E. HOFFMANN (45) sind diese endosmotischen Aequivalente:

Substanz	Aequivalent	Substanz	Aequivalent
Salpetersaurer Baryt. . .	0·391	Kohlens. Natron + 10 *aq*	3·292
Salpetersaurer Harnstoff .	0·842	Schwefels. Magnesia + 10 *aq*	4·913
Jodkalium	1·093	Schwefelsaures Natron . .	5·480
Salpetersaures Kali . . .	1·225	Phosphors. Natron + 24 *aq*	5·869
Schwefels. Natron + 10 *aq*	1·863	Kohlensaures Natron . .	10·554
Chlorammonium	1·967	Schwefelsaures Magnesia .	12·467
Harnstoff	2·047	Phosphorsaures Natron . .	16·292
Kochsalz	3·293	Zucker	Schwankend f. verschiedene Membranen zwischen 7 und 20.

Alle diese Versuche sind nach JOLLY's Methode angestellt und beziehen sich auf die Osmose concentrirter Lösungen gegen reines Wasser. Liess man Salzlösungen gegen einander osmiren und hielt jede von ihnen stets auf derselben

Concentration, so änderte sich das Aequivalent nur wenig mit der Concentration der einen Lösung, wenn die andere gesättigt war, und der Salzstrom war nahezu der Concentrationsdifferenz proportional.

Sehr von diesen Resultaten abweichende Ergebnisse hat HARZER (35) erhalten, der freilich mit Lösungen arbeitete, die allmählich immer verdünnter wurden. Seine stets viel länger als bei HOFFMANN dauernden Versuche wurden so lange fortgesetzt, bis alles Salz aus dem durch die Membran verschlossenen Gefäss ausgetreten war, so dass die Osmose also anfangs zwischen concentrirter Lösung und später zwischen immer verdünnter werdender Lösung und reinem (oft erneuertem) Wasser stattfand. Er erhielt so folgende Werthe für die endosmoischen Aequivalente der wasserfreien Salze:

Substanz	Aequivalent	Substanz	Aequivalent
Kohlensaures Natron	= 32·788	Chlorbarium	= 3·382
Phosphorsaures Natron	= 27·915	Weinsäure	= 2·915
Kalihydrat	= 26·603	Saures schwefelsaures Kali	= 2·815
Kohlensaures Kali	= 19·531	Salpetersaures Natron	= 2·644
Schwefelsaure Magnesia	= 16·727	Salpetersaures Ammoniak	= 2·496
Schwefels. Ammoniak	= 11·203	Saures chromsaures Kali	= 2·268
Schwefelsaures Natron	= 8·866	Harnstoff	= 1·551
Mannit	= 7·122	Salpetersaures Kali	= 1·354
Neutrales chroms. Kali	= 6·208	Schwefelsäurehydrat	= 1·194
Chlorcalcium	= 5·889	Jodkalium	= 1·128
Chlorammonium	= 3·882	Gallussäure	= 1·101
Chlornatrium	= 3·710		

Nimmt man an, dass die von HOFFMANN und HARZER benutzten Herzbeutel der Kuh und des Rindes nicht sehr verschieden waren und bedenkt, dass auch die Versuchstemperaturen bei beiden ungefähr dieselben (14—20° C) waren, so ergiebt sich aus dem Vergleich der zwei Tabellen, dass mit abnehmender Concentration das endosmotische Aequivalent stark zunimmt für: Schwefelsaures Natron, Chlorammonium, phosphorsaures Natron, kohlensaures Natron und schwefelsaure Magnesia, während es ziemlich ungeändert bleibt für: Harnstoff, Jodkalium, salpetersaures Kali und Chlornatrium.

Aus eingehenden Versuchen mit Glaubersalz schloss W. SCHMIDT (37), dass das endosmotische Aequivalent langsam für abnehmende Werthe der Concentrationsdifferenz der 2 osmirenden Lösungen steige und für geringe Differenzen einen grossen Werth annähme. Aus alledem geht hervor, dass man auch für dieselbe Membran nur innerhalb sehr mässiger Concentrationsunterschiede das endosmotische Aequivalent als nahezu constant ansehen darf.

Ueber die Steighöhen in einem dem DUTROCHET'schen ähnlichen Endosmometer hat GRAHAM (28) zahlreiche Versuche angestellt und, wie zum Theil DUTROCHET vor ihm gefunden, dass für thierische Membran die Säuren negative Osmose zeigen, d. h. dass sie stärker durch die Blase strömen als das Wasser und dass die Alkalien dagegen die grösste positive Osmose haben. Das ist neuerdings von HINTEREGGER (71) bestätigt worden.

Der Einfluss der Natur der Membran ist bei den endosmotischen Versuchen der allerbedeutendste und man hat nach ihr verschiedene Arten der Membrandiffusion unterscheiden wollen. BRÜCKE (12) suchte zuerst die Wirkung der Membran bei der Endosmose in einer Weise zu erklären, die auch heute

noch für einige Erscheinungen richtig ist. Er nahm an, dass eine thierische Membran mit vielen feinen Poren durchzogen sei, deren Wandung ungleich anziehend auf die getrennten Flüssigkeiten, z. B. eine Salzlösung und ihr Lösungsmittel (Wasser) wirken. Das stärker angezogene Wasser sollte in dem Porus eine Wandschicht bilden, an die sich nach der Porenaxe zu eine immer concentrirter werdenden Salzlösung anschlösse, die natürlich in der Axe höchstens die Concentration der äusseren Lösung haben könne. Durch die Porenaxe und die anliegenden Schichten sollte dann gewöhnliche Diffusion, die gleichviel Salzlösung und Wasser nach entgegengesetzten Seiten schafft, stattfinden, während das Wasser der Wandschicht von der an der einen Seite der Membran befindlichen Salzlösung beständig angezogen würde und so im Ganzen durch die Membran hindurch ein grösserer Wasser- als Salzstrom gehe, was ja die Beobachtung bestätigt. Dass für gewisse thierische Membranen ein solcher Vorgang wenigens zum Theil die Endosmose bewirkt, hat LUDWIG (21) dann wahrscheinlich zu machen gesucht, indem er zeigte, dass eine solche Membran, in gesättigte Salzlösung gelegt dieser Lösung Wasser entzieht, so dass Salz auskrystallisirt, und indem er die Concentration der in eine Membran imbibirten Salzlösung bestimmte. Sie fand sich stets kleiner als die Concentration der Imbibitionsflüssigkeit. FICK (36) wurde bei dem Versuch, die BRÜCKE'sche Theorie auszubilden, zu der Unterscheidung von Porendiffusion und, wie er sagt, wirklicher Endosmose, d. h. Diffusion durch die Zwischenräume zwischen den Molekeln der Membran geführt. Jene für welche BRÜCKE's Ansicht vielleicht richtig sei, soll bei weitporigen Membranen z. B. Thonzellen stattfinden, diese dagegen durch homogene Membranen ohne solche grössere Oeffnungen z. B. Collodiumhäutchen eintreten. In thierischen Membranen sind nach FICK beide Arten von Diffusion vertreten, deshalb hat man keine allgemeinen Sätze für sie gefunden und so widersprechende Resultate erhalten. Dass aber auch die Collodiumhäutchen nicht unveränderlich sind, zeigen FICK's Versuche selbst, denn er fand zwar den Wasserstrom durch das Häutchen nicht veränderlich, dagegen nahm der Salzstrom stetig, aber immer langsamer, mit der Zeit zu, während deren die Membran mit der Kochsalzlösung in Berührung war. Das endosmotische Aequivalent würde also hier mit der Zeit abnehmen. Für Thonzellen zeigte sich ein solcher Einfluss der Berührungsdauer nicht. SCHUHMACHER (41, 49), der auch mit Collodiumhäutchen arbeitete, dessen einzelne Versuche freilich stets nur kurz dauerten (1 Stunde oder dergl.), fand dagegen keine Veränderung seiner Membranen.

Wichtig ist GRAHAM's[1]) Unterscheidung von Colloid und Krystalloidsubstanzen geworden, von denen jene (s. oben) nur sehr langsam frei diffundiren, während diese es beträchtlich schneller thun. Ferner setzt eine Membran aus Colloidsubstanz (Pergamentpapier, thierischem Membran etc., der Diffusion von Krystalloidlösungen so wenig Widerstand entgegen, dass diese fast mit derselben Schnelligkeit durch sie hindurch diffundiren, als fände freie Diffusion statt, während die Colloide selbst gar nicht oder doch nur in sehr geringen Mengen und in sehr langer Zeit hindurchgehen. Dadurch bot die Diffusion vermittelst der sogen. Dialyse (die wir hier nicht weiter behandeln) GRAHAM ein bequemes Mittel, Colloide und Krystalloide von einander zu trennen. Z. B. diffundirten in 24 Stunden bei 10—15° folgende relativen Gewichtsmengen durch den Dialysator mit Pergamentpapier, der von DUTROCHET's Endosmometer sich nur wenig unterscheidet:

1) s. (11) bei a) Freie Diffusion.

Substanz	Gewichtsmenge	Substanz	Gewichtsmenge
Chlornatrium . . .	1	Mannit	0·349
Stärkemehlzucker . .	0·284	Milchzucker . . .	0·185
Alkohol	0·476	Rohrzucker	0·214
Glycerin	0·440	Arabisch. Gummi .	0·004

D. h. Arabisches Gummi, das einzige Colloid der Tabelle, diffundirt bei weitem am langsamsten. Diese Unterscheidung führte GRAHAM zu einer Ansicht über die Osmose, die mit früher von LIEBIG (20) ausgesprochenen Gedanken (wie dieser selbst hervorhebt, (51) fast völlig übereinstimmt. Es soll danach der Wasserstrom durch die Colloid-Membran, wenn diese auf der äusseren Seite mit reinem Wasser, auf der innern mit einer Salzlösung in Berührung ist, dadurch bewirkt werden, dass die Membran mehr Wasser aus diesem selbst als aus der Lösung aufzunehmen im Stande ist. Wenn die Membran dann durch ihre ganze Dicke bis zur Innenseite sich mit Wasser gesättigt hat, lo erleidet ihr Aufnahmsvermögen eine Aenderung, es wird vermindert und es muss von der Innenseite Wasser abgegeben werden. Die innere Oberfläche der Membran schrumpft bei Berührung mit der Salzlösung zusammen, während die äussere in Berührung mit einem Wasser sich ausdehnt. Die Diffusion des Salzes durch das Wasser der Membran soll mit dieser Wasserströmung nichts anderes zu thun haben, als dass sie darauf, wie viel Wasser in der Scheidewand ist, einwirkt. Wenn auch dieser gewissermaassen chemische Process der Wasseraufnahme und Abgabe durch die Membran von GRAHAM und LIEBIG nicht sehr klar dargestellt wird, ist doch jedenfalls der schon bei FICK auftretende Gedanke richtig, dass bei der Osmose durch thierische Membranen, neben der BRÜCKE'schen Porendiffusion, noch ein Vorgang auftritt, der mehr von der chemischen Natur und Kraft der Moleküle abhängt, welche die Membran und die diosmirenden Flüssigkeiten bilden. —

Alle bisher besprochenen Membranen ausser den weitporigen Thonzellen sind jedoch ihrer Veränderlichkeit etc. wegen, wie schon angedeutet, kein günstiges Material, um die Erscheinungen der Osmose unter den einfachsten Bedingungen zu verfolgen. Es war daher ein grosser Fortschritt, als M. TRAUBE (61) die von ihm sogen. Niederschlagsmembranen herstellen lehrte. Taucht man ein mit einer Lösung eines Colloids z. B. Leim gefülltes Glasröhrchen in eine Lösung eines andern, chemisch auf das Erste wirkenden, Colloids, z. B. Gerbsäure, so überzieht sich unter bestimmten Umständen die Oeffnung des Röhrchens mit einer Membran von gerbsaurem Leim. In ähnlicher Weise kann man auch Membranen aus Krystalloidsubstanzen erhalten, z. B. eine Ferrocyankupfermembran durch Berührung von Lösungen aus Blutlaugensalz und aus essigsaurem Kupferoxyd. Solche Membranen sind freilich sehr zart und leicht zerreisslich, doch wird dieser Schwierigkeit bei osmotischen Versuchen dadurch abgeholfen, dass man den zu untersuchenden Stoffen auf jeder Seite der Membran kleine Mengen eines der Membranbildner beigiebt. Die Membranbildner bessern jeden Defekt in der Membran sofort wieder aus, indem sie chemisch auf einander wirkend neue Membranstücke erzeugen. TRAUBE hat qualitativ die Osmose durch viele solcher Niederschlagsmembranen untersucht und gefunden, dass dieselben für ihre Membranbildner und viele andere Stoffe undurchdringlich sind. Dies ist übrigens, wie DE VRIES (69), und QUINCKE (69) zeigten nicht streng richtig, vielmehr kann man nur sagen, dass diese Membranen ihre Bildner bloss langsam und in sehr geringem Maasse hindurchlassen.

Durch die angeführte Eigenschaft der Niederschlagsmembrane

ist man (wie das übrigens schon mit Benutzung von Colloiden und Colloidmembranen nach GRAHAM's Beobachtungen möglich gewesen wäre und wie es HOFMEISTER (38) und ECKHARD (54) für Gummi bereits hervorgehoben hatten im Stande, den einfachsten Fall der Osmose, den fast nur einseitigen Flüssigkeitsstrom, hervorzurufen und zu beobachten. Dies hat PFEFFER (68) mit einer aus Ferrocyankalium und Kupfersulfat hergestellten Ferrocyankupfer-Membran gethan. Er lagerte die Membran dem Innern einer Thonzelle auf, die mit ihren weiten Poren keinen merklichen Einfluss auf die Osmose durch die Membran ausübte und zugleich gestattete, die empfindliche Membran in grosser Ausdehnung zu benutzen. In die in einem grossen Wassergefäss stehende Thonzelle wurde die Lösung des Stoffes gethan, für den man die einseitige Osmose des Wassers, oder wie PFEFFER sagt, den Wassereinstrom bestimmen wollte. Die vertikal gestellte Thonzelle trug ein langes nach oben gehendes, calibrirtes Maassrohr, in dem nach bestimmten Zeiten die Steighöhen der Flüssigkeiten abgelesen wurden, die durch den Wassereinstrom hevorgerufen waren und als Maass für dessen Grösse dienten. Natürlich liessen sich dabei nur solche Stoffe benutzen, die nach Vorversuchen gar nicht oder nur sehr gering selbst durch die Membran osmirten. Ausser dem Wassereinstrom wurde noch die Filtration unter Druck beobachtet, d. h. die unter einem bestimmten Druck durch die Membran filtrirende Flüssigkeitsmenge. Wegen der Details der Versuche muss auf die Abhandlung selbst verwiesen werden.

Den Zusammenhang zwischen Wassereinstrom e und Concentration c (in Gewichtsprocenten) für Temperaturen zwischen 14° und 18° zeigt die folgende Tabelle:

Rohrzucker		Arab. Gummi		Salpeter		Schwefels. Kali		
c	e/c	c	e/c	c	e/c	c	e/c	Für 1 proc. Lösungen ist,
1	1	1	1	1	1	1	1	für Zucker $e = 1$ gesetzt,
2	0·98	6	0·60	2	0·89	4	0·83	Gummi $e = 0·14$
6	0·96	18	0·91	4	0·85			schwefels. Kali $e = 4·39$
10	1·16			8	0·81			Salpeter $e = 4·61$
16	1·25			18	0·66			
20	1·27							
32	1·54							

Hiernach findet keine Proportionalität des Wassereinstromes und der Concentration statt. Von den benutzten Stoffen diosmirte nur Salpeter durch die Membran in merklicher Weise. Der Wasserstrom e ist immer auf 1 Stunde Versuchsdauer bezogen. — Der Wassereinstrom, den Lösungsgemische bewirken, ist nur sehr wenig von der Summe der Wasserströme verschieden, den die Bestandtheile der Gemische hervorrufen, wie folgende Versuche zeigen:

Concentration in Gew. Proc.	1. Vers. e in mm pro St.	2. Vers. e in mm pro St.	Versuche m. Membran v. Pergamentpapier: Concentration in Gew.-Proc.	1. Vers. e in mm pro St.	2. Vers. e in mm pro St.
1 % Salpeter	6·08	5·4	1·5 % Chlorcalcium	9·9	10·3
15 % Gummi	2·06	1·8	2 % Arab. Gummi	1·2	1·3
1 % Salpeter + 15 % Gummi	7·9	7·0	1·5 % Chlorcalcium + 2 % Ar. Gummi	11·4	11·3

Hierdurch sind BARANETZKY's (65) Behauptungen, dass geringe Beimengungen von Colloiden zu Krystalloiden und umgekehrt eine erhebliche Steigerung der Osmose bewirken sollen, widerlegt.

Die osmotische Druckhöhe, d. h. die Druckhöhe (in Quecksilber) welche ebensoviel Wasser aus der Zelle durch Filtration auspresst als durch Osmose einströmt, ist für 6§ Lösungen der betreffenden Stoffe die folgende:

Substanz	Membran aus		
	Pergament	Thierblase	Ferrocyankupfer
Arab. Gummi . . .	17·9 *cm*	13·2 *cm*	25·9 *cm*
Flüssiger Leim . . .	21·3 „	15·4 „	23·7 „
Rohrzucker	29·0 „	14·5 „	287·7 „
Salpeter	20·4 „	8·9 „	(700) nicht direkt bestimmt

Diese Tabelle zeigt, wie sehr der Einfluss der doppelseitigen Osmose für die Krystalloide Zucker und Salpeter durch Pergament und Thierblase die osmotische Druckhöhe verkleinert gegenüber der fast einseitigen Osmose dieser Substanzen durch die Ferrocyankupfermembran.

Für 1§ Lösungen giebt die folgende Tabelle noch eine Vergleichung der osmotischen Druckhöhe für eine andere Ferrocyankupfermembran:

Substanz	Druckhöhe	Zucker = 1
Rohrzucker	47·1 *cm*	1
Arab. Gummi	6·5 „	0·138
Dextrin	16·6 „	0·352
Salpeter	175·8 „	3·733
Schwefelsaures Kali . . .	192·3 „	4·083

Die Abhängigkeit der Druckhöhe von der Concentration stellt dar die Tabelle:

Concent. in Gew.-Proc. c	Druckhöhe o	o/c	e/c	Concent. in Gew.-Proc. c	Druckhöhe o	o/c	e/c
1	1 = 53·3 *cm*	1	1	1	1·69 *cm*	1	1
2	1·90 „	0·95	0·97	6	3·75 „	0·62	0·60
2·74	2·65 „	0·97		18	17·28 „	0·96	0·91
4	3·89 „	0·97					
6	5·71 „	0·95	0·94				

Hiernach wachsen osmotische Druckhöhe und Wassereinstrom nahezu in demselben Verhältniss.

Innerhalb der kleinen Temperaturunterschiede bei den Beobachtungen stieg die Druckhöhe für Zucker und Gummi nur wenig, dagegen wurde der Wassereinstrom durch Wachsen der Temperatur sehr beschleunigt, stieg aber für Zucker langsamer als diese, z. B.

Temperatur t	e pro Stunde	e/t
7·1°	5·9 *mm*	0·831
17·6°	9·4 „	0·534
32·5°	13·3 „	0·409

Eine fast vollständig einseitige Osmose hat auch DE VRIES (75 und 79) mit Hilfe der Zellen bestimmter Blattheile von *Tradescantia discolor*, *Curcuma rubricaulis* und *Begonia manicata* beobachtet, die an Stelle der von PFEFFER benutzten in eine Thonzelle eingelagerten Niederschlagsmembran traten. Die Cellulosemembran der Zelle ersetzt dabei den Thoncylinder, und die Plasmamembranen repräsentiren die Ferrocyankupfermembran PFEFFER's. Der Plasmakörper, oder die beiden ihn begrenzenden Plasmamembranen, sind für viele Stoffe vollständig oder fast vollständig undurchlässig und diese Eigenschaft benutzte DE VRIES um, wie er sich ausdrückt, die Anziehung der Stoffe zum Wasser zu bestimmen. Der Plasmakörper liegt der Zellmembran so lange fest an, als in ihm der beträchtliche Wasserdruck (4—6 Atm) besteht, der dadurch hervorgerufen wird, dass der Zellinhalt der die Zelle umgebenden Flüssigkeit durch einseitige Osmose Wasser entzieht. Bringt man nun, so schloss DE VRIES, die Zelle in eine Flüssigkeit (Salzlösung oder dergl.), welche die Zelle nicht angreift und die eine um etwas grössere Anziehung auf das Wasser ausübt als der Inhalt der Zelle, so kann keine Osmose stattfinden, die Spannung in der Zelle wird nachlassen, der Plasmakörper der Zellhaut nur noch lose anliegen oder sich von ihr loszulösen beginnen, es wird Plasmolyse eintreten. DE VRIES bestimmte nun die Concentrationen verschiedener Flüssigkeiten, welche gerade genügten, um ein solches Ablösen des Plasmakörpers von der Zellmembran mikroskopisch zu beobachten. Diese Concentrationen nannte DE VRIES isotonische Concentrationen und schreibt den so gebildeten stets sehr verdünnten Lösungen gleiche Anziehungskraft zum Wasser zu. Ihre Wirkungen wurden für jede benutzte Zelle mit der Wirkung einer Lösung von Kalisalpeter verglichen, so dass bei verschiedenen als Prüfungskörper benutzten Zellen die isotonischen Concentrationen verschiedener Flüssigkeiten durch die ihnen isotonischen Salpeterlösungen (ihre sogen. Salpeterwerthe) ausgedrückt werden. Die Concentration wird dabei durch die in Grammen ausgedrückte Anzahl der Salzmoleküle im Liter angegeben, und die Anziehung eines Moleküls Kalisalpeter zum Wasser in verdünnter Lösung, um ganze Zahlen der Coëfficienten zu erhalten, = 3 gesetzt. Als isotonische Coëfficienten bezeichnet DE VRIES dann die Zahlen, welche die Salpeterwerthe gleich concentrirter Lösungen ausdrücken, sie geben demnach die relative Grösse der Anziehung zum Wasser für je ein Molekül (H = 1 *gr*) an. Die Werthe dieser Coëfficienten sind:

Stoffe	Formel	Isotonische Coëfficienten nach der plasmolytischen Methode	der Methode der Gewebespannung	der Methode der Blutkörperchen	Abgerundete Werthe
I. Gruppe.					
Glycerin	$C_3H_8O_3$	1·78	—	—	2
Invertzucker	$C_6H_{12}O_6$	1·88	1·84	—	
Rohrzucker	$C_{12}H_{22}O_{11}$	1·81	1·84	1·72	
II. Gruppe.					
Aepfelsäure	$C_4H_6O_5$	1·98	—	—	2
Weinsäure	$C_4H_6O_6$	2·02	—	—	
Citronensäure	$C_6H_8O_7$	2·02	—	—	
III. Gruppe.					
Aepfelsaures Magnesium	$MgC_4H_5O_5$	1·88	1·63	—	2
Schwefelsaures Magnesium	$MgSO_4$	1·96	1·78	2·44	

Stoffe	Formel	Isotonische Coëfficienten nach der plasmolytischen Methode	der Methode der Gewebespannung	der Methode der Blutkörperchen	Abgerundete Werthe
IV. Gruppe.					
Salpeters. Kalium . . .	KNO_3	3·0	—	3·0	3
„ Natrium . . .	$NaNO_3$	3·0	—	—	
Chlorkalium	KCl	3·0	2·84	—	
Chlornatrium	$NaCl$	3·0	3·05	3·0	
Chlorammonium . . .	NH_4Cl	3·0	—	—	
Jodkalium	KJ	—	—	3·04	
Jodnatrium	NaJ	—	—	2·90	
Bromkalium	KBr	—	—	3·05	
Bromnatrium	$NaBr$	—	—	3·03	
Essigs. Kalium	$KC_2H_3O_2$	3·0	—	2·85	
Doppeltcitronens. Kalium .	$KH_2C_6H_5O_7$	3·05	—	—	
V. Gruppe.					
Oxals. Kalium	$K_2C_2O_4$	—	3·93	4·07	4
Schwefels. Kalium . . .	K_2SO_4	—	3·92	4·7	
Phosphors. Kalium . . .	K_2HPO_4	—	3·96	—	
Weins. Kalium	$K_2C_4H_4O_6$	—	3·99	—	
Aepfels. Kalium . . .	$K_2C_4H_4O_5$	—	4·11	—	
Einfach citronens. Kalium	$K_2HC_6H_5O_7$	4·08	—	—	
VI. Gruppe.					
Chlorcalcium	$CaCl_2$	4·33	—	4·05	4
Chlormagnesium . . .	$MgCl_2$	4·33	—	3·84	
Chlorbaryum	$BaCl_2$	—	—	4·03	
Citronens. Magnesium . .	$Mg_3(C_6H_5O_7)_2$	3·88	3·58	—	
VII. Gruppe.					
Citronens. Kalium . . .	$K_3C_6H_5O_7$	5·01	—	—	5

Die in der 4. Columne stehenden Zahlen sind auf eine andere nicht so sichere und einfache Art von de Vries gewonnen, während die 5. Columne Zahlen enthält, die von Donders und Hamburger bei ihren Untersuchungen über das Verhalten von Blutkörperchen ermittelt worden sind. Die Blutkörperchen setzen sich nämlich in Lösungen von stärkerer osmotischer Kraft auf dem Boden des Gefässes ab, in schwächeren osmotischen Concentrationen tritt der rothe Farbstoff aus ihnen heraus und nur in isotonischen Lösungen erhalten sie sich unverändert und sinken nur äusserst langsam. Auf diese Eigenschaft gründet sich die von Hamburger benutzte Methode, welche die angeführten Werthe der Coëfficienten geliefert hat. — Die abgerundeten Zahlen der letzten Verticalreihe benützt de Vries um die Stoffe in Gruppen zu ordnen, die nahezu den gleichen isotonischen Coëfficienten haben und um sie zu vergleichen mit den aus den Bestandtheilen einer Verbindung berechneten Werthen der Coëfficienten. Es sollen nämlich die einzelnen Stoffe in den Verbindungen stets denselben Coëfficienten beibehalten und zwar sind die Grössen dieser partiellen Coëfficienten aus dem sich durch Addition der Coëfficient der Verbindung ergiebt:

für jede Atomgruppe einer Säure . . . 2,
„ jedes Atom eines Alkalimetalls . . . 1,
„ „ „ „ Erdalkalimetalls . . 0.

Hieraus ergiebt sich z. B. der isotonische Coëfficient für $K_2SO_4 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

Vergleicht man die Werthe der isotonischen Coëfficienten mit der moleku-

laren Erniedrigung des Gefrierpunktes und der Dampfspannung, so zeigt sich oft eine gute Uebereinstimmung in den Werthen dieser 3 Grössen wie DE VRIES hervorhebt, besonders wenn man beachtet, dass sie bei verschiedenen Temperaturen und Concentrationen gewonnen sind. Folgende von TAMMANN (77) zusammengestellte Tabelle zeigt das:

Stoffe	Isotonische Coëfficienten × 100	Molekulare Erniedrigung des Gefrierpunkts × 10	Molekulare Erniedrigung der Dampfspannung × 1000
$C_3H_8O_3$ . . .	178	171	—
$C_6H_{12}O_6$ . .	188	193	—
$C_{12}H_{22}O_{11}$ . .	188	185	—
$C_4H_6O_5$ . . .	198	187	178
$C_4H_6O_6$ . . .	202	195	188
$C_6H_8O_7$ . . .	202	193	197
$MgSO_4$ . . .	196	192	156
KNO_3 . . .	300	308	267
$NaNO_3$ . . .	300	337	296
KCl	300	336	313
$NaCl$	305	351	330
NH_4Cl . . .	300	348	313
$KC_2H_3O_2$ . .	300	345	331
$K_2C_2O_4$ . . .	393	450	372
K_2SO_4 . . .	392	390	351
$K_2C_4H_4O_6$ . .	399	363	388
$MgCl_2$ . . .	433	488	513
$CaCl_2$	433	466	517
$K_3C_6H_5O_7$ . .	501	—	499

Da die isotonischen Lösungen gleichen osmotischen Druck ausüben, so folgt nach DE VRIES aus diesen Beobachtungen der Satz: Lösungen gleicher osmotischer Kraft besitzen denselben Gefrierpunkt und dieselbe Dampfspannung.

Diese Beziehung zwischen osmotischer Kraft und Erniedrigung der Dampfspannung ist weiter von TAMMANN (78) verfolgt worden, der ausgedehnte Versuche über die Tensionen von Lösungen anstellte und später die Osmose durch Niederschlagsmembranen auf nachstehende Weise untersuchte. In einem Glastrog mit planparallelen Wänden befand sich die Lösung des einen Membranbildners zwischen Linse- und Beleuchtungsspalt eines TÖPLER'schen Schlierenapparates und in sie tropfte die Lösung des andern Membranogens. Es bildet sich dann eine Zelle gefüllt mit der eintropfenden Lösung, und herrscht in ihr geringerer resp. grösserer osmotischer Druck als in der äusseren Flüssigkeit, so strömt Lösungsmittel in sie hinein resp. aus ihr heraus. Die so entstehende Concentrationsänderung der äussern Flüssigkeit an der Tropfengrenze kann mit dem Schlierenapparat beobachtet werden. Aendert man die Concentration der eintropfenden Lösung so lange ab, bis die Strömung des Lösungsmittels sich gerade umkehrt, so hat man in diesem Moment im Tropfen eine mit der äussern Flüssigkeit isotonische (wie TAMMANN sagt isosmotische) Lösung. Als die bei weitem geeignetste Membran zu diesen Versuchen fand TAMMANN, wie PFEFFER, die aus Kupfersulfat und Ferrocyankaliumlösung entstehende Haut von Ferrocyankupfer; bei ihr war es auch allein gleichgültig, welche von beiden Salzlösungen die äussere Flüssigkeit bildete. Auf die angegebene Weise wurden direkt ermittelt die gegenüber verschieden concentrirten Ferrocyankaliumlösungen

isotonischen Lösungen von: Kupfersulfat, Kupferacetat, Kupferchlorid, Kupfernitrat, Zinksulfat, Zinkchlorid, Zinknitrat. Construirt man Curven mit den Molekularconcentrationen (die Anzahl der in 1000 *gr* Wasser gelösten Grammmoleküle) der Ferrocyankaliumlösung als Abscissen und den entsprechenden isotonischen Concentrationen der genannten Stoffe als Ordinaten, so fallen sie zusammen mit den Curven, welche die Molekularconcentrationen der Lösungen gleicher Dampfspannung für die genannten Stoffe und Ferrocyankaliumlösungen darstellen. Es ist somit für diese Lösungen nicht flüchtiger Stoffe die obige Beziehung bewiesen. Die isotonische Concentration eines Stoffes X, der nicht so direct mit Ferrocyankaliumlösung B verglichen werden konnte, der aber gegen das eine Membranogen A nicht reagirt, wurde bestimmt, indem man X zu A mischte und in diese Mischung B tropfen liess. Es bildet sich hier wieder eine Haut, man kann die isotonische Concentration n der Mischung jetzt bestimmen. Nimmt man an, dass diese Concentrationen durch die Gleichung $n_A + n_X = n_B$ zusammenhängen, so ergiebt sich n_X. Auch hier fallen für nicht flüchtige Stoffe wie Rohrzucker, schwefelsaure Magnesia etc. die Dampfspannungscurven wieder mit den so bestimmten isotonischen Curven zusammen, was dafür spricht, dass jene Gleichung auch gültig ist, wenn man unter n_A etc. die Spannkraftserniedrigung einer Lösung von der Concentration A etc. versteht.

Auch den Zusammenhang zwischen isotonischen Concentrationen und den molekularen Gefrierpunkts-Erniedrigungen zeigt TAMMANN in folgender, aus RAOULT's und seinen eigenen Versuchen zusammengestellter Tabelle:

Stoffe	Quotienten der molekularen Gefrierpunktserniedrigungen	Quotienten der isotonischen Concentrationen	
		$n = 1$	$n = 3$
$(NH_4)_2SO_4$ . . .	0·8	0·75	0·80
$Cu(NO_3)_2$	1·0	0·82	0·93
$Cu(C_2H_3O_2)_2$ . . .	0·7	0·69	0·66
$CuCl_2$	1·0	0·90	1·00
$MgSO_4$	0·4	0·33	0·37
$ZnSO_4$	0·4	0·40	0·34
$CuSO_4$	0·4	0·41	0·36
Aethylalkohol . . .	0·4	0·45	0·45
Rohrzucker	0·4	0·40	0·40
Salicin	0·4	0·42	—
Chloralhydrat . . .	0·4	0·46	0·45
Aether	0·4	0·45	—
Harnstoff	0·4	0·50	—

Die zweite Columne enthält hier die molekulare Gefrierpunktserniedrigung des angeführten Stoffs, dividirt durch die Gefrierpunktserniedrigung des Ferrocyankaliums. In der dritten Spalte stehen die isotonischen Concentrationen der Stoffe für 1 resp. 3 Grammmoleküle in 1000 *gr* Wasser bezogen auf Ferrocyankalium.

Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Osmose sind fast nur gelegentliche Beobachtungen angestellt worden, die alle zeigen, dass die Osmose mit steigender Temperatur stärker wird. Die Geschwindigkeit der Osmose durch thierische Membran wächst nach W. SCHMIDT (37) nach der Formel $v = \alpha + \beta t + \gamma t^2$, wo die Coëfficienten α, β, γ denselben Werth haben sollen wie in dem Ausdruck für die Ausflussgeschwindigkeit aus Capillarröhren nach POISEUILLE. Einen Ausdruck derselben Form findet auch ECKHARD (56) zwischen 10° und 33° C. für v.

Die relativen Diffusionsmengen durch Pergamentpapier für 3 Stunden ergaben sich GRAHAM (28) bei einer 2 % Kochsalzlösung bei 10° = 1; 20° = 1·07; 30° = 1·20; 40° = 1·37; die Zunahme mit der Temperatur war also viel kleiner als bei freier Diffusion. Auch das endosmotische Aequivalent soll nach JOLLY (19) für Glaubersalz und nach SCHUHMACHER (41) für Oxalsäure mit der Temperatur wachsen, während ECKHARD findet, dass es von der Temperatur unabhängig ist, so lange durch letztere die Membran nicht geändert wird.

c) Der osmotische Druck.

Die Entdeckung TRAUBE's und die Versuche PFEFFER's, nach denen es Membranen giebt, die halbdurchlässig sind, d. h. die z. B. von einer Salzlösung nur das Lösungsmittel (Wasser) durchgehen lassen, haben den Anstoss gegeben, den Begriff des osmotischen Drucks in etwas anderer Weise wie früher zu fassen und mit seiner Hilfe eine Theorie der Lösungen und der Diffusion aufzustellen, die mehr die molekularen Vorgänge bei diesen Erscheinungen berücksichtigt als dies vordem geschah.

VAN'T HOFF, von dem diese Untersuchungen ihren Ausgang nahmen, definirt den osmotischen Druck in folgender Weise: Denken wir uns ein mit Salzlösung gefülltes Gefäss, dessen Wand vollkommen fest und nur für das Lösungsmittel (Wasser) durchlässig ist, in Wasser getaucht, so übt das Salz auf das äussere Wasser eine anziehende Kraft aus, dies tritt in minimaler Menge so lange in das Gefäss, bis durch den in diesem entstehenden Ueberdruck der wasseranziehenden Kraft des Salzes das Gleichgewicht gehalten wird. Die Druckdifferenz Innen und Aussen an der Gewässwand ist der osmotische Druck. Der entstandene Gleichgewichtszustand lässt sich natürlich auch von vornherein dadurch herstellen, dass man im Gefässinnern, etwa durch einen beweglichen Kolben, den betreffenden Ueberdruck erzeugt. Man kann also durch Steigerung und Verkleinerung des Kolbendrucks willkürliche Concentrationsänderungen im Innern des Gefässes bewirken und so umkehrbare Processe hervorrufen, die gestatten, den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie anzuwenden. Das Verhalten der Salzmoleküle, das den osmotischen Druck erzeugt, steht dabei, wie wir sehen werden, in vollständiger Analogie mit dem Verhalten der Gase, für beide gelten dieselben Gesetze, sobald wir die Lösungen sehr verdünnt annehmen, so dass die einzelnen Salzmoleküle auf einander keine Wirkung mehr ausüben, sondern nur der Einwirkung der Wassermoleküle unterliegen. Diese Bedingung soll im Folgenden immer als erfüllt angesehen werden.

In diesem Falle gilt für den osmotischen Druck, wie für die Gase, das MARIOTTE'sche Gesetz. Denn die wasseranziehende Wirkung der Salzmoleküle, die ihn hervorruft, ist offenbar der Menge der anziehenden Moleküle pro Volumeinheit, d. h. der Concentration proportional. Das bestätigen die Versuche PFEFFER's mit Rohrzucker (s. oben) und von DE VRIES mit Rohrzucker, salpetersaurem und schwefelsaurem Kalium.

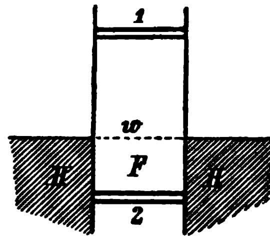
GAY-LUSSAC's Gesetz beweist VAN'T HOFF, indem er die in einem Cylinder mit halbdurchlässiger Wand eingeschlossene sehr verdünnte Lösung einen von 2 isothermischen und 2 isentropischen Curven gebildeten Kreisprocess ausführen lässt. Die erste isothermische Aenderung erzeuge die Volumänderung dv, Anfangsdruck und Temperatur seien P und T, so wird die äussere Arbeit PdV geleistet und diese ist, wie VAN'T HOFF bei der vorausgesetzten grossen Verdünnung annimmt gleich der ganzen dabei aufgenommenen Wärmemenge. Bei der andern

isothermischen Aenderung sei $P-dP$ und $T-dT$ der Druck und die Temperatur, folglich nach dem zweiten Hauptsatz:

$$\frac{PdV}{T}-\frac{(P-dP)dV}{T-dT}=0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{P}{T}=const.$$

Die experimentellen Daten aus PFEFFER's und DE VRIES' Beobachtungen schliessen ein zu kleines Temperaturintervall ein, um das Gesetz genauer zu prüfen, doch scheinen sie sowohl wie einzelne Beobachtungen SORET's mit ihm im Einklang zu stehen.

Das AVOGADRO'sche Gesetz für verdünnte Lösungen heisst nach VAN'T HOFF: Bei gleichem osmotischem Druck und gleicher Temperatur enthalten gleiche Volumina der verschiedensten Lösungen gleiche Molekülzahl und zwar diejenige, welche bei derselben Spannkraft und Temperatur im gleichen Volum eines Gases enthalten ist. Das wird bewiesen, indem VAN'T HOFF bei constanter Temperatur die Lösung eines Körpers, der auch als Gas besteht, z. B. Sauerstoff in Wasser, einen umkehrbaren Kreisprocess durchmachen lässt und das HENRY'sche Gesetz für ihn als gültig annimmt. Zu dem Zweck denkt sich VAN'T HOFF einen mit der Lösung gefüllten Cylinder oben und unten durch verschiebbare Kolben (1 und 2) verschlossen und zum Theil in Wasser H getaucht. Die äusseren Wände des Cylinders sollen nur Wasser durchlassen und in seinem Innern soll sich eine Scheidewand w befinden, die nur den gelösten Körper (Sauerstoff) passiren lässt. Das Volum der Gewichtseinheit Sauerstoff in der Flüssigkeit F, die den Raum zwischen w und 2 ausfüllt, sei V und Stempel 1 ruhe bei Beginn des Processes auf w. Der Druck des Gases resp. osmotische Druck, falls die Gewichtseinheit Gas in der Volumeinheit vorhanden ist, sei P resp. p; also übt die Gewichtseinheit Gas in einem Volum V der Flüssigkeit nach MARIOTTE's Satz den Druck $\frac{p}{v}$ aus. Hebt man nun den Stempel 1 und 2, indem man stets den Druck und die Sättigung der Flüssigkeit mit Gas constant hält, so dass die Gewichtseinheit des Gases frei wird, so leistet es dabei eine Arbeit: $-V\cdot\frac{p}{V}+v\cdot\frac{P}{v}$, wenn v das Volum des freien Gases ist. Vergrössert man v noch um dv, so wird die Arbeit $dv\cdot\frac{P}{v}$ geleistet. Senkt man jetzt Kolben 1 und 2 und führt das frei gewordene Gas wieder in Lösung über, wobei das Volum der Lösung $V+dV$ werden soll, so ist der Ausdruck der Arbeit: $-(v+dv)\frac{P}{v+dv}+(V+dV)\frac{p}{V+dV}$ und verkleinert man endlich das Lösungsvolum $V+dV$ auf seine anfängliche Grösse V, so erhält man, wie oben bei Vernachlässigung von Gliedern, die von 2. Ordnung unendlich klein sind, die Arbeit $-dV\frac{p}{V}$. Durch Addition dieser 6 Posten ergiebt sich



(Ph. 208.)

$$\frac{dv\cdot P}{v}-\frac{dV\cdot p}{V}=0.$$

Gilt das HENRY'sche Gesetz, so ist aber $v:V=(v+dv):(V+dV)$, d. h. $\frac{v}{V}=\frac{dv}{dV}$, folglich

$$P=p.$$

Es ist somit der osmotische Druck der in der Volumeinheit der Flüssigkeit gelösten Gewichtseinheit des Gases = dem Druck des freien Gases, das in der Volumeinheit die Gewichtseinheit enthält. Es müssen also in verdünnten Lösungen, die gleichen osmotischen Druck zeigen, eine gleiche Anzahl von Molekeln enthalten sein.

Wie für Gase wird man jetzt für Lösungen als Vereinigung des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes haben:

$$PV = R \cdot T.$$

Denkt man sich die Concentration stets in Kilogrammmolekeln ausgedrückt und wählt Wasserstoff bei 0° und Atmosphärendruck zum Ausgang, so wird diese Gleichung

$$PV = 845 \cdot T,$$

wo P stets den osmotischen Druck bezeichnet.

Der Avogadro'sche Satz gilt aber natürlich nicht nur für Lösungen von Körpern, die zufällig bei gewöhnlichen Umständen Gasform haben, sondern für jeden gelösten Stoff. Das zeigt z. B. Pfeffer's Bestimmung des osmotischen Drucks für wachsende Temperaturen bei einer 1% Zuckerlösung, die also etwa 1 *gr* Zucker in 100·6 *ccm* Lösung enthält. Vergleicht man den osmotischen Druck dieser Lösung z. B. mit einer Lösung von Wasserstoff, die ebensoviel Moleküle, d. h. $\frac{1}{171}$ *gr* H in 100·6 *ccm* Lösung enthält, so findet man eine sehr gute Uebereinstimmung. Der Druck, den $\frac{1}{171}$ *gr* H im Liter bei 0° ausüben, beträgt 0·649 Atm., also bei t^0 ist er 0·649 (1 + 0·00367 t) und dieser soll gleich dem osmotischen Druck der 1% Zuckerlösung sein, was die folgende Tabelle bestätigt:

Temperatur t	Von Pfeffer beobachteter osmotischer Druck in Atmosphären	0·649 (1 + 0·00367 t)
6·8	0·664	0·665
13·7	0·691	0·681
14·2	0·671	0·682
15·5	0·684	0·686
22	0·721	0·701
32	0·716	0·725
36	0·746	0·735

Weitere Bestätigungen des Avogadro'schen Satzes für Lösungen ergaben sich dadurch, dass aus ihm gezogene thermodynamische Folgerungen zu den experimentell gefundenen Gesetzen Raoult's über die molekulare Dampfdruck- und Gefrierpunkts-Erniedrigung von Lösungen führen.

Die Schlüsse van't Hoff's sind später von Duhem (4) auf anderm Wege mit Hilfe des thermodynamischen Potentials bestätigt worden und die von beiden Forschern gewonnenen Sätze, dass isotonische Lösungen merklich dieselbe Dampfspannung und denselben Gefrierpunkt haben, zeigt die oben angeführte Tabelle von Tammann als richtig. Nur bezüglich der Beziehungen zwischen osmotischem Druck und Temperatur weichen Duhem's Folgerungen von van't Hoff's Ergebniss, dass auch für Lösungen das Gay-Lussac'sche Gesetz gelten solle, ab, indem Duhem einen complicirteren Zusammenhang für diese Grössen findet. Da die Versuche gerade hierüber noch sehr wenig zahlreich, so sind zur Entscheidung weitere Untersuchungen erforderlich.

Eine direkte Ableitung des zwischen 2 verschieden concentrirten Lösungen bestehenden osmotischen Drucks aus der Dampfspannung der Lösungen

haben GOUY und CHAPERON (6) auf folgende Weise gegeben: 2 Pumpen mit Kolben A_1 und A_2 communiciren durch eine Röhre, in deren Mitte sich die nur für das Lösungsmittel durchlässige Wand c befindet. Die Röhre kann durch je einen Hahn B_1 und B_2 von jeder Pumpe abgesperrt werden. Die Pumpen werden, während die Hähne offen sind, mit den Lösungen gefüllt und zwischen diesen bestehe bei den Drucken P_1 resp. P_2 osmotisches Gleichgewicht. Dann ist $P_2 - P_1 = p$ der osmotische Druck. Jetzt vollführe man bei constanter Temperatur folgenden umkehrbaren Kreisprocess: Das Gewicht dw des Lösungsmittels werde durch c von A_1 nach A_2 getrieben, dabei wird die Arbeit $P_2 K_2 \frac{dw}{D_0} - P_1 K_1 \frac{dw}{D_0}$ geleistet, wo D_0 das specifische Gewicht des Lösungsmittels und K_1 und K_2 die Contractionscoëfficienten der beiden Lösungen sind. Die Hähne werden geschlossen. Durch eine Hilfspumpe wird dw aus A_2 verdampft und der Stempel dabei stets nachgeschoben, so dass A_2 immer voll bleibt. Das geschieht bei der Maximaltension F_2 des Dampfes in A_2, und endlich werde dw bei der Maximaltension F_1 des Dampfes in A_1 condensirt. Bezeichnet $\varphi(F_2, F_1)$ die Arbeit, welche geleistet wird durch die Ueberführung der Gewichtseinheit Dampf aus einen Behälter mit Druck F_2 in einem Behälter mit dem Druck F_1, so ist die in dem letzten Theil des angegebenen Kreisprocesses geleistete Arbeit:

(Ph. 209.)

$$dw\,\varphi(F_2, F_1) + F_1 K_1 \frac{dw}{D_0} - F_2 K_2 \frac{dw}{D_0}.$$

Die Summe aller angeführten 5 Posten muss $= 0$ sein, d. h.

$$\varphi(F_2, F_1) = (P_1 - F_1)\frac{K_1}{D_0} - (P_2 - F_2)\frac{K_2}{D_2},$$

folglich

$$p = P_2 - P_1 = P_1\left(\frac{K_1}{K_2} - 1\right) - F_1\frac{K_1}{K_2} + F_2 - \frac{D_0}{K_2}\varphi(F_2, F_1).$$

Im Allgemeinen sind K_1 und K_2 nahe $= 1$. Gilt das MARIOTTE-GAY-LUSSAC'sche Gesetz, so ist

$$\varphi(F_2, F_1) = RT \log\frac{F_2}{F_1},$$

und vernachlässigt man noch $F_2 - F_1$, so hat man genähert:

$$p = \pm D_0 RT \log\frac{F_2}{F_1},$$

d. h. der Druck ist grösser in derjenigen Lösung, die die geringere Dampfspannung hat.

d) Moleculartheorie der Diffusion.

Der osmotische Druck wurde, wie wir sahen, von VAN'T HOFF u. A. als durch die anziehenden Kräfte hervorgerufen gedacht, welche die Salzmoleküle einer Lösung auf die Wassermoleküle ausüben. Wenn er auch nur mit Hilfe halbdurchlässiger Wände gemessen werden kann, so muss er doch in jeder Lösung vorhanden sein und wir können uns nach VAN'T HOFF denken, dass die Moleküle eines gelösten Stoffes von Stellen höheren osmotischen Druckes zu Stellen niederen Druckes getrieben werden, bis sie gleichmässig in dem Lösungsmittel vertheilt sind, d. h. bis die Diffusion vollendet ist. Da aber der Process der Diffusion nur sehr langsam vor sich geht, so müssen sich der Bewegung der Salzmoleküle in dem Lösungsmittel grosse Reibungswiderstände entgegenstellen, die man mit Hilfe der Diffusionsversuche wird berechnen können. Solche Ueber-

legungen führten W. Nernst (1) zu einer Molekulartheorie der Diffusion, die wir im Folgenden wiedergeben wollen, und die wie van't Hoff's Schlüsse nur für verdünnte Lösungen gilt.

Diffusion der Nichtelektrolyte. In dem Diffusionscylinder von dem constanten Querschnitt q wirke an der Stelle x der osmotische Druck p, dann wirkt, wenn die x in senkrechter Richtung gerechnet werden, auf die in der Flächenschicht qdx vorhandene Substanz der Druck $-qdp$. Ist u die Concentration, d. h. die im *ccm* enthaltene Anzahl Grammmolekeln, so ist die Kraft, die an der Stelle x auf jede *gr*-Molekel wirkt $= -\frac{1}{u}\frac{dp}{dx}$. Heisst K die Kraft, die eine in Lösung befindliche *gr*-Molekel mit der Geschwindigkeit $1\,\frac{cm}{sec}$ bewegt, so ist

$$S = -\frac{qt}{K}\frac{dp}{dx}$$

die Salzmenge in *gr*-Molekeln, die durch den Querschnitt q in der Zeit t hindurchtritt, wenn zwei um 1 *cm* von einander abstehende Schichten die Concentrationsdifferenz 1 haben.

So lange der gelöste Stoff mit zunehmender Concentration sich nicht polymerisirt, ist der osmotische Druck der Concentration proportional, d. h.

$$p = p_0 u,$$

wo p_0 den Druck in einer Lösung von der Concentration 1 bedeutet, somit wird:

$$S = -\frac{qtp_0}{K}\frac{du}{dx}. \tag{1}$$

Da nun K für verdünnte Lösungen von der Concentration unabhängig ist, gibt 1) direkt das von Fick aufgestellte Elementargesetz $S = -kq\frac{du}{dx}t$ der Diffusion. Es ist dies für verdünnte Lösungen also streng gültig, für concentrirte dagegen können Abweichungen entstehen, wenn K mit der Concentration sich ändert und p nicht mehr u proportional ist. Nach dem Obigen wird:

$$k = \frac{p_0}{K}\cdot\frac{cm^2}{sec}.$$

p_0, der Druck in einem Raum, der 2 *gr* H oder 32 *gr* O in *ccm* enthält, ergiebt sich (wenn bis zu solchen Dichtigkeiten das Mariotte'sche Gesetz noch gültig wäre), nach den Zahlen Regnault's bei 0° zu 22380 und 22320 Atmosphären. Setzt man das Mittel dieser Zahlen ein, so wird

$$p_0 = 22350\cdot 1{\cdot}033(1 + 0{\cdot}00367\,t) = 23080(1 + 0{\cdot}00367\,t)\frac{kgr\text{-Gew.}}{cm^2},\ \text{d. h.}$$

$$K = \frac{1}{k}\cdot 2{\cdot}3\cdot 10^4(1 + 0{\cdot}00367\,t)\,kgr\text{-Gew.}$$

Darnach berechnete sich die folgende Tabelle:

Stoff	t°	$k\,10^{-7}\frac{cm^2}{sec}$	bestimmt von	K ($\times 10^9$ *kgr*-Gew.)
Harnstoff	7·5	93·8	Scheffer	2·5
Chloralhydrat	9	63·7	Scheffer	3·8
Mannit	10	44·0	Scheffer	5·5
Rohrzucker	9—10	36·1	Graham-Stefan	6·7
Arabisches Gummi	10	15·0	Graham-Stefan	16
Gerbsäure	10	11·7	Graham-Stefan	20
Albumin	13—15	7·3	Graham-Stefan	33
Caramel	9—10	5·4	Graham-Stefan	44

Es sind das also ganz enorme Reibungswiderstände, die die *gr*-Molekel eines Nichtleiters bei der Diffusion durch ihr Lösungsmittel erfährt.

Diffusion von Elektrolyten. Wir nehmen nach ARRHENIUS u. A. an, dass die Elektrolyte in verdünnten Lösungen dissociirt sind und betrachten nur den Grenzzustand, dem sie sich mit zunehmender Verdünnung nähern und bei dem die Dissociation vollständig sein soll. Ferner beschränken wir uns auf einbasische Säuren und deren Salze, da wir nur bei ihnen wissen, welches die Ionen sind und wie weit die Molekel eines gelösten Stoffes activ ist, d. h. sich an der Elektricitätsleitung betheiligt. Bei solcher sehr grossen Verdünnung ist KOHLRAUSCH's Gesetz von der unabhängigen Wanderung der Ionen und seine Berechnung der absoluten Geschwindigkeit derselben streng richtig. Die Kraft J, durch deren Einwirkung 1 *gr*-Ion (1 *gr* H; 35 *gr* Cl etc.) mit der Geschwindigkeit $1\frac{cm}{sec}$ i i der Lösung bewegt wird, ist in diesem Falle nach KOHLRAUSCH:

$$J = \frac{1}{w \cdot 1{\cdot}063 \cdot 10^{-5} \cdot 0{\cdot}1037} \cdot \frac{1}{981000 \cdot 1{\cdot}037 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{w} \cdot 0{\cdot}8917 \cdot 10^4 \; kgr\text{-Gew.}, \quad (2)$$

wo $1{\cdot}037 \cdot 10^{-4}$ die Menge H bedeutet, mit welcher die Elektricitätsmenge 1 (*cgrs*) wandert und $w \cdot 1{\cdot}063 \cdot 10^{-5} \cdot 0{\cdot}1037$ das absolute molekulare Leitungsvermögen des Ions ist. Für das Anion ist $w = n\lambda$, für das Kation $= (1-n)\lambda$, wo n die HITTORF'sche Ueberführungszahl und λ den Grenzwerth des specifischen molekularen Leitungsvermögens bei zunehmender Verdünnung bedeutet.

Jedes der beiden Ionen steht, da sie stets in gleicher Anzahl vorhanden sind, unter gleichem osmotischem Druck, also sind nach Früherem die bei der Diffusion in Bewegung gesetzten Mengen des Anions resp. Kations:

$$S_\alpha' = -\frac{qt}{J_\alpha}\frac{dp}{dx} = -\frac{qtp_0}{J_0}\frac{du}{dx} \quad \text{resp.} \quad S_\varkappa' = -\frac{qt}{J_\varkappa}\frac{dp}{dx} = -\frac{qtp_0}{J_\varkappa}\frac{du}{dx}, \quad (3)$$

wo p_0 der osmotische Druck in einem Raum, der 1 *gr*-Ion im *ccm* enthält.

Da J_α und $J_\varkappa$ verschieden sind, würden das im Allgemeinen auch S_α' und $S_\varkappa'$ sein. Wenn also zu einer Zeit t an der Stelle x die Ionen in gleicher Anzahl in der Volumeinheit enthalten sind, so müsste dies aufhören, wenn x oder t sich geändert haben und der osmotische Druck die einzig wirkende Kraft wäre.

Nach dem Grundgesetz der Elektrostatik darf aber im Innern eines Leiters freie Elektricität nicht bestehen, d. h. auf Elektrolyse angewandt, die Ionen müssen im Innern der Lösung stets in äquivalenten Mengen vorhanden sein. Eine dies Verhältniss ändernde Diffusion ist unmöglich, es müssen also zu den osmotischen Druckkräften noch elektrostatische Kräfte hinzukommen, welche die Geschwindigkeiten der beiden Ionen ausgleichen.

Diese elektrostatischen Kräfte werden von den elektrischen Ladungen herrühren, die wir auf der Oberfläche der Elektrolyte nach dem COULOMB'schen Gesetz wirkend annehmen müssen.

Um die Grösse der auftretenden Potentialdifferenz und die Art, wie sie die Diffusion beeinflusst, zu ermessen, denken wir uns z. B. 2 verschieden concentrirte Lösungen von HCl sich berührend. Der auf H und auf Cl wirkende osmotische Druck ist der gleiche, die Geschwindigkeit des H aber nach HITTORF und KOHLRAUSCH unter dem Einfluss derselben Kraft etwa 6 mal so gross wie die des Cl. Es werden also im ersten Augenblick des Contacts der beiden Lösungen etwa 6 mal soviel H- als Cl-Ionen aus der concentrirten in die verdünntere Lösung übergehen, die concentrirtere Lösung erhält somit einen Ueberschuss an Cl-, die verdünntere an H-Ionen. Da aber beide Arten von Ionen mit gleich grosser aber entgegengesetzter Elektricität geladen sind, so folgt, dass

in der verdünnten Lösung eine dem Ueberschuss entsprechende Anzahl von H-Ionen, in der concentrirten die gleiche Anzahl von Cl-Ionen an die Oberfläche gehen muss. Die verdünnte HCl-Lösung lädt sich somit positiv, die concentrirte negativ elektrisch. Dadurch wird eine Kraft erzeugt, welche die H-Ionen von Orten niederer zu Orten höherer, die Cl-Ionen von Orten höherer zu solchen niederer Concentration hintreibt und der stationäre Zustand wird schliesslich der sein, bei dem das Zummenwirken von osmotischem Druck und elektrostatischer Ladung beiden Arten von Ionen gleiche Geschwindigkeiten ertheilen.

Sind w und v die Geschwindigkeiten, die dem Kation und Anion durch gleiche Kräfte ertheilt werden und ist P das Potential der elektrostatischen Ladung im Punkte x, so lautet die Bedingung dafür, dass beide Ionen mit gleicher Geschwindigkeit wandern:

$$w\left(\frac{1}{u}\frac{dp}{dx}-\frac{dP}{dx}\right)=v\left(\frac{1}{u}\frac{dp}{dx}+\frac{dP}{dx}\right), \tag{4}$$

folglich

$$\frac{dP}{dx}=\frac{1}{u}\frac{w-v}{w+v}\frac{dp}{dx}. \tag{5}$$

Unter Einfluss dieser Kraft allein würden sich zur Zeit t durch den Querschnitt q die Mengen der Ionen bewegen:

$$S_\alpha''=-\frac{qt}{J_\alpha}\frac{w-v}{w+v}\frac{dp}{dx};\quad S_\varkappa''=-\frac{qt}{J_\varkappa}\frac{w-u}{w+u}\frac{dp}{dx}. \tag{6}$$

Die thatsächlich diffundirenden Mengen werden sein

$$S_\alpha=S_\alpha'+S_\alpha'';\quad S_\varkappa=S_\varkappa'+S_\varkappa'',$$

d. h.

$$\begin{aligned} S_\alpha&=-\frac{qt}{J_\alpha}\frac{2w}{w+v}\frac{dp}{dx}=-\frac{qtp_0}{J_\alpha}\frac{2w}{w+v}\frac{du}{dx},\\ S_\varkappa&=-\frac{qt}{J_\alpha}\frac{2v}{w+v}\frac{dp}{dx}=-\frac{qtp_0}{J_\varkappa}\frac{2v}{w+v}\frac{du}{dx}. \end{aligned} \tag{7}$$

Setzen wir aus (2) die Werthe von J_α und $J_\varkappa$ ein, so wird:

$$S_\alpha=S_\varkappa=-1{\cdot}121\cdot 10^{-4}\,qtp_0\frac{2wv}{w+v}\frac{du}{dx}, \tag{8}$$

d. h. es diffundiren beide Ionen gleich schnell, wie es den Voraussetzungen und Thatsachen nach nothwendlg ist. Gleichung (8) giebt die Menge Salz in *gr*-Molekeln, die in der Zeit t durch den Querschnitt q geht und zeigt, dass für verdünnte Salzlösungen auch das FICK'sche Elementargesetz streng gültig ist.

Die Salzmenge, die beim Concentrationsgefälle 1 in einer Secunde durch den Querschnitt eines *qcm* hindurchgetrieben wird, d. h. der Diffusionscoëfficient k ist demnach:

$$k=1{\cdot}121\cdot 10^{-4}\cdot p_0\frac{2wv}{w+v}=5{\cdot}5186\frac{wv}{w+v}\frac{cm^2}{sec}, \tag{9}$$

wo p_0 nicht auf 0° sondern auf 18° umgerechnet ist.

Wir können somit die Diffusionsconstante in absolutem Masse berechnen, wenn wir die absoluten Geschwindigkeiten der Ionen des betreffenden Salzes kennen.

Die Werthe von w und v ergeben sich aus KOHLRAUSCH's Versuchen. Doch da diese sich auf die Concentration $u=10^{-4}$ beziehen, ist bei ihnen die Verdünnung der Lösung, bei der alles Salz an der Elektrolyse theilnimmt, noch nicht erreicht, was die obigen Entwickelungen doch voraussetzen. Deshalb sind alle Zahlen KOHLRAUSCH's noch mit 1047/1216 = 1·16 multiplicirt worden, in welchem Verhältniss Chlorkalium bei der Concentration 10^{-4} dissociirt erscheint. Man erhält so:

	K	NH_4	Na	Li	Ag	H			
$w \cdot 10^7 =$	60	58	37	28	49	315			
	Cl	J	NO_3	ClO_3	$C_2H_3O_2$	OH	Br	COOH	$C_6H_5SO_3$
$v \cdot 10^7 =$	63	64	56	49	30	166	64	43	27

wo die letzten 3 Zahlen in der Reihe der v Versuchen OSTWALD's entnommen sind und wo alle Zahlen sich auf 18° beziehen.

Die des Vergleiches wegen nothwendige Reduction aller Beobachtuugen des Diffusionscoëfficienten auf die Temperatur von 18° geschah für Salze nach der Formel:

$$k_t = k_{18}[1 + 0{\cdot}026\,(t - 18)], \tag{10}$$

und für Säuren und Basen nach:

$$k_t = k_{18}[1 + 0{\cdot}024\,(t - 18)]. \tag{11}$$

Diese Formel erhält man in folgender Weise: Das elektrische Leitungsvermögen λ bei der wenig vom Ausgangspunkt der Zählung entfernten Temperatur t kann man schreiben:

$$\lambda_t = [w_0(1 + \alpha_w t) + v_0(1 + \alpha_v t)]a(1 + \alpha_a t),$$

wo w_0 und v_0 die Ionengeschwindigkeiten bei 0°, α_w und α_v deren Temperaturcoëfficienten, a die ARRHENIUS'sche Activitätszahl (d. h. den Bruch, der das Verhältniss der dissociirten zur Anzahl aller in Lösung vorhandenen Moleküle ergiebt) und α_a deren Temperaturcoëfficienten bezeichnet. α_a darf als sehr klein gegen α_w und α_v angesehen werden, da der Temperaturcoëfficient sehr verdünnter Lösungen sich weder mit der Temperatur noch der Concentration bedeutend ändert. Es wird somit

$$w(1 + \alpha_w t') + v(1 + \alpha_v t') = (w + v)(t + \alpha t'),$$

wo α den von KOHLRAUSCH bestimmten Temperaturcoëfficienten bedeutet, wenn wir die Temperatur von 18° ab zählen. Durch Untersuchung der Abhängigkeit der Ueberführungszahl n von der Temperatur bei Silbernitratlösung fand NERNST, dass für dieses Salz n sich sehr wenig mit der Temperatur ändert und man bei diesen Ionen $\alpha_w = \alpha_v = \alpha$ setzen darf. Berechnet man hiernach die Temperaturcoëfficienten der Geschwindigkeiten der übrigen Ionen, so ergeben sich dieselben für K, Na, Li, NH_4, Cl, J, NO_3, $C_2H_3O_2$ sehr nahe gleich, im Mittel $= 0{\cdot}022$; für OH : 0·018 und für H : 0·015, welche Zahlen für 18° gelten.

Berücksichtigt man noch, dass auch p_0 in Gleichung (9) von der Temperatur abhängt, so wird der Temperaturcoëfficient von k

$$\frac{(1 + \alpha_v t')(1 + \alpha_w t')}{1 + \alpha t'}(1 + 0{\cdot}0034\,t'),$$

wo die t' von 18° an zählen. Hiernach sieht man, dass Formeln (10) und (11) den Temperatureinfluss darstellen.

Auch stimmen diese Formeln mit den empirisch von DE HEEN abgeleiteten (s. o.), welche (die Temperaturen wie gewöhnlich von 0° an gerechnet) lauten für $KNO_3 : k_t = 1{\cdot}24[1 + 0{\cdot}027\,(t - 18)]$ und für $NaCl : k_t = 1{\cdot}16[1 + 0{\cdot}025(t - 18)]$. Ebenso lässt sich die von H. F. WEBER für Zinkvitriol gegebene Formel schreiben $k_t = k_{18}[1 + 0{\cdot}028(t - 18)]$, was auch gut mit Formel (10) übereinstimmt.

Die nachstehende Tabelle giebt den Vergleich zwischen den nach der Formel (9) berechneten und den beobachteten Werthen. Die mit m bezeichnete Columne enthält die Concentration ausgedrückt in $m = u^{-3}$, d. h. in der sogen. Normallösung als Einheit, in der Spalte k steht der direkt beobachtete, in Spalte k_{18} der nach Gleichung (10) und (11) auf 18° reducirte Werth des Diffusionscoëfficienten. Die Ueberschrift »k_{18} theor.« endlich giebt die aus Gleichung (9) gewonnenen Zahlen.

	Beobachter	m	t^0	k	k_{18}	Mittel	k_{18} theor.	Differenz
Salzsäure	Scheffer	0·4	0	161	284			
"	"	0·4	5	179	260	267	288	— 21
"	"	0·5	11	213	256			
Salpetersäure	"	0·9	5·5	177	253			
"	"	0·8	8·5	201	260	256	263	— 7
"	"	0·01	9	200	256			
Kali	"	0·03	13·5	192	214	214	243	— 29
Natron	"	0·17	8	123	162	162	168	— 6
Chlornatrium	"	0·5	6	88	128			
"	de Heen	verd.	18	134	134			
"	Graham-Stefan	1	9·5	108	138			
"	v. Wroblewski	1·2	8·5	76	102	123	130	— 7
"	Schuhmeister	2·5	9·2	95	124			
"	"	2·3	14·6	106	117			
"	"	2·3	17·2	118	120			
Bromnatrium	"	3·7	10	101	127	127	131	— 4
"	"	3·0	13	111	127			
Jodnatrium	"	1·0	8·2	90	122	122	131	— 9
Salpeters. Natron	"	0·6	12	99	119	119	123	— 4
Natriumformiat	Scheffer	0·6	8·8	83	110	110	110	0
Natriumacetat	"	0·2	4·5	60	93	90	91	— 1
"	"	0·4—0·8	14·5	80	88			
Benzolsulfons. Natrium	"	0·3	14·5	77	86	86	86	0
Chlorkalium	Schuhmeister	1·1	18·8	153	149	149	170	— 21
Bromkalium	"	1·4	10·6	140	174	163	171	— 8
"	"	1·4	20·5	161	152			
Jodkalium	"	1·0	15·8	146	155	155	171	— 16
"	"	1·4	13·3	137	155			
Salpeters. Kalium	de Heen	—	18	144	144			
" "	Scheffer	0·5	7	106	150			
" "	Schuhmeister	1·6	8	91	123	137	160	— 23
" "	"	1·7	13·8	110	124			
" "	"	0·8	21·7	160	146			
Chlorammonium	Scheffer	0·9	17·5	152	154	150	167	— 17
"	Schuhmeister	2·4	20·5	155	146			
Chlorlithium	"	3·2	5·4	75	108	112	106	+ 6
"	"	3·3	8·8	88	116			
Bromlithium	"	2·2	8·1	90	122	122	108	+ 14
Jodlithium	"	1·2	9·9	93	117	109	108	+ 1
"	"	0·9	13·2	89	102			
Silbernitrat	Scheffer	0·13	3·5	94	152	147	145	+ 2
"	"	0·29	7·5	104	142			

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Zahlen meist eine grosse. Freilich darf dabei nicht vergessen werden, dass die Concentrationen in vielen Fällen bedeutend grösser sind, als die der Rechnung zu Grunde liegenden Annahmen hier zulassen und dass auch die benutzte Temperaturcorrektion der Formeln (10) und (11) nach den vorhandenen Beobachtungen noch nicht genügend genau geprüft werden kann.

Diffusion eines Gemisches von Salzen. Haben wir 2 Salze mit einem gemeinschaftlichen Ion in Lösung, die zusammen in Wasser diffundiren und sind u_1 und u_2 die Concentrationen der beiden Salze, so steht das gemeinschaft-

schaftliche Ion unter dem Druck $(u_1 + u_2)p_0$, wo p_0 wieder den Druck in der Lösung von der Concentration $1 \frac{gr\text{-Aeq.}}{cm^3}$ bedeutet. Die beiden andern mit gleicher Elektricität geladenen Ionen stehen unter dem Druck $u_1 p_0$ und $u_2 p_0$. Ist P das Potential der elektrischen Ladung, so wirken auf 1 gr-Aeq. der Ionen die Kräfte

$$\text{auf das gemeinschaftliche Ion } -\frac{p_0}{u_1 + u_2}\frac{d(u_1 + u_2)}{dx} + \frac{dP}{dx},$$

$$\text{„ „ zweite Ion } \ldots\ldots -\frac{p_0}{u_1}\frac{du^1}{dx} - \frac{dP}{dx},$$

$$\text{„ „ dritte Ion } \ldots\ldots -\frac{p_0}{u_2}\frac{du^2}{dx} - \frac{dP}{dx}.$$

Sind K_1, K_2', K_2'' die Kräfte, welche die resp. Ionen mit der Geschwindigkeit 1 bewegen und bedeuten v_1', v_2', v_2'' die diesen Kräften umgekehrt propationalen Geschwindigkeiten der 3 Ionen, so erhalten wir nach Ueberlegungen, die den früheren ganz analog sind, als Mengen der Ionen, die in gr-Aeq. durch den Querschnitt an der Stelle x in der Zeit t diffundiren:

$$S_1 = -\frac{qtp_0}{K_1}\frac{\frac{du_1}{dx}[2u_1v_2' + u_2(v_2' + v_2'')] + \frac{du_2}{dx}[2v_2''u_2 + u_1(v_1 + v_2'')]}{u_1(v_1 + v_2') + u_2(v_1 + v_2'')}$$

$$S_2' = -\frac{qtp_0}{K_2'}\frac{\frac{du_1}{dx}[2v_1u_1 + u_2(v_1 + v_2'')] + \frac{du_2}{dx}(vu_1 - v_2''u_1)}{u_1(v_1 + v_2') + u_2(v_1 + v_2'')}$$

$$S_2'' = -\frac{qtp_0}{K_2''}\frac{\frac{du_2}{dx}[2v_1u_2 + u_1(v_1 + v_2')] + \frac{du_2}{dx}(v_1u_2 - v_2'u_2)}{u_1(v_1 + v_2') + u_2(v_1 + v_2'')},$$

woraus natürlich wieder $S_1 = S_2' + S_2''$ folgt.

Das Verhältniss, in dem die beiden gleichnamigen Ionen durch den Querschnitt diffundiren, ist also:

$$\frac{S_2'}{S_2''} = \frac{v_2'}{v_2''}\frac{\frac{du_1}{dx}[2v_1u_1 + u_2(v_1 + v_2'')] + \frac{du_2}{dx}(v_1u_1 - v_2''u_1)}{\frac{du_2}{dx}[2v_1u_2 + u_1(v_1 + v_2')] + \frac{du_1}{dx}(v_1u_2 - v_2'u_2)}. \tag{12}$$

Dasselbe ändert sich von Schicht zu Schicht.

Als einfachster Fall ergiebt sich hieraus, wenn $v_2' = v_2'' = v_2$, so muss $\frac{S_2'}{S_2''} = \frac{u_1}{u_2}$ sein. Setzen wir das in (12) ein, so wird für den stationären Zustand

$$\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} = \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx},$$

d. h. die Concentration nimmt für beide Salze linear ab. Das wird noch angenähert erfüllt sein, wenn v_2' und v_2'' nicht sehr verschieden von einander sind, dann wird also sein

$$\frac{S_2'}{S_2''} = \frac{u_1}{u_2}\frac{v_2'}{v_2''}.$$

Damit lassen sich einige Versuche Marignac's vergleichen. Bei ihnen waren von beiden Salzen gleiche Gewichtstheile vorhanden; es stehen somit die Mengen der Salze, die, in gr statt in Aequivalenten ausgedrückt, in der gleichen Zeit diffundiren, in dem annähernden Verhältniss

$$\frac{g_1}{g_1} = \frac{v_2'}{v_2''}.$$

Die nachfolgende Tabelle zeigt für die in der ersten Spalte stehenden Stoffe in wie weit diese Gleichung für die betreffenden Versuche erfüllt war:

	$\frac{g_1}{g_2}$	$\frac{v_2'}{v_2''}$	Differenz		$\frac{g_1}{g_2}$	$\frac{v_2'}{v_2''}$	Differenz
$\frac{KCl}{KNO_3}$	1·06	1·12	— 0·06	$\frac{KJ}{KNO_3}$	1·10	1·14	— 0·04
$\frac{NaCl}{NaNO_3}$	1·04	1·12	— 0·08	$\frac{KCl}{NH_4Cl}$	1·16	1·03	+ 0·13
$\frac{NH_4Cl}{NH_4NO_3}$	1·05	1·12	— 0·07	$\frac{KNO_3}{NH_4NO_3}$	1·02	1·03	— 0·01.
$\frac{KBr}{KNO_3}$	1·08	1·14	— 0·06				

Auch das von GRAHAM und MARIGNAC gefundene Resultat, dass der Unterschied der Diffusionsgeschwindigkeiten zweier Salze grösser erschien, wenn sie als Gemenge, als wenn sie einzeln diffundirten, lässt sich aus obiger Gleichung einsehen. Diffundiren z. B. 2 Salze mit gemeinschaftlichem Kation gesondert, so ist das Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten nach (9):

$$\frac{v_1}{v_2}\,\frac{w+v_2}{w+v_1},$$

diffundiren sie aber im Gemenge, so wird das Verhältniss nach (12) näherungsweise: $\frac{v_1}{v_2}$.

Das erste Verhältniss ist, wie es die obige Regel verlangt, von der Einheit stets weniger entfernt als das zweite.

Betrachtet man endlich die Diffusion von Elektrolyten bei grösseren Concentrationen, so hat man auf den bei der Diffusion unzersetzten Theil des Salzes die Formel für Nichtelektrolyte anzuwenden. Ist also a der Activitätscoëfficient und u die Concentration an der Stelle x, so wandert die Menge $(1-a)\,u$ unzersetzt, die Menge au als Ionen. Man erhält folglich als die in der Zeit t durch den Querschnitt wandernde Salzmenge:

$$S = -p_0 q t\left[\frac{1}{\varkappa}\,\frac{d[u(1-a)]}{dx} + \frac{d(au)}{dx}\left(\frac{w}{(w+v)J_a} + \frac{v}{(w+v)J_\varkappa}\right)\right],$$

$\varkappa$ bedeutet dabei die Kraft, die auf eine *gr*-Molekel unzersetzten Salzes wirken muss, um sie mit der Geschwindigkeit 1 zu bewegen.

II. Diffusion der Gase und Dämpfe.

a) Freie Diffusion.

Das Wort »Diffuse« findet sich schon bei PRIESTLEY (1777)[1]) aber erst GRAHAM führte den Terminus Diffusion allgemeiner in die Wissenschaft ein. Die ersten Versuche über die allmähliche, ohne Einfluss äusserer Kräfte erfolgende Mischung zweier Gase rühren von BERTHOLLET (1807) und GRAHAM (1829) her, hatten aber, obgleich später GRAHAM's Versuche MAXWELL (1868) zur angenäherten Berechnung des Diffusionscoëfficienten dienten, für das Verständniss der Erscheinung noch geringe Bedeutung, da bei ihnen meist die Communication der beiden Gasarten durch eine engere Röhre stattfand.

Aus der kinetischen Gastheorie erklärten dann CLAUSIUS (1858) und MAXWELL (1864) die langsame Vermischung der Gase durch Diffusion und eilten so den exacten Beobachtungen voraus, die zuerst LOSCHMIDT (1870) und seine Schüler

1) S. pag. 302 des im Literaturverzeichniss unter 1 aufgeführten Werkes.

anstellten. Mit diesen Versuchen ging Hand in Hand die von STEFAN (1871) entwickelte Theorie, an welche sich dann wieder die zahlreichen Beobachtungen von OBERMAYER's (1880 etc.) anschlossen, die nach Methoden von LOSCHMIDT und von STEFAN angestellt wurden, während WAITZ (1882) optische Hilfsmittel zur Bestimmung der Diffusionsconstanten benutzte. Eine Erweiterung der MAXWELL-schen Theorie gab später BOLTZMANN (1882). — Die Diffussion von Dämpfen behandelte theoretisch und experimentell STEFAN (1873), dem WINKELMANN (1884 etc.) mit ausgedehnten Untersuchungen über viele, meist organische Körper folgte. —

Die freie Diffusion der Gase geht nach derselben Differentialgleichung vor sich wie die der Flüssigkeiten, d. h. sind 2 Gase in einer nicht sehr hohen verticalen Säule, das schwerere unten, bei gleichem Druck und Temperatur übereinander geschichtet und können sie sich nur in verticaler x Richtung bewegen, so genügt der Partialdruck p_1 des einen Gases in der Höhe x zur Zeit t der Gleichung:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = k \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Dies hat MAXWELL (11) aus der kinetischen Gastheorie direkt abgeleitet und STEFAN (15) hat es aus den Principien der Hydrodydamik unter Voraussetzungen gefolgert, deren erste der Satz ist: in jedem Gemenge wird jedes einzelne Gas so gedrückt, als es selber drückt, und deren zweite die Hilfsannahme ausspricht: in jedem Gemenge erfährt jedes einzelne Theilchen eines Gases, wenn es sich bewegt, von jedem anderen Gase einen Widerstand proportional der Dichte dieses Gases und der relativen Geschwindigkeit beider.

STEFAN's Betrachtungsweise ist kurz folgende: Bezeichnet Q den Querschnitt des Gefässes, p_1 den Partialdruck des ersten Gases, ρ_1, u_1 resp. ρ_2, u_2 die Dichte und Geschwindigkeit des ersten resp. zweiten Gases, so ist die bewegende Kraft für das erste Gas $-Q\,dp_1$, und der Widerstand, der diesem vom zweiten Gas entgegengesetzt wird, lässt sich, wenn A_{12} eine Constante bezeichnet, schreiben $A_{12}\rho_1\rho_2(u_1-u_2)\,Q\,dx$, d. h. die Summe der auf die Theilchen des ersten Gases, welche im Volumen $Q\,dx$ enthalten sind, wirkenden bewegenden Kräfte ist: $-Q\,dp_1 - A_{12}\rho_1\rho_2(u_1-u_2)\,Q\,dx$. Bezeichnet ξ_1 die Beschleunigung der Masse $\rho_1 Q\,dx$, folglich

$$\rho_1\xi_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x} - A_{12}\rho_1\rho_2(u_1-u_2),$$

oder da bei der Diffusion die Beschleunigung ξ_1 der einzelnen Elemente der Gase zu vernachlässigen:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + A_{12}\rho_1\rho_2(u_1-u_2) = 0, \tag{2}$$

wozu noch die Gleichung der Continuität kommt:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Führt man an Stelle der Dichten die Drucke ein und sei p_0 der Normaldruck (76 *cm*), T_0 die Normaltemperatur (0° C.), bei denen die Dichten ρ übergehen in d_1 und d_2, sei ferner T die Temperatur und $p = p_1 + p_2$ der Gesammtdruck der beiden Gase, folglich

$$\rho_1 = d_1 \frac{T_0 p_1}{T p_0}, \qquad \rho_2 = d_2 \frac{T_0 p_2}{T p_0}.$$

Setze

$$A_{12}\frac{d_1 d_2 T_0^2}{p_0 p_0 T^2} = b_{12} \quad \text{und} \quad p_1 u_1 = q_1, \quad p_2 u_2 = q_2.$$

Dann werden die Gleichungen (2) und (3):

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + b_{12}(p_2 q_1 - p_1 q_2) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} = 0,$$

und analog für das 2. Gas:

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} + b_{12}(p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0.$$

Da p von t unabhängig, erhält man hieraus $q_1 + q_2 = 0$, folglich

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + b_{12} p q_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial p_2}{\partial x} + b_{12} p q_2 = 0,$$

und folglich mit Hilfe der Continuitätsgleichung:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{1}{b_{12} p} \cdot \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = k \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

und eine analoge Gleichung für das zweite Gas. Es ist somit der Diffusionscoëfficient

$$k = \frac{p_0^2 T^2}{A_{12} d_1 d_2 T_0^2} \cdot \frac{1}{p}. \tag{4}$$

Aus der Uebereinstimmung der Gleichung (1) mit der für die freie Diffusion der Flüssigkeiten ergiebt sich die dem dortigen k analoge Bedeutung unseres jetzigen Diffusionscoëfficienten als des auf die Druckeinheit reducirten Gasvolums, das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt eines Gefässes von der Querschnittseinheit tritt, wenn der Druck jedes der beiden Gase sich in der Einheit der Entfernung um die Einheit ändert. Die Grösse k ist nach den Theorien von Maxwell und Stefan constant, während O. E. Meyer den Werth von k aus der kinetischen Gastheorie als abhängig von dem Mischungsverhältniss der beiden Gase findet. Trotzdem die Beobachtungen eine Veränderlichkeit von k sehr wahrscheinlich gemacht haben, ist durch sie doch die Formel von O. E. Meyer nicht bestätigt worden, so dass es noch an einer Theorie der Gasdiffusion fehlt, welche alle Beobachtungsresultate darstellt.

Die älteren Versuche von Berthollet (3) und Graham (4), welche in grosse Ballons gefüllte Gase durch engere Röhren diffundiren liessen, zeigten im Wesentlichen nur, dass die Diffusionsgeschwindigkeiten der Gase verschieden seien, und auch Graham's Beobachtungen (10), bei denen analog seinen Versuchen mit Flüssigkeiten ein Cylinder in seinem unteren Theil mit einem schweren Gas gefüllt, darauf das leichtere geschichtet und wo dann von Zeit zu Zeit die obersten Schichten abgehoben und analysirt wurden, bleiben in ihrer Genauigkeit weit hinter denen Loschmidt's zurück. Vollends die Beobachtungen von Jungk (6) und Hidebrandson (7) liefern nur qualitative Resultate.

Loschmidt (12) unternahm seine Versuche in der Absicht, den Diffusionscoëfficienten k zu bestimmen und verfuhr in folgender Weise: Ein 97·5 *cm* langes und 2·6 *cm* im Durchmesser haltendes, vertical gestelltes Glasrohr, war an seinen beiden Enden durch Spiegelglasplatten, in denen Glashähne sassen, geschlossen und in der Mitte durch einen Schieber aus dünnem Stahlblech in 2 Abtheilungen getheilt. Die beiden Rohrhälften wurden mit den zu untersuchenden Gasen gefüllt und dann der Schieber so gestellt, dass er die Communication zwischen beiden vollkommen frei liess. Nach gewisser Zeit schloss man die Rohrhälften wieder gegen einander ab und analysirte darauf die Gasgemische in ihnen. Durch passende Umhüllungen des Apparats wurde möglichst für constante Temperatur gesorgt. Es sind bei diesen Versuchen für das Gas 1 die Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p \text{ von } x = 0 \text{ bis } x = a/2 \\ p_1 &= 0 \;\;\text{,,}\;\; x = a/2 \;\;\text{,,}\;\; x = a \end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0,$$

und die Grenzbedingungen

$$\frac{dp_1}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und für } x = a \text{ und jedes } t,$$

wo p den Druck, unter dem beide Gase eingefüllt sind, und a die Länge des ganzen Glasrohres bedeutet. Die allgemeine, diesen Bedingungen genügende Lösung der Diffusionsgleichung ist:

$$p_1 = \frac{p}{2} + \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi}{2} e^{-kt\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \cos\frac{n\pi x}{a}.$$

Berechnet man daraus die nach der Zeit t in der unteren resp. oberen Rohrhälfte befindliche Menge des ersten Gases

$$u = q\int_0^{a/2} p_1\, dx \quad \text{und} \quad o = q\int_{a/2}^{a} p_1\, dx,$$

wo q der Querschnitt des Rohres, so wird:

$$\frac{u-0}{u+0} = \frac{8}{\pi^2}\left[e^{-\frac{\pi^2 kt}{a^2}} + \frac{1}{9} e^{-\frac{9\pi^2 kt}{a^2}} + \frac{1}{25} e^{-\frac{25\pi^2 kt}{a^2}} + \ldots\right],$$

woraus sich k findet.

Aus diesen Versuchen ergab sich k umgekehrt proportional dem Druck p und direkt proportional dem Quadrat der absoluten Temperatur T. Ist also k_0 der auf 0° C., d. h. T_0 und 76 *cm* Druck bezogene Diffusionscoëfficient, so ist $k = k_0 \frac{T^2}{T_0^2} \cdot \frac{76}{p}$. Auch eine Beziehung zwischen k und den Molekulargewichten der Gase schien zu bestehen, doch liess sich diese nicht genau bestimmen. LOSCHMIDT's Werthe von k_0 giebt die nachstehende Tabelle:

	$\frac{cm^2}{sec}$		$\frac{cm^2}{sec}$
Kohlensäure — Stickoxydul	0·09831	Kohlenoxyd — Sauerstoff	0·18022
„ — Kohlenoxyd	0·14055	Schweflige Säure — Wasserstoff	0·48278
„ — Sauerstoff	0·14095	Kohlensäure — Wasserstoff	0·55585
„ — Luft	0·14231	Kohlenoxyd — Wasserstoff	0·64223
„ — Sumpfgas	0·15856	Sauerstoff — Wasserstoff	0·72167

Nach derselben Methode, bei der nur der Schieber durch einen Hahn ersetzt war, und nach einer andern, von STEFAN bei Versuchen über die Verdampfung benutzten Anordnung hat von OBERMAYER (25, 29, 35) zahlreiche Beobachtungen angestellt. Die Anordnung von STEFAN bestand darin, dass über die Mündung des Glasrohrs, in dem das eine Gas enthalten war, fortwährend das andere Gas strömte und so stets dort die Dichtigkeit des ersteren auf Null erhielt. Bei manchen Versuchen von OBERMAYER's nach dieser Methode konnte das Diffusionsrohr noch durch einen Hahn in 2 Thle. abgetheilt und beide für sich untersucht werden.

Die Lösung der Diffusionsgleichung für diese Versuchsanordnung ergiebt sich aus den Bedingungen für $t = 0$:

$$p_1 = p \text{ für } 0 < x < a,$$

und für jedes t:

$$\frac{dp_1}{dx} = 0 \text{ für } x = a \quad \text{und} \quad p_1 = 0 \text{ für } x = 0$$

(wenn die x von der Mündung des Rohres nach abwärts gerechnet werden und a die Länge des Rohres ist) als:

$$p_1 = \frac{4p}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi}{2} \cdot e^{-kt\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2} \cos\frac{n\pi x}{2a},$$

woraus die zur Zeit t noch in dem Rohre befindliche Gasmenge W folgt:

$$W = q \int_0^a p_1 \, dx = \frac{8aqp}{\pi^2} \sum_1^\infty {}_n \frac{\sin^2 n\pi/2}{n^2} e^{-kt\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2},$$

wo $q =$ Querschnitt des Rohres, und hieraus findet sich k.

Bei diesen Untersuchungen ergaben kurze Versuchszeiten stets kleinere Diffusionscoëfficienten als man bei längerer Dauer erhielt, und ebenso erwiesen die k aus dem unteren Theil der Diffusionsröhre berechnet sich grösser, als wenn man sie aus dem Gasinhalt des oberen Theiles bestimmte. Daraus schliesst von OBERMAYER: die Diffusion geht dort, wo die kleinen Dichtigkeitsgefälle herrschen, schneller und dort, wo die grossen Gefälle vorkommen, langsamer vor sich als dies nach der Theorie zu erwarten wäre. Ferner gaben von OBERMAYER die Gase mit 3 und mehratomigen Molekülen, in Wasserstoff diffundirend, grössere derartige Abweichungen als die Gase mit 2atomigen Molekülen, z. B. sind diese Abweichungen grösser für: $H - CO_2$; $H - N_2O$; $H - CH_4$; $H - C_2H_4$; $H - C_2H_6$ als für $H - O$; $H - CO$; H — Luft.

Die so beobachteten Veränderungen von k sind freilich klein und steigen ausser bei den drei und mehratomigen Molekülen fast nie über 4$\frac{0}{0}$ des Werthes von k, doch übertreffen sie durchaus die Versuchsfehler und finden sich bei beiden benutzten Methoden.

Dass k nicht constant, hat auch WAITZ (27) aus Beobachtungen gefolgert, die sich auf Luft $- CO_2$ beziehen und gestatten, den Diffusionsvorgang in verschiedenen Querschnitten eines Gefässes mit der Zeit zu verfolgen. Sein Apparat bestand aus einem starken, unten geschlossenen, oben mit einem abhebbaren Deckel versehenen Kasten von Eisenblech, der eine Tiefe und Länge von 50·3 *cm* und eine Breite von 7·1 *cm* hatte. An der breiten Aussenseite desselben waren in den Abständen 10·0 *cm*, 20·1 *cm* und 35·2 *cm* von der Mündung drei rechteckige mit dem Kasten gleich lange Röhren angelöthet. Neben diesen lagen in die schmalen Vertikalwände des Kastens eingeschnittene viereckige Fenster, die zusammen mit den benachbarten Röhrenmündungen durch planparallele Gläser verschlossen wurden. Der Kasten wurde mit CO_2 gefüllt und durch ein Paar gegenüberliegender Fenster das eine Strahlenbündel eines JAMIN'schen Interferentialrefaktors geschickt, während das andere Bündel durch die anliegende Röhre ging. Durch die nach Abheben des Deckels im Kasten stattfindende Diffusion von Luft gegen CO_2 erhielten die durch den Kasten gehenden Strahlen Phasenänderungen, welche ein Wandern der mit einem Fernrohr beobachteten Interferenzstreifen bewirkten. Aus dieser Bewegung liess sich auf die Zusammensetzung des Gasgemisches an der betreffenden Stelle im Kasten schliessen und sich der Diffusionscoëfficient bestimmen. Es ergab sich derselbe nach unserer, ein constantes k voraussetzenden Gleichung (2) berechnet als verschieden für die drei untersuchten Querschnitte und auch in jedem einzelnen Querschnitt näherte sich k erst allmählich einem constanten Grenzwerth. Diese Grenzwerthe für den obersten und untersten Querschnitt unterscheiden sich etwa um 4$\frac{0}{0}$. Aus diesen Versuchen hat HAUSMANINGER (28) k genähert ausgerechnet unter der Annahme, dass die Diffusionsgleichung laute:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial p}{\partial x}\right), \tag{5}$$

und fand danach, dass k für Luft $- CO_2$ wahrscheinlich wirklich nicht constant sei.

Wenn nun auch nach allem Angeführten k wohl veränderlich sein wird und somit Gleichung (1) nicht mehr den Diffusionsvorgang richtig darstellt, sondern an ihre Stelle Gleichung (5) zu setzen wäre, so weichen doch die beobachteten

nach (1) berechneten Werthe von k so wenig von einander ab, dass sie als gute Näherungswerthe dieser Grösse betrachtet werden dürfen.

Die folgende Tabelle erhält nach von OBERMAYER diese Werthe von k_0, die nach der Formel

$$k_0 = k\left(\frac{T_0}{T}\right)^n \cdot \frac{76}{p} \tag{6}$$

auf 76 *cm* Druck und die Temperatur $T_0 = 273°$ der absoluten Scale aus den bei dem Druck p und der Temperatur T gewonnenen reduducirt sind. n bedeutet dabei den Temperaturcoëfficienten, der nach LOSCHMIDT's Untersuchungen $= 2$, nach von OBERMAYER's gleich zu erwähnenden genaueren Versuchen für verschiedene Gascombinationen aber verschiedenene Werthe hat. In der Tabelle ist für die Gascombinationen: Luft — CO_2; CO_2 — N_2O und O — CO_2 $n = 2$ angenommen, für alle andern aber $n = 1{\cdot}75$.

Gase	$k_0 \frac{cm^2}{sec}$	Gase	$k_0 \frac{cm^2}{sec}$	Gase	$k_0 \frac{cm^2}{sec}$
$CO_2 - N_2O$	0·09166	$CO_2 - CH_4$	0·14650	$H - CO_2$	0·53409
$CO_2 - C_2H_4$	0·10061	Luft — O	0·17778	$H - N_2O$	0·53473
$CO - C_2H_4$	0·11639	N — O	0·17875	$H - CH_4$	0·62544
$CO - CO_2$	0·13142	CO — O	0·18717	H — Luft	0·63405
Luft — CO_2	0·13433	$H - C_2H_6$	0·45933	H — CO	0·64884
O — CO_2	0·13569	$H - C_2H_4$	0·48627	H — O	0·66550

Diese Zahlen sind nur aus solchen Versuchen v. OBERMAYER's abgeleitet, die mindestens 40 *min* gedauert haben, sie stellen also Werthe von k dar, die grösser sind als diejenigen, welche man aus Gleichung (1) für kurze Versuchsdauern erhält.

Die Versuche LOSCHMIDT's über den Einfluss der Temperatur auf die Gasdiffusion hat von OBERMAYER (22) ergänzt und erweitert. Er beobachtete mit seinem Apparat einmal bei Zimmertemperatur von 8—13° C. und dann beim Schmelzpunkt des Paraffins d. h. bei 61·5° C. In diesem Intervall findet er den Exponenten n der Formel (6) durch folgende Zahlen ausgedrückt:

Luft — CO_2 : $n = 1{\cdot}968$	CO_2 — H : $n = 1{\cdot}742$
H — O : $n = 1{\cdot}755$	O — N : $n = 1{\cdot}792$
CO — O : $n = 1{\cdot}785$	CO_2 — N_2O : $n = 2{\cdot}050$.

v. OBERMAYER schliesst aus diesen Zahlen, dass n für die bisher permanent genannten Gase ungefähr $1\frac{3}{4}$, für die coercibeln Gase nahe $= 2$ ist.

Ueber die Diffusion eines Gemenges von 3 Gasen haben WRETSCKO (13) und BENIGAR (14) mit LOSCHMIDT's Apparat Versuche angestellt, um die Theorie von STEFAN (15) zu prüfen. Dieser erhält für 3 Gase analog der früheren Entwickelung für 2 Gase die Gleichung:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + A_{12}\rho_1\rho_2(u_1 - u_2) + A_{13}\rho_1\rho_3(u_1 - u_3) = 0,$$

für das erste Gas und eben solche Gleichungen für die beiden andern, wo die Zeichen die frühere Bedeutung haben. Daraus folgt wieder:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = b_{12}(p_1 q_2 - p_2 q_1) + b_{13}(p_1 q_3 - p_3 q_1),$$

wozu die Continuitätsgleichung $\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$ kommt.

Unter der Voraussetzung, dass das dritte (beigemengte) Gas gleichförmig vertheilt, d. h. $q_3 = 0$ oder $p_3 = const$ sei, erhält man

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{1}{b_{13}p - (b_{12} - b_{13})p_3}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = k'\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{1}{b_{12}p - (b_{12} - b_{13})p_3}\,\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = k''\,\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2},$$

wo p der constante Gesammtdruck der drei Gase ist, unter dem die Diffusion erfolgt.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich nachstehende Sätze für die Gase *A* und *B*, denen das Gas *C* beigemengt ist: Ist *C* eines der Gase *A* und *B*, so wird die Diffusionsgeschwindigkeit von *A* und *B* nicht geändert. Das Gas *C* vergrössert oder verkleinert die Diffusionsgeschwindigkeit für jedes der beiden Gase *A* und *B*, je nachdem sein specifisches Gewicht unter oder über dem des andern der beiden Gase liegt. Das Gas *C* wird bei dieser Diffusion auf die Seite des specifisch leichteren getrieben.

Bei Ableitung dieser Sätze ist von der Beziehung Gebrauch gemacht, dass die Diffusionscoëfficienten sich ungefähr umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Dichten der Gase verhalten. Ferner ist die Annahme benutzt, dass $q_3 = 0$ sei, was nicht richtig ist, wie die Sätze selbst schon zeigen. Trotzdem jedoch sind diese Resultate STEFAN's durch die Beobachtungen von WRETSCHKO und BENINGAR im Ganzen bestätigt worden. STEFAN hat seine Theorie aber noch genauer geprüft, indem er eine approximative Integration der Grundgleichungen vornahm und dann die Gasmengen berechnete, welche in den beiden Rohrhälften nach der Zeit t vorhanden sind. Die Rechnungsergebnisse stimmen gut mit den Beobachtungen WRETSCHKO's und BENIGAR's überein.

Die Diffusion von Dämpfen behandelte STEFAN (18) theoretisch und experimentell. Er stellte zu dem Zweck Versuche über die Verdampfung einer Flüssigkeit aus einem engen, mit Theilung versehenen Röhrchen in die freie Atmosphäre oder in einen Gasstrom, der über das Röhrchen geleitet wurde an und beobachtete die Zeiten, in denen die Flüssigkeit um gemessene Strecken im Röhrchen sank. Diese Zeiten sind bestimmt durch die Diffusionsgeschwindigkeit des Dampfes durch die Luft. Ausgehend von STEFAN's früher genannten Voraussetzungen und Entwicklungen, erhält man, wenn die Indices 1 resp. 2 sich auf den Dampf resp. die Luft beziehen, und man sich denkt, das Niveau der Flüssigkeit werde stets in derselben Höhe gehalten, für den dann eintretenden stationären Zustand:

$$\frac{dp_1}{dx} + A_{12}\rho_1\rho_2 u_1 = 0 \quad \text{da} \quad u_2 = 0,$$

oder hier wieder die Drucke p statt der Dichten ρ eingeführt:

$$\frac{dp_1}{dx} + \frac{A_{12}d_1 d_2 T_0}{p_0 T}\,p_2 v_1 = 0.$$

Setzt man

$$k = \frac{p_0 T}{A_{12}d_1 d_2 T_0}, \quad \text{folglich} \quad \frac{dp_1}{dx} + \frac{p_2 v_1}{k} = 0,$$

wo k der Diffusionscoëfficient ist, dessen Bedeutung, wie man sieht, mit der früher gegebenen Definition übereinstimmt. Ist p der äussere Luftdruck, also $p_2 = p - p_1$ und

$$v_1 = k\,\frac{d\,log\,(p - p_1)}{dx}.$$

Hat der Partialdruck des Dampfes über der Flüssigkeitsoberfläche den Werth p_1', am offenen Ende der Röhre den Werth p_2'', und ist h die Entfernung dieses Endes vom Niveau der Flüssigkeit, so wird

$$v_1 = \frac{k}{h}\,log\,\frac{p - p_1''}{p - p_1'}.$$

Setzt man $p_1''=0$ und schreibt statt p_1' kurz p_1, also $v_1 = \frac{k}{h} log \frac{p}{p - p_1}$.

Die in der Zeit dt entwickelte Dampfmenge $v_1 dt$ entspricht der Senkung dh des Flüssigkeitsniveaus im Gefäss vom Querschnitt 1. Ist d die Dichte des Dampfes bei der beobachteten Temperatur T und dem Druck p und s_1 die Dichte der Flüssigkeit folglich

$$d \cdot v_1 \cdot dt = s_1 \cdot dh.$$

Setzt man hier den Werth von v_1 ein und bezeichnet mit h_0 resp. h_1 die Tiefe des Niveaus der Flüssigkeit unter der Mündung des Röhrchens zur Zeit t_0 resp. t_1 und mit d_1 die Dichte d bei 0° und 76 *cm* Druck, so wird

$$k = \frac{(h_1 + h_0)(h_1 - h_0)}{2} \frac{s_1}{d_1} \cdot \frac{1}{(t_1 - t_0)[log\, p - log\,(p - p_1)]}. \qquad (7)$$

STEFAN fand auf diese Weise für:

Aether — Luft	$k = 0{\cdot}0827$	$\frac{cm^2}{sec}$	bei 19°
Aether — Wasserstoff . . .	$k = 0{\cdot}3054$		„ 19·2°
Schwefelkohlenstoff — Luft .	$k = 0{\cdot}0995$		„ 16°.

Definirt man k nicht als das bei 0°, sondern als das bei der Versuchstemperatur T gemessene Dampfvolum, so erhält man die Formel, nach der WINKELMANN (32, 33, 34, 36) seine Beobachtungen berechnet hat, und die aus Gleichung (7) entsteht, wenn man die rechte Seite mit $\frac{T}{T_0}$, d. h. $\frac{273 + \vartheta}{273}$ multiplicirt. WINKELMANN's Apparat bestand aus einer weiten, unten enger ausgezogenen und geschlossenen Glasröhre. In den engen Theil setzte man das getheilte Verdampfungsröhrchen. Die weite Röhre war oben mit einem doppelt durchbohrten Kork geschlossen, durch dessen eine Bohrung eine tiefer hinabragende Glasröhre den Gasstrom zuführte, in dem die Verdampfung stattfinden sollte und der durch die zweite Bohrung wieder entwich. Das Ganze konnte in ein Wasserbad gesetzt und so bei verschiedenen Temperaturen beobachtet werden. Bei einigen der untersuchten Dämpfe, besonders bei Wasser, machte sich ein Einfluss der Tiefe des Flüssigkeitsniveaus auf k geltend, so dass k mit zunehmender Tiefe sich einem grössten Grenzwerth nähert. In den Tabellen sind für Wasser diese Grenzwerthe angeführt. Ueber die Quellen woher die andern nach Gleichung (7) zur Berechnung von k nöthige Grössen genommen sind, muss auf die Abhandlungen selbst verwiesen werden. Die Diffusionscoëfficienten der folgenden Tabelle sind auf 0° reducirt unter der Voraussetzung, dass der Temperaturcoëfficient $n = 2$ sei.

Diffusionscoëfficienten $\left(\text{in } \frac{cm^2}{sec}\right)$ der Dämpfe bei 0° C. und 760 *mm* Druck.

	Wasserstoff	Luft	Kohlensäure
Wasserdampf	0·687	0·198	0·131
Aether	0·296	0·0775	0·0552
Schwefelkohlenstoff	0·369	0·0883	0·0629
Benzol	0·294	0·0751	0·0527
Alkohole: Methyl	0·5001	0·1325	0·0880
Alkohole: Aethyl	0·3806	0·0994	0·0693
Alkohole: Propyl	0·3153	0·0803	0·0577
Alkohole: Isobutyl	0·2771	0·0688	0·0483
Alkohole: Normal-Butyl	0·2716	0·0681	0·0476
Alkohole: Gährungs-Amyl . . .	0·2340	0·0585	0·0419
Alkohole: Normal-Amyl	0·2351	0·0589	0·0422
Alkohole: Normal-Hexyl . . .	0·1998	0·0499	0·0351

		Wasserstoff	Luft	Kohlensäure
Alkohol	Ameisensäure	0·5131	0·1315	0·0879
	Essigsäure	0·4040	0·1061	0·0713
	Propionsäure	0·3315	0·0854	0·0593
	Buttersäure	0·2639	0·0680	0·0476
	Isobuttersäure . . .	0·2713	0·0704	0·0472
	Isovaleriansäure . . .	0·2118	0·0555	0·0375
Ester	Ameisensäure-Aethyl .	0·3277	0·0840	0·0557
	„ -Propyl .	0·2810	0·0713	0·0490
	Essigsäure-Methyl . .	0·3357	0·0852	0·0572
	„ -Aethyl . .	0·2727	0·0709	0·0487
	„ -Isobutyl . .	0·2237	0·0552	0·0400
	Propionsäure-Methyl .	0·2949	0·0745	0·0528
	„ -Aethyl .	0·2373	0·0630	0·0450
	„ -Propyl .	0·2121	0·0554	0·0396
	„ -Isobutyl .	0·1998	0·0506	0·0365
	„ -Amyl . .	0·1796	0·0442	0·0319
	Buttersäure-Methyl . .	0·2422	0·0640	0·0438
	„ -Aethyl . .	0·2238	0·0573	0·0406
	„ -Propyl . .	0·2059	0·0523	0·0364
	„ -Isobutyl .	0·1850	0·0474	0·0332
	Isobuttersäure-Methyl .	0·2567	0·0641	0·0450
	„ -Aethyl .	0·2312	0·0592	0·0419
	„ -Propyl .	0·2120	0·0539	0·0388
	„ -Isobutyl .	0·1889	0·0468	0·0366
	„ -Amyl .	0·1724	0·0426	0·0305
	Valeriansäure-Aethyl .	0·2050	0·0505	0·0366
	„ -Propyl .	0·1891	0·0466	0·0341
	„ -Isobutyl .	0·1694	0·0423	0·0308

Bildet man für die Ester der Tabelle die Produkte aus dem Diffusionscoëfficienten (für Luft) und der Dampfdichte, so liegen deren Werthe zwischen 0·216 und 0·243, d. h. sind also näherungsweise constant. Wäre das Produkt völlig constant, so hätte man das Resultat: Es diffundirt unter gleichen Umständen (gleicher Temperatur und gleichem Druckgefälle) in der gleichen Zeit die gleiche Gewichtsmenge der verschiedenen Dämpfe.

Nicht sehr abweichende Resultate hat GUGLIELMO (31) nach fast derselben Methode für Wasserdampf $\left\{\begin{array}{l}H\\ \text{Luft}\\ CO_2\end{array}\right.$ gewonnen.

Mit seinen Versuchen hat WINKELMANN die von O. E. MEYER (21) für den Diffusionscoëfficienten aufgestellte Formel zu prüfen gesucht. Die Formel, die O. E. MEYER aus der kinetischen Gastheorie ableitet, lautet:

$$k = \frac{\pi}{8N}\left(\frac{N_2 w_1^2}{C_1} + \frac{N_1 w_1^2}{C_2}\right),$$

wo N_1 resp. N_2 die Anzahl der in der Volumeinheit enthaltenen Theilchen des ersten resp. zweiten Gases bedeutet und $N = N_1 + N_2$ ist. w_1 und w_2 sind die molekularen Geschwindigkeiten der beiden Gase und C_1 resp. C_2 die Zahl der Zusammenstösse, die ein Molekül des ersten resp. zweiten Gases erfährt. Durch Einführung der Molekulargewichte m_1, m_2 und der mittleren Weglängen l_1, l_2 kann man dieser Formel die Gestalt geben:

$$k = \frac{\pi}{8} w \sqrt{m} \left[\frac{1}{m_1 \left(\frac{N_1}{N_2} \frac{1}{l_1 \sqrt{m_1}} + B \right)} + \frac{1}{m_2 \left(\frac{N_2}{N_1} \frac{1}{l_2 \sqrt{m_2}} + B \right)} \right],$$

$$\text{wo} \quad B = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}} \right)^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}.$$

Danach hängt k von dem Mischungsverhältniss $\frac{N_1}{N_2}$ der beiden Gase ab und variirt mit diesem. Bezeichnen k_{12} resp. k_{12}' die Werthe von k für 2 verschiedene Grössen von $\frac{N_1}{N_2}$ und haben k_{13} resp. k_{13}' analoge Bedeutung, so lassen sich aus WINKELMANN's Versuchen bei 2 Temperaturen die Verhältnisse $\frac{k_{12}}{k_{13}}$ und $\frac{k_{12}'}{k_{13}'}$ bestimmen und mit der Theorie vergleichen. Diffundirt nämlich z. B. Wasserdampf einmal in H, das andere mal in CO_2 unter gleichen Umständen und sind a_{12} resp. a_{13} die in der Zeiteinheit bei der Diffusion in H resp. CO_2 durch den Querschnitt der Röhre tretenden Dampfmengen, so darf man setzen: $a_{12} = k_{12} f(p, p_1)$ und $a_{13} = k_{13} f(p, p_1)$, wo p resp. p_1 der Gesammtdruck von Gas und Dampf resp. der Maximaldruck des Dampfes ist. Man hat daher

$$\frac{k_{12}}{k_{13}} = \frac{a_{12}}{a_{13}}.$$

In gleicher Weise lässt sich das Verhältniss $\frac{k_{12}'}{k_{13}'}$ für den Maximaldruck p_1' des Dampfes bestimmen und so eine Prüfung der Theorie durch die Beobachtung ohne Kenntniss der Function f anstellen. Die Grössen a_{12} etc. sind proportional mit den (vergl. 7) direkt durch den Versuch gegebenen $\frac{t_1 - t_0}{\frac{1}{2}(h_1 + h_0)(h_1 - h_0)}$ und das Verhältniss $\frac{N_1}{N_2}$ ist genähert $= \frac{\frac{p_1}{2}}{p - \frac{p_1}{2}}$. Die zum Vergleich benutzten Versuche bezogen sich auf die Temperaturen 92·4° resp. 49·5° für die $\frac{N_1}{N_2} = \frac{288}{442}$ resp. $= \frac{44{\cdot}8}{685{\cdot}2}$ waren, wenn $\frac{k_{12}}{k_{13}} = \frac{\text{Diffusionscoëfficient von } H_2O\text{-Dampf} - H}{\text{Diffusionscoëfficient von } H_2O\text{-Dampf} - CO_2}$, oder wenn $\frac{k_{12}}{k_{14}}$ benutzt wurde, wo das Gas 4 Luft bezeichnet. Dieser Vergleich ergab einen grossen Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung, so dass die Formel von O. E. MEYER die Beobachtungen nicht darzustellen im Stande war.

Eine bessere (wenn auch nicht vollständige) Uebereinstimmung mit den Versuchen giebt die Formel von STEFAN, bei dessen Theorie, wie schon bemerkt, k als constant angesehen wird. Nach STEFAN war die Diffusion zweier Gase ineinander:

$$k = \frac{1}{A_{12}} \frac{p_0 p_0}{d_1 d_2} \frac{T^2}{T_0^2} \cdot \frac{1}{p}, \tag{4}$$

wo die Grössen die frühere Bedeutung haben und wo also A_{12} den Widerstand bestimmt, den das eine Gas dem andern bei der Diffusion entgegensetzt. Dieser Widerstand ist nach der Gastheorie die Bewegungsgrösse, welche das eine Gas an das andere abgiebt. STEFAN (16) geht nun von der Anschauung von CLAUSIUS und der ersten MAXWELL'schen Theorie aus, nach der die Molekeln nur beim Zusammenstoss und wie elastische Kugeln wirken und findet so

$$A_{12} = \frac{4\pi s^2}{3} \frac{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}{m_1 + m_2},$$

wo s = Summe der Kugelradien der Moleküle der ersten und zweiten Art, welche Formel freilich den Temperaturcoëfficienten nicht wie die meisten Beobachtungen $= 2$, sondern $= \frac{3}{2}$ giebt. Betrachtet man das Gas bei Normaldruck und Normaltemperatur, so erhält man dafür

$$k = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{\sqrt{m_1 m_2}} \frac{w\sqrt{m}}{\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}}\right)^2},$$

wo w und m sich auf ein 3. Normalglas z. B. H beziehen. Nach dieser Formel ist man im Stande, aus den von der Gastheorie gelieferten Grössen der rechten Seite k zu berechnen, und umgekehrt kann man die mittlere Weglänge l_1 aus ihr finden, wenn l_2 und k bekannt sind. Das Letztere hat WINKELMANN gethan und kommt dabei zu dem Resultat, dass eine plattenförmige Anordnung der Atome im Molekül wahrscheinlicher sei als eine kugelförmige.

Ebenso wie STEFAN's Theorie giebt auch die zweite Theorie von MAXWELL (11) einen constanten Werth des Diffusionscoëfficienten, was nach dem früher Gesagten wahrscheinlich eine kleine Correction derselben nöthig machen würde. Eine Fortbildung dieser Theorie hat BOLTZMANN (26) gestützt auf seine Betrachtungen über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen gegeben.

Aus der Annahme, dass die Molekeln beim Zusammenstoss sich wie elastische Kugeln verhalten hat MAXWELL (19) für den Diffusionscoëfficienten die Formel entwickelt:

$$k = \frac{1}{2\sqrt{6\pi}} \cdot \frac{w}{N} \sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \cdot \frac{1}{s_{12}^2},$$

wo s_{12} den Abstand zwischen den Centren der 2 Molekeln beim Zusammenstoss bezeichnet, w ist die Geschwindigkeit eines H-Moleküls bei 0°, die sich ergiebt, wenn man den Mittelwerth von w^2 berechnet, und N die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit und im Normalzustand. Die Grösse $\frac{1}{2\sqrt{6\pi}} \cdot \frac{w}{N} = a^2$ ist für alle Gase dieselbe, und setzt man $\varsigma_{12}^2 = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$, so kann diese aus LOSCHMIDT's Versuchen gefunden werden. Es ist ferner $s_{12} = a\varsigma_{12}$. Sind d_1 und d_2 die Durchmesser der 2 Molekeln, d. h. $s_{12} = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)$ und setzt man $d = a\delta$, folglich $\varsigma_{12} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$. MAXWELL vergleicht nun die Werthe von $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$ mit den von LOSCHMIDT beobachteten von $\sqrt{\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}}$ und findet eine gute Uebereinstimmung.

b) Diffusion durch feste Körper.

Die meisten unter diesem Namen angestellten Versuche gehören in soweit eigentlich nicht in unser Kapitel, als sie die Vermischung der Gase nicht ohne Einwirkung äusserer Kräfte darstellen, sondern diese Mischung unter einem Ueberdruck auf der einen Seite des festen Körpers erfolgen lassen. Weil aber die Bezeichnung Diffusion auch für diese Vorgänge allgemein üblich ist, wollen wir auch sie im Folgenden behandeln.

Die Erscheinung, dass Gase durch poröse Körper z. B. Thonröhren hindurch gehen, kannte bereits PRIESTLEY und ähnliche Beobachtungen stellten FARADAY (1813), DÖBEREINER (1826) u. A. an, doch untersuchte diese Diffusion (wie er sie nennt) erst GRAHAM (1833) ausführlich und stellte das nach ihm benannte Gesetz auf. Die Giltigkeit dieses Gesetzes wurde dann für Gyps von BUNSEN (1857) bestritten und von GRAHAM (1863) nur für Körper mit sehr feinen Oeffnungen aufrecht er-

halten. BUNSEN bewies auch, dass die Diffusionsgeschwindigkeit innerhalb gewisser Grenzen der Druckdifferenz des Gases auf beiden Seiten der Scheidewand proportional ist. Beobachtungen über unsern Gegenstand sind dann hauptsächlich für Gase von WROBLEWSKI (1876) mit Kautschuk, von HUEFNER (1882) mit Hydrophan und für Dämpfe von PULUY (1877) mit Gyps angestellt worden. STEFAN (1871) entwickelte eine Theorie unserer Erscheinung, die KIRCHHOFF und HANSEMANN (1884) geprüft haben, und DUFOUR und FEDDERSEN (1873) stellten Beobachtungen über den Zusammenhang zwischen Wärme- und Diffusionserscheinungen an. Endlich ist auch die Durchlässigkeit vieler Metalle für Gase von ST. CLAIRE-DEVILLE (1863), GRAHAM (1866) und anderen Forschern nachgewiesen worden.

GRAHAM's (5) grundlegende Untersuchungen wurden so angestellt, dass die Diffusion eines Gases durch einen Gypspfropfen beobachtet wurde, der oben eine Glasröhre verschloss, in welcher unten das Gas durch Wasser abgesperrt war. Die Diffusion dieses beschränkten Gasvolumens geschah stets gegen die Luft der freien Atmosphäre und das Gas wurde möglichst unter Atmosphärendruck gehalten, indem das Glasrohr in ein weiteres Wassergefäss tauchte und gehoben oder gesenkt wurde, so dass das Wasser im Rohre und äusseren Gefässe gleich hoch stand. Um auch die äussere Luft gleich dem Gas in der Diffusionröhre mit Wasser zu sättigen setzte GRAHAM über den Gyps eine mit Wasser befeuchtete Düte von Papier. Erst nach längerer Zeit, wo man den Austausch des Gases und der Luft als beendigt ansehen konnte, wurde das eingetretene Luftvolumen gemessen. Das Gasvolumen, das für die Einheit des Luftvolumens ausgetreten war, nannte GRAHAM das Diffusionsvolumen des Gases. GRAHAM stellt seine Resultate in folgender Tabelle zusammen, wo δ die Dichtigkeit bezeichnet:

Gase	Spec. Gew. $= \delta$	$\sqrt{\frac{1}{\delta}}$	Diffusions-volumen
Wasserstoff	0·0694	3·7947	3·83
Kohlenwasserstoff	0·555	1·3414	1·344
Oelbildendes Gas	0·972	1·0140	1·0191
Kohlenoxyd	0·972	1·0140	1·0149
Stickstoff	0·972	1·0140	1·0143
Sauerstoff	1·111	0·9487	0·9487
Schwefelwasserstoff	1·1805	0·9204	0·95
Stickstoffoxydul	1·527	0·8091	0·82
Kohlensäure	1·527	0·8091	0·812
Schweflige Säure	2·222	0·6708	0·68

Danach sind die Diffusionsgeschwindigkeiten der Gase den Quadratwurzeln aus ihren specifischen Gewichten umgekehrt proportional, sie verhalten sich also, als ob Effusion, d. h. Ausströmen der Gase aus enger Oeffnung in dünner Wand stattfände. GRAHAM gründete auf dieses Verhalten ein Verfahren, aus Gasgemischen die einzelnen Gase durch Diffusion zu trennen und nannte diese Methode Atmolyse.

BUNSEN (9), der ähnliche Versuche anstellte und durch eine passende Vorrichtung das Diffusionsrohr allmählich heben und senken konnte, so dass der Druck in ihm und aussen bis auf 0·1 *mm* Hg derselbe blieb, fand für einen Gypspfropfen dies Gesetz nicht bestätigt. Er machte ferner darauf aufmerksam, dass bei der Diffusion eines begrenzten Gasvolumens gegen ein unbegrenztes der Austausch der Gase mit der Verdünnung des anfänglich im Diffusionsrohr enthaltenen immer langsamer werden müsse, so dass dann in den späteren Stadien

des Processes keine Beobachtung mehr möglich sei, da der nicht mehr zu corrigirende Ueberdruck von 0·1 *mm* in diesen Zeiträumen beträchtliche Gasmengen durch den Gyps zu pressen im Stande sei. Zugleich aber ergaben sich bei BUNSEN für den von ihm benützten Gyps die sich austauschenden Mengen der Gase während der ganzen Zeit seiner Beobachtung constant. Er konnte seinen Beobachtungen gut entsprechende Gleichungen unter der Annahme gewinnen, dass auch in Beziehung auf die Partialdrucke gemischte Gase innerhalb gewisser Grenzen die Geschwindigkeit, mit der ein Gas ein Gypsdiaphragma durchströmt, proportional sei: 1) der Druckdifferenz des Gases oberhalb und unterhalb des Diaphragmas und 2) einem Reibungscoëfficienten, der von der Natur des Gases und des Diaphragmas abhängt. GRAHAM (12) wiederholte dann BUNSEN's Versuche mit einem viel feinporigeren Material als Gyps, mit künstlich gepresstem Graphit. Er kittete eine Platte von diesem über das stark erweiterte obere Ende einer langen Glasröhre, die mit dem unteren Ende in Quecksilber stand und eine Art Barometer bildete, dessen Vacuum der erweiterte Theil war. Ueber den Graphit liess er unter Atmosphärendruck einen Gasstrom streichen, von dem Gas durch den Graphit diffundirte und das Quecksilber im Rohr zum Sinken brachte. Es wurden die Zeiten beobachtet, in denen das Quecksilber für verschiedene Gase um dieselbe Strecke (1 oder 2 Zoll) bei gleichem Ueberdruck sank. Es war z. B.

	Diffusionszeit	$\sqrt{\delta}$
Sauerstoff	1	1
Wasserstoff	0·2505	0·2502
Luft	0·9501	0·9507
Kohlensäure	1·1860	1·176

Also auch diese Versuche zeigten deutlich das Gesetz, dass die Diffusionsgeschwindigkeiten der Gase der Quadratwurzel aus den specifischen Gewichten umgekehrt proportional sind. Wir werden, mit Berücksichtigung von Versuchen anderer Beobachter, in der That dies Gesetz wenn auch nicht als streng, so doch als angenähert richtig ansehen dürfen für feste Körper für die keine merkliche Gasabsorption und durch die keine Strömung von Gasmengen als Ganzes stattfinden kann.

BUNSEN für Gyps, wie später GRAHAM für Graphit fanden bei Versuchen, wo das Gas unter Ueberdruck diffundirte, die Diffusionsgeschwindigkeit dem Ueberdruck proportional. Dies bestätigte sich auch HUEFNER (36) innerhalb enger Druckgrenzen für Hydrophan, der von REUSCH (18) als ein zu Diffusionsversuchen sehr geeignetes Material erkannt worden war. HUEFNER beobachtete mit den BUNSEN'schen und GRAHAM'schen ganz ähnlichen Apparaten und liess unter einem bestimmten Ueberdruck die einzelnen Gase durch den Hydrophan gehen, so dass auf beiden Seiten desselben stets das gleiche Gas war. Die von ihm gefundenen Verhältnisse sind mit den nach dem GRAHAM'schen Gesetz erlangten in folgender Tabelle zusammengestellt, wo H die Diffusionsgeschwindigkeit von H etc. bedeutet:

	Gefunden	Nach GRAHAM verlangt			Gefunden	Nach GRAHAM verlangt	
$\frac{H}{O}$	$\frac{0·06776}{0·01673} = 4·0502$	$\frac{\sqrt{1·1056}}{\sqrt{0·0692}} = 3·995$	bei 22°	$\frac{N}{O}$	$\frac{0·01718}{0·01575} = 1·090$	$\frac{\sqrt{1·1056}}{\sqrt{0·9713}} = 1·067$	bei 8·7°
$\frac{O}{CO_2}$	$\frac{0·01673}{0·01553} = 1·077$	$\frac{\sqrt{1·5202}}{\sqrt{1·1056}} = 1·172$		$\frac{O}{Luft}$	$\frac{0·01575}{0·01688} = 0·933$	$\frac{\sqrt{1·0000}}{\sqrt{1·1056}} = 0·951$	

Die grösste Abweichung zeigt hier $\frac{O}{CO_2}$, die sich aber dadurch erklärt, dass, wie Versuche ergaben, CO_2 beträchtlich von Hydrophan absorbirt wurde. Liess HUEFNER jedoch 2 verschiedene Gase gegen einander diffundiren, füllte er z. B. H in das Diffusionsrohr und liess einen O-Strom über den Hydrophan streichen, so waren die ausgetauschten Gasvolumina im Anfang des Versuchs noch in erträglicher, später aber in gar keiner Uebereinstimmung mehr mit dem GRAHAM'schen Gesetze. Es wurde nämlich das Verhältniss $\frac{H}{O}$ im Verlaufe des Versuchs allmählich kleiner.

STEFAN[1]) hat für die Diffusion der Gase durch poröse Scheidewände eine Theorie entwickelt, die sich ganz an seine Theorie über freie Gasdiffusion (s. d.) anschliesst und die poröse Wand als ein unbewegliches Gas betrachtet. Geht nur ein Gas durch die Wand und setzt man für diese der Annahme nach $u_2 = 0$, so werden die Grundgleichungen für die Bewegung:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + A_{12}\rho_1\rho_2 u_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0.$$

Sind P_1 und P_1' die Drucke vor und hinter dem Diaphragma, dessen Dicke Δ und α eine von der Natur desselben abhängige Constante, folglich

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\alpha\frac{P_1 - P_1'}{\Delta}.$$

Definirt man den Diffusionscoëfficienten des Gases gegen das Diaphragma in Uebereinstimmung mit Früherem durch: $k_1 = \frac{\alpha p_0}{A_{12}\rho_2 s_1}$, wo s_1 die Dichte des Gases beim Normaldruck p_0 und der Versuchstemperatur, so wird das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Diaphragmas gehende Gasvolumen für Normaldruck und Versuchstemperatur:

$$v_1 = \frac{k_1}{p_0}\,\frac{P_1 - P_1'}{\Delta}, \tag{1}$$

woraus die von BUNSEN beobachtete Proportionalität des v mit der Druckdifferenz unmittelbar folgt.

Die Grösse α bezeichnet das Verhältniss der Porenräume zu dem ganzen Volumen des porösen Körpers, wenn keine Condensation des Gases in den Poren stattfindet und es ist $\alpha = \frac{p_1}{P_1}$, wo P_1 den Druck des freien und p_1 des in dem Diaphragma eingeschlossenen Gases bedeutet. — Für die Bewegung zweier Gase durch die Scheidewand geht STEFAN von seinen Gleichungen für ein Gemenge von 3 Gasen aus, wo die Scheidewand als das dritte, ruhende Gas angesehen und $u_3 = 0$ gesetzt wird, d. h. von

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + A_{12}\rho_1\rho_2(u_1 - u_2) + A_{13}\rho_3\rho_1 u_1 = 0 \text{ etc.},$$

welche Gleichungen bei Vernachlässigung des Widerstandes der 2 Gase gegen einander d. h. bei Weglassung des mittleren Gliedes in diejenigen übergehen, welche schon BUNSEN aufgestellt hatte, unter Zugrundelegung der beiden von ihm für Gyps experimentell gefundenen Sätze, dass das diffundirende Gasvolumen der Druckdifferenz zu beiden Seiten des Diaphragmas proportional sei und dass bei constant gehaltenem Druck, die durch die Scheidewand sich austauschenden

[1]) In (15) unter a) freie Diffusion.

Mengen zweier Gase in einem constanten Verhältniss stehen. Durch Umformung dieser und der Continuitätsgleichungen erhält man so:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{k}(p_2 v_1 - p_1 v_2) + \frac{\alpha p_1}{k} v_1 = 0$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{1}{k}(p_1 v_2 - p_2 v_1) + \frac{\alpha p_0}{k} v_2 = 0$$

$$\frac{1}{p_0}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0; \qquad \frac{1}{p_0}\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0$$

als Grundgleichungen für unsern Vorgang, wo k der Coëfficient der freien Diffusion der beiden Gase gegen einander beim Normaldruck p_0 ist und die andern Grössen früher schon angegebene Bedeutungen haben.

Um eine genäherte Vorstellung von der Grösse der Diffusionscoëfficienten der Gase gegen eine solche poröse Wand zu bekommen, berechnete STEFAN k_1 für einen Versuch, in dem Luft durch eine Thonzelle getrieben wurde nach der Formel (1) und findet $k_1 = 0{\cdot}30 \frac{cm^2}{sec}$. Ebenso berechnet STEFAN aus den letzten Gleichungen unter vereinfachenden Voraussetzungen den Austausch zwischen O und N durch ein solches Diaphragma, wenn jedes der beiden Gase auf der einen Seite unter dem constanten Druck $p_0/2$ und auf der andern unter dem Druck o gehalten wird und findet, dass die Widerstände solcher poröser Körper von derselben Ordnung sind wie die, mit denen Gase bei freier Diffusion einander widerstehen.

Diesem Resultate widersprechen aber die Beobachtungen von HANSEMANN (37), der zur Berechnung seiner Versuche Gleichungen benutzte, welche KIRCHHOFF (38) aus den zuletzt angeführten STEFAN'schen Formeln entwickelt hat. Der complicirte Apparat von HANSEMANN sollte im Gegensatz zu der BUNSEN'schen Anordnung dazu dienen, die Mischung der Gase durch ein Diaphragma zu beobachten, während das Gasvolumen constant blieb und die sich verändernden Drucke gemessen wurden. Das Diaghragma bildete dabei die Oeffnung eines Hahnes, der bei passender Drehung die 2 Kammern mit einander verbinden konnte, in denen sich die beiden Gase vor dem Versuch getrennt befanden. Rührvorrichtungen in den Kammern sollten die schnelle Mischung der diffundirten Gase bewirken, sie erwiesen sich aber als unnöthig, da die Diffusion in merklich gleicher Weise erfolgte, mochten die Rührer nun in Bewegung sein oder nicht. Die eine Wand jeder Kammer war durch eine gewellte Stahlblechscheibe gebildet, die sich bei Aenderung des Druckes deformirte, und diese Deformation, auf einen Spiegel übertragen, diente zur Messung des Druckes, während das Volumen der Kammer merklich constant blieb. Die nähere Einrichtung des Apparates und die Berechung der Versuche muss in den Abhandlungen von HANSEMANN und KIRCHHOFF nachgesehen werden. Zuerst wurde das BUNSEN'sche Gesetz der Proportionalität von Diffusionsgeschwindigkeit und Druckdifferenz innerhalb der Grenzen von 570 *mm* bis 10 *mm* Hg Druck als richtig gefunden; berechnet man dann für die Diffusion von H und O aus den Versuchen den Coëfficienten der freien Diffusion dieser Gase, so fand sich dieser mehr als 10mal so gross als der von LOSCHMIDT bestimmte, und STEFAN's Theorie wurde sonach nicht bestätigt. HANSEMANN scheint es demnach wahrscheinlich, dass die freie Diffusion zweier Gase in den sehr kleinen Räumen des porösen Körpers nicht, wie dies STEFAN voraussetzt, gerade so vor sich gehe wie in grossen Räumen und die Widerstände der Diaphragmen sollen sehr viel grösser sein als es STEFAN

annimmt. Ob diese Resultate von HANSEMANN wirklich die STEFAN'sche Theorie gänzlich widerlegen, müssen weitere Beobachtungen lehren.

Eine andere Versuchsanordnung für die Diffusion der Gase durch Thonzellen als die von GRAHAM und BUNSEN hat v. LANG (21) angegeben. Die Diffusionszelle ist eine cylindrische, mit einem Metalldeckel geschlossene Thonzelle; durch den Deckel geht ein Messingrohr, das mit dem Leitungsrohr des Gasvolumeters durch einen Kautschukschlauch verbunden ist. Dies Volumeter besteht aus einer WOULF'schen Flasche mit 2 Hälsen und einem Tubulus unten. Durch den einen Hals wird die Flasche mit Wasser gefüllt und dieser dann luftdicht verschlossen, durch den andern Hals geht luftdicht die Zuleitungsröhre, deren untere Oeffnung in derselben Höhe ist wie das durch den Tubulus gehende Ausflussrohr. Das Gas in dem Zuleitungsrohr befindet sich unter dem äusseren Luftdruck und bei der geringsten Volumenvermehrung dieses Gases treten Gasblasen in die WOULF'sche Flasche. Hierdurch wird Wasser aus dem Ausflussrohr getrieben und dies dient als Maass der Volumenvermehrnng des Gases. Füllt man nun die Thonzelle mit einem Gas und taucht sie dann in ein specifisch leichteres, so tritt eine stärkere Diffusion nach innen und also die oben angeführte Volumenvermehrung ein.

Nicht nur solche als porös bekannte Stoffe wie Gyps, Graphit, Hydrophan etc. sind aber für Gase durchlässig, sondern es findet auch **Diffusion durch die Metalle** statt, wenn diese auf höhere Temperaturen gebracht werden. Das wiesen zuerst für Wasserstoff ST. CLAIRE-DEVILLE und TROOST (13, 14) bei Platin und Eisen in der Rothgluth nach. Sie legten ein Rohr dieser Metalle in ein grösseres undurchlässiges Porzellanrohr, füllten jenes mit Stickstoff und liessen durch den ringförmigen Raum zwischen beiden Wasserstoff streichen. Wurden die Metallröhren rothglühend gemacht, so trat Wasserstoff in das Innere derselben. GRAHAM (19) hat die Metallröhren mit einer Luftpumpe verbunden, so dass ein Vacuum an die Stelle des Stickstoffs trat. Es traten dann in 1 Minute durch 1 □ *m* der Oberfläche einer 1·1 *mm* dicken rothglühenden Platinröhre 489·2 *ccm* H; andere Gase gingen nur in sehr geringen Mengen durch die Röhre. Durch 1 □ *m* der Oberfläche einer luftleer gepumpten Palladiumröhre drangen in 1 Min. von aussen bei 265° 327 *ccm* H und nahe an der Rothglühhitze 423 *ccm*. Aus Kohlengas sonderte eine solche glühende Palladiumröhre den H vollständig ab, indem sie ihn allein durchliess.

TROOST (39) hat auf ähnliche Weise gezeigt, dass bei einem im Cadmiumdampf erhitzten und evacuirten Silberrohr in einer Stunde durch den Quadratcentimeter diffundirten:

	Rohr 1 *mm* dick	Rohr 0·5 *mm* dick
O	rein . . . 1·700 Liter	3·300 Liter
	aus der Luft 0·890 „	1·640 „
CO_2		0·4 *ccm*
CO		0·6 „
N		> 0·1 „

War das letztere Rohr mit CO_2 gefüllt, so ging 0·835 Liter seiner O und 0·640 Liter O aus der Luft durch den *qcm* in 1 Stunde. Schon beim Siedepunkt des Selens trat merkliche O-Diffusion ein.

Die **Diffusion durch absorbirende feste Körper** wie Kautschuk, hat zuerst MITCHELL (6) untersucht. Er fand, dass gleiche Mengen durch eine dünne Kautschukmembran gingen von:

Ammoniak	in 1 *min*	Arsenwasserstoff	in 27·5 *min*
Schwefelwasserstoff	„ 2·5 „	Oelbildendes Gas	„ 28 „
Cyan	„ 3·25 „	Wasserstoff	„ 37·5 „
Kohlensäure	„ 5·5 „	Sauerstoff	„ 1 *h* 53 „
Stickstoffoxydul	„ 6·5 „	Kohlenoxyd	„ 2 „ 40 „

Graham (19), spannte über einen sehr grossporigen Gypspfropfen seines Diffusionsrohres eine Kautschukmembran und liess über dieselbe unter Atmosphärendruck einen Strom des zu untersuchenden Gases streichen. Das Diffusionsrohr hatte Barometerlänge und über dem absperrenden Quecksilber war ein Vacuum, in welches das Gas durch die Membran hindurch eindrang, die Geschwindigkeit des Eindringens betrug für:

Stickstoff	1	Sauerstoff	2·556
Kohlenoxyd	1·113	Wasserstoff	5·500
Luft	1·149	Kohlensäure	13·585
Sumpfgas	2·148		

Mit der Temperatur stieg die Durchlässigkeit, so dass bei 60° in 1 *min* 6·63 *ccm* Luft hindurchgingen, während bei 4° nur 0·56 *ccm* diffundirten.

v. Wroblewski (28) hat die Diffusion durch eine Kautschukmembran untersucht, indem er entweder das durch Quecksilber unter dem Atmosphärendruck abgesperrte und mit der Membran überbundene Diffusionsrohr mit CO_2 füllte und das Steigen des Quecksilbers in dem Rohr beobachtete, wenn die CO_2 in die Luft der freien Atmosphäre diffundirte, oder indem er CO_2 unter weniger als dem Luftdruck in das Rohr füllte und von aussen aus einer CO_2-Atmosphäre über der Membran das Gas in die Röhre diffundiren liess. Es zeigte sich dabei die Geschwindigkeit der Diffusion dem Druck merklich proportional und die Diffusionsgeschwindigkeit eines Gasgemisches aus CO_2 und H oder CO_2 und Luft gegen die Luft der Atmosphäre ergab sich gleich der Summe der Produkte aus dem Partialdruck der einzelnen Bestandtheile des Gemisches in deren Diffusionsgeschwindigkeiten.

Den Vorgang der Diffusion der Gase durch Kautschuk und überhaupt alle Colloide, ja vielleicht auch durch glühende (dem flüssigen Zustand genäherte) Metallröhren denkt sich Graham (19) mit einer Verflüssigung der Gase verknüpft. Diese sollen von der einen Seite der Colloide absorbirt, sie in flüssigem Zustand durchdringen und auf der andern Seite wieder verdampfen; doch scheint diese Ansicht durch das Verhalten der Gase in Flüssigkeiten (s. w. u.) unwahrscheinlich gemacht zu werden.

Der Einfluss der Temperatur ist nicht näher untersucht, er scheint aber sehr beträchtlich zu sein, wie dies die oben angeführte Beobachtung Graham's für Kautschuk und Luft zeigt; ebenso fand v. Wroblewski die Diffusionsgeschwindigkeit der CO_2 durch Kautschuk fast verdoppelt, wenn die Temperatur etwa von 14° auf 30° stieg.

Eine durch Diffusion hervorgerufene Temperaturänderung hat Dufour (24) beobachtet, indem er ein poröses Gefäss, das mit dem langsamer diffundirenden Gas gefüllt war, in einen Raum mit anderm Gase brachte. Sowohl bei Diffusion unter constantem Druck als auch bei Druckdifferenzen auf den 2 Seiten des Gefässes soll stets an den Seiten der porösen Wand, wo das rascher diffundirende Gas eintritt, eine Temperaturerhöhung, auf der andern

Seite eine Erniedrigung stattfinden. Die Umkehr dieses Phänomens gelang FEDDERSEN (25), durch theoretische Betrachtungen von C. NEUMANN veranlasst, nachzuweisen. Diese Thermodiffusion, wie sie FEDDERSEN nennt, besteht darin, dass poröse Körper, deren beide Seiten ungleich erwärmt sind, die Gase in der Richtung von der kalten zur warmen Seite durch sich hindurchzuziehen suchen. Es wurde zum Nachweis dieser Erscheinung eine pulverförmige Substanz in eine horizontale Glasröhre fest hineingestopft, so dass sie darin einen unbeweglichen Pfropfen bildete. Durch Kautschuk war die Röhre auf jeder Seite mit einer andern verbunden, in der ein Flüssigkeitsindex sich befand. Wurde der Pfropfen auf einer Seite erwärmt, auf der andern abgekühlt, so zeigten die Bewegungen der Indices die Luftströmung an. Der in dem obigen Satz ausgezprochene Effekt zeigte sich bei allen angewandten porösen Substanzen: Platinschwamm, Palladiumschwamm, Gyps, Holzkohle, Kieselsäure, Magnesia etc.

Bei den Versuchen PULUJ's (30) über die Diffusion der Dämpfe durch eine Thonzelle wurde an der einen Seite der Zelle der Dampf, an der anderen Luft vorbeigeleitet und möglichst darauf geachtet, dass zu beiden Seiten der Zelle gleicher Druck herrscht. Ueber die Versuchsanordnung muss auf das Original verwiesen werden. Das Diffusiometer (eine getheilte Glasröhre) war durch eine Seifenblase oder durch eine dünne Glimmerscheibe abgeschlossen, die durch Seifenwasser an der Wand der Röhre gehalten wurde. Diese Lamellen folgten dem kleinsten Ueberdruck und die Geschwindigkeit ihrer Bewegung an der Theilung der Röhre vorbei diente als Maass für die Stärke der Diffusion. Die Versuche (die freilich unter einander beträchtlich abweichen) ergeben auch für die Dämpfe von Wasser, Alkohol, Aether und Chloroform Zahlen, die sich von den durch das GRAHAM'sche Gesetz geforderten nicht zu weit entfernen. Es ist nämlich:

	Dichte $=\delta$	$\sqrt{\frac{1}{\delta}}$	$(D/L)_1$	$(D/L)_2$
Wasser	0·623	1·267	1·139	1·268
Alkohol	1·613	0·787	0·759	0·865
Aether	2·586	0·622	0·695	0·727
Chloroform	4·138	0·492	—	0·461

wo D/L das Verhältniss des diffundirten Dampf- zu dem Luft-Volumen bedeuten und $(D/L)_1$ resp. $(D/L)_2$ nach einer von ZEUNER resp. von HERING gegebenen Formel für das specifische Volumen des Dampfes berechnet ist.

Die Abhängigkeit der Diffusionsgeschwindigkeit des Wasserdampfes von der Temperatur soll durch dieselbe Temperaturfünktion bestimmt sein wie das Maximum der Spannkraft.

c) Diffusion durch Flüssigkeiten.

Abgesehen von einigen gelegentlichen Beobachtungen GRAHAM's (1850) stammen die Versuche hierüber aus der neuesten Zeit. EXNER (1875) untersuchte die Diffusion von Gasen und Dämpfen durch Seifenlamellen, PRANGHE (1877) durch Leinöl, v. WROBLESWKI (1878) versuchte eine Formel der FOURIER'schen Wärmeleitungstheorie auf den Durchgang der Kohlensäure durch Wasser etc. anzuwenden und STEFAN (1878) zeigte, dass seine Theorie der Diffusion im Wesentlichen mit den Erscheinungen übereinstimmt, die verschiedene Gase bieten, wenn sie durch Wasser oder Alkohol diffundiren.

Während der statische Zustand der Sättigung einer Flüssigkeit mit einem Gase schon von DALTON und HENRY, besonders aber von BUNSEN untersucht worden war, indem er die Absorptionscoëfficenten zwischen Flüssigkeiten und Gasen bestimmte, wandte GRAHAM[1]) zum ersten Male seine Aufmerksamkeit der Bewegung von Gasen durch Flüssigkeiten zu. Er sättigte das Wasser in einer Flasche mit Kohlensäure und schob über den abgeschliffenen Rand der Flasche eine dieser gleiche, deren Wasser kohlensäurefrei war. Nach einiger Zeit prüfte er das Wasser der oberen Flasche auf seinen Kohlensäuregehalt und fand so, dass die Bewegung der CO_2 durch das Wasser sehr langsam geschieht und nicht merklich beeinflusst wird, wenn das Wasser ein anderes Gas z. B. Stickoxydul aufgelöst enthielt.

Diese Versuche blieben vereinzelt und auch FR. EXNER (3), der nach GRAHAM den Durchgang von Gasen durch Flüssigkeiten studirte, behandelte nicht die Art der Verbreitung eines Gases in der Flüssigkeit, sondern untersuchte nur den Durchgang von Gasen durch dünne Flüssigkeitsschichten, durch Seifenlamellen, worin ihm DRAPER (1) und MARIANINI (2) mit qualitativen Beobachtungen vorausgegangen waren. EXNER beobachtete die Diffusion der Gase gegen Luft durch eine Seifenlamelle in folgender Weise: Die Lamelle wurde in ein weiteres, getheiltes Glasrohr gesogen, das an einem Ende offen, am andern Ende von einer Metallplatte geschlossen war. Durch die Metallplatte trat eine Thermometerröhre, die bis zum inneren Rand der Platte ging, ohne vorzuragen. Auf dem andern Ende des Thermometerrohres sass ein Kautschukschlauch mit Quetschhahn. Die sehr leichte Lamelle folgte in der weiten Glasröhre, deren Wände mit Seifenwasser benetzt waren, dem kleinsten Ueberdruck. Hatte man die Lamelle an einen bestimmten Theilstrich des Glasrohrs gebracht, so befand sich in dem durch sie und den Hahn abgeschlossenen Raume Luft unter dem Druck der Atmosphäre und auf ihre andere Seite wurde das zu untersuchende Gas auch unter dem herrschenden Luftdruck gebracht. Sobald die Diffusion durch die Lamelle begann, verschob sich dieselbe und kam erst zur Ruhe, wenn alle Luft durch das Gas ersetzt war. Der Anfangs- und End-Stand der Lamelle gaben direkt das Luft- (L) und Gas-Volumen (G), das sich bei der Diffusion austauschte. Den Quotienten $\alpha = G/L$ nennt EXNER Diffusionscoëfficienten, er giebt das Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten von Gas und Luft. Durch Kohlensäure, Schwefelwasserstoff und Ammoniak wurde die Lamelle rasch zerstört, deshalb musste man sich damit begnügen, die Volumänderung von mit diesen Gasen gefüllten Seifenblasen in der Luft angenähert zu bestimmen. Die Diffusion durch eine solche Lamelle zeigt sich immer abhängig sowohl von dem Absorptionscoëfficienten C des Wassers (eigentlich der sehr verdünnten Seifenlösung) für das Gas, als auch von der Dichte δ dieses letzteren, so dass man diese Diffusion nach EXNER als aus 2 Thln. bestehend anzusehen hat. Erstens findet eine Aufnahme und Wiederabgabe der Gase von Seiten der Lamelle statt, deren Grösse sich nach den Absorptionscoëfficienten richtet, und zweitens tritt ein Gasaustausch durch die Flüssigkeitswand ein, wie ein solcher von der Theorie für eine poröse Scheidewand von sehr geringer Dicke gefordert wird. Die nachstehende Tabelle zeigt, dass die Diffusionsgeschwindigkeiten, die durch α bestimmt sind, bei verschiedenen Gasen sich verhalten wie $\frac{C}{\sqrt{\delta}}$.

---

[1]) In (2) unter: Diffusion der Flüssigkeiten a) Freie Diffusion.

Gas	Absorptions-coëfficient C	Dichte δ	$\frac{C}{\sqrt{\delta}}$	α beobachtet	α berechnet
N	0·015	0·97	0·0153	0·86	0·85
Luft	0·017	1·00	0·017	—	1·00
O	0·030	1·106	0·0285	1·95	1·60
Leuchtgas . . .	0·025	0·480	0·036	2·27	2·12
H	0·019	0·070	0·072	3·77	3·89
CO_2	1·002	1·52	0·812	47·1	45·1
H_2S	3·165	1·17	2·94	165	163·3
NH_3	700	0·59	903·0	46000	54500

Die Temperaturen lagen zwischen 13 und 18°.

Da die Beobachtungen für die 3 letzten Gase unsicher sind, so ist die gute Uebereinstimmung der α für Schwefelwasserstoff, wie Exner hervorhebt, nur zufällig. — Die obige Beziehung bewährte sich auch noch für eine Lamelle, die aus 7 Volumtheilen der Seifenlösung und 1 Volumtheil Alkohol bestand. Auch ist sie von Pranghe (6) bestätigt worden, der für O noch eine bessere Uebereinstimmung als Exner zwichen Beobachtung und Rechnung fand, indem er grosse Vorsicht auf die Darstellung von reinem O verwandte. Dagegen zeigte sich für eine Membran von Leinöl keine Proportionalität zwischen den Diffusionsgeschwindigkeiten und $\frac{C}{\sqrt{\delta}}$, so dass diese Beziehung sich als nicht allgemein giltig erwies. Pranghe konnte seine Beobachtungen für Leinöl besser darstellen wenn er die Diffusionsgeschwindigkeit der Gase durch das Oel, analog wie Bunsen für Gypsdiaphragmen, als proportional der Druckdifferenz der Gase auf beiden Seiten der Leinöllamelle und proportional einem Reibungscoëfficienten annahm, der von der Natur des Gases und der Flüssigkeit abhängt und experimentell zu bestimmen ist.

Nach derselben Methode hat Exner (4) auch die Diffusion von Dämpfen durch Seifenlamellen untersucht, indem er die Diffusionsröhre mit der passend eingestellten Lamelle in eine weite Flasche tauchen liess, auf deren Boden sich die Flüssigkeit befand, deren Dampf untersucht werden sollte. Exner erhielt folgende auf 22° C. sich beziehende Tabelle:

	C	δ	$\frac{C}{\sqrt{\delta}}$	α beobachtet	α berechnet
Luft	0·017	1·00	0·017	1·0	—
Schwefelkohlenstoff	0·110	2·645	0·067	3·9	3·8
Chloroform	0·110	4·14	0·054	3·3	3·5
Aether	6·5	2·58	4·00	235·0	5·0
Alkohol	0·021	1·61	0·0166	0·98	1·0
Benzin	0·0038	2·77	0·0022	0·13	0·11
Terpentinöl	0·000125	4·76	0·00006	0·003	kleiner als 1

Hiernach gilt auch für Dämpfe und Seifenlamellen die Proportionalität zwischen Diffusionsgeschwindigeit und $\frac{C}{\sqrt{\delta}}$. Die gänzliche Verschiedenheit zwischen dem beobachteten und berechneten Werth des α für Aether, hat nach Exner ihren Grund in einer offenbar falschen Bestimmung des Absorptionscoëfficienten für Aetherdampf. Bei Terpentinöl gestattete die geringe Haltbarkeit der Lamelle

keine Vollendung der Diffusionsversuche, deshalb ist die Uebereinstimmung der α nur eine qualitative.

Die Diffusion eines Gases durch längere Schichten von Flüssigkeit hat STEFAN (7) theoretisch und experimentell verfolgt unter der Voraussetzung, dass die FICK'sche Gleichung für die Bewegung eines Salzes durch sein Lösungsmittel auch hier anzuwenden sei. Ist also ρ die Dichte des Gases am Orte x eines cylindrischen Gefässes mit Flüssigkeit, durch welche Gas diffundirt, so gilt nach dieser Annahme die Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Wird an einem Ende $x = 0$ des Gefässes die Dichte ρ stets constant $= a$ erhalten und ist für $t = 0$ und alle positiven x, $\rho = 0$, so wird das Integral von (1):

$$\rho = a\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-\eta^2} d\eta\right],$$

wo die Flüssigkeitssäule als unendlich lang betrachtet wird. Die durch die Trennungsebene von Gas und Flüssigkeit gehende Gasmenge ist folglich

$$A = -\int_0^t k \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{x=0} dt$$

oder

$$A = 2aq\sqrt{\frac{kt}{\pi}}, \tag{2}$$

wenn q den Querschnitt des Gefässes bezeichnet. Ist das Gefäss nicht unendlich lang, sondern hat es die Länge l, so tritt für $x = l$ eine Grenzbedingung ein. Um die Diffusion von Kohlensäure durch Wasser oder Alkohol zu untersuchen, wurden enge Glasröhren von höchstens 1·7 *mm* Durchmesser im Lichten mit CO_2 gefüllt und an beiden Enden zugeschmolzen, dann das eine Ende unter der Flüssigkeit abgebrochen, so dass ein Flüssigkeitsfaden von passender Länge in die Röhre eintrat und nun dessen Bewegung beobachtet, wenn die Röhre vertikal stand oder horizontal gelegt war, wobei wegen ihres geringen Querschnitts sich der Faden zusammenhängend erhielt. Diese Bewegung maass direkt die in die Flüssigkeit eintretenden Mengen des Gases. Bei den Versuchen grenzt die eine Seite der Flüssigkeit an die Kohlensäure, die andere an die freie Atmosphäre, deren Druck den Faden so verschiebt, dass die Kohlensäure stets unter demselben Druck steht, d. h. die Dichte des Gases an der Grenzschicht $x = 0$ stets constant bleibt. Für das andere Ende $x = l$ der Flüssigkeit darf man $\rho = 0$ für jedes t setzen, da die CO_2 mit sehr viel grösserer Geschwindigkeit sich in der Luft verbreitet als in der Flüssigkeit. Die Lösung von (1) welche diesen Bedingungen genügt ist:

$$\rho = a\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{2a}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} e^{-\frac{\pi^2 kt}{l^2}} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{4\pi^2 kt}{l^2}} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} e^{-\frac{9\pi^2 kt}{l^2}} + \ldots\right),$$

woraus folgt

$$A = \frac{akt}{l} + \frac{2al}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - e^{-\frac{\pi^2 kt}{l^2}} - \frac{1}{4} e^{-\frac{4\pi^2 kt}{l^2}} - \ldots\right). \tag{3}$$

Setzt man $z = \frac{\pi^2 kt}{l^2}$ und vergleicht den Werth der Lösung (3), welche genau den Versuchsbedingungen entspricht, mit dem Werth der Lösung (2), bei der die

Flüssigkeitssäule als unendlich lang angesehen wurde, so zeigt sich, dass erst für $z = 4$ die beiden Werthe um $2\frac{0}{0}$ von einander abweichen. Man darf demnach bei der geringen Genauigkeit der Versuche die Formel (2) in den meisten Fällen unbedenklich anwenden. Die Beobachtungen ergaben nun in der That, dass die Diffusion von CO_2 durch Wasser und Alkohol nach Formel (2) verlief, indem die durch die Trennungsebene der CO_2 und der Flüssigkeit tretende Gasmenge der Quadratwurzel aus der Zeit proportional war.

Eine andere Art der Prüfung der Theorie ergiebt sich aus der Gleichung (3). Mit wachsender Zeit nähert sich A der Grenze $A = \frac{akt}{l} + \frac{al}{3}$, d. h.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{ak}{l}, \tag{4}$$

und dieser Beharrungszustand wird um so eher erreicht werden, je kleiner l ist. Wurde bei den Beobachtungen nun gerade so verfahren, wie vorher, so erwiesen sich die Produkte aus den Verschiebungen des Flüssigkeitsfadens in seine Längen d. h. die Grössen $dA \cdot l$ für gleiche Zeiträume merklich constant, wie es (4) fordert. Der Fehler, den die Verdampfung der Flüssigkeit in die Luft bewirkt, wurde dadurch verkleinert, dass man den Flüssigkeitsfaden schon bei Beginn des Versuchs tiefer in die Röhre brachte.

Ebenso wie CO_2 aus dem durch die Flüssigkeit abgeschlossenen Raum in die Luft diffundirt, musste umgekehrt Luft in diesen Raum gelangen und das Verhältniss zwischen dem anfänglichen CO_2-Volumen V zu dem nach Beendigung der Diffusion eingeschlossenen Luftvolumen V' dient zu folgenden Schlüssen. Hat man mehrere Gase in dem Volumen V durch den Flüssigkeitsfaden abgesperrt, bedeuten a_1 und a_1' etc. die Dichten des ersten etc. Gases in der ersten und zweiten Grenzschicht der Flüssigkeit, so hat man nach Analogie mit (4) die Gleichungen

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{k_1(a_1 - a_1')}{l}; \quad \frac{dA_2}{dt} = \frac{k_2(a_2 - a_2')}{t} \text{ etc.}$$

Sind p_1, p_2 etc. resp. p_1' p_2' etc. die Partialdrucke des ersten, zweiten etc. Gases und α_1, α_2 etc. deren Absorptionscoëfficienten, dann erhält man:

$$\frac{d(Vp_1)}{dt} = -\frac{\alpha_1 k_1}{l}(p_1 - p_1'); \quad \frac{d(Vp_2)}{dt} = -\frac{\alpha_2 k_2}{l}(p_2 - p_2') \text{ etc.}$$

Bleibt der Gesammtdruck p der Gase innerhalb und ausserhalb der Flüssigkeit constant, d. h. $p_1 + p_1 + \ldots = p = p_1' + p_2' + \ldots$, so folgt aus den letzten Gleichungen das Integral:

$$V\left(\frac{p_1}{\alpha_1 k_1} + \frac{p_2}{\alpha_2 k_2} + \ldots\right) = const.$$

Sind p_1, p_2 etc. für den Anfang des Versuchs gegeben, so liefert diese Gleichung das Verhältniss $\frac{V}{V'}$. Bei den Versuchen diffundirte CO_2 durch Alkohol gegen Luft, d. h. gegen ein Gemenge von O und N. Es ist ferner $p_1 = p$, $p_2 = p_3 = 0$ am Anfang des Versuchs, wo nur CO_2 im Volumen V vorhanden war, am Ende ist $p_1 = 0$, $p_2 = 0{\cdot}21\,p$, $p_3 = 0{\cdot}79\,p$; also:

$$\frac{V}{V'} = \alpha_1 k_1 \left(\frac{0{\cdot}739}{k_2} + \frac{6{\cdot}529}{k_3}\right),$$

wenn man α_2 und α_3 nach Bunsen einsetzt.

Nimmt man, was wohl näherungsweise richtig, $k_2 = k_3$ an und setzt den von Bunsen bestimmten Werth von α_1 ein, so ergiebt ein Vergleich der Beobachtungen mit dieser Formel, dass $k_1 = 0{\cdot}796\,k_3$ bei $12{\cdot}5°$ und $k_1 = 0{\cdot}813\,k_3$ bei

17°, d. h. k_1 ist kleiner als k_2 und demnach ist der Diffusionscoëfficient eines Gases nicht durch seine grössere oder geringere Absorptionsfähigkeit bestimmt. Ebenso ergab sich für Alkohol, dass der Diffusionscoëfficient von Wasserstoff mehr als doppelt so gross war wie der des Stickstoffs, während Wasserstoff viel geringer von Alkohol absorbirt wird als Stickstoff. Aus der Formel (2) und (4) lässt sich der absolute Werth des Diffusionscoëfficienten berechnen; denn ist s die Dichte des Gases bei dem normalen Druck p, so wird $A = Vs$, und $a = \alpha s$ und setzt man das ein, so ergeben sich nach STEFAN's Versuchen:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Diffusionscoëfficient } CO_2 - H_2O & = 0{\cdot}000016 \frac{cm^2}{sec} \\ \quad\text{,,} \qquad \text{,,} \qquad CO_2 - \text{Alkohol} & = 0{\cdot}000031 \frac{cm^2}{sec}\end{array}\right\} \text{für } 16-17° \text{ C.}$$

Bei der Bestimmung des letzteren ist auch die Gegendiffusion von Luft durch Alkohol berücksichtigt. STEFAN schliesst aus diesen Untersuchungen, dass die rein physikalische Theorie der Diffusion der Gase durch Flüssigkeiten, wie sie von ihm nach Analogie mit FOURIER's Theorie der Wärmeleitung entwickelt wurde, den Beobachtungen entspricht, dass also sich zuerst die Oberflächenschicht der Flüssigkeit mit dem Gase sättigte und sich dann im Innern das Gas von Schicht zu Schicht von den Orten, wo es grössere Dichte hat, zu denen geringerer Dichte verbreitet.

Schon vor STEFAN hat VON WROBLEWSKI (5) die Annahme gemacht, dass sich ein Gas nach der FOURIER'sche Theorie in einer Flüssigkeit verbreite und hatte zu dem Zweck die Formel (2) benuzt. Er versuchte die über dem Flüssigkeitscylinder befindliche Kohlensäure immer unter demselben Druck zu halten, indem er sie nach Maassgabe ihrer Absorption durch die Flüssigkeit zusammendrückte. Es gelang ihm aber nicht, für Wasser und CO_2 die Richtigkeit der Formel (2) nachzuweisen, da das mit CO_2 beladene Wasser schwerer wurde und der Schwere folgend untersank, also Strömungen durchaus den Diffusionsprocess verdeckten. Diese Störungen traten nicht mehr ein, wenn VON WROBLEWSKI Kochsalzlösung statt Wasser benutzte, deren Zähigkeit und geringe Absorption der CO_2 die Strömungen so verlangsamten, dass das FOURIER'sche Gesetz zur Geltung kam. Es ergab sich für concentrirte NaCl-Lösung und CO_2 $k = 0{\cdot}0000091 \frac{cm^2}{sec}$ bei ca. 2°. Später versuchte dann VON WROBLEWSKI (8, 9, 10) für Wasser und CO_2 in den ersten Minuten des Versuches die Grösse k nach Formel (2) zu bestimmen; in dieser kurzen Zeit sollen die Strömungen noch nicht merklich geworden sein. Die so gewonnenen Resultate ergaben $k > 0{\cdot}000022 \frac{cm^2}{sec}$, doch weichen die Beobachtungen sehr von einander ab und sind nicht geeignet, die Richtigkeit der Theorie zu prüfen. — Auch durch Colloide, z. B. Gelatine und Leim untersuchte VON WROBLEWSKI die Diffusion der CO_2 und stellte danach den Satz auf, dass die Verbreitung eines Gases in einem absorbirenden festen oder flüssigen Körper ebenso geschieht, wie die der Wärme in einem festen Stabe. Für Kautschuk hat v. WROBLEWSKI (10) die Formel (4) von STEFAN benuzt und findet bei 12° für

$$\begin{array}{lll}\text{Kautschuk} & - N_2O & k = 0{\cdot}0000056 \frac{cm^2}{sec} \\ \quad\text{,,} & - CO_2 & k = 0{\cdot}0000054 \text{ ,,} \\ \quad\text{,,} & - H & k = 0{\cdot}0000354 \text{ ,,}\end{array}$$

Doch bedürfen diese Werthe noch sehr der Bestätigung. Endlich schliesst VON WROBLEWSKI, dass GRAHAM's Anschauung, wonach die Gase in den flüssigen

Zustand übergehen, wenn sie von absorbirenden Körpern aufgenommen werden, ebenso wie die Meinung, dass die Gase in diesem Falle chemische Verbindungen mit diesen Körpern eingingen, falsch ist; vielmehr soll der Vorgang der Absorption ein rein physikalischer Process sein. Für Flüssigkeiten haben das in der That STEFAN's Versuche innerhalb ihrer, wie STEFAN hervorhebt, ziemlich grossen Fehlergrenzen wahrscheinlich gemacht, wie weit das aber für andere absorbirende Körper gilt, ist bis jetzt noch nicht zu entscheiden.

III. Diffusion fester Körper und flüssiger Metalle.

Ueber diesen Gegenstand existiren nur wenige Beobachtungen, von denen sich die ältesten und zahlreichsten auf den Durchgang des flüssigen Quecksilbers durch massive Metalle beziehen. DANIEL (1) zeigte zuerst, dass Quecksilber durch Blei, Zinn, Zink, Gold und Silber diffundirt und HENRY (2) gab dem Versuch mit Blei die nachher oft angewandte Form, dass er einen Bleistab heberförmig bog und den kürzeren Schenkel in Hg tauchte. Nach einiger Zeit tropfte dann Hg am Ende des anderen Schenkels herab; die Oberfläche des Stabes zeigte sich dabei unverändert. Die Struktur des Bleis war für die Dauer der Diffusion wesentlich, da gehämmertes Blei ausserordentlich viel langsamer vom Quecksilber durchwandert wurde; auch fand die Diffusion viel leichter in Richtung der Blättchen als senkrecht dazu statt. Diese Beobachtungen wurden erweitert von HORSFORD (4) und NIKLÈS (5). Der erstere beobachtete die ausserordentliche Beschleunigung der Bewegung des Hg durch Metalle, wenn die Bewegung in Richtung der Schwerkraft geschah gegenüber der eigentlichen Diffusion des Hg, die senkrecht nach oben stattfindet, und fand neben den von DANIEL untersuchten Metallen auch Cadmium für Hg durchlässig, während er bei Kupfer und Messing keine Diffusion nachweisen konnte. Dies beobachtete dann NIKLÈS, der ein Durchdringen des Quecksilbers durch alle von ihm benutzten Metalle behauptete. Quantitativ hat GUTHRIE (11) die Diffusion von Natrium, Kalium, Zink, Blei und Zinn durch Quecksilber untersucht, indem er auf die Oberfläche des Quecksilbers, das sich in einer grossen, unten ausgezogenen Bürette befand, die genannten Metalle brachte und den Inhalt nach vierzehn Tagen oder einem Monat in 13 Portionen aus der Bürette abliess. Kalium und Natrium wurden als Amalgame mit sehr geringem Gehalt an K und Na auf das Quecksilber geschichtet, um die grosse Erwärmung zu verkleinern, die bei der Verbindung dieser Metalle mit Hg entsteht. Zink, Blei und Zinn waren durch die einen Fuss hohe Quecksilbersäule nach einem Monat schon merklich hindurch diffundirt, während nach 14 Tagen das K des 1·34 proc. Kaliumamalgams bereits in einer Tiefe von $\frac{8}{13}$ Fuss und das Na des 1·92 proc. Natriumamalgams in $\frac{7}{13}$ Fuss Tiefe nachzuweisen war.

Ausser in das flüssige Quecksilber diffundiren die andern Metalle auch ineinander. Erhitzt man eine mit Ag plattirte Kupferplatte, so verschwindet das Ag auf ihr bei bestimmter Temperatur und ist nach HENRY (3) dann in die Platte weiter eingedrungen, denn ätzt man die oberflächliche Kupferschicht weg, so kommt darunter das Silber zum Vorschein. Ebenso diffundirt Gold mit der Zeit in Kupfer und tritt wieder zu Tage, wenn die oberste Kupferschicht durch Kochen mit Ammoniak entfernt wird. COLSON (7, 8) zeigte, dass Eisen und Kohle in einander diffundiren, wenn sie erhitzt werden. Das soll schon bei 250° geschehen. Schloss er Eisenscheiben zwischen Kohlencylinder ein, so fand er, dass bei der Erhitzung die Diffusion etwa nach der Beziehung $h \cdot p = const$ vor sich ging, wo p das Gewicht des in die Volumeneinheit eines der Kohlencylinder diffundirenden Eisens ist und p den Abstand dieser Volumeneinheit von der Eisenscheibe bedeutet.

Es soll einer bestimmten Temperatur ein bestimmter Diffusionscoëfficient des Eisens in die Kohle entsprechen, einerlei ob man schon eine mit Kohle zum Theil beladene Eisenscheibe oder eine neue zum Versuch benutzt. Ferner diffundiren nach COLSON Silber in Alkalien, Schwefel in Kupfer, Calcium in Eisen und besonders leicht Siliciumoxyd in Kohle. Ein Eindringen der Kohle beobachtete MARSDEN (6) und VIOLLE (9) in Porzellan und PERNOLET (10) in thönerne Retorten, in Coaksöfen und Glasretorten. ROBERTS (12) endlich verfolgte die Geschwindigkeit des Eindringens geschmolzener Metalle in einander und fand die Beweglichkeit von Gold und Silber in Blei und Wismuth sehr gross, während sich Antimon und Kupfer relativ langsam bewegten.

Literatur.

I. Diffusion der Flüssigkeiten.

a) Freie Diffusion.

1) FRANKENHEIM, Die Lehre von der Cohäsion. Breslau 1835. 2) GRAHAM, On the diffusion of liquids. Phil. Trans. 1850, I., pag. 1; II., pag. 805; 1851, II., pag. 483. Auch LIEB. Ann. 77, pag. 56 u. 129; 80, pag. 197. 1851. 3) FICK, Ueber Diffusion. POGG. Ann. 49, pag. 59. 1855. 4) BEILSTEIN, Ueber die Diffusion von Flüssigkeiten. LIEBIG's Ann. 99, pag. 165. 1856. 5) LUDWIG, Diffusion zwischen ungleich erwärmten Orten gleich zusammengesetzter Lösungen. Wien. Akad.-Ber. 20, pag. 539. 1856. 6) v. WITTICH, Ueber Eiweissdiffusion. MÜLLER's Arch. 1856, pag. 286. 7) LIEBEN, Ueber die Homogenität der Lösungen. LIEBIG's Ann. 101, pag. 77. 1857. 8) FICK, Erwiderung auf einige Stellen von BEILSTEIN's Abhandlung. LIEBIG's Ann. 102, pag. 97. 1857. 9) SIMMLER u. WILD, Ueber einige Methoden zur Bestimmung der bei der Diffusion einer Salzlösung in das reine Lösungsmittel auftretenden Constante. POGG. Ann. 100, pag. 217. 1857. 10) BEEZ, Ueber die Diffusion von Salzlösungen in Wasser. SCHLÖMILCH's Zeitschr. f. Math. 1859, pag. 212. 11) GRAHAM, Liquid diffusion applied to analysis. Phil. Trans. 151, pag. 183. 1861. Auch LIEB. Ann. 121, pag. 1. 1862. 12) LENSSEN, Eine Diffusionserscheinung. ERDMANN's Journ. 85, pag. 416. 1862. 13) BEEZ, Ueber Hydrodiffusion. SCHLÖMICH's Zeitschr. für Math. 1862, pag. 327. 14) BEEZ, Ueber Hydrodiffusion in begrenzten cylindrischen Gefässen. SCHLÖMILCH's Zeitschr. für Math. 1865, pag. 358. 15) HOPPE-SEYLER, Beiträge zur Kenntniss der Diffusionserscheinungen. Medicin. Chem. Untersuchungen I, pag. 1. 1867. 16) E. VOIT, Ueber Diffusion von Flüssigkeiten. POGG. Ann. 130, pag. 227 u. 393. 1867. 17) DUBRUNFAUT, Mémoire sur la diffusion, l'éndosmose etc. Compt. rend. 66, pag. 354. 1868. 18) MARIGNAC, Recherches sur la diffusion simultanée de quelques sels. Ann. de chim. et de phys., 5. ser., 2, pag. 546. 1874. 19) SACHSSE, Ueber eine Regelmässigkeit bei der Diffusion von Salzen. Chem. Centralbl. 1874, pag. 237. 19a) MAY, Ueber Hydrodiffusion. CARL's Repertorium 11, pag. 185. 1875. 20) JOHANNISJANZ, Ueber die Diffusion der Flüssigkeiten. WIED. Ann. 2, pag. 24. 1877. 21) STEFAN, Ueber die Diffusion der Flüssigkeiten. I. Optische Beobachtungsmethoden. Wien. Akad.-Ber. 78, 2. Abth., pag. 957. 1878. 22) STEFAN, Ueber die Diffusion der Flüssigkeiten. II. Berechnung der GRAHAM'schen Versuche. Wien. Akad.-Ber. 79, 2. Abth., pag. 161. 1879. 23) SCHUHMEISTER, Untersuchungen über die Diffusion der Salzlösungen. Wien. Akad.-Ber. 79, 2. Abth., pag. 603. 1879. 24) H. F. WEBER, Untersuchungen über das Elementargesetz der Hydrodiffusion. WIED. Ann. 7, pag. 469 u. 536. 1879. 25) SORET, Sur l'état de l'equilibre que prend, au point de vue de sa concentration, une dissolution saline primitivement homogène dont deux parties sont portées à temperatures différents. Arch. des sc. phys. et natur. 3. ser., 2, pag. 48; 4, pag. 209. 1879. 26) HORSTMANN, Ueber das Diffusionsgleichgewicht in einer Salzlösung von nicht gleichmässiger Temperatur. Ver. d. nat.-med. Ver. zu Heidelberg 2, pag. 1. 1879. Auch Beibl. 4, pag. 172. 1880. 27) MILLS, On chemical repulsion. Chem. News 40, pag. 40. 1880. Auch Beibl. 4, pag. 256. 1880. 28) LECHER, Ueber die sogen. »chemische Abstossung«. Sitz.-Ber. der Wien. Akad. 1880. 29) LONG, Ueber die Diffusion der Salze in wässriger Lösung. WIED. Ann. 9, pag. 613. 1880. 30) v. WROBLEWSKI, Ueber die Anwendung der Photometrie auf das Studium der Diffusion der Flüssigkeiten. WIED. Ann. 13, pag. 606. 1881. 31) MARTINI, Diffusions-

figuren. Beibl. 6, pag. 337. 1882. Aus N. C. 3. ser. 9. 1882. 32) R. LENZ, Ueber das galv. Leitungsvermögen alkoholischer Lösungen. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg (7) 30. 1882. 33) J. D. R. SCHEFFER, Untersuchungen über die Diffusion einiger organischen u. anorganischen Verbindungen. Chem. Ber. 15, pag. 788. 1882; 16, pag. 1903. 1883. 34) DE HEEN, Determination, à l'aide d'un appareil nouveau, du coëfficient de diffusion etc. Bull. de l'Acad. Roy. de Belg. (3) 8, pag. 219. 1884. 35) DE VRIES, Ein Vorlesungsversuch über Diffusion. Beibl. 9, pag. 160. 1885. Aus Maandblad voor Naturw. 11, pag. 118. 1884. 36) DETLEFSEN, Die experim. Behandlung der Diffusion etc. Beibl. 10, pag. 558. 1886. Aus Zeitschr. zur Förderung des physik. Unterrichts 2, pag. 249. 1885. 37) COLEMAN, On liquid diffusion. Phil. Mag. (5) 23, pag. 1. 1887. 38) COLEMAN, Ueber ein neues Diffusiometer etc. Beibl. 13, pag. 62. 1889. Aus Proc. Edinb. Roy. Soc. 14, pag. 374. 1887. 39) DOJES, Diffusion der Flüssigkeiten. Beibl. 12, pag. 20. 1888. Aus Dissertation. Leyden 1887. 40) RÜDORFF, Zur Constitution der Lösungen. Ber. d. chem. Ges. 21, pag. 4. 1882; pag 3044. 1888. 41) J. D. R. SCHEFFER, Untersuchungen über d. Diffusion wässriger Lösungen. Zeitschr. f. phys. Chem. 2, pag. 390. 1888. 42) CHABRY, Procédé nouveau pour étudier la diffusion des acides. Journ. de Phys. (2) 7, pag. 114. 1888. 43) v. TIETZEN-HENNIG, Ueber scheinbar feste Elektrolyte. WIED. Ann. 35, pag. 467. 1888.

b) Diffusion durch Scheidewände.

1) NOLLET, Recherches sur les causes du bruillement des liquides. Histoire de l'académie royale des sciences. Année 1748, pag. 101. 2) PARROT, Grundriss der theoretischen Physik. Dorpat u. Riga 1811. 2. Bd., pag. 331. 3) N. W. FISCHER, Ueber die Beschaffenheit der thierischen Blase etc. GILBERT's Ann. 72, pag. 300. 1822. 4) WITTING, Bemerkungen etc. über das Vermögen der thierischen Blase, Flüssigkeiten durch sich hindurchzulassen. GILBERT's Ann. 74, pag. 425. 1823. 5) DÖBEREINER, Ueber etc. die pneumatisch capillare Thätigkeit gesprungener Gläser. Jena 1823. 6) DUTROCHET, Agent immédiat du mouvement vital etc. Paris 1826. Aufsätze in d. Ann. de chim. et de phys. 35, 37, 49, 51. Mémoircs pour servir à l'histoire anatomique et physiologique des vegetaux et de animaux, t. 1, Paris 1837. 7) POISSON, Note sur des effets, qui peuvent être Produits par la capillarité etc. Ann. de chim. et de phys. 35, pag. 98. 1826. 8) MAGNUS, Ueber einige Erscheinungen der Capillarität. POGG. Ann. 10, pag. 153. 1827. 9) N. W. FISCHER, Ueber die Capillarität der Blase. POGG. Ann. 11, pag. 126. 1827. 10) WACH, Ueber das Phänomen, welches von DUTROCHET mit dem Ausdruck Endosmose etc. bezeichnet wurde. SCHWEIGG. Journ. d. Chem. u. Phys. 88, pag. 20. 1830. 11) JERICHAU, Ueber das Zusammenströmen flüssiger Körper, welche durch poröse Lamellen getrennt sind. POGG. Ann. 34, pag. 613. 1835. 12) BRÜCKE, De diffusione humorum per septa mortua et viva. Dissert. Berlin 1842. Auch POGG. Ann. 58, pag. 77. 1843. 13) KÜRSCHNER, WAGNER's Handwörterbuch der Physiologie. Artikel: Aufsaugung. 1842. 14) VALENTIN, Lehrbuch d. Physiologie. Bd. 1, Abschnitt: Porosität und Absonderung. Braunschweig 1844. 15) MATTEUCCI et CIMA, Mémoire zur l'endosmose. Ann. de chim. etc. 13, pag. 63. 1845. 16) GARDNER, Researches of the function of plants etc. Phil. Mag. 28, pag. 425. 1846. 17) RAINEY, On the cause of endosmose and exosmose. Phil. Mag. 29, pag. 179. 1846. 18) VIERORDT, Physik des organ. Stoffwechsels. GRIESINGER's Archiv für physiol. Heilkunde 6, pag. 651. 1847 u. 7, pag. 272. 1848. Auch POGG. Ann. 73, pag. 519. 1848. 19) JOLLY, Experimentaluntersuchungen über Endosmose. HENLÈ u. PFEUFER, Zeitschr. f. rat. Medicin 7, pag. 83. 1849. Auch POGG. Ann. 78, pag. 261. 1849. 20) LIEBIG, Ueber einige Ursachen der Säftebewegung im thierischen Organismus. Braunschweig 1848. 21) LUDWIG, Ueber die endosmotischen Aequivalente und die endosmotische Theorie. HENLE u. PFEUFER, Zeitschr. f. nat. Med. 8, pag. 1. 1849. Auch POGG. Ann. 78, pag. 307. 22) BARRESWIL, Explication proposée pour le phénomène de l'endosmose. Compt. rend. 31, pag. 898. 1850. 23) CLOETTA, Diffusionsversuche durch Membrane mit 2 Salzen. Dissert. Zürich 1851. 24) AUBERT, Experimentaluntersuchung über die Frage, ob die Mittelsalze auf endosm. Wege abführen. HENLE u. PFEUFER, Zeitschr. f. nat. Med., N. F. 2, pag. 225. 1852. 25) CIMA, Sull' evaporazione e la trasudazione dei liquidi attraverso le membrane animali. Mem. dell' Ac. di Torino, 2. ser., 13, pag. 267. 1853. 26) BUCHHEIM, Beiträge zur Lehre von der Endosmose. VIERORDT's Archiv für physiol. Heilkunde 12, pag. 217. 1853. 27) FICK, Neue Ausstellung am Begriff des endosm. Aequivalentes. POGG. Ann. 92, pag. 333. 1854. 28) GRAHAM, On osmotic force. Phil. Trans. 1854, pag. 117. 29) LHERMITE, Recherches zur l'endosmose.

Ann. de chim. et de phys., 3. ser., 43, pag. 420. 1854. 30) GRAHAM, On the concentration of alcohol in SÖMMERING's experiments. Athen. 1854, pag. 1208. 31) MORIN, Nouvelles experiences sur la perméabilité des vases poreux etc. Mem. de la soc. de Genève 13, pag. 251. 1854. 32) DUBRUNFAUT, Note sur l'osmose et ses applications industrielles. Compt. rend. 41, pag. 834. 1855. 33) ECKHARD, Beiträge zur Lehre v. d. Filtration u. Hydrodiffusion. ECKHARD's Beiträge zur Anat. u. Physiol. 1, pag. 97. 1855. 34) v. WITTICH, Ueber Eiweissdiffusion. MÜLLER's Arch. für Anat., Physiol. etc. 1856, pag. 286. 35) HARZER, Beiträge zur Lehre von der Endosmose. VIERORDT's Archiv f. physiol. Heilkunde 15, pag. 194. 1856. 36) FICK, Versuche über Endosmose. MOLESCHOTT's Untersuchungen zur Naturlehre etc. 3, pag. 294. 1857. 37) W. SCHMIDT, Versuche über Endosmose d. Glaubersalzes. POGG. Ann. 102, pag. 122. 1857. 38) HOFMEISTER, Ueber das Steigen des Saftes der Pflanze. Flora 1858, pag. 1. 39) MAGGIORANI, Sull' endosmosi dell' albumina. Cim. 6, pag. 70. 1858. 40) KRUG, Nonnula de theoria endosmoseos etc. Dissert. Lipsiae 1859. 41) SCHUMACHER, Ueber Membrandiffusion. POGG. Ann. 110, pag. 337. 1860. 42) BOTKIN, Untersuchungen über die Diffusion organischer Stoffe. VIRCHOW's Archiv für path. Anat. etc. 20, pag. 26. 1860. 43) ECKHARD, Ueber Diffusionsgeschwindigkeit durch thierische Membranen. ECKHARD's Beiträge etc. 2, pag. 1, 159. 1860. 44) ECKHARD, Ueber Hydrodiffusion durch vegetable parchment, Thonzellen u. d. Cornea. ECKHARD's Beitr. etc. 2, pag. 31. 1860. 45) C. E. E. HOFFMANN, Bestimmung des endosm. Aequivalents mehrerer chemischer Verbindungen. ECKHARD's Beitr. etc. 2, pag. 59. 1860. 46) ADRIAN, Ueber Diffusionsgeschwindig. u. Diffusionsäquivalente bei getrockneten Membranen. ECKHARD's Beitr. etc. 2, pag. 185. 1860. 47) HEYNSIUS, Ueber Eiweissdiffusion. Stud. des physiol. Inst. zu Amsterdam. 1861, pag. 1. 48) MANDL, De l'osmose pulmonaire etc. Arch. gen. de med., 5. ser., 16, pag. 49, 161. 1860. 49) SCHUMACHER, Die Diffusion in ihren Beziehungen zur Pflanze. Leipzig u. Heidelberg 1861. 50) POLLACCI, Sull' ascensione delle sostanze solubili nel suolo. Cim. 14, pag. 5. 1861. 51) LIEBIG, Ueber die Theorie der Osmose. LIEB. Ann. 121, pag. 78. 1862. 52) H. HOFFMANN, Ein Diffusionsversuch. POGG. Ann. 117, pag. 263. 1862. 53) GUIGNET, Phénomènes de transport à travers les corps poreux etc. Compt. rend. 55, pag. 740. 1862. 54) ECKHARD, Ueber die Diffusionserscheinungen von Gummilösungen. ECKHARD's Beitr. etc. 3, pag. 51. 1863. 55) ECKHARD, Ueber Diffusionsgeschwindigkeit durch thierische Membranen. ECKHARD's Beitr. etc. 3, pag. 85. 1863. 56) ECKHARD, Der gegenwärtige experimentelle Thatbestand der Lehre v. d. Hydrodiffusion durch thier. Membranen. POGG. Ann. 128, pag. 61. 1866. 57) DUBRUNFAUT, Note sur la diffusion et l'endosmose. Compt. rend. 63, pag. 838. 1866. 58) GRAHAM, Sur l'endosmose et la dialyse. Compt. rend. 63, pag. 937. 1866. 59) DUBRUNEAUT, Observations sur la dialyse et l'endosmose. Compt. rend. 63, pag. 944. 1866. 60) PAYEN, Osmose dans les sucreries. Compt. rend. 65, pag. 692. 1867. 61) M. TRAUBE, Experimente zur Theorie der Zellenbildung u. Endosmose. Arch. f. Anat. u. Physiol. 1867, pag. 87 u. 129. Auch Botanische Zeitung 1875, pag. 56 u. 65. 62) DUBRUNFAUT, Mémoire sur la diffusion, l'endosmose etc. Compt. rend. 66, pag. 354. 1868. 63) ROSENSTIEHL, Sur la nature de la force motrice, qui produit les phénomènes d'endosmose. Compt. rend. 70, pag. 617. 1868. 64) M. BECQUEREL, Sur l'influence de la pression dans les phénomènes d'endosmose et d'exosmose. Compt. rend. 75, pag. 50. 65) BARANETZKY, Diosmotische Untersuchungen. POGG. Ann. 147, pag. 195. 1872. 66) CARLET, Sur un nouvel osmomètre. Compt. rend. 76, pag. 377. 1873. 67) METGER, Ueber Endosmose. Flensburg, Progr. 1875. 68) PFEFFER, Osmotische Untersuchungen. Leipzig 1877. 69) QUINCKE, Ueber Diffusion etc. POGG. Ann. 160, pag. 118. 1877. 70) DE VRIES, Ueber die Durchlässigkeit der Niederschlagsmembranen. Beibl. 3, pag. 7. Aus Archives néerland. 13, pag. 344. 1878. 71) HINTEREGGER, Diffusionsversuche an Lösungen sauer reagirender Salzgemische. Ber. d. chem. Ges. 12, pag. 1619. 1880. 72) GAL, Recherches sur le passage des liqueurs alcooliques des corps poreux. Compt. rend. 96, pag. 338. 1883. 73) WIBEL, Die Aenderungen der osmotischen Erscheinungen etc. durch die strömende Bewegung der Flüssigkeiten etc. Abhandl. d. nat. Vers. Hamburg-Altona 7. 1883. 74) REGECZY, Beiträge zur Lehre der Diffusion der Eiweisslösungen. PFLÜGER's Arch. f. Physiol. 34, pag. 431. 1884. 75) DE VRIES, Eine Methode zur Analyse der Turgorkraft. PRINGSHEIM's Jahrbücher f. wissens. Botanik 14, pag. 427. 1884. 76) HAMBURGER, Der Einfluss chemischer Verbindungen auf die Blutkörperchen etc. Beibl. 9, pag. 16. 1885. 77) TAMMANN, Die Dampftensionen der Lösungen. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg 35, No. 9, pag. 169. 1887.

78) TAMMANN, Ueber Osmose durch Niederschlagsmembranen. WIED. Ann. 34, pag. 299. 1888. 79) DE VRIES, Osmotische Versuche mit lebenden Membranen. Zeitschr. f. physik. Chem. 2, pag. 415. 1888.

c) Der osmotische Druck.

1) VAN'T HOFF, L'équilibre chimique dans les systemes gazeux ou dissous à l'état dilué. Arch. néerland. 20, pag. 239. 1885. 2) VAN'T HOFF, Die Rolle des osmotischen Drucks in der Analogie zwischen Lösungen u Gasen. Zeitschr. f. phys. Chem. 1, pag. 481. 1887. 3) DUHEM, Sur la hauteur osmotique. Journ. de Phys. (2) 6, pag. 134. 1887. 4) DUHEM, Sur la pression osmotique. Journ. de Phys. (2) 6, pag. 397. 1887. 5) GOUY et CHAPERON, L'équilibre osmotique etc. Compt. rend. 105, pag. 117. 1887. 6) GOUY et CHAPERON, Sur l'équilibre osmotique. Ann. de Chim. et de phys. (6) 13, pag. 120. 1888. 7) DUHEM, De l'influence de la pesanteur sur les dissolutions. Journ. de Phys. (2) 7, pag. 391. 1888.

d) Moleculartheorie der Diffusion.

1) NERNST, Zur Kinetik der in Lösung befindlichen Körper. Zeitschr. f. physik. Chem. 2, pag. 611. 1888.

II. Diffusion der Gase und Dämpfe.

a) Freie Diffusion.

1) PRIESTLEY, Experiments and observations on different kinds of air. Vol. 3. London 1777. Uebersetzung. Wien u. Leipzig 1787. 2) DALTON, On the tendency of elastic fluids to diffusion trough each other. Mem. Manch. phil. soc. new. ser. 1, pag. 244. 1805. Auch GILBERT's Ann. 27, pag. 388. 1807. 3) BERTHOLLET, Sur le melange reciproque des gaz. Mém. d'Arcueil 2, pag. 463. 1809. 4) GRAHAM, Ueber das Eindringen der Gase in einander etc. POGG. Ann. 17, pag. 341. 1829. Aus Quat. Journ. of science etc. new. ser. 1829. No. 11, pag. 74. 5) CLAUSIUS, Ueber die mittlere Länge der Wege etc. POGG. Ann. 105, pag. 139. 1858. Auch Abhdlgn. zur mech. Wärmetheorie 2, pag. 260. 1867. 6) JUNGK, Beobachtungen über Diffusion des Wasserdampfs etc. POGG. Ann. 130, pag. 1. 1867. 7) HILDEBRANDSON, Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schwefelwasserstoffs beim Durchgang durch verschiedene Gase. CARL's Rep. 6, pag. 258. 1869. 8) MAXWELL, Illustrations of the dynamical theory of gases, part II. Phil. Mag. (4) 20, pag. 21. 1860. 9) WANKLYN, On the movement of gases. Phil. Mag. (4) 22, pag. 211. 1861. 10) GRAHAM, On the molecular mobility of gases. Phil. Mag. (4) 26, pag. 433. 1864. 11) MAXWELL, On the dynamical theory of gases. Phil. Mag. (4) 35, pag. 129, 185. 1868. 12) LOSCHMIDT, Experimentaluntersuchungen über die Diffusion von Gasen ohne poröse Scheidewände. Wien. Akad.-Ber. 61, pag. 367; 62, pag. 468. 1870. 13) WRETSCHKO, Experimentaluntersuchungen über die Diffusion von Gasgemengen. Wien. Akad.-Ber. 62, pag. 575. 1870. 14) BENIGAR, Experimentaluntersuchungen über die Diffusion von Gasgemengen. Wien. Akad.-Ber. 62, pag. 687. 1870. 15) STEFAN, Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen. Wien. Akad.-Ber. 63, pag. 63. 1871. 16) STEFAN, Ueber die dynamische Theorie der Diffusion der Gase. Wien. Akad.-Ber. 65, pag. 323. 1872. 27) BOLTZMANN, Ueber das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. Wien. Akad.-Ber. 66, pag. 275. 1872. 18) STEFAN, Versuche über die Verdampfung. Wien. Akad.-Ber. 68, pag. 385. 1873. 19) MAXWELL, On LOHSCHMIDT's experiments on diffusion in relation to the kinetie theory of gases. Nature 1873, pag. 298. 20) RAYLEIGH, On the work that may be gained during the mixing of gases. Phil. mag., 4. ser., 49, pag. 311. 1875. 21) O. E. MEYER, Die kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877. 22) v. OBERMAYER, Ueber die Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten der Gase von der Temperatur. Wien. Akad.-Ber. 81, pag. 1102. 1880. 23) MOUTIER, Sur la diffusion des gaz. Bull. de la soc. phil., 7. ser., 5, pag. 136. 1881. 24) STEFAN, Ueber die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken. Wien. Akad.-Ber. 83, pag. 943. 1881. 25) v. OBERMAYER, Versuche über die Diffusion der Gase. Wien. Akad.-Ber. 85, pag. 147 u. 748. 1882. 26) BOLTZMANN, Zur Theorie der Gasdiffusion. Wien. Akad.-Ber. 86, pag. 63. 1882. 27) WAITZ, Ueber die Diffusion der Gase. WIED. Ann. 17, pag. 201 u. 351. 1882. 28) HAUSMANINGER, Ueber die Veränderlichkeit des Diffusionscoëfficienten zwischen Kohlensäure und Luft. Wien. Akad.-Ber. 86, pag. 1074. 1882. 29) v. OBERMAYER, Versuche über Diffusion von Gasen. Wien. Akad.-Ber. 87, pag. 188. 1883. 30) GUGLIELMO, Ueber die Verdampfung des Wassers. Aus Atti del. R. Ac. Sc. di Torino 17. 1881; in Beibl. 6,

pag. 475. 1882. 31) GUGLIELMO, Bestimmung des Diffusionscoëfficienten des Wasserdampfs in Luft, H und CO_2. Aus Att. R. Ac. Torino 18. 1882; in Beibl. 8, pag. 20. 1884. 32) WINKELMANN, Ueber die Diffusion von Gasen und Dämpfen. WIED. Ann. 22, pag. 1 u. 152. 1884. 33) WINKELMANN, Ueber die Diffusion homologer Ester in Luft, H und CO_2. WIED. Ann. 23, pag. 203. 1884. 34) WINKELMANN, Ueber die Diffusion der Fettsäuren und Fettalkohole in Luft, H und CO_2. WIED. Ann. 26, pag. 105. 1885. 35) v. OBERMAYER, Ueber die Diffusion von Gasen. Wien. Akad.-Ber. 96, pag. 546. 1887. 36) WINKELMANN, Die Verdampfung in ihrer Abhängigkeit vom äusseren Druck. WIED. Ann. 33, pag. 445. 1888.

b) Diffussion durch feste Körper.

1) SÖMMERING, Ueber das Verdunsten des Weingeistes durch thierische Häute und durch Kautschuk. GILB. Ann. 61, pag. 104. 1819. 2) DÖBEREINER, Sur l'action cappillaire des fissures etc. Ann. de chim. et de phys. 24, pag. 332. 1823. 3) FARADAY, Ueber die Aufbewahrung von trocknen Gasarten über Quecksilber. POGG. Ann. 8, pag. 124. 1826. 4) DANIELL, Ueber die Absperrung von trockenen Gasarten durch Quecksilber. POGG. Ann. 10, pag. 623. 1827. 5) GRAHAM, Ueber das Gesetz der Diffussion der Gase. POGG. Ann. 28, pag. 331. Aus Phil. Mag., 3. sér., 2, pag. 175, 269, 351. 1833. 6) MITCHELL, Ueber das Durchdringungsvermögen von Flüssigkeiten. Journ. of the Roy. Inst. 2, pag. 101, 307. London 1831, s. auch POGG. Ann. 129, pag. 550. 1866. 7) T. S. THOMSON, Bemerkungen über GRAHAM's Gesetz etc. POGG. Ann. 34, pag. 628. 1835. Aus Phil. Mag., 3. ser., 4, pag. 321. 8) PEYRON, Von der Eigenschaft des Kautschuks Gase durchzulassen. POGG. Ann. 56, pag. 587. 1842. Aus Compt. rend. 13, pag. 820. 9) BUNSEN, Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857, pag. 209. 10) JAMIN, Note sur l'endosmose des gaz. Compt. rend. 43. pag. 234. 1856. Auch POGG. Ann. 99, pag. 337. 11) ST. CLAIRE-DEVILLE, De l'influence qu'excercent les parois de certains vases etc. Compt. rend. 52, pag. 524. 1861. 12) GRAHAM, Ueber die Molekularbeweglichkeit der Gase. LIEB. Ann. 131, pag. 1. 1864. Aus Phil. Trans. 1863. 13) ST. CLAIRE-DEVILLE et TROOST, Porosité de platine. Rep. chim. appl. 1863, pag. 236. 14) ST. CLAIRE-DEVILLE et TROOST, Sur la perméabilité du fer à haute temperature. Compt. rend. 57, pag. 965 u. POGG. Ann. 122, pag. 331. 1863. 15) MATTEUCCI, Sur la diffussion des gaz à travers certains corps poreux. Compt. rend. 57, pag. 251. 1863. 16) CAILLETET, Zwei Aufsätze über die Durchdringlichkeit der Metalle durch Gase. Compt. rend. 58, pag. 327 u. 1057. 17) ST. CLAIRE-DEVILLE, Zwei Aufsätze über die Durchdringlichkeit der Metalle durch Gase. Compt. rend. 58, pag. 328; 59, pag. 102. 1864. 18) REUSCH, Ueber einen Hydrophan von Czerwenitza. POGG. Ann. 124, pag. 431, 643. 1864. 19) GRAHAM, Ueber die Absorption und dialytische Trennung der Gase durch Colloidscheidewände. POGG. Ann. 129, pag. 549. Aus Phil. Trans. 1866. 20) BOUSSINESQ, Essai theorique sur la loi de Mr. GRAHAM etc. Compt. rend. 67, pag. 319. 1868. 21) VON LANG, Ueber eine neue Methode, die Diffussion der Gase durch poröse Scheidewände zu untersuchen. Sitzungsber. d. Wien. Akad. 61, pag. 288. 1870. 22) L. DUFOUR, Ueber die Diffusion der Gase durch poröse Wände etc. POGG. Ann. 148, pag. 490. 1873. Aus Arch. sc. phys. etc. de Genèv., 2. ser., 45, pag. 9. 1872. 23) L. DUFOUR, Recherches sur la diff. entre l'air sec et l'air humide etc. Arch. sc. phys., 2. ser., 49, pag. 316. 1873. 24) L. DUFOUR, Sur une variation de température qui accompagne la diffusion des gaz etc. Arch. sc. phys., 2. ser., 49, pag. 103. 1873. 25) FEDDERSEN, Ueber Thermodiffussion von Gasen. POGG. Ann. 148, pag. 302. 1873. 26) REUSCH, Ueber die Diffusion zwischen trockener und feuchter Luft. POGG. Ann. 152, pag. 365. 1874. 27) L. DUFOUR, Sur la diffussion hygrometrique. Arch. sc. phys. etc., 2. ser., 53, pag 177. 1875. 28) VON WROBLEWSKI, Ueber die Diffusion der Gase durch absorbirende Substanzen. POGG. Ann. 158, pag. 539. 1876. 29) MERGET, Sur la reproduction etc. des phénomènes de thermodiffusion etc. Compt. rend. 78, pag. 884. 1874. 30) PULUJ, Ueber die Diffusion der Dämpfe durch Thonzellen. CARL's Repert. 13, pag. 469, 533. 1877. 31) KUNDT, Zur Erklärung der Versuche DUFOUR's und MERGET's über die Diffusion der Dämpfe. WIED. Ann. 2, pag. 17. 1877. 32) QUINCKE, Ueber Diffusion und die Frage, ob Glas für Gase undurchdringlich ist. POGG. Ann. 160, pag. 118. 1877. 33) H. DUFOUR, La diffusion hygrometrique. Arch. sc. phys. etc., 3. ser., 2, pag. 527. 1879. 34) H. DUFOUR, La diffusion des gaz. au travers de la glace. Bull. Soc. Vand., 2. ser., 16, pag. 475. 1879. 35) WOODWARD, Description of an appa-

ratus to illustrate the production of work by diffusion. Phil. Mag., 5. ser., 16, pag. 375. 1883. 36) HÜFNER, Einige Versuche über Diffusion von Gasen durch den Hydrophan von Czernowitza. WIED. Ann. 16, pag. 253. 1882. 37) HANSEMANN, Ueber die Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand. WIED. Ann. 21, pag. 545. 1884. 38) KIRCHHOFF, Zur Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand. WIED. Ann. 21, pag. 563. 1884. 39) TROOST, Sur la perméabilité de l'argent pour le gaz oxygene. Compt rend. 98, pag. 1427. 1884. 40) BARTOLI, Ueber die Durchlässigkeit des Glases für Gase. Beibl. 1885, pag. 18. Aus Atti della R. Ac. dei Lincei, 3. ser., 8, pag. 337. 1884. 41) SCHIDLOWSKY, Versuch einer Anwendung der Diffusion etc. zur Bestimmung der Feuchtigkeit etc. Beibl. 1887, pag. 618. Aus Journ. d. russ. phys. chem. Ges. (6) 18, pag. 182. 1886.

c) Diffusion durch Flüssigkeiten.

1) DRAPER, Ein Diffusionsversuch. POGG. Ann. 43, pag. 88. 1831. Aus Phil. Mag. 3. ser. 11, pag. 559. 1837. 2) MARIANINI, Ueber eine Erscheinung bei Seifenblasen, die auf Kohlensäuregas schwimmen. POGG. Ann. 65, pag. 159. 1845. Aus Ann. d. chim. et 3. ser. 9, pag. 382. 1843. 3) FR. EXNER, Ueber den Durchgang der Gase durch Flüssigkeitslamellen. Sitzber. d. Wien. Akad. 70, pag. 465. 1875. Auch POGG. Ann. 155, pag. 321 u. 443. 4) FR. EXNER, Ueber die Diffusion der Dämpfe durch Flüssigkeitslamellen. Sitzber. d. Wien. Akad. 75, pag. 263. 1877. 5) VON WROBLEWSKI, Ueber die Gesetze, nach welchen sich die Gase in flüssigen etc. Körpern verbreiten. WIED. Ann. 2, pag. 481. 1877. 6) PRANGHE, Ueber die Diffussion von Gasen durch Flüssigkeitslamellen. Dissert. Bonn 1877. Auch Beibl. 2, pag. 202. 1878. 7) STEFAN, Ueber die Diffusion der Kohlensäure durch Alkohol und Wasser. Sitzber. d. Wien. Akad. 77, pag. 371. 1878. 8) VON WROBLEWSKI, Ueber die Constante der Verbreitung der Kohlensäure in reinem Wasser. WIED. Ann. 4, pag. 268. 1878. 9) VON WROBLEWSKI, Ueber die Abhängigkeit der Constante der Verbreitung der Gase in einer Flüssigkeit von der Zähigkeit der letzteren. WIED. Ann. 7, pag. 11. 1879. 10) VON WROBLEWSKI, Ueber die Natur der Absorption der Gase. WIED. Ann. 8, pag. 29. 1879. 11) HOOD, On the rate of chemical absorption of gases with regard to their interdiffusion. Phil. Mag. 5. ser. 17, pag. 352. 1884.

III. Diffusion fester Körper und flüssiger Metalle.

1) DANIEL, Annals of Roy. Inst. vol. 1. 2) HENRY, Durchdringung des Bleis vom Quecksilber. POGG. Ann. 52, pag. 187. 1841. Aus Biblioth. univ., ser. 3., 29, pag. 175. 3) HENRY, Beobachtungen über Capillarität. POGG. Erggsbd. 2, pag. 358. 1848. Aus Proc. of the Am. phil. soc. 4, pag. 176. 4) HORSFORD, The permeability of metals to mercury. Am. Journ. of sc., 2. ser., 13, pag. 305. 1852. 5) NIKLÈS, Ueber die Durchdringlichkeit der Metalle für Quecksilber. POGG. Ann. 88, pag. 335. 1853. Aus Compt. rend. 36, pag. 154. 6) MARSDEN, On the diffusion of an impalpable powder into a solid body. Proc. of the Edin. roy. soc. 1879/80, pag. 712. Auch Beibl. 5, pag. 172. 1875. 7) COLSON, Sur la diffusion des solides dans les solides. Compt. rend. 93, pag. 1074. 1881. 8) COLSON, Sur la diffusion des solides. Compt. rend. 94, pag. 26. 1882. 9) VIOLLE, Sur la diffusion du carbon. Compt. rend. 94, pag. 28. 1882. 10) PERNOLET, Compt. rend. 94, pag. 99. 1882. 11) GUTHRIE, On certain molecular constants. Phil. Mag., 5. ser., 16, pag. 329. 1883. Auch Beibl. 8, pag. 464. 1884. 12) ROBERTS, On a case of rapid diffusion of molten metals. Rep. of the Brit. Ass. 1885, pag. 402. Auch Beibl. 10, pag. 675. 1886.

K. WAITZ.

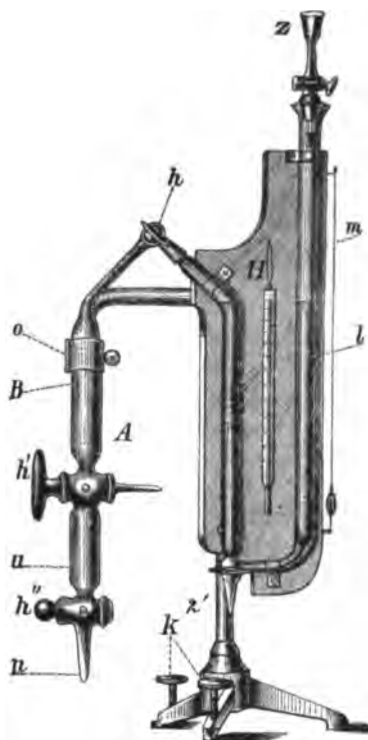
Absorption.

(Absorption, Occlusion, Adsorption, Vaporhäsion.)

Ganz allgemein könnte man unter Absorption alle die Erscheinungen zusammenfassen, bei welchen von zwei mit einander in Berührung befindlichen Körpern der eine dem Anscheine nach in dem anderen verschwindet. Man hat jedoch, je nach dem Aggregatzustande des verschwindenden Körpers, verschiedene

Bezeichnungen für die betreffende Erscheinung eingeführt und den Namen Absorption auf das scheinbare Verschwinden von Gasen und Dämpfen beschränkt. Ob dabei der absorbirende Körper fest oder flüssig sei, macht keinen principiellen Unterschied aus; jedoch nennt man im ersteren Falle die Erscheinung zuweilen Occlusion. Dagegen hat man bei festen Körpern von der eigentlichen Absorption eine andere Erscheinung zu trennen, bei welcher das Gas oder der Dampf nicht in dem Körper, d. h. in seinem Inneren, sondern an ihm, d. h. an seiner Oberfläche, resp. in seinen oberflächlichen Schichten verschwindet, und welche man demgemäss als Adsorption bezeichnet.

Zur Beobachtung der Absorption bedarf es nur eines in Quecksilber auchenden oben geschlossenen Glasrohres, welches mit dem zu absorbierenden Gase gefüllt ist; bringt man dann in das Rohr über das Quecksilber ein wenig Wasser oder ein Stückchen Holzkohle, so lässt das allmähliche Steigen des Quecksilbers im Rohr auf die stattgehabte Absorption eines Theiles des Gases durch das Wasser resp. die Holzkohle schliessen. Auch die Apparate, welche zu messenden Untersuchungen über Absorption bestimmt sind und deshalb Absorptiometer heissen, sind wesentlich in der angedeuteten Art construirt und beruhen auf der Messung des ursprünglichen und des übrigbleibenden Druckes, etwa abgesehen von sehr starken Absorptionen, bei welchen eine Wägung des absorbirenden Körpers vor und nach der Absorption genügt. In jedem Falle erscheint es indessen angezeigt, den Vorgang durch Schütteln zu unterstützen. Von den verschiedenen Absorptiometern, die sich, wie gesagt, nur in den Einzelheiten unterscheiden, mögen hier diejenigen von SAUSSURE, BUNSEN, WIEDEMANN, HÜFNER, HEIDENHAIN und MEYER [1]) erwähnt werden, sowie das neueste, von GORE [2]) construirte.



(Ph. 210.)

Die Ergebnisse der mit diesen und ähnlichen Apparaten angestellten Untersuchungen machen es nothwendig, in Bezug auf die Absorptionserscheinungen eine weitere Unterscheidung zu treffen. Dieselben können nämlich rein physikalischer oder gemischt physikalisch-chemischer Natur sein; hier sollen nur die ersteren betrachtet werden, also solche, bei welchen die chemische Beschaffenheit der betheiligten Körper unverändert bleibt.

Das erste und fundamentalste Ergebniss der gedachten Untersuchungen ist dies, dass die verschiedenen festen und flüssigen Körper ein überaus verschiedenes Absorptionsvermögen haben und dass dasselbe für einen und denselben festen oder flüssigen Körper ganz ausserordentlich verschieden ist für verschiedene Gas- oder Dampfarten. Einen zahlenmässigen Ausdruck findet dieses

---

1) SAUSSURE, GILB. Ann. 47, 1814. — BUNSEN, LIEB. Ann. 93 u. Gasometr. Methoden, Braunschweig 1857. — HÜFNER, J. f. pr. Ch. 22. 1880. — HEIDENHAIN u. MEYER, Ann. d. Ch. Suppl. 2.

2) GORE, G., Chem. N. 37, pag. 165.

Vermögen in dem Absorptionscoëfficienten; derselbe giebt an, das Wievielfache seines eigenen Volumens der betreffende Körper von dem betreffenden Gase absorbiren kann und zwar bei einer Temperatur von 0° und unter einem Drucke von 760 *mm*. Die folgende Tabelle giebt eine Reihe von Absorptionscoëfficienten, und zwar für einige feste Körper nach SAUSSURE[1]), für einige Flüssigkeiten nach BUNSEN[1]); da jedoch Temperatur und Druck bei den betreffenden Versuchen nicht immer genau die obigen waren, sind dieselben stets mit angegeben.

	Buchsbaumkohle 12° 724 *mm*	Meerschaum 15° 730 *mm*	Gyps 15° 730 *mm*	Seide 15° 730 *mm*	Haselholz 15° 730 *mm*	Wasser 15° ca. 740 *mm*	Alkohol 15° ca. 740 *mm*
Ammoniak	90	15	—	78·1	100	727·2	—
Chlorwasserstoff	85	—	—	—	—	—	—
Schweflige Säure	65	—	—	—	—	43·564	144·55
Schwefelwasserstoff	55	—	—	—	—	3·2326	9·539
Aethylen	35	3·7	—	0·5	0·71	—	—
Methyl	—	—	—	—	—	0·0508	—
Aethyl	—	—	—	—	—	0·0215	—
Stickoxydul	40	3·76	—	—	—	0·7778	3·2678
Kohlensäure	35	5·26	0·43	1·1	1·1	1·0020	3·1993
Grubengas	—	—	—	—	—	0·0391	0·4828
Kohlenoxyd	9·4	1·17	—	0·3	0·58	0·0243	0·2044
Elayl	—	—	—	—	—	0·1615	2·8825
Sauerstoff	9·2	1·49	0·58	0·44	0·47	0·0299	0·2840
Stickstoff	7·5	1·60	0·53	0·13	0·21	0·0145	0·1214
Luft	—	—	—	—	—	0·0179	—
Wasserstoff	1·75	0·44	0·50	0·3	0·58	0·0193	0·0673

Wie man sieht, wird ein Gas, welches von einem Körper stark absorbirt wird, meist auch von den übrigen stark absorbirt und umgekehrt; eine einfache Gesetzmässigkeit scheint aber in dieser Beziehung nicht zu bestehen.

Zu diesen Zahlen sind in neuerer Zeit einige weitere hinzugefügt worden, so namentlich von HUNTER[2]) für verschiedene Holzkohlen, insbesondere Cocosnuss-Holzkohle einerseits und zahlreiche Gase und Dämpfe andererseits; die letzteren gelten natürlich meist für hohe Temperaturen (zwischen 90° und 230°) und bewegen sich (für Cocosnuss-Holzkohle) zwischen 3·7 für Zweifach-Chlorkohlenstoff bei 154° und 696 *mm* und 153 für Holzgeist bei 91° und 708 *mm*.

Für Salzlösungen hat SETSCHENOFF[3]) eingehende Versuche ausgeführt und dabei den für zahlreiche Salze (Chloride, Nitrate, einige Sulfate u. s. w.) giltigen Satz gefunden, dass der Absorptionscoëfficient der Salze für ein bestimmtes Gas stets kleiner als bei Wasser und desto kleiner ist, je concentrirter die Salzlösung ist. Den Absorptionscoëfficienten für Kohlensäure fand er beim Blut etwa ebensogross wie beim Wasser[4]). Der für Salzlösungen giltige Satz folgt übrigens auch aus Versuchen von MACKENZIE[5]). Die Absorptionsfähigkeit verschiedener

---

1) a. a. O.
2) HUNTER, Chem. Soc. J. (2), Bd. 3—12. 1865—74.
3) SETSCHENOFF, Mém. St. Pét. 22.
4) Derselbe, Ber. Chem. Ges. 1877, pag. 972.
5) J. J. MACKENZIE, Ann. d. Phys. (2) 1, pag. 438.

Alkohole für Ammoniak ist von PAGLIANI und EMO[1]) geprüft worden, und es stellte sich heraus, dass der Coëfficient desto kleiner ist, je grösser das Molekulargewicht des Alkohols ist, stets aber viel kleiner als bei Wasser. Endlich wäre zu erwähnen, dass feuchte Kohle weniger Gas absorbirt als trockene; statt der in der obigen Tabelle für Kohlensäure, Stickstoff, Sauerstoff verzeichneten Zahlen 35, 7·5, 9 25 fand SAUSSURE, wenn die Kohle feucht war, nur 17, 6·5, 3·25.

Der Absorptionscoëfficient bezieht sich wie gesagt auf die bestimmte Temperatur von 0° und den bestimmten Druck von 760 *mm*. Das Absorptionsvermögen hängt aber, wie die Versuche ergeben haben, vom Druck und von der Temperatur ab; die Angabe des Absorptionscoëfficienten ist also für die Kenntniss der Erscheinung nicht ausreichend, sondern es muss untersucht werden, von welcher Art jene doppelte Abhängigkeit ist.

Was die Abhängigkeit vom Druck betrifft, so hat HENRY[2]) auf Grund seiner Versuche das nach ihm benannte Gesetz aufgestellt, dass das absorbirte Volumen vom Druck unabhängig ist. Nun verhalten sich nach dem BOYLE'schen Gesetz die Gewichtsmengen gleicher Volumina eines Gases wie die Drucke, unter welchen dasselbe steht. Man kann also das HENRY'sche Gesetz auch so aussprechen: das absorbirte Gasgewicht ist dem Drucke, unter welchem es stand, proportional. Das HENRY'sche Gesetz ist von zahlreichen Forschern geprüft worden; einige derselben, so SAUSSURE und in neuerer Zeit NACCARI und PAGLIANI, fanden es bestätigt, Andere nicht oder doch nicht immer; am ehesten dürfte es noch für schwach absorbirende Flüssigkeiten und innerhalb mässiger Druckgrenzen gelten. Als Beispiel einer Zahlenreihe möge eine angeführt werden, welche die Versuchsergebnisse von KHANIKOFF und LOUGUININE[3]) für Wasser und Kohlensäure wiedergiebt; p ist der Druck, a der Absorptionscoëfficient, also das pro Raumeinheit Wasser jedesmal wirklich verschwindende Gasvolumen (auf 0° reduzirt — bei K. u. L. wird fälschlicher Weise auch auf 760 *mm* reducirt, was, wenn a die Bedeutung eines Coëfficienten behalten soll, bei auch nur roher Giltigkeit des HENRY'schen Gesetzes offenbar nicht geschehen darf).

p	a	p	a	p	a
697·7	1·0289	2002·1	1·1037	2738·3	1·1110
809·0	1·0908	2188·7	1·1023	3109·5	1·1000
1289·4	1·1247	2369·0	1·1182		
1469·9	1·1179	2554·0	1·1055		

Die drei ersten a-Werthe bilden zwar eine steigende Reihe, die Steigung setzt sich aber bei den weiteren a-Werthen nicht fort, und im Mittel betragen die Abweichungen vom Durchschnitt nur ein bis zwei Prozent; man wird also in diesen Zahlen einen Beweis gegen das HENRY'sche Gesetz nicht finden, wie ihn die Genannten auf Grund einer anderen Berechnungsart zu finden glaubten.

Dasselbe gilt von den von SIMS[4]) für Wasser und schweflige Säure gefundenen Zahlen, z. B. den folgenden (p Druck in Metern Quecksilber, g absorbirtes Gewicht in Gramm; Temperatur 7°).

1) PAGLIANI u. EMO, Atti R. Ac. di Tor. 18. 1882.

2) HENRY, Phil. Trans. 1803, I, pag. 29, auch GILB. Ann. 20. 1805.

3) KHANIKOFF u. LOUGUININE, Ann. Ch. Ph. (4) 11, pag. 412. 1866.

4) SIMS, Ann. Pharm. 118, pag. 334. 1861.

p	0·05	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	1·0	1·3
g	0·015	0·027	0·050	0·073	0·096	0·118	0·229	0·295
g/p	0·30	0·27	0·25	0·24	0·24	0·24	0·23	0·23

Das Verhältniss zwischen Absorptionsgewicht und Druck zeigt zwar hier eine regelmässige Abnahme mit steigendem Druck, während es nach dem HENRY'schen Gesetz constant sein sollte; die Abnahme ist aber mit Rücksicht auf die weiten Druckgrenzen so geringfügig, dass man aus ihr kaum etwas wird schliessen dürfen, wenigstens nicht ohne anderweitige Bestätigung. Diese Bestätigung wird nun aber durch die von ROSCOE und DITTMAR[1]) sowie von SIMS gefundenen Zahlen für Wasser und Ammoniak geliefert, wie folgende für 20° gültige Zahlen zeigen.

p	0·06	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·7	1·0	1·4	1·5	1·9	2·0
g	0·119	0·158	0·232	0·296	0·353	0·403	0·492	0·613	0·761	0·801	0·955	0·992
g/p	2·0	1·6	1·2	1·0	0·9	0·8	0·7	0·6	0·5	0·5	0·5	0·5

Hier ist die Abnahme der g/p-Werthe, also die Abweichung vom HENRY'schen Gesetz augenfällig; da nun Ammoniak ganz besonders stark, schweflige Säure zwar schwächer, aber auch immer noch sehr stark vom Wasser absorbirt wird, so ist zu schliessen, dass für stark absorbirbare Gase das HENRY'sche Gesetz nicht gilt, sondern bei stärkerem Druck ein geringeres Volumen absorbirt wird.

Eine umgekehrte Abweichung vom HENRY'schen Gesetz zeigt die Absorption einiger Gase durch einige feste Körper. Für Cocosnuss-Holzkohle fand z. B. HUNTER[2]) folgende Zahlen (p in *mm*):

1) Für Kohlensäure.

p	760	928	1015	1100	1413	1626	1913	2324	2960	3793
a	73·2	84·0	85·5	87·3	91·6	95·5	100·4	108·0	113·0	132·4

2) Für Ammoniak.

p	760	1104	1178	1269	1370	1487	1795	2003	2609
a	170·7	174·3	176·0	178·2	180·8	183·5	188·7	196·7	209·8.

Der Absorptionscoëfficient, d. h. das absorbirte Volumen steigt also hier mit dem Druck. Ganz besonders stark wird diese Abhängigkeit, wie CHAPPUIS[3]) gezeigt hat, bei kleinen Drucken, z. B. für Pfaffenhut-Holzkohle und Kohlensäure:

p	1·13	2·23	4·70	9·05	18·82	35·5	70·1
a	0·7	1·5	3·5	6·0	11·1	17·8	27·4
p	137·9	258	365	465	592	703	763
a	39·8	53·1	60·9	66·5	71·8	75·4	77·1.

Das HENRY'sche Gesetz bedarf nun aber, selbst wo es gilt, in einem gewissen Falle noch einer näheren Erläuterung, nämlich dann, wenn es sich um die Absorption nicht von einfachen Gasen, sondern von Gasgemengen handelt. Diese Erläuterung wird durch das DALTON'sche Gesetz gegeben. Nach demselben ist die von dem absorbirenden Körper aufgenommene Gewichtsmenge eines jeden der Bestandtheile des Gemenges proportional mit dem Partialdruck desselben, d. h. mit dem Drucke, welchen es ausüben resp. unter welchem es sich befinden würde, wenn es allein den ganzen Raum des Gemenges einnähme. Auch dieses Gesetz scheint jedoch nur für mässige Absorptionen und mässige Drucke zu gelten.

1) ROSCOE u. DITTMAR, Ann. Pharm. 112, pag. 349. 1859.

2) a. a. O.

3) CHAPPUIS, WIED. Ann. 12, pag. 160. 1881.

Ein interessantes Beispiel für die Absorption von Gemengen bietet die **Luft** dar, welche im freien Zustande bekanntlich 21% Sauerstoff und 79% Stickstoff enthält. Da nun der Absorptionscoëfficient des Wassers für Sauersoff etwa doppelt so gross ist wie für Stickstoff, so wird die in Wasser absorbirte Luft auf 79 Thle. Stickstoff 42 Thle. Sauerstoff enthalten, d. h. die Luft besteht aus 35% Sauerstoff und 65% Stickstoff, sie ist also sauerstoffreicher — eine für die mit Kiemen Luft athmenden Wasserthiere wichtige Thatsache.

Ausser dem Druck übt auch die **Temperatur** einen Einfluss auf die Stärke der Absorption aus. Jedoch lässt sich hier ein einfaches Gesetz nicht aufstellen, es muss vielmehr genügen, die den verschiedenen Temperaturen entsprechenden Werthe des Absorptionscoëfficienten in einer Tabelle zu vereinigen, oder aber aus diesen Werthen eine empirische Formel für ihn zu bilden.

Beispiele der ersteren Darstellungsart:

1) Wasser und schweflige Säure nach SIMS[1]).

t	8°	12°	16°	20°	24°	28°
g	0·168	0·142	0·121	0·104	0·092	0·083
v	58·7	49·6	42·2	36·4	32·3	28·9

t	32°	36°	40°	44°	48°	50°
g	0·073	0·065	0·058	0·053	0·047	0·045
v	25·7	22·8	20·4	18·4	16·4	15·6

2) Cocosnuss-Holzkohle und Ammoniak nach HUNTER[2]).

t	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
v	175·7	169·6	163·8	157·6	148·6	140·1	131·9	123·0

t	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
v	114·1	104·2	69·0	90·2	88·1	86·4	82·6.

3) Pfaffenhut-Holzkohle und Kohlensäure nach CHAPPUIS[3]).

t	0°	15°	37°	46°	56°	63°	73°	83°
a	77	62	44	38	31	27	23	19

Wie man sieht, nimmt der Absorptionscoëfficient mit steigender Temperatur stets ab; auch durch Versuche von PAGLIANI und EMO (für Alkohol und Ammoniak) und von anderen ist dies bestätigt worden. Man kann hiernach durch Erhitzen eines Körpers, welcher Gase absorbirt enthält, einen Theil dieser Gase austreiben.

Soll nun andererseits der Einfluss der Temperatur auf den Absorptionscoëfficienten durch eine **Formel** dargestellt werden, so wird in derselben auf ein constantes Glied ein negatives mit t behaftetes folgen müssen; von dieser Art sind z. B. die von WROBLEWSKI[4]) für rothen Kautschuk aufgestellten Formeln:

1) für N_2O: $a = 1{\cdot}9561 - 0{\cdot}02665\ t$ (zwischen 5° und 20°),

2) für CO_2: $a = 1{\cdot}2779 - 0{\cdot}01576\ t$ (zwischen 6° und 21°).

(Zwei weitere für H und Luft giltige Formeln, welche mit positivem t-Glied behaftet sind, sind wegen der zu engen Temperaturgrenzen als zweifelhaft zu betrachten).

Meistens ist aber die Abnahme des Coëfficienten der Temperatur nicht ein-

[1]) a. a. O.

[2]) a. a. O.

[3]) CHAPPUIS, WIED. Ann. 12, pag. 160 1881.

[4]) WROBLEWSKI, WIED. Ann. 8, pag. 29. 1880.

fach proportional, und es muss daher ein drittes, mit t^2 behaftetes Glied hinzugefügt werden. Man erhält also die Formel

$$a = A - Bt + Ct^2.$$

Für die wichtigsten Fälle folgen hier die gefundenen Werthe von A, B, C.

1) Wasser nach BUNSEN[1])
(zwischen 0° und 20°, bei 9) und 10) zwischen 0° und 40°):

Gas	A	B	C
1) Wasserstoff	0·0193	—	—
2) Stickstoff	0·020346	0·00053887	0·000011156
3) Sauerstoff	0·04115	0·00108986	0·000022563
4) Kohlenoxyd	0·032874	0·00081632	0·000016421
5) Kohlensäure[2])	1·7967	0·07761	0·0016424
6) Sumpfgas	0·05449	0·0011807	0·000010278
7) Aethylen	0·25629	0·00913631	0·000188108
8) Stickoxydul	1·30521	0·0453620	0·0006843
9) Chlor	3·0361	0·046196	0·0001107
10) Schwefelwasserstoff . .	4·3706	0·083687	0·0005213
11) Aethyl	0·031474	0·0010449	0·000025066
12) Methyl	0·0871	0·0033242	0·0000603
13) Schweflige Säure . .	79·789 75·182	2·6077 2·1716	0·029349 0·01903

2) Alkohol nach BUNSEN (zwischen 0° und 25°).

Gas	A	B	C
1) Sauerstoff	0·28397	—	—
2) Kohlenoxyd	0·20443	—	—
3) Stickstoff	0·126338	0·0004180	0·000006
4) Wasserstoff	0·06925	0·0001487	0·000001
5) Kohlensäure	4·32955	0·09395	0·00124
6) Sumpfgas	0·522586	0·0028655	0·0000142
7) Aethylen	3·594984	0·0577162	0·0006812
8) Stickoxydul	4·17805	0·069816	0·000609
9) Schwefelwasserstoff . .	17·891	0·65598	0·00661
10) Schweflige Säure . . .	327·798	16·8437	0·8066

3) Chlornatriumlösung und Chlor nach KUMPF[3])
(zwischen 0° und 27°, chemische Vorgänge fanden nicht statt).

1) 9·97 % NaCl: $a = 2·2317 - 0·05505\,t + 0·000025\,t^2$
2) 16·01 % NaCl: $a = 2·1923 - 0·11281\,t + 0·0000328\,t^2 - 0·0000422\,t^3$
3) 19·66 % NaCl: $a = 1·7440 - 0·06717\,t + 0·00117\,t^2 - 0·0000097\,t^3$.

Abgesehen von einigen, nicht ganz zweifellosen Ausnahmen, in welchen B und C null sind, ist hiernach sowohl B wie C stets positiv; der Absorptionscoëfficient nimmt also, wie schon gesagt, mit steigender Temperatur ab, aber die Abnahme erfolgt langsamer als die Zunahme der Tempe-

[1]) a. a. O.

[2]) NACCARI u. PAGLIANI (N. Cim. (3) 7, pag. 71. 1880), finden ziemlich abweichend zwischen 17 u. 27°: $A = 1·5062$, $B = 0·036511$, $C = 0·0002917$.

[3]) KUMPF, Ueb. d. Abs. v. Chlor durch Chlornatriumlösung. In.-Dissert. Graz 1881.

ratur. Eine weitere Wahrnehmung hat E. WIEDEMANN[1]) gemacht; während nämlich z. B. in der ersten der obigen Tabellen A zwischen 0·02 und 80, also bis zum 4000fachen variirt, schwankt das Verhältniss $B:A$ nur zwischen 0·02 und 0·05, also nur bis zum $2\frac{1}{2}$fachen. Dieser Bruch giebt aber an, ein wie grosser Bruchtheil des bei 0° absorbirten Gases bei einer Temperaturerhöhung um 1° ausgetrieben wird. Diese Menge scheint also bei allen Gasen nur innerhalb enger Grenzen zu variiren, wenigstens beim Wasser; beim Alkohol sind die Schwankungen viel beträchtlicher.

Die Betrachtung des Einflusses der Temperatur giebt Veranlassung, noch einmal auf denjenigen des Druckes, also auf das HENRY'sche Gesetz zurückzukommen, welches sich in vielen Fällen nicht giltig erwies. In diesen Fällen gilt es nun, wie die Versuche ergeben, desto annähernder, je höher die Temperatur ist, und am besten für Temperaturen, welche oberhalb der für das betreffende Gas kritischen liegen.

Einige besondere Eigenthümlichkeiten bietet die Absorption von Gasen in Metallen dar, wobei es einen Unterschied ausmacht, ob das Metall sich in fein vertheiltem oder aber in consistentem Zustande befindet. Ein Beispiel für den ersten Fall liefert das aus Platinchlorürlösung durch Weingeist niedergeschlagene Platinvulver, sogenanntes Platinmohr, welches nach DÖBEREINER das 250fache Volumen Sauerstoff absorbirt. Andererseits besitzen von den consistenten Metallen einige ein beträchtliches Absorptionsvermögen für Wasserstoff oder Sauerstoff. Am stärksten scheint dasselbe beim Palladium, und zwar für Wasserstoff, zu sein; frisch im Vacuum ausgeglüht, absorbirt es bei etwa 100° mehr als das 600fache Volumen; hat es einige Zeit in verdünnter Schwefelsäure als negativer Pol einer galvanischen Säule gedient, sogar fast das 1000fache. Das Eigenthümliche hierbei ist aber der Verlauf des Vorganges bei Aenderung der Temperatur. Die Absorption des Wasserstoffes in Palladium z. B. nimmt anfangs, etwa bis 100°, zu und dann erst, wie bei den Flüssigkeiten und nicht metallischen festen Körpern, ab. Noch anders verhält es sich bei manchen Metallen, welche, wie namentlich Silber und Kupfer, im geschmolzenen Zustande Sauerstoff absorbiren. Diese geben das Gas beim Erkalten ab, und zwar oft so heftig und rapide, dass feine Tropfen des Metalls mit hinausgeschleudert werden — eine Erscheinung, welche als das Spratzen der Metalle bezeichnet wird.

Dieser Eigenthümlichkeiten halber pflegt die Absorption durch consistente Metalle mit dem besonderen Namen »Occlusion« benannt zu werden. Eine solche Occlusion, namentlich von Sauerstoff, ist in den letzten Jahren, in höherem oder geringerem Grade, in fast allen Metallen nachgewiesen worden; z. B. im Silber von DUMAS[2]), im Stahl von KERN[3]) (etwa $\frac{1}{300}$); überraschend grosse Mengen von Wasserstoff haben sich, neben kleineren von Stickstoff und Kohlenoxyd, zu wiederholten Malen im Meteoreisen gefunden, im Durchschnitt etwa das 3fache Volumen Gas überhaupt, davon $\frac{5}{6}$ Wasserstoff; zur Vergleichung ist zu erwähnen, dass das von gewöhnlichem Eisen in Kohlenfeuer absorbirte Gas ($2\frac{2}{3}$ Vol.) nach GRAHAM nur zu $\frac{1}{3}$ aus Wasserstoff, dagegen zu $\frac{1}{2}$ aus Kohlenoxyd (Rest Stickstoff und Kohlensäure) besteht.

Die Occlusion von Gasen in Metallen ist, worauf insbesondere DUMAS[4]) auf-

1) E. WIEDEMANN, WIED. Ann. 17, pag. 349. 1882.

2) DUMAS, Compt. rend. 86, pag. 65. 1878.

3) KERN, Chem. N. 36, pag. 19. 1877.

4) DUMAS, a. a. O.

merksam gemacht hat, eine Fehlerquelle bei Bestimmung des specifischen Gewichts der letzteren; man muss die Gase also vorher möglichst austreiben und erhält dann z. B. für Silber 10·51, also mehr als gewöhnlich angenommen wird.

Die Absorption wird von zwei anderen Erscheinungen begleitet, nämlich von einer Vergrösserung des Volumens und von einer Entwickelung von Wärme. In ersterer Hinsicht sind zwei Fälle denkbar, nämlich eine Volumenvergrösserung von solchem Betrage, dass das specifische Gewicht des absorbirenden Körpers verringert wird (dies ist der häufigere Fall, man sehe z. B. oben Silber und Sauerstoff), und eine Volumenvergrösserung von solchem Betrage, dass das specifische Gewicht vergrössert wird. Von den einzelnen Untersuchungen hierüber sei eine von MACKENZIE und NICHOLS[1]) erwähnt, welche für Wasser und Kohlensäure ergab: 1) dass die Volumenvergrösserung proportional der absorbirten Gasmenge ist, und 2) dass dieser Zuwachs ungefähr dem Volumen der flüssigen Kohlensäure (nach ANDREWS) entspricht. Für verschiedene, von Wasser absorbirte Gase sei folgende Tabelle nach ÅNGSTRÖM[2]) angegeben:

Ausdehnung durch Aufnahme von 1 Vol. Gas:

Stickstoff	0·00145	Sauerstoff	0·00115
Luft	0·00140	Wasserstoff	0·00106
Kohlenoxyd . . .	0·00127	Kohlensäure	0·00129.

Zahlreich sind die Messungen der bei der Absorption entwickelten Wärme; irgend welche Gesetzmässigkeit ist jedoch aus den Zahlen nicht zu entnehmen, die an sie geknüpften Betrachtungen sind überdies von wesentlich chemischem Interesse.

Es möge nun noch auf einige Anwendungen der eigentlichen Absorption hingewiesen werden:

1) Trocknung der Luft durch hygroskopische Stoffe. Zahlreiche Stoffe, in hervorragendem Grade Chlorcalcium, Chlornatrium, Chlormagnesium, Potasche, Schwefelsäure ziehen den Wasserdampf aus der Luft an und absorbiren ihn so stark, dass sie ihn zu Wasser verdichten, und dadurch wieder zur Auf nahme neuen Wasserdampfes befähigt werden. Diese Stoffe sind also zur Trocknung feuchter Luft in hohem Grade geeignet.

2) Absorptionshygrometer. Die Absorptionsfähigkeit einiger anderer Stoffe, z. B. von Darmsaiten und Haaren, ebenfalls für Wasserdampf, wird zur Messung des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft benutzt. Da diese Körper von linearer Gestalt sind, wird sich die Volumenvermehrung in ihrer Verlängerung äussern, die auf einen Zeiger übertragen und auf einer empirisch graduirten Scala abgelesen werden kann. Hierauf beruhen, ausser den volksthümlichen Wetterpropheten, das Haarhygrometer von SAUSSURE und das Bifilarhygrometer von KLINKERFUES.

3) Die DÖBEREINER'sche Zündmaschine. Der absorbirende Körper ist hier Platinschwamm oder Platinmohr, welcher Sauerstoff aus der Luft absorbirt hat. Lässt man nun auch noch Wasserstoff auf ihn strömen, so wird auch dieser absorbirt und so viel Wärme entwickelt, dass der Platinschwamm glühend und der Wasserstoffstrom entzündet wird.

Adsorption.

Von der eigentlichen Absorption wesentlich verschieden ist, wie man erst in den letzten Jahren klar erkannt hat, die Erscheinnng der Adsorption. Die-

[1]) MACKENZIE u. NICHOLS, WIED. Ann. 3, pag. 134. 1878.

[2]) ÅNGSTRÖM, WIED. Ann. 17, pag. 297. 1882.

selbe besteht nicht in einem Eindringen von Gasen in das Innere fester Körper, sondern in einer Verdichtung derselben an ihrer Oberfläche, wobei die Gastheilchen höchstens in die oberflächlichen Schichten des festen Körpers eindringen. Experimentell charakterisirt sich diese Erscheinung dadurch, dass sie nicht von der Grösse des Volumens, sondern von der Grösse der Oberfläche des absorbirenden Körpers abhängt; man muss also Körper von grosser Oberfläche anwenden, um beträchtliche Adsorptionen zu erzielen. Den Uebergang von der Absorption zur Adsorption bilden gewissermaassen die oben mehrfach betrachteten porösen Körper, wie Holzkohle oder Metallmor; bei einem solchen Körper lässt sich gar nicht immer sagen, ob es sich um Absorption oder Adsorption handelt, da hier Volumen und Oberfläche in einem bestimmten Verhältniss zu einander stehen. Es genüge daher, beispielsweise eine von PFEIFFER[1]) zusammengestellte Tabelle wiederzugeben, welche die von 22·5 *gr* resp. der entsprechenden Oberfläche verschiedener Kohlen bei 19° und den darüber gesetzten Drucken (in *mm*) absorbirten Kohlensäuremengen angiebt.

	$p = 200$	300	400	500	600	700
Erle (JOULIN)	530	700	790	870	950	1000
Pfaffenhutholz (CHAPPUIS) .	450	580	680	760	820	870
Buchsbaum (KAYSER) . .	370	470	560	610	660	730
Fichte (PFEIFFER)	290	420	510	590	660	710

Am geeignetsten zur Untersuchung der reinen Adsorption sind consistente Metalle und Glas; namentlich das Letztere ist neuerdings von BUNSEN, KAYSER u. A. vielfach benutzt worden. Man bringt es zu diesem Zwecke, um eine recht grosse Oberfläche zu haben, in Gestalt von Fäden oder Wolle unter eine Glasglocke, so dass deren innere Wand ebenfalls einen Theil des adsorbirenden Körpers bildet. In Bezug auf die Resultate liess sich bis vor kurzem noch wenig sagen, da die Ansichten der Experimentatoren selbst über die Deutung ihrer Versuche und die aus denselben zu ziehenden Schlüsse einander grossentheils widersprachen. Während einige Beobachter, wie bei der Absorption, die adsorbirten Gasvolumina vom Drucke wenig abhängig finden, ergiebt sich aus den Untersuchungen von KAYSER[2]) sowie von PFEIFFER[3]) eine beträchtliche Abnahme derselben mit wachsendem Druck, so dass die adsorbirten Gewichtsmengen oder, was dasselbe ist, die auf 760 *mm* reducirten Volumina nicht proportional dem Druck, sondern viel langsamer zunehmen. Ebenfalls wohl nur beschränkte Bedeutung haben die folgenden von KAYSER für Buchsbaumkohle aufgestellten Druckformeln:

1) Kohlensäure: a) bei 15°: $v = 90{\cdot}08 - 24{\cdot}37 \; log\,p$
b) „ 12°: $v = 100{\cdot}7 - 27{\cdot}2 \; log\,p$
2) Luft: a) „ 0°: $v = 9{\cdot}262 - 2{\cdot}02 \; log\,p$
b) „ 18°: $v = 4{\cdot}26 - 0{\cdot}48 \; log\,p$
c) „ 22°: $v = 5{\cdot}285 - 0{\cdot}95 \; log\,p$
d) „ 44°: $v = 1{\cdot}94 - 0{\cdot}58 \; log\,p$
3) Schweflige Säure „ 19°: $v = 42{\cdot}614 - 11{\cdot}133 \; log\,p$
4) Wasserstoff „ 14°: $v = 6{\cdot}036 - 1{\cdot}500 \; log\,p$.

Das allgemeinste Gesetz, welches sich ziemlich übereinstimmend aus den Versuchen von JOULIN, HUNTER, CHAPPUIS, KAYSER u. A. ableiten lässt, scheint

[1]) PFEIFFER, Ueb. d. Verdichtung von Gasen durch feste Körper u. s. w. Inaug-Diss. Erlangen 1882.

[2]) KAYSER, WIED. Ann. 12, pag. 528 u. 14, pag. 450. 1881.

[3]) a. a. O.

dies zu sein, dass gleichen Druckänderungen etwa gleiche Aenderungen der adsorbirten Gasmengen entsprechen.

In Bezug auf den Einfluss der Temperatur fand PFEIFFER[1]), dass die bei Temperaturerhöhungen losgelösten Gasmengen ersteren nahezu proportional sind. Dass dieser Satz aber nur beschränkte Giltigkeit hat, zeigt folgende Tabelle:

	$t = 0°$	35°	70°
Ammoniak . . .	176	123	82
Cyan	114	101	88

Wie man sieht, nimmt die Adsorption zwar beim Cyan gleichmässig ab, beim Ammoniak dagegen ungleichmässig; die Folge davon ist, dass die Gase ihre Plätze vertauschen: bei 0° wird Ammoniak, bei 70° Cyan stärker adsorbirt

Absolute Werthe der Adsorptioncoëfficienten sind schwer zu berechnen, weil die Oberfläche, auf deren Einheit diese Zahlen sich doch beziehen, nur auf Grund ziemlich vager Annahmen bestimmt werden kann. Verhältnissmässig am sichersten lässt sich dies noch für Glasfäden thun, und hier fand CHAPPUIS[2]) (zwischen 0° und 180°) pro *qm* Glasoberfläche 0·27 *ccm* Wasserstoff, 0·35 *ccm* Luft, 0·63 *ccm* schweflige Säure und 0·25 *ccm* Ammoniak.

Wesentlich geklärt wurde die Sachlage durch die Discussion zwischen BUNSEN und KAYSER, und durch die Versuche, zu denen Ersterer durch diese Discussion veranlasst wurde.[3]) Die ersten Versuche BUNSEN's mit Glasfäden und Kohlensäure hatten das merkwürdige Ergebniss geliefert, dass die Adsorption sehr lange (Tage, ja Monate lang) anhielt und vom Druck nahezu unabhängig war. KAYSER glaubte desshalb, dass es sich hier nicht um Adsorption, sondern um Diffussion durch das Fett der Hähne des Apparates handle. BUNSEN wies nicht nur nach, dass diese Annahme unbegründet war, sondern er fand auch den wahren Grund für die Eigenthümlichkeit der Erscheinung, und zwar in der durch capillare Anziehung auf der Glasoberfläche festgehaltenen Wasserschicht. Diese Wasserschicht hat in Folge des kolossalen Druckes, unter dem sie steht, ein starkes und lange anhaltendes Absorptionsvermögen; bei einem *ad hoc* ausgeführten Versuche war z. B. die Dicke der Schicht gleich 0·000005 *mm*, das Volumen 22·6 *cmm*, die Absorption stieg in 33 Tagen auf 48700 *cmm*, also auf das 2155fache Volumen, während Wasser unter gewöhnlichem Drucke nur etwa das gleiche Volumen absorbirt. Aus dem kolossalen Drucke erklärt es sich nun auch, dass äussere Druckänderungen an dem Betrage der Absorption wenig ändern, und ebenso werden jetzt die übrigen Eigenthümlichkeiten der Erscheinung verständlich. Auch ist es einleuchtend, dass man zur Ueberwindung des capillaren Druckes starke Erhitzungen anwenden muss, um die Wasserschicht gänzlich zu entfernen, Erhitzungen bis über 500°. Thut man dies aber, so verschwindet die langsame Condensation in der That, und die Erscheinung nimmt wieder den gewöhnlichen Verlauf der Adsorptionserscheinungen an.

Die Adsorption ist, wie man hieraus entnimmt, in sofern eine sehr häufige Erscheinung, als die meisten Körper, welche sich in der Luft befinden, selbst solche, die ein in Betracht kommendes Absorptionsvermögen nicht besitzen, doch

---

1) a. a. O.

2) CHAPPUIS, Arch. Sc. phys. (3) 3, pag. 439. 1878.

3) BUNSEN, WIED. Ann. 20, pag. 545. 1883. — KAYSER, ebenda 21, pag. 495. 1884. — BUNSEN, ebenda 22, pag. 145. 1884. — KAYSER, ebenda 23, pag. 416. 1884. — BUNSEN, ebenda 24, pag. 321. 1885.

an ihrer Oberfläche die verschiedenen Bestandtheile der Luft, insbesondere den Wasserdampf, verdichten. In letzterem Falle spricht man von Vaporhäsion, und es ist das eine Erscheinung, welche namentlich, wenn sie so stark wird, dass Verflüssigung des Wasserdampfes eintritt, in vielen Fällen zur Vermeidung von Uebelständen oder Fehlerquellen Berücksichtigung erfordert; so z. B. bei elektrostatischen Versuchen, wo sie aus einem Isolator einen Leiter machen kann, sowie bei genauen Wägungen, bei welchen nicht nur die flüssige »Wasserhaut«, sondern auch die dichte Dampfhülle an einzelnen Stellen der Waage merkliche Fehler hervorbringen kann; in solchen Fällen muss man durch geeignete Behandlung vor den Versuchen die adsorbirten Stofte möglichst entfernen.[1])

Eine eigenartige Folge der Absorption sind, wie Waidele[2]) richtig erkannt hat, die zuerst von Moser[3]) beobachteten Hauchbilder, welche auftreten, wenn man mit einem Holzstäbchen über eine glatte Fläche hinfährt, oder auch eine Münze, einen geschnitteten Stein oder einen gravirten Metallstempel auf eine Platte legt, und nach der Abnahme die Fläche behaucht oder sie Quecksilberdämpfen aussetzt; ja, die Bilder entstehen auch schon, wenn der Stempel nur dicht über die Platte gehalten wird, ohne sie zu berühren. Da nämlich Stäbchen oder Stempel einerseits und Platte andererseits nicht gerade in gleichem Maasse mit adsorbirten Dämpfen beladen sein werden, so wird an den Berührungs- resp. Einwirkungsstellen ein Austausch solcher Gase stattfinden; die beeinflussten Stellen der Platte werden sich also von den benachbarten durch grössere oder geringere Ladung unterscheiden, und wenn man den Wasserdampf des Hauches oder Quecksilberdampf auf die Platte lenkt, so wird sich derselbe an den stärker beladenen Stellen in geringerem Grade niederschlagen als an den übrigen, und somit ein Bild des Stempels resp. der Züge hervortreten lassen. Eine ander Auffassung dieser Erscheinung, die von Quincke herrührt, ist schon oben bei Capillarität, pag. 477, mitgetheilt worden.

Eine abgeschlossene Theorie der Ab- und- Adsorption liegt zur Zeit nicht vor; jedoch ist von verschiedenen Seiten der Versuch zu einer solchen gemacht worden, und einige der bezüglichen Betrachtungen sind an und für sich interessant genug, um hier Erwähnung zu finden.

Nach Kayser[4]) kommen bei der Absorption (resp. Adsorption) folgende Faktoren in Rechnung: 1) Die Grösse der an der Oberfläche wirksamen freien Kräfte, 2) die chemische Affinität zwischen Oberfläche und Gas, 3) die Cohäsion 4) die Dichtigkeit, 5) der Druck, 6) die Temperatur. Nimmt man an, dass für denselben absorbirenden Körper und bei gleichem Druck und Temperatur der Einfluss von 1) und 2) nur klein sei, so findet man, dass die Reihenfolge der Gase für verschiedene absorbirende Körper dieselbe sein muss, und zwar übereinstimmend mit ihrer Condensirbarkeit. Das stimmt mit den meisten Beobachtungen in der That überein. Ferner wächst mit zunehmendem Druck anfangs sowohl die Dicke als auch die Dichte des absorbirten Gases, später aber, wenn alle Poren

[1]) Warburg u. Ihmori, Wied. Ann. 27, pag. 481. 1886. — Ihmori, Wied. Ann. 31. 1887 — In letzterer Abhdlg. werden zur Vermeidung von Fehlern folgende Regeln aufgestellt: 1) Alle Metalltheile sind zu platiniren (nicht zu firnissen). 2) Achat ist möglichst zu vermeiden, dafür lieber Bergkrystall. 3) Für die Gewichte scheint Platin oder platinirtes Messing besser als Bergkrystall zu sein.

[2]) Waidele, Pogg. Ann. 59.

[3]) Moser, Pogg. Ann. 56 u. 57.

[4]) Kayser, Wied. Ann 12, pag. 528 u. 14, pag. 450. 1881.

ausgefüllt sind, nur noch die Dichte. Dies erklärt im Grossen und Ganzen die Abhängigkeit der Absorption vom Druck.

PFEIFFER[1]) schliesst sich auf Grund seiner oben zum Theil erwähnten Untersuchungen den KAYSER'schen Vorstellungen an und versucht des weiteren für den Fall der Adsorption die Dicke der adsorbirten Schicht zu berechnen. Sei s_1 die Dichtigkeit des freien Gases, s die Dichtigkeit desselben an der festen Oberfläche, so wird sie in der Entfernung n von der Oberfläche gleich $s_1 + f(n)$ sein, wo $f(0) = s - s_1$, dagegen, unter h die Dicke der adsorbirten Schicht verstanden, $f(h) = 0$ ist. Ist nun O die Oberfläche des verdichtenden Körpers, m die Masse des verdichteten Gases, so ist

$$m = \int_0^h O f(n)\, dn.$$

Nimmt man nun an, dass $f(n)$ gleichmässig von 0 bis h abnehme, so kann man integriren und erhält (V das verdichtete Gasvolumen)

$$h = \frac{V}{O}.$$

Auf diese Weise kann man nach MÜLLER-ERZBACH[2]), PFEIFFER u. A. die Dicke der adsorbirten Schicht ermitteln, und findet:

Für Oxyde und Schwefelkohlenstoffdampf . . .	0·0017 *mm*
„ „ „ Wasserdampf.	0·0015 „
„ Glas und Wasserdampf	0·00023 „
„ „ „ Kohlensäure	0·00005 „
„ Buchsbaumkohle und Kohlensäure	0·00024 „
„ „ „ Ammoniak	0·00045 „

Diese Zahlen sind beträchtlich, zum Theil um das 1000fache grösser als der von O. E. MEYER berechnete Molekulardurchmesser[3]).

Die Anschauung von der abnehmenden Dichte der Gasschicht ist übrigens zuerst von QUINCKE[4]) ausgesprochen worden; derselbe fügt die Vermuthung hinzu, dass die Dichtigkeit an der Oberfläche gleich der des festen Körpers sei und folgert hieraus den Satz: Je dichter der adsorbirende Körper, desto stärker die Adsorption.

Unter Anwendung der GAUSS'schen Kapillaritätstheorie hat MOUTIER[5]) versucht, die Absorption zu behandeln. Er findet für die Kräftefunktion folgenden Ausdruck:

$$F = a(M - m)^2 + bm^2 + 2c(M - m) + 2\alpha N(M - m) + 2\beta Nm,$$

(M Gasgewicht, N Flüssigkeitsgewicht, m absorbirtes Gasgewicht, a b c nur vom Gas, α und β von Gas und Flüssigkeit abhängige Constanten). Gleichgewicht tritt ein, wenn m ist:

$$m = \frac{c - a}{2c - a - b} M + \frac{\beta - \alpha}{2c - a - b} N.$$

---

1) PFEIFFER, a. a. O.

2) MÜLLER-ERZBACH, Verh. phys. G. Berlin 1885, pag. 8. In einer anderen Abhdlg. finde d. Verf. dagegen, dass (für Thonerde u. Wasserdampf) die Kraft der Absorption annähernd umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung abnehme, womit obige Annahme PFEFFER's nicht übereinstimmt. (WIED. Ann. 28, pag. 684. 1886).

3) Andererseits findet CHAPPUIS (WIED. Ann. 12, pag. 160. 1881) für Glas einerseits und Ammoniak oder schwefl. Säure andererseits die Dicke der Wandschicht nur gleich 2 Molekel-Lagen.

4) QUINCKE, POGG. Ann. 108. 1858.

5) MOUTIER, Bull. Soc. phys. Par. (7) 5, pag. 144. 1880.

Für $\beta = \alpha$ wird die Menge des absorbirten Gases proportional mit der gesammten Gasmenge.

Endlich haben STEFAN[1]) und v. WROBLEWSKI[2]) die Theorie der Absorption in Verbindung mit den Beziehungen dieser Erscheinung zur Diffusion betrachtet. Nach STEFAN geht die Absorption in der Weise vor sich, dass zunächt die Oberflächenschicht sich sättigt, dann einen Theil des Gases an die nächste Schicht abgiebt, sich aber sogleich wieder sättigt u. s. w. Das ist aber nichts Anderes, als Diffusion. Die Geschwindigkeit der Absorption hängt dabei, von etwaigen Strömungen (falls der absorbirende Körper eine Flüssigkeit ist) abgesehen, vom Diffusionscoëfficienten ab und umgekehrt die Geschwindigkeit der Diffusion vom Absorptionscoëfficienten. v. WROBLEWSKI verfolgt dies noch weiter und findet, dass die Constante der Verbreitung eines Gases annähernd der Quadratwurzel aus seinem specifischen Gewichte umgekehrt proportional ist[3]). Auch wendet er sich gegen die GRAHAM'sche Hypothese, dass die absorbirten Gase in Flüssigkeit verwandelt seien.

F. AUERBACH.

---

1) STEFAN, Wien. Sitz.-Ber. 77 (2), pag. 406.

2) v. WROBLEWSKI, WIED. Ann. 8, pag. 29. 1879.

3) Auch HOOD [Phil. Mag. (5) 7, pag. 352. 1884] hat Beobachtungen üb. d. Geschwindigkeit d. Abs. v. Gasen in Flüssigkeiten angestellt.

Akustik.

Allgemeine Wellenlehre.

1) Eine der am allgemeinsten in der Natur verbreiteten Bewegungsarten ist die »Wellenbewegung«. Sie tritt in den mannigfachsten Formen auf und verdankt ihren Namen zweifellos derjenigen Form, die wir so häufig und so vollendet bei dem Wasser beobachten, sei es, dass wir die eigenthümlichen Oberflächenbewegungen bei einem Flusse, einem Teiche, einem See oder die oft gewaltigen Bewegungen des Meeres betrachten. Diese hierbei uns entgegentretenden Oberflächenveränderungen, bestehend in eigenthümlichen Erhöhungen des Wassers über das ursprüngliche Niveau der Ruhe nennt man »Wellen«, und da sich ergiebt, dass auch bei festen und gasförmigen Körpern, ja sogar beim feinsten Stoffe, dem Aether, sich Bewegungen annehmen lassen, welche sich theils leicht, theils erst nach reiflicherer Ueberlegung als die Analoga zu jener Wasserbewegung zu erkennen geben, so fasst man sie alle unter der gemeinsamen Bezeichnung »Wellenbewegung« zusammen. Ich sage leicht erkennbar; denn Niemand wird zweifelhaft sein, dass z. B. die Bewegung, welche sich bei einem ausgespannten langen Seile zeigt, wenn dieses an einem Ende einen nach oben gerichteten Schlag mit der Hand erfährt und wenn bald darauf eine Seilerhöhung nach dem anderen Ende hinzulaufen scheint und von hieraus zurückkehrt, um vielleicht noch einmal hin und herzulaufen, dass diese Bewegung der Seilerhöhung die grösste Aehnlichkeit mit dem scheinbaren Fortlaufen einer Welle über die Oberfläche eines Wasserspiegels besitzt. Man sieht in beiden Fällen eine wirkliche Erhöhung, eine Welle. Nicht so ist es aber in vielen anderen Fällen. Wenn wir z. B. den Ton einer Orgelpfeife hören, so sehen wir von dem, was bis jetzt als Welle aufgefasst und bezeichnet wurde, nichts; wir werden zunächst durch den blossen Augenschein überhaupt nicht belehrt, dass eine Luftbewegung in der Pfeife stattfindet. Aber wenn sich auch bald durch allerhand Mittel eine solche Bewegung erkennen lässt, so müssen wir uns doch sagen, dass von einer Erhöhung einer Luftmasse über ihr ursprüngliches Niveau nicht im entferntesten die Rede sein kann. Stellt sich schliesslich dennoch auch diese Bewegung der Luft als zur grossen Gruppe der Wellenbewegungen gehörend heraus, so muss diesen Bewegungen etwas anderes gemeinsam sein, was als allgemeines Kennzeichen allen zukommt.

2) Jede Bewegung, der wir den Namen einer Wellenbewegung ertheilen können, ist eine resultirende Bewegung, d. h. eine solche, dass ihr gegenüber

von Einzelbewegungen geredet werden kann, welch letztere in ihrer Gesammtheit erst das bilden, was man eine Wellenbewegung nennt. Da hierbei, wie wir bald sehen werden, auch die Zeit in Betracht kommt, da eine Wellenbewegung erst dann beginnt, nachdem vorher Einzelbewegungen vorausgingen, so kann man diese letzeren auch wohl passend »Primitivbewegungen« nennen. Wir wollen ihre Bedeutung sofort kennen lernen am besten so, dass wir uns an ein bestimmtes Beispiel halten, unbekümmert darum, ob der Fall, den wir bei diesem Beispiel charakterisiren, in der Natur wirklich vorkommt oder nicht.

Fig. 211 zeigt einen bei *A* befestigten Tuchstreifen, welcher von *A* nach *B* hin über eine horizontale Tischplatte gelegt ist. Zwischen ihn und die Tischplatte



(Ph. 211.)

sei eine elliptisch geformte Walze *R* gebracht. Diese wird den Tuchstreifen, wie in der Figur deutlich gemacht ist, bis zu gewissen Grenzen hin aus der horizontalen Lage herausbringen und hierbei eine Erhöhung hervorrufen. Schieben wir dann parallel mit sich selbst die Walze von links nach rechts fort, so leuchtet ein, wie sich die Erhöhung, die wir soeben hervorriefen, nach und nach an allen Stellen des Streifens zeigt. Eine Welle läuft also von links nach rechts hin weiter und wäre dies ja offenbar ein Analogon zu einer Wasserwelle, die progressiv über die Oberfläche eines Wasserspiegels fortschreitet. Aber was ist denn nun die Erhöhung bei unserem Tuchstreifen? Sie kommt offenbar doch nur dadurch zu Stande, dass die einzelnen Theilchen des Streifens bei der Verschiebung der Walze eine auf- und niedergehende Bewegung erhalten. Fassen wir z. B. ein solches Theilchen *a* ins Auge, so wird dies in einem bestimmten Moment anfangen gehoben zu werden; es wird in einem späteren Moment seine höchste Lage erreichen, um von dieser aus wieder in die Ruhelage herab zu sinken. So hätten wir denn die Primitivbewegung erkannt. Sie besteht in diesem Falle in einem Auf- und Niedersteigen der einzelnen Tuchtheilchen, welches an und für sich eine nahezu geradlinige Bewegung ist. Eine Summe solcher Theilchen, welche neben einander liegen und sich im selben Moment in je einer anderen Phase der Bewegung befinden, bilden erst das, was man eine Welle nennt, deren Form also das Resultat ist, welches sich aus den Einzelbewegungen der Theilchen ergiebt. Die Primitivbewegungen sind bei diesem Beispiel gradlinige Bewegungen eines jeden Theilchens senkrecht zur Ruhelage, die Resultante ist eine, über eine gewisse Strecke sich zeigende Erhöhung, welche letztere mit der Zeit fortschreitet, während die ersteren offenbar nicht als eigentlich fortschreitende Bewegungen zu denken sind, denn ein jedes Theilchen vollführt nur über seiner Ruhelage seine Primitivbewegung, ohne dass es selbst eine Wanderung von *A* nach *B* anträte.

3) Ein jedes Theilchen unseres Tuchstreifens kommt bei der Progressivverschiebung der Walze in dieselbe Primitivbewegung, wie sie je ein rückwärts liegendes Theilchen vollendet hat. Sofort erkennen wir aber eine sehr bemerkenswerthe Thatsache. Wir können nämlich die Strecke *Ac*, über welche sich die Welle in einem bestimmten Moment erhebt, einmal die »Länge« der Welle oder kurz die »Wellenlänge« nennen. Schreitet diese Welle nun um ihre eigene Länge von links nach rechts weiter, so hat das Theilchen *c* auch offenbar eine Primitivbewegung vollkommen ausgeführt, denn es beginnt seine

Bewegung in dem Moment, der als Anfangsmoment in der Figur angenommen wird; es erreicht seine grösste Erhebung in dem Moment, wo die Walze um das Stück *xc* weiter nach rechts fortgeschritten und gelangt wieder in seine Ruhelage zurück im Moment, wo die Walze abermals um ein Stück gleich *xc* weiter nach rechts fortgeschritten. Das Stück *x c* ist aber eine halbe Wellenlänge und zweimal ein solches Stück genommen giebt eine ganze Wellenlänge. Diesen merkwürdigen Zusammenhang: nämlich die Gleichheit der Dauer einer Primitivschwingung und der Zeit, welche die Wellenbewegung gebraucht, um durch die Strecke einer Wellenlänge vorwärts zu kommen, werden wir als eine der bedeutungsvollsten in der gesammten Wellenlehre noch näher kennen lernen und eben dieser seiner Bedeutung entsprechend fassten wir ihn jetzt schon ins Auge.

4) Die Bewegung des Tuchstreifens, wie wir sie eben betrachteten, hat das Eigenthümliche, dass ein jeder Theil dieses Streifens dieselbe Bewegung ausführt. Dies hätten wir annähernd auch dadurch erzielen können, dass wir, anstatt die elliptische Walze der Fig. 211 progressiv parallel mit sich selbst zu verschieben, uns einer Walze mit kreisrundem Querschnitt bedient und diese von links nach rechts fortgerollt hätten. Lassen wir aber unsere elliptische Walze rollen, so kommt eine gänzlich andere Bewegung des Tuchstreifens zum Vorschein. Sie unterscheidet sich vor allem von der bisherigen dadurch, dass nicht jeder Punkt dieselbe Bewegung ausführt. Denn die Ellipse kommt einmal mit ihrer grossen Axe vertical zu stehen und entfernt sich hiernach ein Punkt des Streifens, der dieser vertikalen Lage entspricht, offenbar am meisten von seiner Ruhelage. Solche Punkte liegen auf der Strecke von links nach rechts um den halben Umfang der Ellipse von einander entfernt. Hieraus ergiebt sich, dass sich die Bewegung des Streifens, wenn auch immer an anderen Stellen, in derselben Weise wiederholt. Das Tempo der Wiederholungen ist dasselbe als wie das Tempo der Vertikalstellungen der Ellipse, d. h. bei einer vollen Umwälzung der Ellipse wiederholen sich alle Formen der Tuchbewegung zweimal. Es würde sich fragen, ob solche Bewegungen, wie wir sie eben betrachteten und wobei nicht alle Theile eines Körpers dieselben Bewegungen ausführen, unter den Wellenbewegungen der Natur anzutreffen sind?

5) Unsere Betrachtungen galten Bewegungen, die in rein mechanischer Weise hervorgebracht wurden. Die ganze Auseinandersetzung sollte auch nur den Zusammenhang zwischen Primitiv- und Resultantenbewegung andeuten. Nunmehr müssen wir uns an die Natur selber halten um zu sehen, wie unter der Wirkung der in den Körpern thätigen Kräften Wellenbewegungen zu Stande kommen. Gehen wir hierbei von einer Ruhelage des betreffenden Körpers aus, so leuchtet ein, dass eine jede Wellenbewegung einen äusseren Angriff auf den zunächst als ruhend gedachten Körper voraussetzt. Dieser Angriff, vielleicht ein Stoss, ein Schlag, kann einmal erfolgen und wird demgemäss die Wellenbewegung verlaufen. Er kann aber auch wiederholt hinter einander auftreten; dann wird dieselbe Wellenbewegung sich hinter einander wiederholen, es werden also namentlich zwei Bewegungen dieser Art entstehen können und leuchtet ein, dass hierbei zwei wesentlich verschiedene Fälle denkbar sind, nämlich erstens der Fall, wobei zwei Wellenbewegungen nach derselben Richtung sich fortpflanzen, und zweitens der Fall, wobei die Richtung der einen Wellenbewegung der der anderen entgegengesetzt ist. Es lässt sich zeigen, dass hiermit die beiden Hauptformen der Wellen, nämlich »fortlaufende« und »stehende«, im innigsten Zusammenhang sich befinden, dass z. B. durch zwei Wellen, die in gleicher Richtung hinter einander herfolgen, niemals eine stehende, sondern nur eine fortlaufende Wellen-

bewegung zu Stande kommt, dass dagegen sehr wohl eine stehende eintreten kann, falls zwei Wellen mit entgegengesetzter Richtung sich begegnen.

6) Die Kräfte, welche schliesslich die Wellenbewegungen erzeugen und erhalten, sind in den allermeisten Fällen sogenannte »innere« Kräfte, d. h. solche, die zwischen den kleinsten Theilchen des in Betracht kommenden Körpers in Activität treten. Diese Kräfte sind auch meistens viel stärker als andere Kräfte, wie z. B. die Schwerkraft, und verursachen eine unendliche Menge von Erscheinungen. Sie sind es, die vor allem den Bestand der Körper garantiren und namentlich auch die äussere Form bei festen und zum Theil auch tropfbar flüssigen Körpern erhalten helfen, so dass es einer Anwendung anderer Kräfte bedarf, um diese Form zu ändern. Sind diese inneren Kräfte verschwunden, so hört auch der Zusammenhang der einzelnen Körpertheilchen auf. Das Volumen, welches wir bei festen und flüssigen Körpern ins Auge fassen können, existirt dann nicht mehr, denn die Theilchen fliegen dann, vorausgesetzt, dass keine äusseren Schranken sie daran hindern, in den Weltraum hinaus. Dieser eigenthümliche Zustand ist bekanntlich der »gasförmige« Zustand. Die merkwürdige Eigenschaft der Gase, darin bestehend, dass ihre einzelnen Theilchen ledig und los sind, dass eine Gasmasse im freien Raume gedacht, sofort ihre Form verliert so, dass von einer Grenze dieser Masse nicht mehr die Rede sein kann, wird sich auch bei der Wellenbewegung geltend machen. Wir werden z. B. sehen, dass bei festen und flüssigen Körpern zwei verschiedene Wellenbewegungen: eine Transversal- und eine Longitudinal-Wellenbewegung, vorkommt, dass dagegen bei den Gasen nur die letztere vertreten ist.

Die für den Physiker in Betracht kommenden kleinsten Theilchen eines Körpers pflegt man bekanntermaassen Moleküle zu nennen und da die physikalischen Kräfte, die wir bis daher als »innere« bezeichneten, nur als zwischen den Molekülen thätig angenommen werden müssen, so nennt man diese Kräfte auch »Molekularkräfte«. Sie sind es, welche auf dem gesammten Gebiete der Wellenbewegung die Hauptrolle spielen und hiermit sind sie auch die Kräfte, welche auf dem Gesammtgebiete des Schalls in erster Linie in Betracht kommen.

7) Wir können über das innere Wesen keiner einzigen Kraft etwas näheres angeben. Nur aus den äusseren Veränderlichkeiten dürfen wir Schlüsse ziehen auf dieses Wesen, und diese äusseren Veränderlichkeiten bestehen in Formveränderungen und Bewegungen der Körper im Ganzen und in seinen einzelnen Theilen. Da nun, wie wir uns schon deutlich überzeugt haben, bei dem, was wir Wellenbewegung nennen, sogen. »Primitivbewegungen« vorausgehen und während der Bewegung, die hiernach als Wellenbewegung in die Augen fällt, auch noch fortdauern, da ferner diese Primitivbewegungen nothwendig bei den kleinsten Theilchen eintreten, so ergiebt sich das Wichtige, dass die Ursache unserer Primitivbewegungen die Molekularkräfte sind.

Ein einzelnes Molekül wird nun niemals für sich allein einer Kraftwirkung von aussen gegenübertreten. Denn, wenn wir diese auch von vornherein auf ein einziges Molekül wirken lassen könnten, so würde sich dieses nicht allein in Bewegung setzen können, ohne sofort auch seine Nachbarn in die Bewegung hineinzuziehen. Wenn wir daher jetzt auf die Primitivbewegungen näher eingehen und hier von Theilchen, von Punkten eines Körpers reden, die vielleicht durch einen Schlag, durch einen Stoss in Bewegung gesetzt werden sollen, so müssen wir von vornherein daran denken, dass dies in Praxi keine Punkte sein können, sondern, besser ausgedrückt, möglichst kleine »Partien« eines Körpers. Ein Beispiel wird diese Auffassung noch klarer machen. Wir können z. B. einen

fadenförmigen Körper, ein Seil, eine Saite ausspannen und an einem Ende einen Schlag auf dieses Seil ausführen. Dieser Schlag trifft in Wirklichkeit niemals ein einzelnes Molekül allein. Wird er mit der Hand ausgeführt, so leuchtet das ja ohne weiteres ein. Denken wir eine scharfe Schneide, mit der wir auf die Saite aufschlagen, so können wir schon eher sagen, es wäre blos ein Punkt getroffen. Aber auch jetzt erkennen wir bald, dass dieser Schlag doch mehr wie einen einzigen Punkt von der Saite zunächst in Bewegung setzt. Denn die Saite, wenn sie auch noch so fein ist, sie wird immerhin nicht als eine Punktreihe von nebeneinanderliegenden Molekülen zu betrachten sein, sondern, senkrecht zu ihrer Länge durchschnitten, einen Querschnitt zeigen, der in seiner Fläche viele Moleküle vereinigt enthält. Solche Querschnitte sind es daher sehr häufig, welche wir zunächst bei den hier zu betrachtenden Bewegungen anstatt eines einzelnen Punktes uns vostellen müssen. Ja, wenn wir daran denken, dass selbst die schärfste Schneide, mit welcher wir auf die Saite aufschlagen, dennoch bei der Berührung mit der Saite nicht einen einzigen Molekülquerschnitt, sondern mehrere nebeneinanderliegende Querschnitte trifft, so wird der angenommene Schlag ein kleines räumliches Element der Saite anstatt eines einzelnen Punktes in Bewegung setzen.

8) Die Molekularkräfte sind continuirlich wirkende Kräfte. So lange als bei einem festen und tropfbar flüssigen Körper der Bestand garantirt ist, sind zwischen den Körperelementen die Molekularkräfte thätig. Wir kennen von diesen zwei merkwürdige Eigenschaften. Nämlich einmal müssen sie als Anziehungskräfte und das anderemal als Abstossungskräfte wirksam angenommen werden. Ja es zeigt sich sofort, dass diese Verschiedenheit der Wirkung unmittelbar hintereinander auftritt, je nachdem wir Molekülelemente, Molekülquerschnitte von einander zu trennen oder gegeneinander hin zu bewegen suchen. Die alltäglichsten Erfahrungen belehren uns nämlich, dass, wenn wir bei einem festen Körper, bei einer Saite, einem Stabe die Länge vergrössern wollen, wir den Molekularkräften gegenüber eine äussere Kraft, wie z. B. die Zugkraft eines angehängten Gewichts, müssen wirken lassen. Dies Experiment beweist schlagend, dass dieser äusseren Kraft gegenüber, die ja oft sehr in die Augen springt, die Molekülkräfte als Anziehungskräfte thätig sein müssen. Denn wären sie dies nicht, so müsste ja die äussere Kraft die Molekülelemente von einander trennen. Der Bestand eines solchen Stabes, einer solchen Saite, wäre vernichtet. Ja, wir sehen auch, dass die ursprüngliche Anziehung zwischen benachbarten Molekularschichten sehr bedeutend werden kann, denn wir können nach und nach mehr Gewichte, wir können vielleicht zehn, ja vielleicht hundert Kilogramm und mehr unten anhängen, ohne dass der Stab reisst.

Wir können unseren Stab aber auch in der Richtung seiner Länge einem Druck unterwerfen, der darauf hinzielt, die Molekülschichten näher aneinander zu rücken. Auch bei diesem Versuche arbeiten die Molekularkräfte mit grosser Gewalt den äusseren Druckkräften entgegen und beweist dies wiederum, dass die ersteren mit einer Abstossung zwischen den Molekülen thätig sind.

9) Dies ist nun eine sehr merkwürdige Thatsache. Kräfte sollen, wenn man den Körper ausdehnen will, attraktiv, und wenn man ihn comprimiren will repulsiv wirken, eine Doppelwirkung, welche wir bei anderen Kräften nicht antreffen. Wir wissen zwar, dass verschiedentlich Attraktion und Repulsion vorkommt, dass z. B. ein Pluselement der elektrischen Massen einem Minuselement gegenüber Anziehung, dagegen einem Pluselement gegenüber Abstossung zeigt, aber wir wissen auch ebenso gut, dass wenn wir ein Plus- und ein Minuselement, die in einer bestimmten Entfernung von einander stehen, näher aneinander bringen wollen, die

Anziehung nicht etwa sich in eine Abstossung umsetzt, sondern dass im Gegentheil die elektrische Anziehung bei diesem Versuche der Annäherung erst recht diese Annäherung miterzielen hilft. Wir wissen ebenso gut, dass, wenn zwei sich abstossende Pluselemente weiter von einander getrennt werden sollen, die Abstossung sich nicht etwa in eine Anziehung umsetzt, sondern dass im Gegentheil eine Abstossung fortwährend bestehen bleibt, welche die beabsichtigte Weiterentfernung erleichtert.

In der gesammten Natur zeigt sich ein Hauptgesetz der Kraftwirkungen, welches darin besteht, dass eine Abnahme der Kräfte eintritt, falls die Körper oder die Körpertheilchen, zwischen denen die Kräftewirkung gedacht wird, weiter von einander entfernt werden. Dieses Gesetz gilt für alle Kräfte, sei es dass sie als Anziehungs- oder als Abstossungskräfte in Betracht kommen. Stellen wir uns in *abcd* (Fig. 212) die Länge eines Stabes vor, der an seinem oberen Ende absolut festgemacht ist, während am unteren eine Einrichtung angebracht ist, um mittelst Auflage von Gewichten den Stab zu verlängern. Als das Gewicht *P* noch nicht angehangen war, kam von dem Stabe die Länge $ac = bd$ in Betracht. Als aber *P* unten aufgelegt wurde, nahm der Querschnitt *cd* die Stelle von $c'd'$ ein, d. h. der Stab wurde um diese Strecke $cc' = dd'$ länger. Dies kann aber nur so geschehen sein, dass alle Querschnitte des Stabes sich von einander entfernt haben und nehmen wir einmal an, der Stab wäre 1 *m* = 1000 *mm* lang und die Verlängerung cc' betrüge bei einer Auflage von 10 *kgr* 1 *mm*, so ist klar, dass jede Querschicht des Stabes, die um 1 *mm* von einer anderen entfernt lag, um 0·001 *mm* von dieser nach der Auflage von *P* weiter entfernt wurde. Denn alle diese Entfernungen zusammen bewirken, dass der ganze Stab um 1 *mm* länger wird. Alle Querschnitte des Stabes, auch die unmittelbar aneinander stossenden Molekülschichten entfernen sich von einander, und wären von diesen letzteren in der Strecke eines Millimeters 1000 enthalten, so würden sich zwei unmittelbar so benachbarte Molekülschichten um 0·000001 *mm* von einander entfernen müssen.



(Ph. 212.)

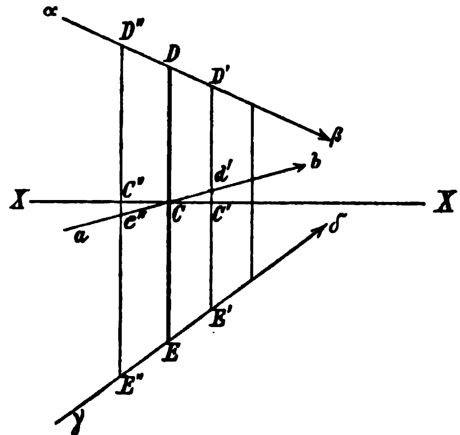
Wollten wir umgekehrt den Stab um ebensoviel kürzer machen, so müssten wir irgend eine Einrichtung treffen, dass anstatt eines Zuges, ein Druck von 10 Kilo in der Richtung von *c* nach *a* ausgeübt würde. Die unterste Molekülschicht *cd* würde dann aus ihrer ursprünglichen Lage, in welcher überhaupt noch keine äusseren Kräfte wirken sollten, in die Lage $c''d''$ gelangen; je zwei benachbarte Molekülschichten würden um 0·000001 *mm* genähert worden sein.

10) Fassen wir nun gleichzeitig die Anziehung und Abstossung der Molekülschichten ins Auge, ohne deren beiderseitiges Vorhandensein die Wirkung eines Zug- oder Druckgewichts nicht zu erklären ist, so muss beim Zug, wobei Entfernung der Molekülschichten eintritt, die Molekularattraktion und ebenso die Molekular-Abstossung abnehmen. Bezeichnen wir die erstere bei der ursprünglichen Lage des Stabes mit *Z* letztere mit *S*, so muss hierbei $Z = S$ sein. Bezeichnen wir nach der Auflage von *P* die beiden Molekularkräfte mit Z' und S', so muss nothwendig jetzt $Z' = Z + P$ geworden sein, denn *P* müssen wir anwenden, sonst geht der Stab in seine Länge *ac* zurück, es ist demnach *Z* um *P* gewachsen. Wie ist dies möglich? Es kann dies offenbar nur dadurch herauskommen, dass die Abnahme von *Z*, die an und für sich nothwendig eintreten muss, und ebenso die Abnahme von *S*, die auch nothwendig eintreten muss, nicht gleichen Schritt halten, sondern sich so gestalten, dass die Abstossung rascher abnimmt wie die Anziehung. Bezeichnen wir die Abnahme von *Z*

und S mit z und s, so muss nunmehr nach Auflage von P die Gleichung $(Z - z) - (S - s) = P$ bestehen, d. h. es muss, da $Z = S$ war, $s - z = P$, also $s > z$ sein.

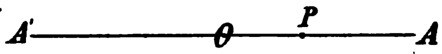
Bei der umgekehrten Kraftwirkung nimmt Z sowohl wie S zu. Da aber die Abstossung noch durch einen Druck P bekämpft werden muss, d. h. da dieses P der Anziehung noch zu Hilfe kommen muss, um der Abstossung bei der Annäherung der Molekülschichten das Gleichgewicht zu halten, so muss jetzt S bei der Compression rascher wachsen wie das Z. Bezeichnen wir daher den Zuwachs von Z mit z', den von S mit s', so muss $(S + s') - (Z + z') = P$, d. h. $s' - z' = P$, also $s' > z'$ sein.

Fig. 213 kann diesen wichtigen Zusammenhang noch näher erläutern. Sie stellt die Verhältnisse graphisch dar. XX bedeutet eine Abscissenaxe. Die Geraden CD, $C'D'$, $C''D''$ stellen die Grössen der Anziehungen Z, die entgegengesetzt verlaufenden Ordinaten CE, $C'E'$ und $C''E''$ die Abstossungen S vor. Eine Gerade $\alpha\beta$ mag die Abnahme von Z bei der Verlängerung des Stabes, $\gamma\delta$ die Abnahme von S ebenfalls bei der Verlängerung des Stabes darstellen. Da $\gamma\delta$ sich rascher nach der Abscissenaxe wie $\alpha\beta$ hinwendet, so bedeutet dies eine raschere Abnahme von S wie von Z. Wir nehmen hierbei an, dass das Gesetz der Abnahme wenigstens innerhalb gewisser Grenzen proportional der Ausdehnung erfolge. Denn sonst müssten wir anstatt der Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ Curven zeichnen. Da wir die Anziehungen Z und die Abstossungen S stets gleichzeitig wirkend denken müssen, so sind wir genöthigt, die Resultante von Z und S zu construiren und repräsentirt sich diese in der Geraden ab. Dieses ab muss nothwendig auch eine Gerade sein und muss durch den Punkt C laufen, von hier nach rechts über XX hinausgehen und rückwärts gerechnet, sich unter XX herabneigen. Bei der Ausdehnung stellt demnach $C'd'$ den Ueberschuss der Anziehung gleich P und bei der Zusammendrückung $C''c''$ den Ueberschuss der Abstossung ebenfalls gleich P vor.



(Ph. 213.)

11) Das Hauptresultat unserer Betrachtung würde also nun darin bestehen, dass wir uns überzeugt haben, wie bei der Entfernung der Moleküle von einander sich eine Kraft bemerklich macht, die unter bestimmten Voraussetzungen, nämlich solchen, welche der Fig. 213 entsprechen, proportional der Entfernung der Moleküle wächst. Eine solche Kraft ist es aber nun, der wir bei der Wellenbewegung gleich von vornherein begegnen. Dieser Satz bildet den Ausgangspunkt bei den Lehren der Wellenbewegung und wollen wir uns jetzt weiter davon überzeugen, dass er mit den Primitivbewegungen im innigsten Zusammenhang steht. In Fig. 214 stelle O die Ruhelage eines materiellen Punktes vor, der zugleich an diese Ruhelage durch eine Kraft gefesselt ist, die proportional seiner etwaigen Entfernung von O wächst. Wie gross wir diese Kraft annehmen wollen, ist zunächt ganz gleichgültig. Bezeichnen wir dieselbe daher einfach einmal mit φ. Von dieser Kraft wissen wir, dass sie continuirlich wirken soll. In der Ruhe-



(Ph. 214.)

lage O ist sie gleich Null; dächten wir den materiellen Punkt nach A versetzt, so würde φ einen bestimmten Werth φ_a annehmen; dächten wir ihn nach P versetzt, so würde φ einen bestimmten Werth φ_b annehmen und es besteht daher zwischen φ_a und φ_b die Hauptbeziehung

$$\varphi_a : \varphi_b = \overline{OA} : \overline{OP}.$$

Bleibt der Punkt in O, so kann eine Bewegung nicht eintreten, denn die Kraft φ ist hier gleich Null. Eine Bewegung tritt aber ein, sobald wir den Punkt durch eine äussere Kraft aus der Ruhelage entfernen. Eine Kraft, die ihn z. B. in den Punkt A versetzt, die aber hernach, nachdem sie diese Versetzung vorgenommen hat, den Punkt der Kraftwirkung φ überlässt. Der Punkt kann in A nicht bleiben. Er wird von A nach O hingezogen und zwar im Anfangsmoment mit einer Stärke gleich φ_a. Bliebe die Stärke immer bestehen, so hätten wir dieselbe Bewegungsart zu erwarten, wie sie ein materieller Punkt zeigt, der der Schwere auf der Oberfläche der Erde folgt: einer Kraft, von der wir annehmen dürfen, dass sie innerhalb solcher Grenzen, wie sie bei einem frei fallenden Körper vorkommen können, immer dieselbe bleibt, d. h. constant ist. Von einer solchen Kraft wissen wir, dass sie den beweglichen Punkt immer schneller und schneller bewegt, dass sie ihm in jeder Sekunde einen Geschwindigkeitszuwachs ertheilt, der stets derselbe ist. Man pflegt irgend eine Geschwindigkeitsveränderung bei Bewegungen mit dem Namen »Beschleunigung« zu bezeichnen und muss selbstverständlich in den Fällen, wo diese Veränderung einen Zuwachs der Geschwindigkeit bedeutet, die Beschleunigung als eine positive und in den Fällen, wo sie einen Verlust der Geschwindigkeit bedeutet, diese Beschleunigung als eine negative in Rechnung gestellt werden. Bezeichnen wir daher eine solche Beschleunigung allgemein mit g, so würde der bewegliche Punkt in A die Geschwindigkeit $v_a =$ Null besitzen, von da an sich nach O hin mit constanter Beschleunigung immer schneller bewegen, um in O die Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot \overline{OA}}$ zu erreichen gemäss bekannter Fallgesetzformeln.

Hier in O in seiner Bewegung angelangt, könnte er aber nicht in Ruhe kommen und würde sich weiter nach A' hinbewegen, jedoch nunmehr mit abnehmender Geschwindigkeit. Denn unsere ursprünglich angenommene Kraft φ zieht ihn ja beständig nach O hin. Nach den Fallgesetzen würde der Punkt sich von O nach links um eine Strecke $OA' = OA$ entfernen, um in A' wieder eine Geschwindigkeit gleich Null zu erreichen. Aber auch in A' bleibt der Punkt nicht in Ruhe, vielmehr bewegt er sich jetzt wiederum mit beschleunigter Bewegung bis nach O und von O wieder mit verzögerter nach A. Diese Bewegung ist nichts anderes, als eine »Oscillationsbewegung«, deren Dauer wir ebenso leicht gemäss den Fallgesetzen angeben können. Sie ist

$$t = 4\sqrt{\frac{2 \cdot OA}{g}},$$

wobei wir annehmen, dass wir unter »Schwingungsdauer« die Zeit verstehen wollen, welche der Punkt gebraucht, um von A nach A' und wieder zurück nach A zu gelangen; eine Zeit, die viermal so lang ist wie die Zeit, welche er nöthig hätte, um nur von A nach O zu kommen.

12) Die Kraft φ, welche wir eigentlich zuerst voraussetzten, sollte nun aber nicht constant, sondern proportional dem Abstande $OP = x$ veränderlich sein. Bezeichnen wir die Beschleunigung in der Entfernung 1 mit g_1 und allgemein in der Entfernung x mit g, so verhält sich $g : g_1 = x : 1$, d. h. es ist

$g = g_1 \cdot x$. Da nun nach einem Hauptsatze der Mechanik die Beschleunigung gleich ist der wirkenden Kraft, dividirt durch die Masse m eines zu bewegenden materiellen Punktes, so ist $g = g_1 \cdot x = \frac{\varphi_1}{m}$. Ferner ist die Beschleunigung nichts anderes als der zweite Differentialquotient des Weges nach der Zeit. Somit $g = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\varphi_1}{m} \cdot x$. Man pflegt für die Grösse $\frac{\varphi_1}{m}$ gern ein k^2 zu schreiben. Denken wir ferner daran, dass bei einer Zunahme der Entfernung des beweglichen Punktes von O eine Abnahme der Geschwindigkeit erzielt wird, gerade so, wie es bei einem senkrecht in die Höhe geworfenen Körper die Schwerkraft fordert, so müssen wir in der letzten Gleichung rechts ein Minuszeichen vorsetzen und erhalten somit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 \cdot x.$$

Dies ist eine Differentialgleichung, welche in den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnungen ihre Lösung findet. Sie ist

$$x = A \cdot \sin kt + B \cdot \cos kt$$

und bedeuten hierin A und B noch zu bestimmende Constanten. Rechnen wir die Zeit vom Momente an, wo der bewegliche Punkt die Ruhelage O nach rechts hin durcheilt, so ist in diesem Falle x sowohl wie t gleich Null, wonach sich die Constante $B = 0$ ergiebt. Daher ist hiernach die Gleichung

$$x = A \cdot \sin kt$$

die »Weg-Zeit-Gleichung«. Für $kt = \frac{\pi}{2}$ erreicht x seinen Maximalwerth A, der im Anschluss an unsere Fig. 214 auch gleich OA sein muss und wofür wir nunmehr ein a setzen wollen. Differentiiren wir den letzten Ausdruck für x nach t, so bekommen wir $\frac{dx}{dt} = v$; und stellt somit

$$v = a \cdot k \cdot \cos kt$$

die »Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung« vor. Wird $kt = 0$ so erreicht v seinen Maximalwerth $a \cdot k$.

13) Man pflegt insbesondere in der Wellenlehre eine Curve, welche nach der obigen Gleichung für x sich darstellen lässt, eine »Sinuscurve« zu nennen, während die der Gleichung für v entsprechende eine »Cosinuscurve« sein würde. Für den Fall, dass die Constante k den Werth 1 annehmen kann, würde

$$x = a \cdot \sin t; \quad v = a \cdot \cos t$$

werden und stellt hierbei a auch offenbar den Radius eines Kreises vor, der als solcher mit diesem Radius a um O in Fig. 214 beschrieben werden könnte.

Behält k seinen allgemeinen Werth, so lässt sich aus den beiden Gleichungen für x und v die Variable t eliminiren. Zu dem Ende erheben wir beide Gleichungen ins Quadrat und erhalten so nach Addition derselben und nachdem bei der zweiten Gleichung mit k^2 dividirt wurde

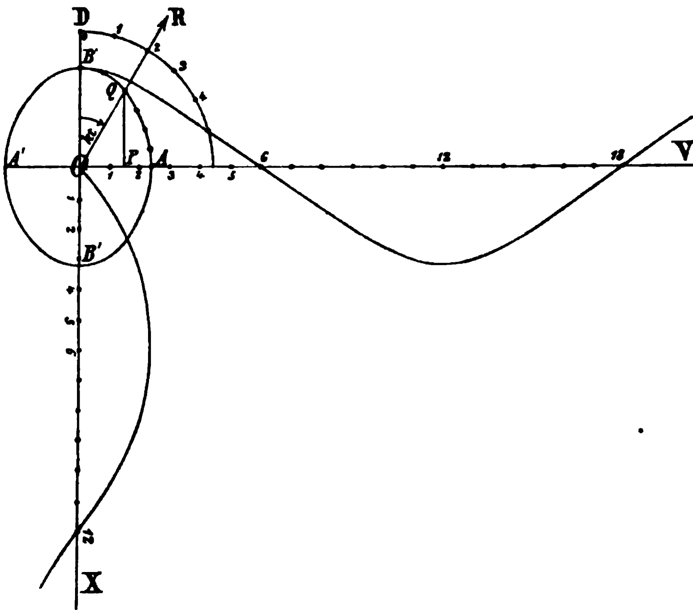
$$x^2 + \frac{v^2}{k^2} = a^2,$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2k^2} = 1.$$

Diese Gleichung stellt den Zusammenhang der Wege und der entsprechenden Geschwindigkeiten dar und ist daher die »Weg-Geschwindigkeitsgleichung«. Eine Curve, welche dieser Gleichung mit den Abscissen x und den Ordinaten v entspricht, ist aber einr Ellipse.

Fig. 215 stellt diesen wichtigen Zusammenhang vollkommen dar. Es ist in ihr angenommen, dass die Strecke OA gleich a und $OB = a \cdot k$ sei, wobei $k > 1$ angenommen wird. Die mit diesen Halbaxen a und $a \cdot k$ construirte Ellipse stellt unsere Weg-Geschwindigkeits-Curve dar. Lässt man von der Anfangslage OB aus eine Gerade OR im Sinne der Zeiger einer Uhr rotiren, so stellt der zwischen OB und OR liegende Winkel den Winkel kt unserer Gleichungen für x und v dar. Diese Gerade OR schneidet die Ellipse in einem



(Ph. 215)

Punkte Q, von welchem aus ein auf die Abscisse OA gefälltes Perpendikel die letztere in einem Punkte P trifft, so das OP und QP die für den betreffenden Zeitwerth t zusammengehörigen Werthe von x bezw. v darstellen. Beschreibt man mit einem beliebigen Radius OD einen Viertelkreis und theilt diesen in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. in sechs, so kann man sich durch diese Bestimmungspunkte Gerade, wie z. B. OR durch den Punkt 2, gelegt denken. Sie durchneiden die Ellipse ebenfalls in einer gleichen Anzahl Theilpunkte, die ebenfalls mit 1, 2... bezeichnet wurden. Diese Theilpunkte der Ellipse dienen dann sofort zur Construktion der Weg-Zeit- und der Weg-Geschwindigkeits-Curve. Zu dem Ende theilt man die Gerade OV in eine Anzahl gleicher Theile von beliebiger Grösse; ebenso theilt man die Gerade OX in eine Anzahl gleicher Theile. Denkt man sich in diesen Theilpunkten Senkrechte zu OX und OV errichtet und trägt auf diesen entsprechend die Ordinaten x und v ab, so erhält man die Bestimmungspunkte für die betreffende Weg-Zeit- und Weg-Geschwindigkeitscurve, welche einmal eine Sinus- und einmal eine Cosinuslinie wird.

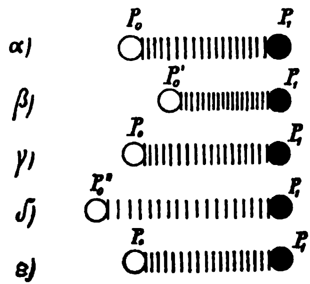
14) Würde in Wirklichkeit ein einzelner materieller Punkt für sich allein, ohne Zusammenhang mit seinen Nachbarn, einer solchen Kraft, wie wir sie im Vorausgehenden annahmen, existiren, so würden unsere bisherigen Resultate ziemlich ausreichende sein. Aber wir wissen, dass, wenn wir irgend ein Körpergebilde voraussetzen, nicht von der Bewegung eines kleinsten Theilchens geredet werden kann, ohne dass auch die Nachbartheilchen in Betracht gezogen werden. Wir müssen demgemäss unsere Betrachtungen erweitern und kommen so auf das einfachste Gebilde nämlich eine lineäre Punktreihe, deren einzelne Punkte oder einzelne Massentheilchen durch Kräfte zusammengehalten werden. Das Gleichgewicht dieser Punktreihe, die wir uns als gradlinig vorstellen wollen, soll nun an einer Stelle gestört sein. Die Frage ist, welche Bewegung vermag eine solche Störung hervorzurufen? Denken wir uns die Punkte einer

solchen Reihe in gerader Linie und mit bestimmten gleichen Abständen nebeneinander geordnet, so kann das Gleichgewicht in einer solchen Reihe auf unendlich vielfache Weise gestört werden. Aber zwei Arten sind es, welche man ausschliesslich berücksichtigt, weil diese Arten ja einen ganz bestimmten Charakter haben und namentlich auf dem Gebiete des Schalles eine ganz bestimmte Bedeutung beanspruchen. Wir können uns vorstellen, dass erstens an irgend einer Stelle der geradlinigen Punktreihe ein Punkt so verschoben wird, dass die Richtung der Verschiebung mit der Geraden der Punktreihe zusammenfällt. Eine solche Verschiebung pflegt man eine »longitudinale« zu nennen. Alle weiteren Bewegungen, die hiermit zusammenhängen, werden dann auch mit diesem Worte charakterisirt, indem man redet von »longitudinalen Schwingungen«, »longitudinalen Wellen« u. s. w. Zweitens können wir uns vorstellen, wie an irgend einer Welle ein Punkt senkrecht zur Geraden der Punktreihe durch eine äussere Kraft aus dem ursprünglichen Gleichgewichtszustand herausgebracht wird. Die Bewegung, welche der Punkt infolge dieser Einwirkung macht, nennt man dann eine »transversale« und hat es hiernach mit »Transversalschwingungen« und »Transversalwellen« u. s. w. zu thun.

Treten wir speciell auf das Gebiet des Schalles über, so entsprechen diesen beiden Klassen von Bewegungen Töne, die man einmal als »Longitunal-«, das andere Mal als »Transversaltöne« bezeichnet.

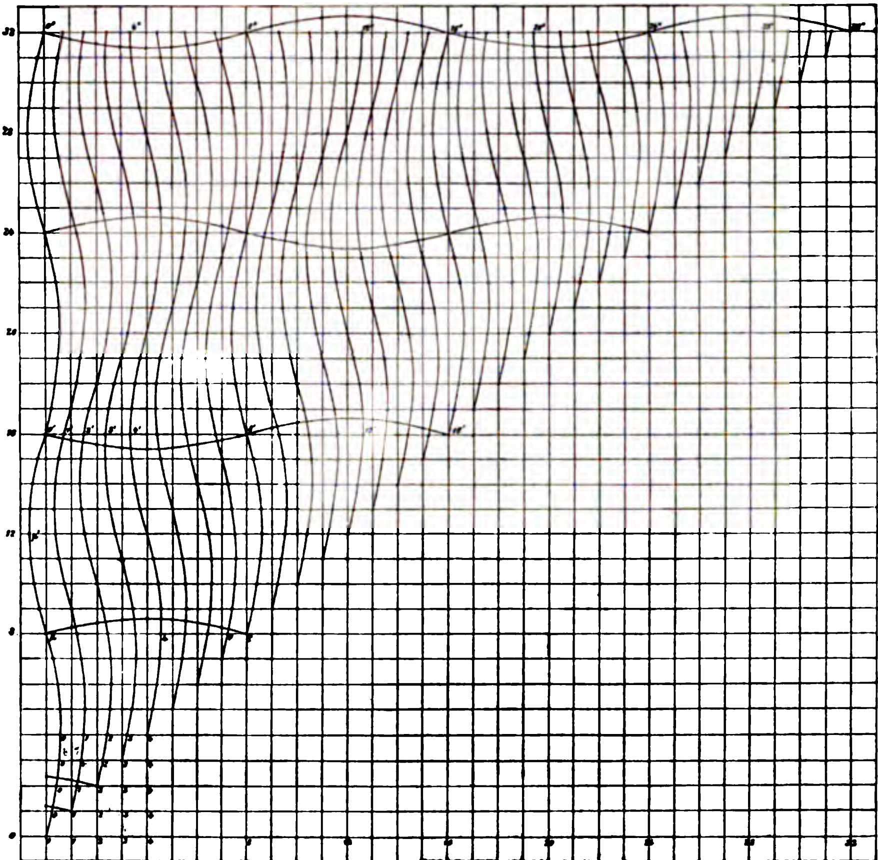
15) Wir wollen zunächst die Ueberzeugung gewinnen von der Art des Zusammenhanges der Erscheinungen bei einer Longitudinalbewegung.

In Fig. 216 mögen P_0 und P_1 zwei benachbarte Moleküle einer materiellen Punktreihe, oder auch zwei Körperelemente eines gradlinigen Stabes, einer Saite u. s. w. vorstellen. P_1 wollen wir uns zunächst als fest denken, während P_0 beweglich ist. Wir können ferner uns die zwischen P_0 und P_1 thätigen Molekularkräfte sehr gut in einer Feder installirt denken, welche gerade so wie die Molekularkräfte sich einer Annäherung wie einer Entfernung des Moleküls P_0 dem P_1 gegenüber widersetzt, indem bei der Annäherung die Repulsivkraft und bei der Entfernung die Attraktionskraft zu wachsen beginnt. Wenn wir nun dem Molekül P_0 von links nach rechts einen Stoss ertheilt denken, so wird dieses in Folge der ihm verliehenen lebendigen Kraft die Feder zusammendrücken, bis in einem bestimmten Zeitmoment das Maximum der Verkürzung der Feder vielleicht so wie in β eingetreten ist. Von nun an treibt die Feder das Molekül P_0 wiederum in seine Ruhelage in γ nach links zurück, wobei P_0 seine ursprüngliche, durch den Stoss ihm ertheilte lebendige Kraft wiedererlangt, vermöge deren es befähigt wird, sich noch weiter nach links hin über seine Ruhelage zu entfernen, und wobei die Feder eine Verlängerung erleidet. Das Molekül P_0 kommt in die Lage P_0'' in δ, es schwingt von hier aus wieder in seine Ruhelage P_0 in ε zurück und kann dieselbe Bewegung, soweit sie bis jetzt geschildert wurde, sich so lange wiederholen, bis eben die Energie der Bewegung oder die lebendige Kraft des Moleküls P_0, falls es gerade die Ruhelage einmal wieder erreicht, gleich Null geworden ist. Wir sehen, es ist eine Vibrationsbewegung, welche P_0 ausführt und kann sie genau so ausgeführt werden wie die, welche wir unter 12) betrachteten. Auch die jeweiligen Entfernungen des Moleküls von der Ruhelage werden nach der Sinusfunktion eintreten, so dass wir diese Entfernungen durch eine Sinuslinie darstellen können.



(Ph. 216.)

Wenn wir P_1 nicht fest, sondern auch beweglich denken, und uns ferner vorstellen, dass noch weitere Moleküle in gerader Linie hinter P_1 nach rechts hin gelagert und durch Federn verbunden sind, so können z. B. 0, 1, 2, 3, 4 . . . 15 in der Ruhelage so gelagert sein, wie in der untersten Reihe der Fig. 217. Alle



(Ph. 217.)

Moleküle stehen gleich weit von einander ab. Nun erhält das Molekül 0 einen Stoss nach rechts; die Feder zwischen ihm und 1 wird zusammengedrückt, bis eine Maximalverkürzung eingetreten ist, und 0 sich dem 1 so genähert hat, wie in der zweiten Horizontalreihe der Figur dargestellt ist. Die Spannung der Feder zwischen 0 und 1 überträgt sich von nun an auf die zwischen 1 und 2 ausgespannte Feder und ist in diesem Momente die Sache so wie in der dritten Horizontalreihe. So setzt sich die Bewegung nach rechts hin fort, immer fernere Punkte werden in diese Bewegung eintreten, bis am Ende des sechzehnten Zeittheilchens die Moleküle so geordnet sind, wie in der Reihe 0′ . . . 4′ . . . 8′ . . . 12′ . . . 16′. In diesem Momente hat das Theilchen 0 eine vollständige Schwingung vollendet, seine entsprechenden Entfernungen von der Ruhelage sind durch die Sinuscurve $o\,\mu\,\mu'\,o'$ dargestellt. Alle folgenden Teilchen bewegen sich auch nach einer solchen Curve, die nur bei je einem weiteren nach rechts hin liegenden Punkte erst später ihren Anfang zu nehmen hat, wie dies ja in der Figur, von unten nach oben gerechnet, für die einzelnen Momente dargestellt

ist. Nehmen wir an, dass das Theilchen 0 und alle nach rechts liegenden Theilchen nach dem sechzehnten Momente ihre Schwingungsbewegungen fortsetzten, so würde auch die Figur der Sinuscurven über 0' . . . 16' nach oben hin zu erweitern sein. Nach dem 32. Zeitmoment würden die Moleküle so geordnet sein wie in 0'' . . 4'' . . 8'' . . 12'' . . 16''. Ist die Punktreihe nach rechts hin lang genug ausgedehnt, so werden vom 16. Momente an sechszehn weitere Theilchen in die Bewegung hineingezogen, indem dann beim 32. Theilchen die Bewegung beginnt, wenn beim Theilchen 16 sich eine und beim Theilchen 0 sich zwei volle Vibrationen wiederholt haben.

16) Durchschneiden wir unsere Fig. 217 an irgend einer Stelle parallel zu 0 . . . 16 . . . 32 durch eine Gerade, so liefern die Durchschnittspunkte dieser horizontalen Geraden mit den Sinuslinien den Zustand, in welchem die einzelnen Moleküle in einem bestimmten Momente ihrer Longitudinal-Bewegung sich befinden. Die Abstände der auf einander folgenden Moleküle zeigen Minima, Maxima und dazwischen sind diese Abstände so wie in der Ruhelage. Dieser dreifachen Verschiedenheit der jeweiligen Entfernungen der Moleküle von einander entsprechen aber drei verschiedene Zustände, wodurch die Longitudinalwellenbewegung allein ausgezeichnet ist: nämlich der Zustand der »Verdichtung«, der »Verdünnung« und der Zustand unveränderter Dichtigkeit, bei welchem man von »Bäuchen« zu reden pflegt. Achten wir specieller auf diese Zustände und Stellen, an denen sie eintreten, so lassen sich folgende Gesetzmässigkeiten aus unserer Figur ablesen, die wir der Reihe nach in einzelnen Sätzen darstellen wollen, und welche Sätze zugleich als Fundamentalsätze der Wellenlehre zu betrachten sind.

Erster Satz. Die Wellenbewegung von einem Ende einer Punktreihe, dem Ende eines Stabes, einer Saite oder auch einer Luftsäule, falls ein Stoss im Sinne unserer Figur erfolgt, beginnt mit einer Verdichtung.

Zweiter Satz. Diese Verdichtung schreitet mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Richtung des Stosses fort und erreicht, wenn das erste vom Stosse getroffene Theilchen eine volle Schwingung um seine ursprüngliche Gleichgewichtslage vollendet hat, eine Stelle der Punktreihe, welche vom Anfang derselben um eine Strecke entfernt ist, die man als »Länge« der Longitudinalwelle, als »Wellenlänge« dieser Bewegung bezeichnet. In unserer Figur würde dieses die Strecke zwischen 0 und 16 sein.

Dritter Satz. Hiernach ist von selbst klar, was man z. B. unter einer »Viertel-« und einer »Halbwelle« zu verstehen hat. Erstere bedeutet in unserer Figur z. B. die Strecke von 0—4 oder 4 - 8 u. s. w.; letztere liegt z. B. zwischen 0—8 oder 8—16.

Vierter Satz. Innerhalb der Zeit, in welcher das erste Theilchen eine Viertels-, eine halbe oder Dreiviertels- u. s. w. Primitivvibrationsbewegung vollendet hat, schreitet auch die Longitudinalbewegung progressiv um eben solche Bruchtheile einer ganzen Welle vorwärts. Allgemein ausgedrückt findet daher folgender Zusammenhang statt: Einer Fortdauer der

Primitivschwingung irgend eines Theilchens um $p \cdot \tau$ } entspricht ein { Fortschreiten der Wellenbewegung um $p \cdot \lambda$,

wenn τ die Dauer einer Primitivschwingung, λ die Wellenlänge und p irgend eine ganze oder gebrochene Zahl bedeutet.

Fünfter Satz. Da das Fortschreiten gleichförmig erfolgen soll, da $p \cdot \lambda$ die hierbei in Betracht kommende Wegstrecke und $p \cdot \tau$ die dem Fortschritt ent-

sprechende Zeit bedeutet, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung

$$c = \frac{p \cdot \lambda}{p \cdot \tau} = \frac{\lambda}{\tau},$$

d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist gleich der Wellenlänge dividirt durch die Dauer einer Primitivbewegung irgend eines Theilchens.

Sechster Satz. Rechnet man von einem Theilchen aus, welches die Ruhelage passirt, auf der Länge der Punktreihe weiter, so kann man den Abstand des $(n-1)$ten und $n$ten Theilchens von einander ins Auge fassen. Denselben Abstand findet man dann auch, wenn man um n Horizontalreihen in die Höhe geht zwischen dem 0ten und 1ten Theilchen. Denn gehen wir z. B. auf der 8. Horizontalreihe — die unterste als die 0te gerechnet — vom Theilchen μ aus nach rechts, so kommen wir im Abstand der Theilchen ν und ρ auf ein Maximum der Verdichtung; schreiten wir ebenso von μ aufwärts um acht Horizontallinien in die Höhe, so kommen wir zwischen den Theilchen $0'$ und $1'$ ebenfalls auf ein Maximum der Verdichtung. Gehen wir ebenso in der 16. Horizontalreihe nach rechts weiter, so kommen wir zwischen dem 3. und 4. Theilchen genau auf denselben Abstand wie auf der 20. Horizontalreihe zwischen dem 0ten und 1ten.

Siebenter Satz. Ein Fortschritt im horizontalen Sinne auf unserer Figur belehrt uns über die räumlichen Verschiedenheiten der zur selben Zeit, in demselben Moment, bestehenden Abstände der Moleküle. Ein Fortschritt im vertikalen Sinne belehrt uns über die Verschiedenheit der Abstände der Moleküle an derselben räumlichen Stelle der Punktreihe, aber in verschiedenen Zeitmomenten.

Diese merkwürdige Gesetzmässigkeit der Wellenbewegung gilt aber nicht blos bezüglich der Abstände der betreffenden Moleküle, sondern auch bezüglich der Entfernungen derselben aus ihrer Ruhelage. Ja man begreift sofort, dass die Gesetze, die wir im sechsten Satze mit Bezug auf die Abstände zweier Moleküle aussprachen, nur eine Folge von der Entfernung je eines Theilchens aus seiner Ruhelage sind, dass mithin ein

Achter Satz gilt, demzufolge die räumlichen Verschiedenheiten der Entfernungen der hinter einander folgenden Theilchen aus ihrer Ruhelage dieselben sind wie die zeitlich auf einander folgenden Entfernungen eines und desselben Theilchens aus seiner Ruhelage, vorausgesetzt, dass man wieder von einem Theilchen an rechnet, welches eben seine Ruhelage durcheilt, gleichgiltig ob dies in einem oder anderen Sinne geschieht. Denn gehen wir z. B. vom Theilchen μ aus zum Theilchen 4 fort, so hat dieses Theilchen 4 seine grösste Elongation nach rechts von seiner Ruhelage aus erreicht. Gehen wir ebenso von μ aus um vier Vertikalstufen in die Höhe, so zeigt sich, wie dasselbe Theilchen μ als μ' ebenfalls seine grösste Elongation von der Ruhelage, wenn auch im entgegengesetzten Sinne, erlangt hat.

17) Es ist dieser Zusammenhang auch aus der Differentialgleichung zu erkennen, welche für die Wellenbewegung besteht. Dieselbe lautet:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

und bedeutet in ihr c^2 eine Constante, während die zweiten Differentialquotienten die sogen. »Beschleunigungen« der Grösse y darstellen. Diese Grösse y bedeutet mit Anschluss an unsere bisherigen Betrachtungen die Entfernung der einzelnen Moleküle von ihrer Ruhelage. Die Grösse t ist eine willkürliche

Variable und bedeutet die Zeit. Mit ihr ändert sich y und leuchtet somit ein, dass $\frac{d^2y}{dt^2}$ die Beschleunigung von y in Rücksicht auf die Zeit vorstellt. Sie kommt in Betracht, wenn wir einen Punkt unserer Punktreihe der Fig. 217 gemäss in verticaler Richtung verfolgen. Die Grösse x stellt die Ortsvariable vor. Lassen wir sie vom Ausgange der Bewegung im Sinne des Stosses positiv sein, so stellt $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Beschleunigung von y mit Rücksicht auf den Ort vor, d. h. die Beschleunigung, die in irgend einem bestimmten Momente ein Molekül hat, welches um die Strecke x vom Ausgangspunkt der Bewegung an, nach rechts gerechnet, entfernt liegt.

Wird die Differentialgleichung integrirt, so kommt man zu einer Gleichung für y, welche lautet:

$$y = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

worin T die Dauer einer Primitivschwingung und λ die Wellenlänge bedeutet. Setzen wir in dieser Gleichung $x = p \cdot \lambda$, wo p jede beliebige ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, und $t = \frac{n \cdot T}{2}$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, so wird

$$y = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{n}{2} - p\right) = \pm\, a \cdot \sin 2p \cdot \pi.$$

Setzen wir ebenso $x = \frac{n \cdot \lambda}{2}$ und $t = p \cdot T$ so wird

$$y = a \cdot \sin 2\pi\left(p - \frac{n}{2}\right) = \pm\, a \cdot \sin 2p\pi,$$

womit ja unser im Schlusssatz von 16 speciell für $n = 0$ dargestellter Zusammenhang auch in anderer und zwar noch allgemeinerer Form seinen Beweis gefunden hat.

Wollen wir die Entfernungen je zweier Moleküle in ihrer Abhängigkeit von der Zeit oder vom Orte haben, so müssen wir eine Differenz zweier y bilden, welche y, wenn wir ihre Abhängigkeit von der Zeit darstellen wollen, als ein y_1 und y_2 durch die Gleichungen:

$$y_1 = a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = \Delta x + a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + \Delta x}{\lambda}\right)$$

dargestellt werden. In ihr bedeutet Δx die constante Längendifferenz, um welche wir die einzelnen Punkte der Punktreihe in der Ruhelage von einander abstehend denken, d. h. im Anschluss an unsere Fig. 217 die Strecke von 0 bis 1, von 1 bis 2 u. s. w. Ziehen wir von y_2 das y_1 ab, so stellt

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \Delta x + a \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + \Delta x}{\lambda}\right) - a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

die gesuchte Differenz dar. Nach einigen Umformungen erhält man hieraus:

$$\Delta y = \Delta x - 2a \sin \frac{\pi \Delta x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta x}{2\lambda}\right).$$

Dieser Ausdruck für Δy erreicht seinen Minimalwerth, d. h. zu der betreffenden Zeit t findet für ein bestimmtes x eine Verdichtung statt, wenn die Cosinusgrösse den Werth $+1$ annimmt, d. h. wenn

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta x}{2\lambda}\right) = 2n\pi$$

oder

$$\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{\Delta x}{2\lambda} = n$$

wird. Nehmen wir einmal x gleich 0 und unserer Figur entsprechend $\Delta x = \frac{\lambda}{16}$ an, so wird

$$\frac{t}{T} - \frac{1}{32} = n,$$

d. h. das Minimum von Δy, identisch mit einer Wellenverdichtung, findet statt zur Zeit:

$$t = \frac{32n + 1}{32} T,$$

oder, wenn wir dem n die Werthe 0, 1, 2 ... beilegen, für t gleich:

$$\frac{1}{32} T, \quad T + \frac{T}{32}, \quad 2T + \frac{T}{32} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Verdichtung zwischen 0' und 1' nicht genau hier in den Momenten $t = 0$, $1T$, $2T$ ... sondern jedesmal um $\frac{T}{32}$ später eintritt. Hätten wir Δx anstatt $\frac{\lambda}{16}$ gleich $\frac{\lambda}{32}$ angenommen, so würde sich der erste Werth von t gleich $\frac{T}{64}$ ergeben haben, d. h. das Verdichtungsmaximum würde genauer in den Zeitmomenten $t = 0$, $1T$, $2T$ ... stattfinden.

Ebenso einfach lassen sich aus der Gleichung für Δy die Zeiten für die Eintritte der Verdünnungen und die der unveränderten Dichtigkeiten oder der Bäuche berechnen. Für letztere muss $\Delta y = \Delta x$ sein, d. h. es muss die Cosinusgrösse den Werth 0 annehmen.

Um die Grösse der Verdichtung und Verdünnung zu beurtheilen, müssen wir in der Gleichung für Δy den Faktor

$$2a \sin \frac{\pi \cdot \Delta x}{\lambda}$$

beachten. Setzen wir in ihm $\Delta x = \frac{\lambda}{16}$, so wird er gleich

$$2a \cdot \sin \frac{\pi}{16} = 2a \cdot \sin \frac{2\pi}{32},$$

mithin für den Fall einer Verdichtung

$$\Delta y = \frac{\lambda}{16} - 2a \cdot \sin \frac{2\pi}{32}$$

und den einer Verdünnung

$$\Delta y = \frac{\lambda}{16} + 2a \sin \frac{2\pi}{32}.$$

Aus dem Anblicke der Sinuslinien wird man diese Werthe von Δy geometrisch ableiten können.

18) In ganz ähnlicher Weise wie für eine Longitudinalbewegung können wir bei der Transversalbewegung vorgehen. Wir müssen hierbei, wenn wir den Zusammenhang bildlich versinnlichen wollen, eine Figur construiren, in welcher die Sinuslinien nicht vertical sondern horizontal verlaufen. Denn die einzelnen Punkte der Punktreihe 0, 1 ... 16 bewegen sich jetzt senkrecht zur Längsrichtung der Reihe. Die Sinuslinien nehmen dann einen Anfang, so wie sie in den drei untersten Horizontalreihen gezeichnet sind. Um die ganze Figur aber nicht undeutlich zu machen, sind dann nur die Curven für die 8te, 16te, 24te und 32te Horizontalreihe gezeichnet worden.

Bei der Longitudinalbewegung bleiben alle Theilchen in derselben Geraden und können so in ihrer Gesammtheit natürlich auch nur eine Gerade bilden. Die Sinuscurven der Fig. 217 kamen nur so zu Stande, dass die zeitlich ver-

schiedenen Abstände der einzelnen Moleküle an der Ruhelage zu einer Curve verbunden wurde. Bei der Transversalbewegung ist es anders, indem bei ihr die Sinuscurven die Form bilden, nach welcher die Moleküle in jedem Momente auf der ganzen Länge der Punktreihe wirklich gestellt sind. Die beiden Hälften einer solchen Sinuscurve zusammen genommen pflegt man eine »Welle« zu nennen und unterscheidet man die eine Hälfte von der anderen durch die Bezeichnungen »Berg« und »Thal«, welche Ausdrücke augenscheinlich von der Wellenbewegung des Wassers hergenommen sind, die aber in anderen Fällen, z. B. bei einem ausgespannten Seile, nur Sinn haben, wenn man die Wellenbewegung dieses Seils als in einer Verticalebene vor sich gehend denkt und eine Erhebung der Seiltheilchen über und eine Senkung von Seiltheilchen unter das ursprüngliche Niveau factisch vorhanden ist, während eine Transversalbewegung des Seils in horizontaler Ebene solche Ausbiegungen nur in demselben Horizont zeigt. Man hätte also der Sache entsprechend in solchen Fällen besser von einer Plus- und einer Minushälfte der Welle zu reden, doch bleibt man bei der alten Benennung stehen und muss dann, wenn die eine Hälfte »Wellenberg« heisst, die andere »Wellenthal« nennen und umgekehrt.

19) Von ganz besonderer Bedeutung sind nun noch bestimmte Gesetzmässigkeiten bei den charakteristischen Zuständen der beiden Wellenformen. Bevor wir diese Gesetzmässigkeiten weiter bezeichnen, wollen wir erst noch den Begriff der sogenannten »Knoten« bei der Wellenbewegung kennen lernen. Betrachten wir wiederum unsere Fig. 217, so zeigen sich bei ihr Stellen, wo ein betreffendes Molekül sich gerade in der ihm ursprünglich eigenen Ruhelage befindet. So ist dies z. B. der Fall beim Molekül μ der 8ten und beim Molekül o' der 16ten Horizontalreihe. Ersteres durcheilt im Momente $t = \frac{T}{2}$ gerade die Ruhelage, um sich nach links hin von ihr zu entfernen; o' dagegen durcheilt seine Ruhelage in dem Momente $t = T$, um nach rechts hin von ihr abzuweichen. Solche Stellen finden ebenso bei Transversalbewegung statt, nur durcheilen die betreffenden Moleküle die Ruhelage hierbei nicht in der Richtung der ursprünglichen Punktreihen, sondern senkrecht hierzu. Man nennt nun diese Stellen der Ruhelage »Knoten«. Theilchen, welche sich im selben Momente in einem Knoten befinden, sind demnach die Theilchen 0', 8', 16' unserer Fig. 217 und bestätigt sich hiernach ein

Neunter Satz der Wellenlehre, welcher besagt, dass die Knoten um eine halbe Wellenlänge auseinander liegen.

Aber ein anderer merkwürdiger Zusammenhang zeigt sich noch. Denn sehen wir die Schwingungszustände bei den Knoten 0' und 16' an, so sind diese vollkommen übereinstimmend und bestehen in je einer Verdichtung; während beim dazwischenliegenden Knoten 8' eine Verdünnung sich zeigt. Diese Thatsache wird sich stets bestätigt finden. Daher

Zehnter Satz: Bei der Longitudinalwellenbewegung entsprechen den Stellen der Knoten die Verdünnungen und Verdichtungen. Zwischen je zwei Verdichtungen liegt eine Verdünnung in der Mitte und umgekehrt. Daher liegen zwei nächste Verdichtungen und ebenso zwei nächste Verdünnungen um eine ganze Wellenlänge, dagegen eine Verdichtung und die benachbarte Verdünnung um eine halbe Wellenlänge aus einander.

Betrachten wir ferner die Theilchen 4' und 12', so erkennen wir, wie diese Theilchen im Maximo von ihrer ursprünglichen Ruhe sich entfernt haben, um

soeben den Rückweg zu dieser Ruhe anzutreten, das Theilchen 4′ in der Richtung von links nach rechts, das Theilchen 12′ in umgekekrter Richtung. Bei der Transversalwellenbewegung sind dies die Stellen der Wellenberge und Wellenthäler und da einmal von der Transversalwellenbewegung bestimmte Benennungen auf die Longitudinalwellenbewegung übertragen sind, so ist kein Grund vorhanden, weshalb wir die Benennungen »Wellenberg« und »Wellenthal« nicht auch bei der Longitudinalbewegung gebrauchen sollen. Demgemäss verstehen wir unter diesen Benennungen die Stellen, wo die schwingenden Theilchen im Maximo von ihrer Ruhelage nach der einen und nach der anderen Seite hin entfernt sind. Welche Stelle wir als »Berg« und welche als »Thal« bezeichnen wollen, ist im allgemeinen nach den unter 18 gemachten Bemerkungen einerlei.

Sehen wir aber die Stellen bei 4′ und 12′ weiter an, so erkennen wir, wie dies die Stellen der »Bäuche« der Longitudinalbewegung sind, daher der weitere wichtige

Elfte Satz. Die Stellen der Berge und Thäler bei der Longitudinalwellenbewegung sind diejenigen Stellen, welche den Bäuchen entsprechen, d. h. den Stellen, bei welchen weder Verdichtung noch Verdünnung stattfindet. Zwei benachbarte Bäuche liegen stets um eine halbe Wellenlänge aus einander. Die Entfernung eines Knotens von einem nächsten Bauche oder was dasselbe ist, die Entfernung einer Verdichtung oder Verdünnung von einem benachbarten Bauche beträgt eine Viertels-Wellenlänge.

Diese Betrachtungen galten sämmtlich den Zuständen, wie sie in einer und derselben Horizontalreihe unserer Fig. 217 stattfinden, d. h. solchen Zuständen, die für einen bestimmten Moment der Zeit als örtliche Zustände zu betrachten sind. Wir können aber auch eine und dieselbe Stelle des Orts festhalten und fragen, wie ändern sich die Zustände an diesem Orte zeitlich? Nach unseren Auseinandersetzungen in 17 kann der Zusammenhang sofort in einem

Zwölften Satze ausgesprochen werden. Einem örtlichen Zustande, mag er sein wie er will, folgt nach einer ganzen Primitivschwingungszeit genau derselbe Zustand. War also ursprünglich eine Verdichtung vorhanden, so wiederholt sich diese Verdichtung; war eine Verdünnung vorhanden, so wiederholt sich diese Verdünnung. Nur bei den Bäuchen der Longitudinalbewegung erkennt man sofort, dass sie in der Hälfte der Primitivschwingungszeit sich wiederholen. Ebenso folgt nach einer halben Schwingungszeit einer Verdichtung eine Verdünnung und umgekehrt. Befinden sich daher gleichzeitig auf der Länge eines longitudinal schwingenden Stabes oder einer Saite oder einer Luftsäule in einem bestimmten Momente *n* Verdichtungen, so treten nach einer halben Primitivschwingungszeit an denselben Stellen *n* Verdünnungen auf und umgekehrt. Befinden sich *n* Bäuche auf der ganzen Länge, so treten nach einer halben Schwingungszeit wiederum *n* Bäuche an denselben Stellen auf.

Für die Transversalbewegung lassen sich leicht die analogen Gesetze aussprechen. Denken wir uns den Fall so, wie er in der Fig. 217 angenommen wurde, nämlich so, dass die Longitudinalbewegung mit derselben Wellenlänge und derselben Excursionsweite der Theilchen aus ihren Ruhelagen sich in eine Transversalbewegung umwandeln, so entsprechen den Bergen und Thälern der Longitudinalbewegung natürlich auch die Berge und Thäler der Transversalbewegung. Da ferner bei ersterer Bewegung die Berge und Thäler die Stellen

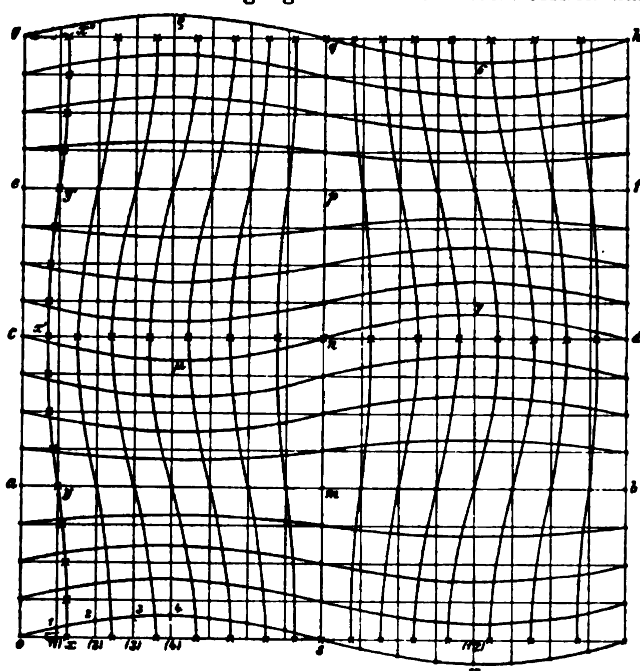
der »Bäuche« sind, so kann man auch sagen, dass diese letzteren den Bergen und Thälern der Transversalbewegung entsprechen, während, wie die Fig. 217 sofort zeigt, die Knoten der Transversalbewegung den Verdichtungen und Verdünnungen der Longitudinalbewegung entsprechen.

20) Es ist schon unter 5 darauf hingewiesen worden, dass es zwei von einander wesentlich verschiedene Wellenbewegungsformen giebt, wobei nämlich »fortlaufende« Wellen und »stehende« Wellen in Betracht kommen. Diesem wichtigen Unterschiede der Wellen müssen wir noch besondere Aufmerksamkeit schenken. Sofort bemerken wir, dass alle Betrachtungen, die bisher angestellt wurden, zunächst der fortlaufenden Wellenbewegung gelten. Das Wesen dieser Bewegung lässt sich leicht dadurch charakterisiren, dass man sagt: Die fortlaufende Wellenbewegung sei eine solche, bei der von einer Stelle aus ein Wellengebilde erregt wird, welches Wellengebilde sich nach und nach in derselben ursprünglichen Form auf immer fernere Theile des Schwingungsmediums überträgt. Hierfür haben wir die besten Beispiele. Erstes Beispiel: Wir werfen einen Stein ins Wasser, es entsteht ringsherum um die Einwurfstelle ein kreisförmiger Wellenberg, und dieser verbreitet sich immer weiter und weiter, und fernere, ruhende Theile der Wasserfläche werden nach und nach ebenfalls einen Wellenberg bilden. Oder: Eine Meereswelle eilt dem Ufer zu, sie wird zurückgeworfen und lässt sich weit hin wieder in ihrem Laufe verfolgen. Zweites Beispiel. Ein langes Seil ist ausgespannt; wir schlagen an einem Ende mit der Hand darauf; eine Vertiefung, ein Wellenthal bildet sich und sofort sehen wir, dass dieses Thal rasch nach dem anderen Ende hinläuft, dass also die ferneren Seiltheile in dieselbe Bewegung gerathen wie die ursprüngliche Ausgangsstelle. Drittes Beispiel. In der Luft wird irgendwo ein Knall erregt, er besteht in einer Luftverdichtung, die zunächst um die Erregungsstelle sich bildet; diese bleibt aber nicht hier bestehen, sondern breitet sich nach allen Richtungen, d. h. nach den Radien einer Kugel aus, und wir wissen, dass in jeder Sekunde diese Verdichtung um ca. 330 *m* weiter fortschreitet.

Die beiden ersten Beispiele sind für eine Transversal-, das letzte für eine Longitudinalbewegung geltend. Suchen wir nun nach Beispielen für eine stehende Wellenbewegung. Das Wesen dieser Bewegung zeigt sich darin, dass dieselbe Wellenform, welche an einer Stelle des Schwingungsmediums einmal auftritt, nicht in derselben Weise bald darauf an jeder anderen Stelle beobachtet wird, sondern so, dass das Auftreten dieser Wellenform nur zwischen bestimmten Grenzen, d. h. an ganz bestimmte Strecken gebunden ist und auf dieser Strecke in periodischer Weise sich auch ändert. Ein Wellenberg wird in Folge dessen bei einem Seile, welches in stehender Wellenbewegung sich befindet, nicht an jeder Stelle, sondern, wie wir sehen werden, bloss je zwischen zwei Knoten auftreten und wird sich hier zwischen in ganz bestimmter Weise verändern, so, dass bald dem Berg ein Thal folgt und umgekehrt. Die Stellen der Knoten selbst kommen nie auf den Gipfel eines Berges oder in die Tiefe eines Thales zu liegen.

Wenn derartige durchgreifende Verschiedenheiten eintreten und bestehen sollen, so kann der letzte Grund hiervon nur darin gesucht werden, dass nicht jeder Punkt des Schwingungsmediums dieselbe Primitivbewegung ausführt, sondern, dass diese für die verschiedenen Punkte eine verschiedene ist. Denn führte jeder Punkt nach und nach z. B. dieselbe Bewegung aus wie der Punkt 0 in unserer Punktreihe 0, 1, 2, 3 . . . der Fig. 217, so würde ja gerade das herauskommen, was wir als das Charakteristische der fortlaufenden Wellenbewegung erkannt haben.

Fig. 218 wird das Gesagte noch weiter zum Verständniss bringen helfen. Stehende Wellenbewegungen sind fast ausschliesslich auf das Gebiet des Schalls beschränkt, indem die sogen. tongebenden Körper stets stehende Schwingungen ausführen. Deshalb betrachten wir auch einen solchen in diesen seinen Schwingungen und nehmen z. B. an: eine Saite liesse ihren zweiten Oberton erklingen. Sie theilt sich dann so ab, dass in ihrer Mitte ein fester Knotenpunkt existirt, und die beiden Hälften zwischen ihm und den festen Endpunkten um die Ruhelage hin und her schwingen. Die unterste Horizontalreihe (1) (2) (3) (4) . . . der Fig. 218 stellt die Saite in ihrer Ruhelage vor. Denken wir sie in ihrer Mitte im Punkte 8 festgehalten, in ihrer linken Hälfte beim Punkte (4) erfasst und bis 4 in die Höhe gezogen, in ihrer rechten Hälfte beim Punkt (12) erfasst und bis 12 herunter gedrückt und dann bei 4 und 12 gleichzeitig losgelassen, so vollführt die Saite eine Bewegung, wie sie in den nach oben folgenden Curven unserer Fig. 218 dargestellt ist. Der Wellenberg 0, 1 . . 4 . . 8 schwingt im Ganzen zurück, um in *am* wiederum die Ruhelage der Saite zu erreichen. Gleichzeitig erreicht diese Ruhelage auch das zu ihr zurückschwingende Thal 8 . . 12 . . 16, so dass die ganze Saite die Gestalt einer Geraden *a* . . . *m* . . . *b* erhält. In dieser verbleibt sie aber nicht, denn die elastischen Kräfte haben mit beschleunigter Geschwindigkeit jedes Saitentheilchen in seine Ruhelage hingezogen, so dass nunmehr ein Hinausschwingen über diese Ruhelage erfolgen muss. Hierbei verwandelt sich dann bald der ursprüngliche Berg 0 . . . 4 . . . 8 in ein Thal c . . μ . . n und das ursprüngliche Thal 8 . . . 12 . . . 16 in einen Berg n . . . ν . . . ∂. Von jetzt an schwingen beide Hälften wieder in die Ruhelage zurück und erreichen diese in $e p f$, um sofort wieder links einen Berg $g \rho q$ und rechts ein Thal $q \sigma h$ zu bilden. Eine ganze Schwingung der Saite ist vollendet und leicht begreift man, wie diese Schwingung sich zum zweiten und *n*ten Male wiederholen kann.

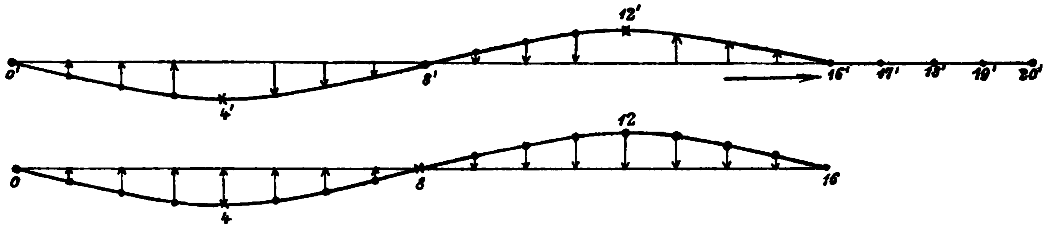


(Ph. 218.)

Das ist aber eine ganz andere Bewegung wie die durch die Fig. 217 erläuterte. Vor Allem sehen wir in Fig. 217 nur eine Art von Sinuslinien, die bei der Transversalbewegung sich progressiv von links nach rechts hin weiter fortschiebt, so dass der Berg über μ ρ noch um acht weitere Zeittheilchen progressiv fortgeschritten ist, um hier über der Strecke 8′ . . . 16′ zu erscheinen. Ein jedes Theilchen, zwischen 4 und 12 gelegen, ist hierbei in dieselbe weiteste Entfernung von der Ruhelage gelangt. In Fig. 218 ist dies anders. Wir sehen in den verschie-

denen Zeitmomenten verschiedene Sinuslinien eintreten, daher rührend, dass nicht jedes Theilchen dieselben Schwingungsamplituden besitzt, denn es bleiben die Punkte 0, 8 und 16 ganz in Ruhe, die zwischen 0 und 8 sowie 8 und 16 in der Mitte liegenden Theilchen haben die grössten Schwingungsamplituden und nehmen diese Amplituden nach den festen Punkten 0 und 8, 8 und 16 beiderseits symmetrisch ab.

Noch in einer andern Weise können wir unsere Betrachtungen über die in Rede stehenden Verschiedenheiten durch die Fig. 219 vervollständigen. Sie stellt



(Ph. 219.)

durch beigezeichnete Pfeile das Bestreben dar, welches die einzelnen Moleküle einer fortlaufenden und einer stehenden Welle in einem bestimmten Momente haben. Die Pfeile der stehenden Bewegung bei 0 . . . 4 . . . 8 . . . 12 . . . 16 deuten an, wie gleichzeitig auf der ganzen Strecke eines Wellenbergs und eines Wellenthals die Theilchen je alle dieselbe Bewegung ausführen, indem sie alle zur Ruhelage zurückschwingen vom Momente an, wo die äusserste Elongation erreicht war. Die Pfeile der fortlaufenden Welle 0' . . . 4' . . . 8' . . . 12' . . . 16' zeigen ein ganz anderes Bild und geben sogar Veranlassung, den Berg sowohl wie das Thal noch in Hälften zu theilen und hierbei von einem »Vorder- und Hintertheil des Berges« und einem »Vorder- und Hintertheil des Thales« zu reden. Das Vordertheil des Berges liegt zwischen 12' und 16', das Hintertheil zwischen 8' und 12'. Das Vordertheil des Thales zwischen 4' und 8', das Hintertheil zwischen 0' und 4'. Das Wesen der fortschreitenden Bewegung besteht nun darin, dass beim Berg sowohl wie beim Thal die Theilchen eines Vordertheils entgegengesetzt wie die des Hintertheils schwingen, dass dagegen beim Hintertheil eines Berges und Vordertheil eines Thales gleiche Richtung der Bewegungen herrscht. Hieraus geht namentlich auch der wesentliche Unterschied für die Knoten der beiden Bewegungen hervor. Die Bewegung der Theilchen bei der stehenden Wellenbewegung ist beiderseits des Knotens genau conträr und muss ein solcher Knoten daher dauernd an derselben Stelle verbleiben. Bei den Knoten der fortlaufenden Schwingung ist die Bewegungsrichtung beiderseits dieselbe: der Knoten verschiebt sich daher progressiv ebenso weiter, wie jeder andere Schwingungszustand.

21) Nun wollen wir zum Schlusse noch andeuten, in welcher Weise sich die longitudinale stehende Wellenbewegung gestaltet. Ebenso wie bei der fortlaufenden wird sie erhalten, wenn man die zur ursprünglichen Ruhelage senkrechten Entfernungen der Moleküle aufträgt. Die Theilchen der untersten Reihe unserer Fig. 218 würden dann an die Stellen der angezeichneten Sternchen kommen. Ebenso würden in der darüber liegenden Horizontalen die Uebertragungen vom Senkrechten ins Longitudinale stattzufinden haben. Fürs Theilchen 1 ist dies geschehen und kommt auf diese Weise hierfür die Sinuslinie $x\,y\,x'\,y'\,x''$ zum Vorschein. Man erhält somit ein System vertical verlaufender Sinuslinien

und liessen sich sehr leicht wiederum verschiedene Gesetzmässigkeiten über die örtlichen und zeitlichen Zustände der stehenden Transversal- und Longitudinalbewegung aus der Figur ablesen.

Noch bleibt uns übrig weiter anzudeuten, wie stehende Wellen überhaupt zu Stande kommen? Hierauf muss geantwortet werden, dass dies allermeistens dann geschieht, wenn zwei Wellenbewegungen und zwar zwei fortlaufende sich begegnen. Es ist schon unter 5 hervorgehoben worden, dass hierbei zwei wesentlich verschiedene Fälle eintreten können, nämlich der Fall, wo beide Wellen sich im selben Sinne bewegen und der Fall, wo beide Wellen sich conträr bewegen. Sind in ersterem Falle die Wellenlängen vollkommen gleich und ebenso die Amplituden, so kann es sich ereignen, dass zwei Bewegungen sich gegenseitig völlig vernichten. Sind ebenso in letzterem Falle die Wellenlängen und Longituden gleich, so können stehende Wellen zu Stande kommen. Zu den näheren Erläuterungen hierzu ist der Raum nicht bemessen.

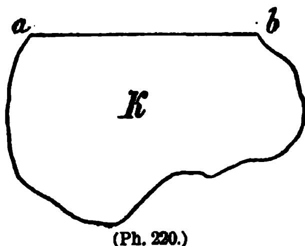
Melde.

Transversalschwingungen tönender Körper.

1) In dem Artikel »allgemeine Wellenlehre« ist gezeigt worden, wie man insbesondere von »Transversalschwingungen« eines Körpers reden kann. Hierbei wird vorausgesetzt, dass wenn man sich einen Körper zunächst in seiner Ruhe denkt, seine einzelnen Moleküle so durch eine äussere Krafteinwirkung aus dieser Ruhe aufgescheucht und in Bewegung gesetzt werden, dass sie hiernach senkrecht zur Längsrichtung oder senkrecht zur Flächenausdehnung des Körpers in Schwingung verbleiben. Soll dies aber überhaupt möglich werden, so muss die betreffende Körpermasse vor allem gestatten, dass sie eine ganz bestimmte Formabgrenzung dem sie umgebenden Raume gegenüber erhalten kann und wissen wir, dass dies nur bei festen und flüssigen Körpern möglich ist, während luftförmige Körper für sich allein nach aussen hin keine freie Grenze annehmen, vielmehr nur durch Umgeben mit einem festen bezw. flüssigen Körper zur Abgrenzung gelangen. Kurz es muss der Körper ein für sich bestehendes Individuum sein, das seine Form frei beibehält. Auch tropfbare Flüssigkeiten thun dies nur in beschränktem Maasse in sofern, als nur ihre Oberfläche eine bestimmte verbleibt, für deren Bestand keine äussere Abgrenzung durch einen anderen festen Körper nöthig ist. Irgend eine Flüssigkeitsmasse existirt zunächst nur in einem Gefässe; ist dies nach oben hin offen, so ist die Oberfläche dieser Flüssigkeitsmasse eine horizontale Ebene, wobei wir selbstverständlich von den Abweichungen, die an der Gefässwand stattfinden, absehen. Diese horizontale Grenzfläche bei tropfbaren Flüssigkeiten ist es nun ganz allein, bei welcher Transversalschwingungen vorkommen können. Es sind dies die Schwingungen, die schliesslich die Transversalwellen hervorrufen, Gebilde, durch welche ja gerade die tropfbaren Flüssigkeiten so ausgezeichnet sind. Diese Wellenbewegungen können sowohl fortlaufende wie stehende werden, doch zeigt sich bald, dass sie keine Töne erzeugen können, aus dem einfachen Grunde, weil sie zu langsam sind. Daher treffen wir in der gesammten Reihe der musikalischen Instrumente kein einziges, wobei eine tropfbare Flüssigkeit für sich mit ihren Transversalschwingungen figurirte. Tropfbare Flüssigkeiten und gasförmige

scheiden daher für unsere jetzigen Betrachtungen aus und verbleiben nur die festen, diese aber in so grosser Mannigfaltigkeit, dass wir uns bezüglich einer genaueren Darstellung der Gesetze und Erscheinungen nothwendig auf einige Hauptfälle beschränken müssen.

2) Wenn wir uns bei einem festen Körper das Analogon zu einem tropfbar flüssigen vorstellen wollen, so würde dies in einer Körpermasse bestehen, welche nach einer Richtung hin eine ebene Abgrenzung erhalten hat (Fig. 220). Unzweifelhaft können nun die zunächst in dieser Ebene liegenden Moleküle in Transversalschwingungen gerathen, die auch vielleicht rasch genug sind, um Töne zu erzeugen. Aber es zeigt sich sofort, dass solche Schwingungen einzig und allein bei einer einzigen Grenzfläche eines festen Körpers gedacht, keine Bedeutung für uns jetzt haben können, vielmehr muss die Begrenzung eines Körpers, falls er zu einem tongebenden werden soll, noch in ganz bestimmter Weise sich ändern. Zum näheren Verständniss können wir an Fig. 220 anknüpfen. Sie stellt einen aus irgend einer Masse bestehenden festen Körper dar, der in *ab* eine ebene Flächenbegrenzung erhalten hat. Mittelst eines Hammers lässt sich auf diese Grenzfläche *ab* ein senkrechter Schlag ausführen und unterliegt es keinem Zweifel, dass hierdurch zunächst die Moleküle, die um die Aufschlagstelle herum liegen, in eine Transversalbewegung gerathen, welche sich auch weiter nach der äusseren Contour der Grenzfläche und auch nach dem Innern der Körpermasse und zwar hier als Longitudinalerschütterung verbreitet. Der Verlauf dieser Bewegungen wird ein sehr rascher sein, daher rührend, dass eigentliche stehende Wellenbewegungen, wie sie zur Schallbewegung nöthig sind, nicht zu Stande kommen. Soll dies geschehen, so müssen ganz bestimmte Bedingungen erfüllt sein, die vor allem in der Begrenzung der Körpermasse zu suchen sind. Wenn wir nämlich parallel *ab* eine zweite Begrenzungsebene denken, so, dass zwischen ihr und *ab* eine dünnere Parallelschicht des Körpers liegt und wir in dieser eine dünne Platte erhalten, so lässt diese sich sofort dahin bringen, dass sie regelmässige Töne liefert, mag im Uebrigen ihre Begrenzung nach dem Rand hin sein wie sie will. Der Grund hiervon liegt darin, dass diese dünne Platte durch eine äussere Einwirkung in eine energischere Transversalbewegung versetzt werden kann, wobei sofort eine Biegung der ganzen Platte eintritt, und somit fortlaufende Wellen entstehen, die sich aber sehr rasch in stehende umsetzen, und als solche hinreichend lange sich erhalten. Somit ist es denn die Art der Begrenzung, welche bei festen Körpern regelmässige Schwingungen ermöglicht und kommt man hierbei auf zwei Hauptgruppen der schwingenden und tönenden Körper, nämlich



(Ph. 220.)

A. Linienförmige Körper,

B. Flächenförmige Körper,

eine Unterscheidung, welche schon Chladni in seiner »Akustik« machte.

Unter »linienförmigen« Körpern versteht man solche, bei denen die Längsdimension gegenüber den andern Dimensionen wesentlich vorwaltet. Es lassen sich hier auch wieder zwei Unterabtheilungen unterscheiden, nämlich solche Körper, bei denen die Längsdimension vorherrscht, ohne dass die andern Dimensionen, die Querdimensionen, als sehr gering anzusehen wären. Solche Körper sind aber die »stabförmigen«, die ihrerseits wiederum »geradlinig« oder »krummlinig« sein können, und wegen welcher letzteren Verschiedenheit

man zwei weitere Untergruppen unterscheiden kann. Herrscht dagegen die Längsdimension so vor, dass die Querdimensionen ihr gegenüber fast verschwinden und sind diese Querdimensionen auch absolut genommen sehr gering, so kommt man zur zweiten Unterabtheilung der linienförmigen Körper: nämlich der »Saiten«.

Ganz ähnlich verhält sich die Sache bei der Classifikation der »flächenförmigen« Körper. Bei ihnen herrschen die Flächendimensionen, also Länge und Breite gegenüber der Dicke, sehr vor. Ist letztere aber doch in Rechnung zu ziehen und nicht als verschwindend anzunehmen, so hat man es mit »scheibenförmigen« Körpern zu thun, die auch wiederum als »ebene« oder als »krummflächige« unterschieden werden können. Ist die Dicke dagegen verschwindend klein, so gelangt man zur Form der »Membranen.« Hiernach würden die tongebenden festen Körper in folgender Uebersicht zu classificiren sein, und wollen wir neben der allgemeinen Bezeichnung auch die nöthigen Beispiele anführen, wie solche sich im Hinblick auf die praktische Verwendung sofort ergeben:

A. Linienförmige Körper.
- a) Stäbe.
  - 1) geradlinige (jeder Metallstab oder Glasstab; ebenso jede Röhre),
  - 2) krummlinige (Stimmgabeln, Ringe),
- b) Saiten.

B) Flächenförmige Körper.
- a) Scheiben.
  - 1) ebene Scheiben (jede Metall- oder Glasscheibe),
  - 2) krummflächige Scheiben (Glocken),
- b) Membranen (Paukenfelle).

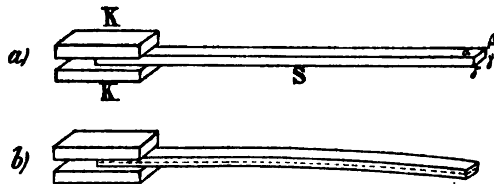
Diese Eintheilung soll hier zunächst mit Rücksicht auf die Transversalschwingungen gelten, doch muss sofort bemerkt werden, dass sie ebenso für Longitudinalschwingungen der Körper besteht, so dass wir bei den letzteren Schwingungen keiner neuen Eintheilung bedürfen. Ferner muss bemerkt werden, dass bei dieser Eintheilung die Formen der Körper und ihre Dimensionen maassgebend waren, im Gegensatz zur CHLADNI'schen Eintheilung, wobei die innere Structur entschied, insofern als die Hauptabtheilungen A. »Körper durch Spannung elastisch«, B. Körper »durch innere Rigorosität elastisch« enthielten. Der letztere Unterschied wird bei uns jetzt zu den Unterabtheilungen führen.

3) Wir beginnen unsere weitere Betrachtung über die Transversalschwingungen mit den geradlinigen Stäben. Es ist einleuchtend, dass man hierbei nur solche Stäbe berücksichtigt, deren Querschnitt durchweg derselbe ist, obwohl es ja nicht ohne Interesse sein kann, vielleicht auch Stäbe zu berücksichtigen, die von einem Ende zum anderen hin verjüngt zulaufen. Aber selbst, wenn wir die hervorgehobene Gleichheit des Querschnitts beibehalten, würde dieser in unendlich mannigfaltigen Formen vorkommen können. Von all diesen unendlich vielen Querschnittsformen sind es daher nur wenige, welche man theoretisch und experimentell bis jetzt der nöthigen Untersuchung unterwarf. Man nimmt nämlich blos Rücksicht auf solche Stäbe mit rektangulärem und kreisrundem Querschnitt, wobei vorausgesetzt wird, dass diese Stäbe massiv sind im Gegensatze zu den Röhren, denen man in jüngster Zeit erst die nöthige Aufmerksamkeit geschenkt hat und womit ein nicht unwesentlicher Fortschritt in der Akustik im Zusammenhang steht.

Zunächst wollen wir einmal einen Stab mit rektangulärem Querschnitt

voraussetzen. Liegt dieser Stab vor uns auf einem Tische, so hat er als tönender Körper zunächst keine Bedeutung, er muss vielmehr erst in ganz bestimmter Weise frei gemacht werden (Fig. 221), um eben dauernd in Schwingung gerathen und verbleiben zu können. Ihn gänzlich frei zu machen, ist unmöglich, denn dann müsste ja der Stab völlig frei in der Luft schweben, ein Verhalten, das bei keinem einzigen schwingenden und tönenden Körper und überhaupt nicht möglich ist. Der Stab muss demgemäss durch Klemmen oder Stützen an einzelnen Stellen festgemacht bezw. unterstützt werden, während er im übrigen völlig frei in der Luft liegt. Die einfachste Art dieser Befestigungen ist durch die Fig. 221 dargestellt. Zwischen den Backen K einer Klemme ist das eine Ende des Stabes S fest eingeklemmt, während der ganze übrige Stab frei in die Luft ragt. Wir können uns vorstellen, wie auch das zweite Ende des Stabes durch eine zweite Klemme fest gemacht ist, so dass der Stab dann zwischen diesen beiden Klemmen frei ist. Ebenso können wir uns vorstellen, dass der Stab überhaupt nicht eingeklemmt ist, sondern nur auf zwei Stützen ruht, welche Stützen an zwei Stellen zu denken sind, die zwischen den sonst ganz freien Enden des Stabes liegen. Daher sind es drei Hauptfälle, welche man bezüglich der Suspendirung des Stabes zu unterscheiden pflegt, nämlich

erster Fall: nur ein Ende fest,
zweiter „ zwei Enden fest,
dritter „ beide Enden frei.



(Ph. 221.)

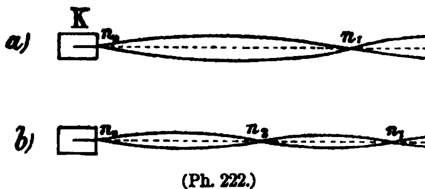
4) Beachten wir wiederum die Fig. 221 a, so stellt die Contour $\alpha\beta\gamma\delta$ den rechteckigen Querschnitt des Stabes S dar, so, dass $\alpha\beta = \gamma\delta$ seine Breite und $\alpha\delta = \beta\gamma$ seine Dicke bedeutet. Falls wir auf den freien Theil des Stabes, insbesondere also auf das freie Ende desselben, einen vertikalen Druck nach unten ausüben, biegt sich der Stab und nimmt eine durch Fig. 221 b versinnlichte Gestalt an. Bei dieser Gestaltveränderung wird einleuchten, dass die Moleküle der obersten Fläche des Stabes weiter auseinander gezogen, dagegen die der untersten Fläche näher zusammengedrängt werden. Allgemein aber wird das Auseinanderziehen von oben nach unten gerechnet, von Schicht zu Schicht mehr in ein Zusammendrängen der Moleküle übergehen, woraus nothwendig folgt, dass eine Zwischenschicht existirt — wir sehen sie in der Fig. 221 b gestrichelt angedeutet — in welcher die Moleküle in ihrer ursprünglichen Entfernung verblieben sind. Oberhalb dieser Schicht existirt also Dilatation unterhalb Compression. Beides wirkt im selben Sinne zusammen, um die ursprüngliche Form des Stabes wiederherzustellen. Die Kräfte werden hierbei die Moleküle in ihre Ruhelage mit Beschleunigung zurücktreiben, aber dann auch nach entgegengesetzter Richtung weiter über diese Ruhelage hinausbringen, so dass der Stab auch eine Biegung nach Oben erleidet. Man begreift demgemäss, wie ein solcher Stab, der aus seiner Ruhelage herausgebogen wurde und dann sich selbst überlassen wurde, in regelmässige stehende Schwingungen geräth, die sich auf die umgebende Luft übertragen, hier als Longitudinalwellen, als Verdichtungen und Verdünnungen weiter ziehen um schliesslich das Trommelfell unseres Ohrs wieder in eine stehende Transversalbewegung zu versetzen, welche dann die nähere Quelle einer Tonwahrnehmung wird, sobald wir eben voraussetzen, dass das Tempo der ursprünglichen Schwingungen des Stabes schnell genug ist.

Man pflegt eine solche Schwingung eines Stabes seine »Grundschwingung« zu nennen, indem man bald die Ueberzeugung gewinnt, dass auch noch weitere

Schwingungen des Stabes möglich sind. Fig. 222 versinnlicht schematisch die zweite und dritte weitere Schwingungsart, wobei man dann allgemein den Ausdruck »Partialschwingung« oder »Oberschwingung« gebraucht, so dass die Grundschwingung auch als die erste Partial- oder Oberschwingung anzusehen ist.

5) Die Transversalschwingungen der Stäbe, wie überhaupt der festen Körper, verdanken offenbar der Elasticität, welche man, ihrer Wirkung entsprechend, auch »Biegungselasticität« zu nennen pflegt, ihre Entstehung. Denn Biegungen kommen bei all diesen Schwingungen in Betracht. Die theoretische Behandlung dieser hierher gehörigen Erscheinungen liegt demgemäss auf dem Gebiete der Elastitätslehre. Bedeutende Forscher waren es, welche das Problem der Transversalschwingungen der Stäbe einer theoretischen Untersuchung unterwarfen, und müssen hier vor allen Dan. Bernoulli, Euler, Poisson, Cauchy und besonders Seebeck jun. genannt werden. Die Resultate, welche der letztere Forscher bei seiner berühmten Untersuchung: »Ueber die Schwingungen gespannter und nicht gespannter Stäbe« im Jahre 1848 in den »Berichten der Königl. sächsischen Gesellsch. der Wissensch.« veröffentlichte, sind es in der Regel, welche bei den Darstellungen in den Lehrbüchern über Physik und speziell über Akustik herangezogen werden, und wollen auch wir jetzt unsere nächsten Betrachtungen an diese Seebeck'sche Arbeit anschliessen, wenn wir auch in der Darstellung selbst unseren besonderen Gang einschlagen.

Bei allen schwingenden Körpern, die Töne liefern, ist und bleibt die Hauptfrage: wie viel Schwingungen diese Körper in der Zeiteinheit der Sekunde machen? also: wie gross deren Schwingungszahl N ist? Denn hiervon hängt ja die Tonhöhe ab, das Hauptelement beim Schall, bei der Musik. Mit dieser Frage direkt im Zusammenhang steht dann die weitere Frage: welches Gesetz befolgen die Schwingungszahlen der Partialtöne, d. h. derjenigen Töne, welche ein schwingender Körper liefert, der nach einander seine Partialschwingungen macht? Eine dritte Frage bezieht sich auf die Form-, auf die Gestaltänderungen, welche der schwingende Körper bei seinen Schwingungen erleidet. Mit letzterem hängt eine grosse Mannigfaltigkeit der merkwürdigsten Erscheinungen zusammen, die recht eigentlich im Stande sind, den Laien wie den Fachmann zu fesseln und braucht hier nur auf die Chladni'schen Klangfiguren aufmerksam gemacht zu werden.



(Ph. 222.)

Indem wir zunächst einmal den Formveränderungen eines schwingenden Stabes unsere Aufmerksamkeit schenken, wird es nöthig sein, wieder unsere Fig. 222 zu beachten. Es ist durch sie dargestellt, wie der schwingende Stab sich bis zu zweien, symmetrisch zu seiner Ruhelage erscheinenden Grenzlagen entfernt, indem er immer von einer Grenzlage aus zur andern hinschwingt. Hierbei leuchtet ein, dass die Stelle n_0 des Stabes eine Ruhestelle sein muss, weil wir ja annehmen, der Stab sei fest eingeklemmt. Aber auch noch andere Stellen giebt es, in denen der Stab während der Schwingungen die Ruhelage nicht verlässt und pflegt man diese Stellen, wie wir schon im Artikel über »allgemeine Wellenlehre« gesehen haben, »Knoten« zu nennen. Nach der Seebeck'schen Theorie ergiebt sich die Lage dieser Knoten aus folgender Tabelle, wobei vorausgesetzt wird, dass man die freie Länge des Stabes als 1 rechnet und dass man ferner die Knoten vom freien nach dem festen Ende hin zählt.

Partialton	Knoten					
	1 ter	2 ter	3 ter			k ter
1	1·000					
2	0·226	1·000				
3	0·132	0·500	1·000			
4	0·094	0·356	0·644			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
i	$\frac{1·322}{4i-2}$	$\frac{4·982}{4i-2}$	$\frac{9·007}{4i-2}$	⋮	⋮	$\frac{4k-3}{4i-2}$

Nach dieser Tabelle lässt sich leicht die Lage eines Knotens berechnen. Denn sollte z. B. die Lage des 4ten Knotens beim 5ten Partialton berechnet werden, so wäre im Ausdruck $\frac{4k-3}{4i-2}$ das $k=4$ und $i=5$ zu setzen, wonach man 0·722 erhält; ebenso würde für den 2ten Knoten des 5ten Partialtones im Ausdruck $\frac{4·982}{4i-2}$ das i gleich 5 zu setzen sein, um 0·277 zu erhalten, was auch nach der allgemeineren Formel $\frac{4\cdot k-3}{4\cdot i-2}$ für $k=2$ und $i=5$ erhalten wird.

Um ein Urtheil zu bekommen über die Längen der Strecken, welche vom ersten Knoten bis zum freien Ende hin liegen und solche, die zwischen je zwei Knoten zu liegen kommen, muss man die betreffenden Differenzen bilden, was zur Tabelle

Partialton	Schwingungsstrecken			
	1 te	2 te	3 te	4 te
1	1·000			
2	0·226	0·774		
3	0·132	0·368	0·500	
4	0·094	0·262	0·288	0·356

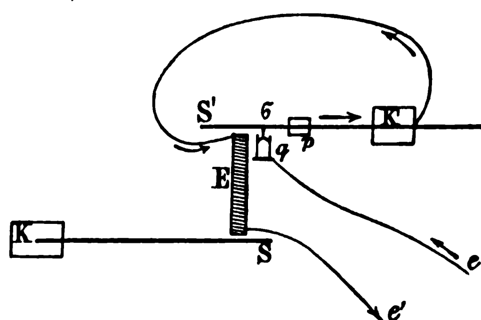
führt, welche beweist, dass zunächst die am freien Ende gelegenen Schwingungsstrecken sehr wesentlich kleiner sind als die ferneren und dass diese überhaupt nach dem festen Ende hin an Grösse zunehmen. Doch muss bemerkt werden, dass diese Zunahme immer geringer ausfällt, je höher die Ordnungszahlen i und k werden, und dass nach der SEEBECK-schen Theorie sich sogar wiederum eine kleine Abnahme bemerklich macht.

6) Es ist nun die Frage zu beantworten, wie man diese Schwingungsknoten ihrer Lage nach experimentell auffindet? Man erkennt sofort, dass, um einen Stab in seine Partialschwingungen zu versetzen, man nicht wohl durch ein einfaches Herabbiegen mit der Hand zum Ziele gelangt. Dies geht nur, falls die Grundschwingung eintreten soll. Im Uebrigen wendet man gemäss der Handhabung nach CHLADNI häufig einen Violinbogen an, mit dem man den Stab senkrecht zu seiner Länge an einer Seitenkante streicht. Die Stelle, über welche hin der Bogen geführt werden muss, richtet sich nach der betreffenden Partialschwingung, welche herausgebracht werden soll. Denn es ist einleuchtend, dass wenn z. B. die 3. Partialschwingung sich einstellen soll, man mit dem Bogen nicht gerade an einen der Knoten n_1 oder n_2, welche Stellen ja gerade Knotenstellen werden sollen, kommen darf. Es wird also in diesem Falle die Anstreichstelle etwas rechts oder links von einer solchen Knotenstelle zu wählen sein. Hierbei wird man aber sehr durch die Anwendung eines Mittels

Sand besteht. Sobald dieser auf die Oberfläche des Stabes gestreut wird, geräth er beim Anstreichen des letzteren in hüpfende Bewegung, um auf den Knotenstellen zur Ruhe zu kommen. Dieser hier liegen bleibende Sand kündet somit die Knoten an und wird man durch jenen bald belehrt, ob die Anstreichstelle die richtige war, oder ob sie besser gewählt werden muss. Auch hilft man sich hierbei noch dadurch, dass man mit einem Finger den Stab an einer vermeintlichen Knotenstelle unterstützt, wodurch es dem Stabe noch leichter gemacht wird, gerade in eine gewünschte Partialschwingung zu gerathen.

Ein zweites Hauptmittel, um solche Stäbe und viele andere tongebenden Körper zum Schwingen zu bringen, besteht in einem ebenfalls durch Chladni eingeführten dünnen Glasstäbchen, das man an passender Stelle senkrecht auf die Oberfläche des Stabes kittet und dieses dann mit nassen Fingern reibt. Das Stäbchen gelangt hierbei in Erschütterungen, die sich auf den Stab übertragen und ihn bald in regelmässige Schwingungen versetzen. Man nennt ein solches Stäbchen ein »Streichstäbchen«.

Ein drittes elegantes Mittel, um Stäbe in Transversalschwingungen zu versetzen, hat man in dem elektrischen Strom und einem durch ihn erzeugten Elektromagneten. Diese Methode soll hier in einer der vielfach möglichen Formen durch die Fig. 223 erläutert werden. S stellt den in der Klemme K festgeklemmten Stab vor, der eben in die gewünschte Schwingung versetzt werden soll. S' ist ein zweiter Stab oder eine Lamelle, die in K' festgeklemmt wird, jedoch so, dass nach Belieben ein längeres oder kürzeres Stück von S' als schwingend verwendet werden kann, was sich ja leicht durch eine Verschiebung in der Klemme K' machen lässt.



(Ph. 223.)

Bei σ trägt S' ein nach unten ragendes Platindrähtchen, welches dazu bestimmt ist, in ein Quecksilbernäpfchen q einzutauchen. E bedeutet einen mit Draht umwickelten, weichen Eisenkern. Der in der Richtung des Pfeils e von einer Batterie kommende Strom tritt zunächst ins Quecksilber in q ein, läuft, sobald S' ein wenig heruntergebogen wird, durch die Contaktspitze σ auf S' selbst, von hier dann in der Richtung der Pfeile weiter um den Eisenkern herum, um schliesslich in der Richtung e' zur Batterie zurückzukehren. Man weiss zur Genüge, wie eine solche Lamelle S' mittelst der Spitze σ geeignet ist, einen Stromschliesser und Stromunterbrecher zu bilden, wie hierdurch der Strom so oft hergestellt und unterbrochen wird, als S' eben Schwingungen in der Sekunde vollführt. Da hierbei in derselben Periode auch der Eisenkern E magnetisch und unmagnetisch wird, so wird durch den letzteren auch der Stab S in derselben Periode angezogen und frei gelassen, d. h. es kann auch S in dieselbe Anzahl Schwingungen wie S' gerathen. Die Bedingungen für das bestmöglichste Gelingen dieses Versuches werden bei einer andern Gelegenheit zur Sprache kommen. Für jetzt wollen wir nur folgendes beachten. Gesetzt: die 3te Partialschwingung von S liefere 120 Schwingungen Um diese durch die Schwingungen von S' mittelst des Elektromagneten E hervorzurufen und möglichst stark zu erhalten, muss man

es dahin zu bringen suchen, dass S' ebenfalls 120 Schwingungen vollführt. Durch Sandaufstreuen auf S, durch Reguliren der Länge von S' vielleicht auch durch Anwendung eines auf S' zu verschiebenden Laufgewichtes p wird man bald zum gewünschten Ziele gelangen.

7) Unsere weitere Betrachtung gelte der Anzahl der Schwingungen bei Stäben, die an einem Ende fest, am anderen frei sind. Was diese Schwingungszahl N anlangt, so leuchtet ein, wie bei ihr, falls sie auf theoretischem Wege bestimmt werden soll, ein Ausdruck für die Kraft gewonnen werden muss, welche als beschleunigende Kraft die Schwingungen unterhält. Hierbei werden vor allem drei Dinge mitzureden haben, nämlich erstens die Dimensionen des Stabes, zweitens das Material desselben und drittens die Ordnungszahl des betreffenden Obertons, da ja letztere Grösse die Länge der Schwingungsstrecken bestimmt, von denen wiederum die Wirkung der elastischen Kräfte abhängig sind. Eine weitere Grösse ist der »Elasticitätsmodulus«, der ja überall bei den Erscheinungen der Elasticität in Betracht kommt. Da diese Grösse in Kilogrammen ausgedrückt wird und der Zug, den die Masse eines Kilogramms ausübt, also überhaupt auch der Elasticitätsmodulus von der herrschenden Schwerkraft abhängig ist, so leuchtet ein, wie auch die Zahl g, oder die Beschleunigung durch die Schwere von Einfluss sein muss. Die Dimensionen des Stabes betreffend überzeugt man sich bald, dass eine Dimension, nämlich die Breite des Stabes, ohne Einfluss ist. Denn denken wir uns einen Stab, wie er zunächst vorliegt, doppelt so breit, so müssen wir, um den Stab in derselben Weise wie den einfachen zu biegen, unzweifelhaft die doppelte Kraft anwenden. Lassen wir aber den gebogenen Stab jetzt los, so wird er im selben Tempo hin und herschwingen wie der einfache. Denn es bewegt ihn zwar eine doppelt so grosse Kraft, die bei der Biegung ihm ertheilt werden musste, aber die Masse, die jetzt in Bewegung zu setzen ist, ist auch doppelt so gross geworden, so, dass das Schwingungstempo dasselbe bleibt. Es werden daher nur die Länge und Dicke des Stabes bei der Zahl N eine Rolle spielen. Alle diese Grössen: Länge, Dicke des Stabes, ferner specifisches Gewicht desselben, sein Elasticitätsmodulus, Beschleunigung durch die Schwere, sind bei einem bestimmt ins Auge gefassten Stabe Constanten, daher wird in einem Ausdruck für die Schwingungszahl N das Zusammenwirken dieser Constanten sich nothwendig auch wieder in einer Constanten zu erkennen geben. Bezeichnen wir diese mit K, so wiess SEEBECK nach, dass

$$N = \varepsilon_i^2 \cdot K$$

sein müsse, wenn unter ε auch ein Zahlenwerth verstanden wird, der von der Ordnungszahl i der betreffenden Partialschwingung, welche letztere man eben ins Auge fasst, abhängt. Die Constante K dagegen wird im Ausdrucke für N als

$$K = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{d}{L^2} \sqrt{\frac{E \cdot g}{s}}$$

erhalten. In ihm bedeutet π die bekannte Zahl 3·1415 . . . welcher Werth mit dem im Nenner vorkommenden Produkt $4\sqrt{3}$ zusammengefasst eine Zahlenconstante 0·4535 liefert. Wollen wir für g einen mittleren Werth in Millimetern gleich 9810 *mm* einführen, so kann auch $\sqrt{9810}$ noch mit dem schon erhaltenen Zahlenwerth zusammengefasst werden, um die Zahl 44·91 zu erhalten. Noch muss dann erwähnt werden, dass E in Kilogrammen und s in gewohnter Weise zu denken ist, d. h. bei Stahl $E = 20000$ und $s = 7{\cdot}8$. Die Dimensionen d und L müssen beide in Metern ausgedrückt angenommen werden.

Was nun die Grösse ε anlangt, so hängt ihr Werth von der Ordnungszahl i der Partialschwingung ab. Nach SEEBECK kommt hierbei folgender Zusammenhang in Betracht.

Partialton	ε	$\frac{2i-1}{2}$
1	0·5969	0·5000
2	1·4942	1·5000
3	2·5003	2·5000
.	.	
.	.	
.	.	
i	$\frac{2i-1}{2}$	

Man erkennt hieraus zunächst folgende bemerkenswerthe Thatsache. Der Werth der Grösse $\frac{2i-1}{2}$ ist, vom 3. Partialton an gerechnet, identisch mit ε, so dass von diesem Tone an die Schwingungszahlen wachsen wie die Quadratzahlen von $\frac{2i-1}{2}$, d. h. wie
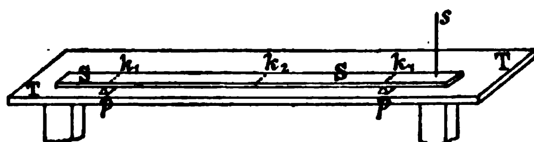
$$5^2 : 7^2 : 9^2 \ldots$$

Setzen wir voraus ein freischwingendes Stück eines Stahlstabes von 1 *m* bei einer Dicke von 0.01 *m*, so werden die Schwingungszahlen nach der Formel

$$N = 44{\cdot}91 \cdot \varepsilon_i^2 \cdot \frac{0.01}{1^2} \sqrt{\frac{20000}{7{\cdot}8}} = 22{\cdot}75 \cdot \varepsilon_i^2,$$

zu berechnen sein, wobei man folgende Werthe erhält:

i	N
1	8·08
2	50·70
3	142·16
4	278·63
5	460·60.



(Ph. 224.)

8) Hiernach können wir dem unter 3 bezeichneten dritten Falle, wobei ein Stab an beiden Enden frei ist, noch einige Aufmerksamkeit schenken, insbesondere weil auch dieser Fall in der Praxis von Bedeutung ist, indem Stäbe mit beiderseits freien Enden bei der Construction von musikalischen Instrumenten Verwendung gefunden haben. Die Art der Festmachung oder Festlegung solcher Stäbe kann durch eigentliche Klemmen nicht wohl erreicht werden, vielmehr legt man die Stäbe auf passende Unterlagen, die in entsprechend zugeschnittenen Korkstücken, Gummischlauchstücken, Filzstücken oder ausgespannten Fäden bestehen können. Die ganze Anordnung nimmt sich dann so aus, wie in Fig. 224. Auf einem Tische T werden zwei, oben in einer Kante endigende Korke p gesetzt auf welche dann in möglichst horizontaler Lage der Stab aufgelegt wird. Am rechten Ende ist senkrecht zum Stabe das Streichstäbchen s aufgekittet, das namentlich auch bei Stäben mit zwei freien Enden zum Zwecke der Tonerregung seine Verwendung finden kann. Soll eine bestimmte Partialschwingung möglich werden, so leuchtet ein, dass demgemäss die Füsschen p richtig gesetzt sein müssen. Um dies fertig zu bringen, streut man wiederum völlig trocknen Sand auf die völlig trockene Oberfläche des Stabes und streicht mit nassen Fingern das Stäbchen s an. Sitzen die Füsse richtig, so wird ohne Schwierigkeit der betreffende Ton sich hören lassen und wird der Sand an den betreffenden Knotenlinien sich legen; wo nicht, so wird man an der Lage der Füsse zu ändern haben, bis man eben sofort den betreffenden Ton und den Knoten erhält. In der Fig. 224 ist ange-

nommen, dass man den zweiten Partialton haben wolle, dementsprechend treten drei Knoten auf, nämlich zwei als gleichartig anzusehende Knoten k_1 in der Entfernung 0·132 vom freien Ende und ein dritter, in seiner Art nur einmal vorhandener Knoten k_2 in der Mitte des Stabes. Man wird unschwer erkennen, dass bei solchen Stäben für jede Partialschwingung die Knotenfigur stets eine zur Mittellinie des Stabes systematische sein muss. Der Grundton zeigt zwei Knoten, der nächste Oberton drei u. s. w.; die ungeradzahligen Partialtöne haben eine gerade Anzahl Knoten, ohne dass ein solcher in der Mitte des Stabes auftritt, die geradzahligen dagegen eine ungerade Zahl von Knoten und zwar mit einem in der Mitte.

Die Tabelle für die Lage der Knoten ist nach der SEEBECK'schen Theorie folgende:

Partialton	Knoten				
	1	2	3		k
1	0·224				
2	0·132	0·500*			
3	0·094	0·356			
4	0·073	0·277	5·000*		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
i	$\frac{1{\cdot}322}{4i+2}$	$\frac{4{\cdot}982}{4i+2}$	$\frac{9{\cdot}000}{4i+2}$	………	$\frac{4k-3}{4i+2}$

Die Tabelle für die Längen der Schwingungsstrecken berechnet sich hiernach wie folgt:

Partialton	Schwingungsstrecke				
	1	2	3	4	
1	0·224	0·552*			
2	0·132	0·368			
3	0·094	0·262	0·288*		
4	0·073	0·204	0·223		
.	.	.	.		
.	.	.	.		
.	.	.	.		

Bezüglich dieser beiden Tabellen muss noch erwährt werden, dass die Zahlen, die mit einem Sternchen versehen sind, Knoten und Schwingungsstrecken bedeuten, welche als solche nur einmal auf der Länge des Stabes vorhanden sind, während alle anderen Zahlen je zwei Knoten bezw. Schwingungsstrecken derselben Art anzeigen.

In ganz derselben Form wie oben liefert die SEEBECK'sche Theorie den Ausdruck für die Schwingungszahl N, nur besteht ein Unterschied in den Werthen i. Wir geben sie in folgender Tabelle, deren Verständniss nach den oben gemachten Bemerkungen sofort möglich ist.

Partialton	ε	$\frac{2i+1}{2}$
1	1·5056	1·5000
2	2·4998	2·5000
3	3·5000	3·5000
.	.	
.	.	
.	.	
i	$\frac{2i+1}{2}$	

$$7^2 : 9^2 : 11^2 \ldots$$

Für einen 1 *m* langen und 0·01 *m* dicken Stab berechneten sich die Schwingungszahlen wie folgt:

i	*N*
1	51·60
2	142·1
3	278·7
4	460·6
5	688·1

9) Indem wir uns auf die beiden im Vorausgehenden betrachteten Fälle beschränken, können wir nunmehr eine Reihe von Gesetzen aussprechen, deren Begründung in den mitgetheilten Formeln gelegen ist.

1) »Bei schwingenden und tönenden Stäben hat die Breite derselben keinen Einfluss.

2) »Die Schwingungszahlen der aufeinander folgenden Partialtöne befolgen nicht das Gesetz der natürlichen Zahlen 1 : 2 : 3 sondern stehen in complicirteren Verhältnissen.

3) »Sieht man bei der 1. und 2. Partialschwingung von einer eigentlich bestehenden Abweichung ab, so verhalten sich die Schwingungzahlen wie die Quadrate von $(2i - 1)$ beim ersten und wie die Quadrate von $(2i + 1)$ beim dritten Fall, im ersten Falle also wie

$$1^2 : 3^2 : 5^2 : 7^2 \ldots$$

im dritten wie

$$3^2 : 5^2 : 7^2 : 9^2 \ldots$$

4) Die Schwingungszahlen der entsprechenden Partialtöne zweier Stäbe von ungleicher Dicke bei gleicher Länge verhalten sich direkt wie die Dicken.

5) »Die Schwingungszahlen der entsprechenden Partialtöne zweier Stäbe von ungleicher Länge, bei gleicher Dicke, verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Längen.

6) Die Intervalle zweier aufeinander folgender Partialtöne werden um so kleiner, je höher die Ordnungszahlen dieser Töne sind.

10) Ausser den Stäben mit rechteckigem Querschnitt kommen häufig auch solche mit kreisförmigen in Betracht. Sie unterscheiden sich von den ersteren nur dadurch, dass anstatt der Dicke d jetzt $\frac{d\sqrt{3}}{2}$ in die oben mitgetheilte Formel für die Schwingungszahlen einzusetzen ist, falls d den Durchmesser des kreisförmigen Querschnitts bedeutet. Bei einem Stabe, dessen Durchmesser der Dicke eines rectangulären gleich ist, verhalten sich also die Schwingungszahlen des ersteren zu denen des letzteren wie $\frac{\sqrt{3}}{2} : 1$ d. h. wie 0·866 : 1.

Von besonderem Interesse sind noch die Schwingungen von Röhren und hat sich hiermit in rein experimenteller Weise HEUSER[1]) und in theoretischer Weise ELSÄSSER[2]) beschäftigt. Der Letztere hat in seiner Arbeit Formeln für die

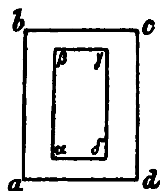
---

[1]) HEUSER, Chr. Th., »Ueber die Querschwingungen von Röhren«. Marburg 1884.

[2]) ELSÄSSER, W., »Ueber die Transversalschwingnngen von Röhren«. Marburg 1886.

Schwingungszahlen erhalten, welche hier mitgeteilt werden sollen. Die Röhren mit rectangulärem Querschnitt betreffend, wird vorausgesetzt, der Querschnitt entspräche der durch Fig. 225*a* dargestellten Form, so dass die Mittelpunkte des äusseren und inneren Rechtecks zusammenfallen. Bezeichnen wir dann die Seite $ab = cd$ mit d_1, $\alpha\beta = \gamma\delta$ mit d_2, die Seite $ad = bc$ mit b_1, die Seite $\alpha\delta = \beta\gamma$ mit b_2, so ist für diesen Fall:

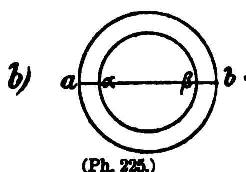
a)



$$N = \frac{\varepsilon_i^2 \cdot \pi}{4\sqrt{3}L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot g}{s}} \cdot \sqrt{\frac{d_1^3 b_1 - d_2^3 b_2}{d_1 b_1 - d_2 b_2}},$$

welcher Ausdruck, wie man sofort sieht, für $b_2 = d_2$ gleich Null, d. h. für einen massiven Stab, in unsere obige Formel auf pag. 713 übergeht. Bei den Röhren ist also die Thonhöhe nicht unabhängig von der Breite. Im Uebrigen muss das besondere Gesetz hervorgehoben werden, dass die Werthe von ε bei den Röhren für alle Fälle ihrer Suspendirung genau dieselben sind wie für die massiven Stäbe, dass ferner auch die Lage der Schwingungsknoten genau dieselbe ist wie bei den massiven Stäben.

b)



(Ph. 225.)

Für einen durch die Fig. 225*b* versinnlichten Querschnitt, also die gewöhnlich vorkommenden Röhren, wird

$$N = \frac{\varepsilon_i^2 \pi}{8 \cdot L^2} \sqrt{\frac{E \cdot g}{s}} \cdot \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

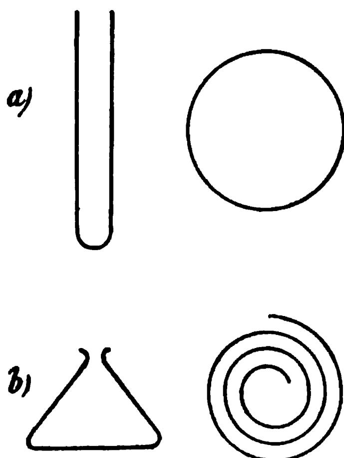
falls d_1 und d_2 die Durchmesser des äusseren und inneren Querschnitts bedeuten, welche Formel ebenfalls in die für einen massiven Stab vom Durchmesser d_1 übergeht, falls d_2 gleich Null gesetzt wird. Auch für solche Röhren gelten die unmittelbar vorher hervorgehobenen Gesetzmässigkeiten bezüglich der Werthe von ε und der Lage der Knoten.

Der Grund, weshalb die Röhren ein erhöhtes Interesse in Anspruch nehmen, liegt darin, dass man bei ihnen auch eine ganze Reihe interessanter Erscheinungen verfolgen kann, die eintreten, sobald namentlich pulverförmige oder tropfbar flüssige Körper im Innern der Röhre verwendet werden, wobei aber fast nur kreisförmige Glasröhren in Betracht kommen, weil man ja nur hier bequem ins Innere hineinsehen kann und Röhren mit rektangulärem Querschnitt nur mühsam aus Glasstreifen construirt werden müssen.

11) Unsere unter 2. gegebene Eintheilung der schwingenden Körper verweist uns jetzt auf die Untergruppe derjenigen linienförmigen Körper, die als krummlinige zu betrachten sind. Unendlich mannigfaltig können auch hier die Formen sein, da jeder irgendwie gebogene Stab in Transversalschwingungen versetzt werden kann. Man erkennt bei dieser unendlichen Mannigfaltigkeit, dass es sich wiederum um zwei weitere Untergruppen handeln kann, indem nämlich ein Stab sowohl einfache (ebene) wie doppelte (räumliche) Krümmungen erfahren kann. Mit den Schwingungen der Stäbe mit doppelter Krümmung, also z. B. mit den schraubenförmig gebogenen Stäben oder dickeren Drähten, sofern hierbei Töne entstehen, hat man sich überhaupt noch nicht beschäftigt und bleiben für uns jetzt nur die einfach gebogenen zu betrachten übrig, d. h. Stäbe, deren Mittellinie bei der Biegung in einer und derselben Ebene verbleibt. Auch hierbei kann wiederum eine unendlich mannigfaltige Formenverschiedenheit eintreten, aus welcher aber nur wenige Formen der praktischen Verwendung bezw.

der theoretischen und experimentellen Untersuchung bis jetzt anheimfielen. Diese Formen sind die »Stimmgabelform«, »Triangelform«, »Ringform« und »Spiralform« und sind diese Formen in Fig. 226 schematisch dargestellt.

Die Form *a*, die Stimmgabelform, ist allgemein bekannt, insofern als in ihr die »Stimmgabeln« erscheinen, die dann nur noch unterhalb der Biegung einen Stiel erhalten, um sie bequem handhaben zu können, bezw. um eine ins Schwingen gebrachte Gabel mit dem Stiele auf eine Tischplatte etc. aufzustemmen und so den Ton der Gabel durch Resonanz weiterhin hörbar zu machen. Eine solche Gabel kann, falls ihre Zinken lang genug sind, einige Partialschwingungen liefern. Bei den Stimmgabeln, wie sie in der musikalischen Praxis verwendet werden, ist es aber nur die Grundschwingung, welche zur Geltung kommt. Bei ihr schwingt die Gabel so, dass sie unten in der Biegung nahe an einander symmetrisch gegen ihre Mittelaxe zwei Knoten bekommt, denen gemäss dann die Biegungsstelle selbst incl. dem Stiele als eine Schwingungsstrecke zu betrachten ist.



(Ph. 226.)

Ferner muss darauf hingewiesen werden, dass bei diesen Schwingungen vorausgesetzt wird, sie fänden in der »Zinkenebene« statt. Die Gabel kann nämlich auch noch senkrecht zur Zinkenebene in Transversalschwingungen versetzt werden, von denen wir hier jedoch absehen wollen. Indem wir uns ferner nur auf die Grundschwingung der Gabeln beschränken, müssen wir uns bezüglich des Einflusses der Länge der Zinken, ferner bezüglich des Einflusses der Breite und Dicke derselben an die Untersuchungen MERCADIER's halten[1]. Hierbei zeigt sich, dass die Breite der Zinken kaum von Einfluss auf die Tonhöhe ist. Bezeichnet man ferner die Länge der Zinken mit L, ihre Dicke mit D, so ist die Anzahl der Schwingungen des Grundtons gleich

$$N = K \frac{D}{(L + y)^2},$$

wobei zu bemerken ist, dass wenn die Grössen D und L in Millimetern gemessen sind, zu L noch eine Constante $y = 3{\cdot}8$ *mm* hinzugefügt werden muss und ausserdem K eine Constante gleich 818270 bedeutet. Demgemäss würde eine Gabel von 100 *mm* Länge und einer Dicke von 5 *mm* einen Grundton $N = 379{\cdot}7$ geben.

Die Form Fig. 226 *b* beansprucht keine besondere Erörterung, denn der Triangel ist ein in der Musik ganz untergeordnetes Instrument, von dem kaum eine bestimmte Tonhöhe, sondern nur ein bestimmter Rythmus verlangt wird. Mehr Interesse, jedoch auch nur theoretisches, beanspruchen die Ringe Fig. 226 *c*, wobei wir annehmen, dass diese völlig in sich geschlossene sind. Offenbar kommen auch hierbei, ebenso wie bei den Stimmgabeln, zwei verschiedene Transversalschwingungen in Betracht: einmal solche, die senkrecht zu der Ringebene erfolgen und dann solche, die in der Ringebene stattfinden. Um die Transversalschwingungen in ersterem Sinne herauszubringen, muss der Ring auf Füsschen, ganz wie die Stäbe, aufgelegt und mittelst eines passend aufgekitteten

[1]) Comptes rendus: 1874, Bd. 79, pag. 1001—1005, 1069—1071 und 1876, Bd. 83, pag. 800—802, 822—824.

Streichstäbchens zum Tönen gebracht werden. Nun kommt hierbei ein Gesetz in Betracht, das bei allen geschlossenen Formen denselben Wortlaut besitzt und hier hervorgehoben werden muss. Wir erkennen nämlich leicht, und dies ist auch im Artikel über »Allgemeine Wellenlehre« klargestellt worden, dass bei den stehenden Schwingungen beiderseits eines Knotens die Theile eines schwingenden Körpers sich in entgegengesetztem Schwingungszustand, und zwar in jedem Momente befinden. Schwingt desshalb bei einer geschlossenen Form auf der einen Seite des Knotens eine Strecke nach oben, so schwingt sie im selben Moment auf der andern Seite vom Knoten nach unten und umgekehrt. Daraus folgt aber mit Nothwendigkeit, dass bei geschlossenen Formen nur eine gerade Zahl von Schwingungsknoten denkbar ist. Denn bezeichnen wir die nach oben schwingenden Schwingungsstrecken mit a, die nach unten schwingenden mit b, so ist die Reihenfolge der Schwingungsstrecken in Verbindung mit den Knoten z. B. folgende:

$$n_1\ a_1\ n_2\ b_2\ n_3\ a_3\ n_4\ b_1,$$

wobei die Strecke b_1 wiederum an n_1 anschliessen muss. Wollte man bei a_3 aufhören, so müsste sich diese Strecke a_3 an n_1 anschliessen und hätte man dann beiderseits von Knoten n_1 zwei Strecken a, was unmöglich ist. Hiermit sind aber auch dann drei Schwingungsknoten n_1, n_2, n_3 unmöglich. Es frägt sich weiter: welches denn die geringste Zahl der nur in gerader Anzahl vorkommenden Knoten ist. Man sollte erwarten, dass dies »zwei« wären, so dass bei einer geschlossenen Figur das Schema $n_1\ a_1\ n_2\ b_1$ passe. Diese Schwingungen sind jedoch nicht möglich und verhält es sich hierbei ähnlich, wie bei einem an beiden Enden freien Stabe, wo ja auch eine freie Schwingung mit nur einem Knoten in der Mitte des Stabes nicht vorkommt. Bei geschlossener Figur ist daher die geringste Zahl von Knoten vier und theilt sich demgemäss ein Ring, wenn er seine Grundschwingung vollführt, in vier völlig gleiche Schwingungsstrecken. Beim nächsten Partialton erscheinen sechs, beim nächsten acht Schwingungsknoten. Die betreffenden Töne verhalten sich aber nach CHLADNI wie

$$3^2 : 5^2 : 7^2 \ldots .$$

Die Spiralform Fig. 226*d* findet häufige Verwendung in der Praxis, insofern als ja die meisten Wanduhren mit Schlagwerk eine Spirale besitzen, welche in einem ihrer Transversaltöne die betreffenden Zeiten anzeigt. Meines Wissens hat man diesen Tönen noch keine Aufmerksamkeit, weder in theoretischer noch experimenteller Hinsicht, geschenkt, so dass sich für jetzt keine Gesetze über diese Töne mittheilen lassen.

12) Hiermit wenden wir uns zur zweiten Abtheilung der linienförmigen Körper: zu den Saiten. Diese sind es recht eigentlich, welche das Hauptinteresse in Anspruch nehmen, insbesondere desshalb, weil die Saiten, als die vollendetsten in der Musik zur Verwendung kommenden tongebenden Körper anzusehen sind. Denn wir brauchen uns nur den ganzen Chorus der Saiteninstrumente zu vergegenwärtigen, um sofort die Bedeutung der Saiten als tönende Körper im vollen Umfange zu erkennen.

Es fragt sich nun vor Allem, wo liegt die Grenze zwischen dem, was man eine Saite und dem, was man einen Stab zu nennen pflegt? Diese Grenze existirt in Wirklichkeit nicht, denn ein jeder Stab kann allmälig dünner und dünner gedacht werden, so dass er schliesslich, wegen seiner geringen Querdimensionen, eine Saite genannt wird, aber wo die Berechtigung hierzu anfängt, kann Niemand sagen. Das was wir zunächst bei den theor-

Untersuchungen eine »Saite« nennen, ist aber etwas ganz Bestimmtes und erst nachdem die Definition von dieser »theoretischen Saite« gegeben ist, wird man besser erkennen, dass in der Praxis zwischen Stäben und Saiten keine eigentliche Grenze existirt. Die theoretische oder wenn man will, die ideale Saite ist nämlich eine zusammenhängende Molekülreihe, deren Moleküle durch Kräfte zusammengehalten werden, aber so, dass, wenn diese Molekülreihe durch eine äussere Kraft eine Biegung erleidet, keine elastische Kraft einsetzt, um die Biegung wieder auszugleichen, und so die ursprüngliche Gestalt der Molekülreihe wieder herzustellen. Ein Körper, der dies thut, oder vielmehr ein Körper, von dem man annimmt, dass er dies thut, ist eine theoretische, ist eine ideale Saite. Eine solche Saite hat dann sofort die Eigenschaft, vermöge deren sie gestattet, alle möglichen Gestalten bei der Biegung anzunehmen und zu behalten. Denn, wenn wir ihr irgend eine ebene oder räumliche Krümmung ertheilt haben und dann die Saite sich selbst überlassen, so existiren — nach unserer Voraussetzung — keine in der Saite vorhandenen Kräfte, die die veranlassten Biegungen wieder ausgleichen, woraus folgt, dass die Saite das bleibt, wozu wir sie bei der Biegung gemacht haben. Man pflegt in Folge davon auch zu sagen, die theoretische Saite sei absolut biegsam. Nun denke man sich die feinste Claviersaite oder nehme einen Metalldraht, der noch viel feiner ist als die Saiten der Praxis, und werfe ihn beliebig auf einen Tisch; er wird irgend eine krumme Linie bilden; man wird diese krumme Linie ändern können, man wird versuchen können, den feinen Draht ganz in Form eines Kreises zu biegen, man wird ihn ganz in eine gerade Linie ausziehen können, aber wenn man mit der äusseren Einwirkung aufhört, werden die Formen, die man dem Draht zu geben beabsichtigte, nicht ganz verbleiben, sondern es wird der Draht von selbst wiederum aus der Kreisform bezw. der gradlinien Form heraustreten, um diese nur noch mehr oder weniger angenähert zu zeigen. Wenn ein so feiner Draht dies nicht gestattet, dann wird eine dickere Claviersaite es noch weniger thun, obwohl sie ebenso wie jener eine »Saite« genannt wird.

Nun wird man vielleicht sagen, dass an dieser Renitenz das Metall die Schuld trage, dass, wenn wir anstatt eines Metalldrahtes einen feinen Faden nehmen, dieser dann in allen ihm ertheilten Biegungsformen verbleiben könne. Dem ist nun in der That sehr nahe so. Ein Faden lässt sich mit der grössten Leichtigkeit in die mannigfaltigsten Formen biegen; aber wenn wir wiederum genauer zusehen, so werden wir erkennen, dass auch der feinste Faden eine ihm ertheilte Biegung, falls die äusseren Kräfte aufhören, nicht ganz beibehält. Demnach giebt es in Wirklichkeit keine ideale Saiten und je mehr ein Körper dem widerstrebt, eine ihm gegebene Biegungsform streng beizubehalten, desto mehr entfernt er sich von dem, was man in der Theorie eine Saite zu nennen pflegt, um sich demjenigen zu nähern, was wir bisher einen starren Stab nannten: der aufs genaueste, wenn er wenig gebogen war und sich dann selbst überlassen blieb, seine ursprüngliche Gestalt, mochte sie gradlinig oder krummlinig gewesen sein, wieder annahm.

Wir können daher von unserer idealen Saite anders ausgedrückt auch sagen, dass bei ihr keine elastische Kraft existire, welche bei einer Biegung der Saite und folglich auch bei den Transversalschwingungen derselben — denn hiermit sind ja stets Biegungen im Zusammenhang — eine Rückbewegung einleitet und unterhält. Da wir in den Formeln für die Transversalschwingungen der Stäbe eine Hauptgrösse fanden, die die Bedeutung und den Einfluss der Elasticität documentirte, nämlich den Elastici-

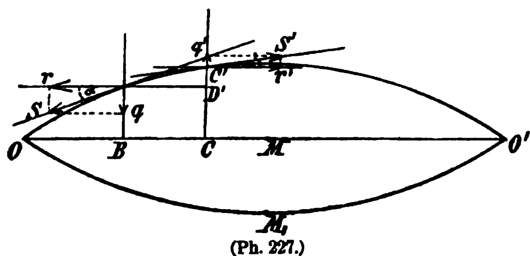
tätsmodulus, so werden wir jetzt bei den Formeln für die Transversalschwingungen vollkommener Saiten eine solche Grösse nicht antreffen.

13) Wenn nun die elastische Kraft im angegebenen Sinne gleich Null ist, so fragt es sich, welche Kraft unterhält denn die Transversalschwingungen? Diese Kraft ist das, was wir mit dem Namen »Spannung« bezeichnen; es ist das eigenthümlich Neue, welches bei den Saiten hinzukommen muss, damit eben die Schwingungen möglich werden, das eigenthümlich Neue das bei Stäben nicht nöthig ist, wesshalb CHLADNI diese beiden schwingenden Körper auch sehr treffend so zu unterscheiden pflegt, dass er sagt: die Saiten »würden erst durch Spannung elastisch, die Stäbe aber seien so wie so schon elastisch, sie seien durch innere Steifigkeit, durch innere Rigorosität elastisch.« Eine Saite muss also erst gespannt werden, und geschieht dies, wie man weiss, durch eine äussere Kraft, die sodann ihrer Stärke nach durch den Zug einer Masse nach dem Mittelpunkt der Erde hin, also kurzweg durch ein Gewicht gemessen wird. Denn, wenn wir mittelst eines Hebels, eines Wirbels, mit der Hand eine Saite spannen, so wissen wir sehr wohl, dass dieses Spannen auch so bewerkstelligt werden kann, dass man die Saite in vertikaler Lage unten mit einem Gewichte versieht, das eben gerade so schwer ist und der betreffenden Saite schliesslich gerade den Ton giebt, den wir ohne Gewicht mittelst der Drehung am Wirbel herausbrachten.

Durch diese Spannung werden die einzelnen Molekülschichten, die wir in jedem Querschnitt zu denken haben, weiter von einander entfernt und es wächst hiermit die zwischen diesen Schichten vorhandene Elasticität. Das Gebilde, welches ursprünglich keine elastische Kraft besass, hat sie jetzt bekommen und wird jetzt die Saite, falls sie aus ihrer Ruhelage, in der sie eine gerade Linie bildete, irgendwie heraustreten muss, diese Ruhelage sofort wieder zu erreichen bestrebt sein, wobei jedoch wegen der continuirlichen Wirkung der Spannung ein Hinauseilen über die Ruhelage, ein Wiederzurückkehren d. h. eine Schwingung eintritt, welche dann den vorhandenen Umständen gemäss längere oder kürzere Zeit bestehen bleibt.

Die Spannung, in der Regel mit P bezeichnet, wird daher bei den theoretischen und experimentellen Untersuchungen über Saitenschwingungen eine Hauptrolle spielen. Im Uebrigen leuchtet ein, dass wiederum die Dicke der Saite, oder vielmehr ihr Querschnitt Q von Einfluss sein muss, dass ferner ebenso wie bei Stäben auch die Länge L einer Saite und ebenso ihr specifisches Gewicht, mitzureden hat und dass schliesslich auch wiederum die Constante g, die Beschleunigung durch den Erdkörper, von Bedeutung sein muss aus demselben Grunde, den wir bei den Stäben hervorhoben.

14) Fig. 227 stellt in OMO' eine horizontal gespannte Saite im Sinne der Theorie dar. Die Spannung sei P, die Länge der Saite sei L, ihr Querschnitt gleich Q und ihr specifisches Gewicht gleich s. Wir nehmen an, diese Saite habe im Sinne der Figur eine Biegung erlitten, derzufolge sie in die Form $OB'C'O'$ gekommen sei, jedoch sei die faktische Biegung von der in der Figur gezeichneten sehr verschieden d. h. das wirkliche Heraustreten aus der Ruhelage



(Ph. 227.)

sei ein äusserst geringes, das gezeichnete aber sehr vergrössert, um eben eine deutliche Zeichnung für den Zusammenhang der Kräftewirkung zu erhalten. Die Biegung soll lediglich in einer Ebene erfolgen und zwar in der Ebene der Figur. Dann können wir auch ein in dieser Ebene liegendes Coordinatenkreuz X Y voraussetzen, wobei wir die X-Axe als mit OO' und die Y-Axe als hierzu senkrecht annehmen. Der Anfangspunkt des Coordinatenkreuzes liege in O. B stelle einen beliebig auf OO' gelegenen Punkt der Saite dar, dessen Coordinate OB gleich x sei. In unendlich kurzer Entfernung hiervon werde ein zweiter Punkt C gedacht, dessen Entfernung von B in der Figur auch wieder sehr bedeutend vergrössert angenommen wurde, während diese in Wirklichkeit nur gleich dx ist, so dass die X-Coordinate für C gleich $x + dx$ zu setzen ist. Die Y-Ordinaten sind für beide Punkte B und C gleich Null, gehen aber bei der Biegung, wobei B nach B' und C nach C' kommt in y und $y + dy$ über und sind ihrerseits ebenfalls als sehr klein zu denken. Es wäre demnach BC das, was man ein »Element« der Saite zu nennen pflegt, welches bei der Biegung zu $B'C'$ wird. Die Frage ist, was wird aus dem Zustand dieses Elementes, wenn die äussere Kraftwirkung, welche die Biegung hervorbrachte, aufhört? Vor allem beachte man Folgendes: Unzweifelhaft ist $B'C'$ bei der Biegung länger geworden wie BC. Daraus folgt, dass, wenn die Spannung in BC gleich P ist, sie in $B'C$ grösser sein muss. Da aber, wie schon hervorgehoben wurde, dies Heraustreten der Saite aus der Ruhelage äusserst gering sein soll, d. h. die Verlängerung der Saite nach der Biegung kaum merklich ist, so dürfen wir uns erlauben, die Spannung, die in $OB'C'O'$ thätig ist, ebenfalls noch gleich P anzunehmen. Denken wir nun in B' und C' weiter je eine Tangente an die gebogene Saite gezogen, so ist klar, dass das Element $B'C'$ durch die Spannung so beeinflusst wird, als zöge in B' die Kraft P in der Richtung der Tangente $B'S$ und in C' dieselbe Kraft P in der Richtung der Tangente $C'S'$ und nehmen wir in unserer Figur ferner an, dass $B'S' = C'S'$ selbst je gleich P sei. Für unsere weiteren Betrachtungen wollen wir durch B' sowohl wie durch C' zwei Gerade parallel der X-Axe legen und auch die Y-Axen der Punkte B und C über B' und C' entsprechend verlängern. Sofort sieht man, dass die Spannung P in B' unter dem Winkel α und in C' unter dem Winkel α' gegen die X-Axe geneigt ist. Indem wir ganz davon absehen, ob α' grösser oder kleiner wie α ist, kann dann für α' auch ein $\alpha + d\alpha$ gesetzt werden.

Zerlegen wir $B'S = P$ und $C'S' = P$ in die Componenten nach den Richtungen der Coordinaten, so sind diese Componenten

für B' gleich	für C' gleich
$B'r = -P \cdot \cos\alpha$	$C'r' = +P \cdot \cos\alpha' = +P\cos(\alpha + d\alpha)$
$B'q = -P\sin\alpha$	$C'q' = +P \cdot \sin\alpha' = +P\sin(\alpha + d\alpha)$.

Entwickeln wir rechts die Cosinus- und Sinusgrösse, so erhalten wir $(\cos\alpha \cdot \cos d\alpha - \sin\alpha \cdot \sin d\alpha)$ und $(\sin\alpha \cdot \cos d\alpha + \cos\alpha \cdot \sin d\alpha)$. Achten wir nun darauf, dass die Biegung äusserst gering ist, dass mithin α ein sehr kleiner Winkel ist und auch $d\alpha$ sehr klein ist, so dürfen wir $\cos\alpha$ und $\cos d\alpha$ gleich 1, ferner $\sin\alpha \cdot \sin d\alpha$ als Produkt zweier sehr kleiner Grössen gleich Null annehmen und für $\sin\alpha$ ein α, sowie für $\sin d\alpha$ ein $d\alpha$ setzen. Demgemäss werden die Componenten

für B' gleich	für C'
$-P$	$+P$
$-P\alpha$	$+P\alpha + P\,d\alpha$.

Wir erkennen, dass nunmehr die Kräftew
werden kann, als würde das Element $B'C'$ vo
$(-P\alpha)$ $(+P\alpha)$ und der allein im Sinne der
griffen. Das Kräftepaar $(-P)$ $(+P)$ hat zum
und $(+P)$ verlaufende Gerade, die gleich C
Kräftepaar das Drehungsmoment $P \cdot dy$ entste
Sinne der Zeiger der Uhr zu drehen be
$(+P\alpha)$ hat die Strecke $B'D' = dx$ zum Heb
tracht kommende Drehungsmoment gleich

Bogenmaass, wie es hier zu nehmen ist, sehr

auch das Moment vom zweiten Kräftepaar
dreht aber, wie man sofort erkennt, umgekeh
folgt nunmehr, dass die beiden Kräftepaare si
heben und somit nur eine Einzelkraft $P \cdot d\alpha$ üb
im Sinne der Y d. h. senkrecht zur Ruhelage
ferner, wie schon bemerkt, α gleich $\frac{dy}{dx}$ ferner
wird die das Element $B'C'$ bewegende Kraft

$$K = P \cdot \frac{d^2}{d}$$

zu setzen sein.

Bezeichnen wir ferner die Masse des E
schleunigung, welche die Kraft K im Sinne de
so ist

$$\varphi = \frac{K}{\mu}$$

Es ist aber φ auch gleich $\frac{d^2y}{dt^2}$; ferner, we
mit Q, das specifische Gewicht der Saite mit

$$\mu = \frac{Q \cdot s \cdot d}{g}$$

falls g die Beschleunigung durch den Erdkör

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{P \cdot d^2y}{dx} \cdot \frac{}{Q}$$

oder

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{P \cdot g}{Q \cdot s} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

als die aufzufindende Differentialgleichu
ergiebt[1]).

15) Indem wir die in der letzten Gleich
einer Constante α^2 zusammenfassen erhalten

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \cdot$$

und müssen constatiren, dass dies dieselbe Gl
für »allgemeine Wellenbewegung« bei den Tr
reihe erhielten. Es kann dies nicht anders se
es mit einer Punktreihe, mit einer Molekülr

---

[1]) Man vergl. hier auch insbes. die Arbeit A. Seeb
Abhl. d. Jablonowski'schen Ges. 1846.

Moleküle durch Kräfte bewegt werden, die ganz in derselben Weise wirken. Dort setzten wir von vornherein Elasticität voraus, hier kommt erst Spannung hinein, welche sodann gerade wie die Elasticität wirkt.

Die Integration dieser Differentialgleichung hat die bedeutendsten Mathematiker beschäftigt und ergiebt sich hiernach, dass das Problem der Saitenschwingungen ein schwieriges war. Zunächst war es D'ALEMBERT[1]), der sich damit beschäftigte, und folgten sodann EULER[2]), DAN. BERNOULLI[3]), LAGRANGE[4]). Die allgemeine Lösung des Problems wurde erhalten in der Gleichung

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(A_i \cos \frac{i \cdot \alpha \cdot \pi}{L} \cdot t + B_i \sin \frac{i \cdot \pi}{L} \cdot t \right) \sin \frac{i \cdot \pi}{L} x \quad \ldots\ldots (B).$$

Es bedeuten in ihr A_i und B_i Constanten, ferner i eine der ganzen Zahlen 1, 2, 3 ....; ferner L die Länge der Saite, die zwischen den beiden als fest anzunehmenden Endpunkten O und O' unserer Fig. 227 zu denken ist. Wir wollen nur den einfachsten Fall unserer Gleichung etwas näher betrachten, indem wir nämlich voraussetzen, es wäre $i = 1$ und $B_1 = 0$. Dies bewirkt, dass die Gleichung für y wird:

$$y = A_1 \cdot \cos\left(\frac{\alpha\pi}{L} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} \cdot x\right) \quad \ldots\ldots (C).$$

Sehen wir zunächst, ob diese Gleichung der Differentialgleichung (A) Genüge leistet. Differentiiren wir einmal, so erhalten wir:

$$\frac{dy}{dt} = -A_1 \cdot \frac{\alpha\pi}{L} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{L} \cdot t\right) \cdot \sin \frac{\pi}{L} x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -A_1 \cdot \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{L} \cdot t\right) \cdot \cos \frac{\pi}{L} x;$$

Differentiiren wir zum zweiten Mal, so ergiebt sich:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -A_1 \cdot \frac{\alpha^2\pi^2}{L^2} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{L} \cdot t\right) \cdot \sin \frac{\pi}{L} x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A_1 \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{L} \cdot t\right) \cdot \sin \frac{\pi}{L} \cdot x.$$

Diese Werthe der zweiten Differentialquotienten bestätigen die Zulässigkeit der Annahme der Werthe für i und B_i. Denn wenn wir $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit α^2 multipliciren, so ergiebt sich, dass unsere Gleichung (A) befriedigt ist. Die Gleichung (C) bildet demgemäss eine specielle Lösung des Problems, welche Speciallösung noch näher jetzt betrachtet werden soll.

a) Setzen wir $x = 0$, so wird für jedes t das $y = 0$. Dies beweist, dass der Punkt O, wie nicht anders zu erwarten war, während der Bewegung der Saite ein Punkt der Ruhe bildet.

b) Setzen wir $x = L$, so findet für den Punkt O' genau dasselbe statt.

c) Setzen wir $\frac{\alpha \cdot \pi \cdot t}{L} = \frac{\pi}{2}$ oder gleich $\frac{3\pi}{2}$ so wird der betreffende *Cos* gleich Null und hiermit y für jedes x gleich Null. Dies beweist aber nothwendig, dass die Saite für den Werth $t = \frac{L}{2\alpha}$ sowie für den Werth $t = \frac{3L}{2\alpha}$ mit allen ihren Punkten die Ruhelage passirt.

[1]) Mém. de l'Acad. de Berlin, 1747.

[2]) Ib. 1748 und Nov. Comm. Acad. Petrop. 1779.

[3]) Ib. 1753.

[4]) Miscellanea Societatis Taurinensis T. I. 1759.

d) Ausser den bis jetz
einzigen, der bewirkt, dass
ihrer Bewegung nur die
Knotenpunkte zwischen (

e) Für $t = 0$ und x gl

Maximalwerth. Der Mitt
Punkten am meisten nach

negativen hin, falls allgeme

f) Legt man dem t irg

eine Constante, für die wi
wird

was beweist, dass die Cu
einem Momente ihrer I
Construktion, wie bekannt,
Radius A^*_1 ist dann auch
Sinuscurve.

g) Somit ist die Beweg
die uns als die einfachste l
zeichneten äussersten Grenz
nach einer symmetrisch na
zur ersten Grenzlage zurück

h) Man nennt eine sol
die zugleich auch als die G

i) Die Saite hat alle

nommen innerhalb der Zeit

ihre möglichen Werthe ang

in welcher $\frac{\alpha\pi}{L} \cdot t$ seine We
die Zeit, in welcher dies
Gleichung

oder

gelten. Es war aber die (
demgemäss dann

wird.

k) Dieselbe Zeit T wi

$\frac{x\pi}{L} \cdot t$ von 2π bis 4π, von

ist eine volle Schwingun

»**Schwingungsdauer**« der Saite. Führen wir anstatt ihrer die »**Schwingungszahl**« N ein, so ist für T ein $\frac{1}{N}$ zu setzen, d. h. es ist

$$N = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P \cdot g}{Q \cdot s}} \; \ldots\ldots \; (D).$$

1) Diese Formel oder auch die vorausgehende für T ist eine höchst bemerkenswerthe und wurde sie bereits im Jahre 1717 von BROOK TAYLOR in seiner Schrift »Methodus Incrementorum Directa Et Inversa« in Propositio XXIII abgeleitet. Die Ueberschrift zu dieser Propositio lautet: »Datis longitudine (L) Nervi ejusdem pondere, et pondere tendente (P) inuenire tempus periodicum (T).« Man nennt daher diese Formel nach ihrem Autor stets die »TAYLOR'sche **Formel**«. Sie spielt in der Lehre vom Schall eine bedeutende Rolle, und werden wir ihr hernach auch noch weitere Aufmerksamkeit schenken.

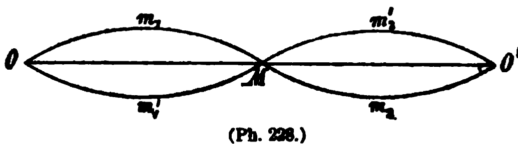
16) Legen wir in der obigen Fundamentalgleichung (C) dem i den Werth 2 bei und setzen auch jetzt wiederum voraus, es wäre $B_2 = 0$, so erhalten wir für y die Gleichung:

$$y = A_2 \cos\left(\frac{2\,\alpha\pi}{L} \cdot t\right) \sin\frac{2\pi}{L} x \; \ldots\ldots \; (E).$$

Hier wird nun nicht bloss für $x = 0$ und $x = L$, sondern auch für $x = \frac{L}{2}$ das y gleich Null. Daher hat die Saite bei ihrer Bewegung jetzt in der Mitte einen Knotenpunkt. Setzen wir ferner $t =$ Null so wird:

$$y = A_2 \sin\frac{2\pi}{L} \cdot x,$$

was beweist, dass auch jetzt auch die Saite in ihren Grenzlagen eine Sinuscurve bildet und dass sie dies, wenn t auch irgend einen andern constanten Werth t^* erhält, thut. Denn es wird dann stets $\cos\frac{2\,\alpha\pi}{L}\, t^*$ eine Constante, die mit A_2 zusammen eine neue Constante A^* liefert, so dass die gesammten Curvenformen auch jetzt Sinuslinien sind.



(Fig. 228.)

Sofort erkennt man auch, dass für diesen Fall die Zeichnung der Fig. 228 maassgebend ist. Für die Werthe $x = 0$ bis $x = \frac{L}{2}$ liefert die Gleichung den positiven, für $x = \frac{L}{2}$ bis $x = L$ den negativen Theil der Curve $O m_1 M m_2 O'$. Schwingt die eine Hälfte herunter, so schwingt die andere hinauf, so dass nach einer halben Schwingungszeit die Curve die Form $O m'_1 M m'_2 O'$ annimmt und von hier aus wieder der zuerst angenommenen Grenzlage zueilt.

Es ist sehr leicht zu erkennen, wie gross die Schwingungsdauer und die Schwingungszahl in unserem jetzigen Falle ist, in welchem die Saite, wie man weiss, ihre **zweite** Oberschwingung vollbringt. Denn einmal lässt uns die TAYLOR'sche Formel direkt erkennen, dass die Schwingungszahl jetzt doppelt so gross wie vorhin sein muss aus dem einfachen Grunde, weil unsere Saite der Fig. 228 gemäss so aufgefasst werden kann, als hätte man es mit zwei Saiten OM und MO' zu thun, von denen jede die halbe Länge wie bei Fig. 227 besitzt. Für L müssten wir dann in unserer Formel (D) ein $\frac{L}{2}$ einsetzen, was ein doppelt so

grosses N zur Folge hat. Das andere Mal gelangt man zum selben Resultat, wenn man die Cosinusgrösse in (E) beachtet und bemerkt, dass innerhalb der Zeit, in welcher $\frac{2\alpha\pi}{L}\cdot t$ die Werthe von 0 bis 2π annimmt, t den Werth

$$T_2^* = \frac{L}{\alpha} = L\sqrt{\frac{Q\cdot s}{P\cdot g}} \text{ und } N \text{ den Werth } \frac{1}{L}\sqrt{\frac{P\cdot g}{Q\cdot s}}$$

erreichen muss.

Man erkennt nun weiter, dass die ferneren Oberschwingungen eintreten, falls man $i = 3, 4, \ldots$ setzt, wobei dann 2, 3 ... Schwingungsknoten zu den beiden festen Endpunkten O und O' hinzutreten. Die Saite vollführt dann 3, 4 ... mal so viel Schwingungen wie bei der Grundschwingung.

Diese merkwürdigen Oberschwingungen der Saite liefern Töne, welche man ebenso wie bei andern schwingenden Körpern mit dem Namen »Obertöne« bezeichnet. Sie sind auch ihrer Tonhöhe nach vollkommen identisch mit dem, was man »Flageolettöne« zu nennen pflegt und spielen in der Lehre vom Schall eine wichtige Rolle. Der Umstand, dass die Schwingungszahlen der aufeinander folgenden Obertöne der Zahlenreihe 1, 2, 3, ... entsprechen, verlieh diesen Tönen auch noch die bestimmtere Benennung »harmonische Obertöne«. Die Rechtfertigung dieses Beiworts »harmonisch« liegt insbesondere in folgender merkwürdigen Erscheinung. Wir haben bis daher die Oberschwingungen oder Partialschwingungen bei Stäben, Stimmgabeln, Ringen und Saiten in der Weise auftreten und gelten lassen, dass eine jede solche Schwingung für sich allein bestehe, dass also z. B. die 4. Oberschwingung allein da sei. Ein an einem Ende fester Stab zeigt dann also auf seiner Länge zwei Schwingungsknoten, eine Saite theilt sich in drei gleiche Abtheilungen und zwei diese Abtheilungen begrenzende Schwingungsknoten. Es kann nun aber auch so kommen, dass zwei, drei und mehr Oberschwingungen zu gleicher Zeit sich einstellen, demgemäss zwei, drei und mehr Obertöne gleichzeitig wahrgenommen werden. Sobald dies der Fall ist, redet man von einem Zusammenklang und speciell von »Harmonie« in des Wortes eigentlichster Bedeutung, wenn eben dieser Zusammenklang von unserem Ohre speciell auch als »Wohlklang« erkannt wird. Da nun die Obertöne der Saiten sich wie

$$1:2:3:4:5:6 \;\ldots\ldots$$

d. h. wie

$$C:c:g:c':e'':g'' \ldots\ldots$$

verhalten, so erkennen wir sofort, wie zwei oder drei oder vier dieser Obertöne, wenn sie zusammen erklingen, eine »Harmonie« geben, wie insbesondere, wenn etwa der 4., 5. und 6. Oberton zusammenklingt, der Durdreiklang entsteht, wie ferner beim Zusammenklang je zweier aufeinanderfolgender Obertöne das Intervall der Octave, Quinte, Quarte, grossen Terz, kleinen Terz erscheint, welche Intervalle ja für unser jetziges Tonsystem die harmonischen Intervalle sind.

Wir werden im Artikel über den Zusammenklang der Töne diesem Gegenstande weitere Aufmerksamkeit schenken, und sehen desshalb für jetzt von diesen Obertönen ab, um uns sogleich noch weiter der TAYLOR'schen Formel zuzuwenden.

17) Die Formel (D) gestattet für die praktische Verwendung, bezüglich der Grössen Q und s, noch eine Umformung. Indem wir nämlich dem Produkt $Q\cdot s$ den Faktor 1 hinzufügen, stellt $1\cdot Q\cdot s = p^*$ offenbar das Gewicht der Längeneinheit der Saite dar, d. h. wenn die Länge der Saite in Millimetern

angegeben ist: das Gewicht eines Saitenstücks von 1 *mm* Länge. Die hiermit in Verbindung stehende Zahl wird gegenüber von P, wegen der Feinheit der Saiten eine sehr kleine sein, und führt man daher besser das Gewicht p der ganzen Saite ein, so dass für p^* ein p/L zu setzen ist, demgemäss dann die Formel (D) zu

$$N = \sqrt{\frac{P \cdot g}{4 L \cdot p}}$$

wird und wobei auch noch das $2L$ im Nenner vor dem Wurzelzeichen unter letzteres geschafft wurde. P und p werden am besten in Grammen ausgedrückt und zeigt sich nunmehr erst die merkwürdige Bedeutung der Formel darin, dass man die Tonhöhe einer Saite bestimmen kann mittelst eines Maassstabes (Grösse L) und einer Waage (Grösse P und p), indem g so wie so schon als 9810 *mm* bekannt angenommen werden soll. Es kommt demgemäss das Ohr gar nicht in Betracht. Die difficilste Grösse bei der praktischen Bestimmung von N ist die Grösse p, und geschieht ihre Bestimmung nur mit Hilfe einer feinen Waage. Soll der Versuch wirklich zu einem brauchbaren Resultate führen, so ist zu ihm ein allerdings schon etwas kostbarer Apparat nöthig, den wir in Fig. 229 abgebildet haben und der mit dem Namen des WEBER'schen Monochords allgemeiner bekannt ist[1]). Auf einem soliden hölzernen Dreifussgestell erheben sich die beiden vertikalen Ständer SS, welche oben durch das Querstück K verbunden sind. Zwischen SS verschiebt sich die starke Holzklemme M, die mittelst einer, auf der Rückseite des Apparats zu denkenden Klemmschraube in beliebiger Höhe fest gemacht werden kann. Mit M verbunden ist der Theil N, welcher seinerseits relativ gegen M durch die Schraube s bewegt werden kann. An N sitzt ferner eine in Metall gearbeitete Klemmvorrichtung, die zunächst in einem Sandsteinstück festgemacht ist, das seinerseits dann in N eingefügt ist. Die oberste Festklemmung der Saite geschieht mittelst einer einfachen, am Verbindungsstück K angebrachten Klemme. Von hieraus läuft die Saite zwischen zwei Metallhalbcylindern herab, welche die eigentliche Klemmvorrichtung in N bilden, indem die Halbcylinder durch eine Schraube zusammengeschraubt werden können und so die Saite zwischen sich absolut festklemmen. Eine ähnliche Klemmvorrichtung für die Saite befindet sich am unteren Verbindungsstück U der beiden Ständer. Soll eine Bestimmung der Schwingungszahl einer Saite vorgenommen werden, so macht man letztere zunächst am obersten Ende bei K fest, zieht sie durch die geöffneten Klemmen von N und U hindnrch und befestigt unten an ihr eine Wagschale, sodann corrigirt man an den drei Fussschrauben des Apparats der Art, dass die Saite, die schon durch die Waagschale ziemlich gerade gezogen ist, möglichst frei und central verläuft, legt dann



(Ph. 229.)

1) WEBER, POGG. Ann., Bd. XV. 1829.

noch auf die Wagschale so viel Gewicht, als man eben zur vollständigen und gewünschten Spannung nöthig hat und schliesst beide Klemmen in N und U. Die Saite ist dann unveränderlich, ohne Biegung und ohne Reibung in den Klemmen abgegrenzt. Die Länge des abgegrenzten Stückes wird an einem Maassstab abgelesen, der an einem der Ständer sich befindet. Hiermit ist L gegeben und auch P als das Gewicht der Wagschale + dem auf diese noch zugelegten Gewichte bekannt. Sodann wird die Saite erst unten unmittelbar an der Grenzstelle und dann oben ebenfalls unmittelbar an der unteren Fläche der Halbcylinder in N mit einem scharfen Messer abgeschnitten und mittelst einer freien Wage ihr Gewicht p bestimmt. Der Versuch ist dann fertig und braucht jetzt nur noch die einfache Ausrechnung der Schwingungszahl nach der zuletzt gegebenen Formel zu geschehen.

Nach der Taylor'schen Formel ist es auch sofort möglich, die bekannten Einzelgesetze der Saitenschwingungen, wie das »Spannungsgesetz«, das »Längengesetz« u. s. w. auszudrücken. Bezüglich des Längengesetzes muss man indess bei der zuletzt auf pag. 728 gegebenen Formel vorsichtig sein. Es könnte nämlich scheinen, als verhielten sich die Schwingungszahlen zweier ungleich langer, sonst aber völlig gleicher Saiten umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Saitenlängen, während die Formel (D) besagt umgekehrt wie die Saitenlängen selbst. Nun, der Grund für diesen Widerspruch ist leicht gefunden. In der letzten Gleichung, bei welcher L unter dem Wurzelzeichen steht, darf man nicht vergessen, dass im Faktor p auch noch ein L mitspricht, indem ja $p = p^{*} \cdot L$ ist. Für die Aufstellung der Einzelgesetze ist daher die Form der Gleichung (D) besser und erkennt man bei ihr, dass auch noch anstatt der Grösse Q zwei andere Grössen eingeführt werden können, wodurch die Formel für eine praktische Verwendung ebenfalls geeignet wird. Bezeichnen wir nämlich den Durchmesser der Saite mit d, so ist $Q = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$ und somit

$$N = \frac{1}{L \cdot d} \sqrt{\frac{P \cdot g}{\pi \cdot s}}.$$

Hiermit ist die Formel so geworden, dass man beim Versuche, die Zahl der Schwingungen zu bestimmen, die Benutzung einer feinen Waage zur Bestimmung von p nicht mehr nöthig hat.

Man erkennt ferner, dass der Nutzen der Taylor'schen Formel nicht etwa blos für Tonhöhenbestimmungen bei Saiten, sondern für alle tongebenden Körper besteht. Denn, sollte z. B. die Zahl der Schwingungen einer Stimmgabel bestimmt werden, so stimmt man mit ihr zunächst eine Saite unisono und wendet für letztere dann die Formel an.

18) Es ist bereits auseinander gesetzt worden, dass die Saiten, auch wenn sie fein sind, doch nicht genau der Theorie entsprechen, d. h. nunmehr einfacher ausgedrückt: doch nicht genau der Taylor'schen Formel folgen. Es fragt sich nun vor allem, wie werden denn die Abweichungen sein, bleiben die berechneten Schwingungszahlen unter den beobachteten oder sind sie letzteren gegenüber grösser? Diese Frage lässt sich sofort entscheiden. Wir haben bei unseren Saiten bis daher angenommen, sie hätten an und für sich gar keine Elasticität, welche die Biegung ausgleichen könne, und erst die hinzugebrachte Spannung vermöge dies. Daraus folgt aber sofort, dass, wenn die Saite nun doch eine gewisse Elasticität ursprünglich besitzt, diese sich in gleichem Sinne wie die Spannung äussern muss, so dass die Sache in Wirklichkeit so ist, als wäre die Saite stärker gespannt. Daraus folgt aber, dass die beobachteten Schwingungszahlen N^{*}

grösser ausfallen müssen wie die berechneten *N*. Um an einem bestimmten Beispiele zu erkennen, wie gross die Unterschiede sein können, benutzte ich eine 900 *mm* lange und schon ziemlich dünne Stahlsaite, deren Durchmesser gleich 0·41 *mm* war. Von dieser Saite grenzte ich am WEBER'schen Monochord nacheinander die fünf ersten Partiallängen mit 900, 450, 300, 225 und 180 *mm* ab und erhielt Resultate, die in folgender Tabelle zusammengestellt sind.

Ton	N^*	N	$N^* - N$	J	J^*	J^{**}
1	76	76	0	1·000	1·000	1·000
2	154	152	2	2·000	2·026	1·013
3	232	228	4	3·000	3·053	1·018
4	316	304	12	4·000	4·158	1·039
5	400	380	20	5·000	5·262	1·053

Es ist hierbei zunächst angenommen worden, dass beim Ton 1 beide Schwingungszahlen N^* und N denselben Werth hätten. Ferner bedeutet J das theoretische Verhältniss jedes folgenden Partialtons zum ersten, J^* dagegen dasselbe Verhältniss nach der Beobachtung. J^{**} ist das Verhältniss je eines beobachteten Ton zum je dazugehörigen berechneten. Man sieht, dass die Abweichungen der wirklichen Saite von der idealen bezüglich des Längengesetzes auffällig genug sind und dass selbst bei einer verhältnissmässig dünnen Saite die Hälfte nicht genau die Octave, das Viertel nicht genau die Doppeloctave geliefert hat. Wenn dieser Umstand schon bei einer dünnen Saite eintritt, so begreift es sich bei einer dickeren Saite noch mehr, dass ihre Hälfte, ihr Drittel u. s. w. keineswegs die genauen Intervalle 1 : 2 : 3 ... liefern.

Der Nachweis, dass die Saiten und zwar die feinsten Drähte und Fäden nicht ohne Biegungselasticität sind, lässt sich noch in anderer Weise führen. Wenn man nämlich ein immer kürzeres Stück eines solchen feinen Fadens abschneidet, so lässt sich schliesslich ein solches Stück wie ein Stab behandeln, indem man es an irgend einem andern schwingenden Körper, z. B. einer Stimmgabel, befestigt, welche beim Schwingen auch den Faden in eine Transversal-Wellenbewegung versetzt. Sehr gut eignen sich hierzu feine Glasfäden, und hat insbesondere VALERIUS[1]) nachgewiesen, dass solche Fäden so schwingen wie starre Lamellen, die an und für sich als Stäbe behandelt werden können. So zeigt z. B. ein Faden, der am Ende eines Stimmgabelzinkens so befestigt ist, dass die Schwingungen der Gabel sich senkrecht zur Länge des Fadens übertragen, vielleicht die Gestalt der Fig. 230 *a*, wobei vorausgesetzt wird, dass das linke Ende des Fadens an den horizontal zu denkenden Zinken einer Stimmgabel befestigt ist und hierbei, den Excursionen dieses Zinkenendes entsprechend, in einer kleinen Strecke $\alpha\beta$ einer geraden Linie hin und her geführt wird. Es bilden sich dann an diesem Faden, der nach rechts hin frei ist, falls eben seine Länge und Dicke dem Tone der Stimmgabel gerade entspricht, in n_1 und n_2 zwei Knoten, genau so wie bei einem Stabe, der an beiden Enden frei ist. Heftet man sodann von demselben Faden an eine andere Gabel, welche 4 mal so viel Schwingungen macht wie die erstere, ein Stück desselben Fadens, welches halb so lang als der erste Faden ist, so zeigt es sich beim Schwingen der Gabel

a)



b)



(Ph. 230.)

[1]) POGGENDORFF's Annal., Bd. 129 (1866), pag. 308—330.

in der Gestalt Fig. 230*b* und lässt sich erkennen, wie jetzt die Abtheilung $n_1' n_2'$ halb so gross ist wie $n_1 n_2$ ganz entsprechend dem Gesetze bei Stäben, wonach die Schwingungszahlen sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der entsprechenden Schwingungsstrecken. (Vergl. Gesetz 5 im Abschnitt 9 dieses Art.)

19) Wir wenden uns nun zu der zweiten Hauptabtheilung der tönenden Körper, nämlich zu den »flächenförmigen« Körpern. Auch hier ist wiederum zu unterscheiden, ob diese Körper durch innere Rigorosität oder durch Spannung befähigt sind bezw. werden, um eben schwingen und tönen zu können. Zu der ersteren Unterabtheilung gehören die »Klangscheiben«, und wollen wir zunächst die ebenen Klangscheiben betrachten. Da uns bei diesen Scheiben der Name CHLADNI in erster Linie begegnet, in so fern, als man dem Forscher CHLADNI so ziemlich alles zu verdanken hat, was man im grossen und ganzen bis jetzt von den Schwingungen dieser Scheiben weiss, so pflegt man diese auch entsprechend die »CHLADNI'schen Klangscheiben« zu nennen[1]).

Gerade wie alle starren Körper verlangen auch die Scheiben, wenn sie schwingen, wenn sie tönen sollen, eine entsprechende Festklemmung bezw. Auflage, wobei stets wieder der Hauptgrundsatz beachtet werden muss, dass, wenn man eine bestimmte Partialschwingung haben will, man nur an solchen Stellen klemmen oder unterstützen darf, welche eben bei dieser Partialschwingung Knotenstellen, Ruhestellen werden. Wie man die Suspendirung bei bestimmten Fällen nun wirklich vornimmt, wird sich im folgenden nach verschiedenen Richtungen hin ergeben.

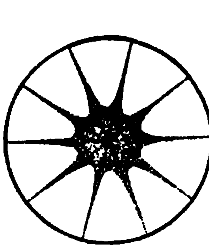
Als Material der Scheiben kann sehr verschiedenes in Betracht kommen. CHLADNI selbst verwendete fast ausschliesslich Glas. Später benutzte man meistens Metallscheiben. In beiden Fällen ist es nicht leicht, tadellose Scheiben zu erhalten, da weder Glas noch Metall Scheiben anzufertigen gestattet, die durchweg von gleicher molekularer Beschaffenheit sind. Bei bestimmten Fragen muss man aber geradezu ein Material verwenden, welches vielleicht nach zwei zu einander senkrechten Richtungen auffällige Verschiedenheiten zeigt. Es kann hierbei sehr wohl feinfaseriges Resonanzholz zur Verwendung kommen. Für eine andere Frage ist es wichtig, ein Material zu verwenden, welches leicht Flüssigkeiten aufsaugt, aber möglichst überall gleiche molekulare Beschaffenheit zeigt und behält. Man kann in diesem Falle vor allem Gypsscheiben verwerthen.

Die allgemeine Erscheinung, die wir nun bei solchen Scheiben zu erwarten haben, besteht in den »CHLADNI'schen Klangfiguren«, deren Entdeckung ein interessantes Beispiel davon liefert, wie plötzlich Ideencombinationen entstehen, die nach zwei Richtungen hin zu den merkwürdigsten Dingen führten. Jedermann kennt die hochinteressanten elektrischen Figuren, welche man unter dem Namen der »LICHTENBERG'schen Figuren« bei den Vorlesungen über Reibungselektricität darzustellen pflegt. Viele Zuschauer hatten diese Figuren, deren Entdeckung ins Jahr 1771 fällt, in Göttingen bei ihrem Entdecker LICHTENBERG gesehen und keinem war ein Gedanke gekommen, der zur Entdeckung der CHLADNI'schen Klangfiguren führen musste, bis eben CHLADNI selbst einmal Gelegenheit fand, einen Blick auf eine solche Scheibe, einen Harzkuchen, auf welchem LICHTENBERG seine Figuren hervorrief, werfen zu können. Bei CHLADNI, dessen Ideen sich zu jener Zeit wohl hauptsächlich auf dem Gebiete des Schalls bewegten, trat aber der Gedanke auf: ob nicht bei Scheiben, wenn man Sand darauf streue und sie zum Tönen brächte, auch Figuren entständen, wohl momentan hervor, und dieser

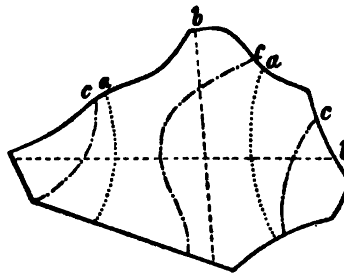
[1]) Siehe MELDE: »CHLADNI's Leben und Wirken«. 2. Aufl. Marburg, ELWERT 1888.

Gedanke machte ihn bald zum berühmten Entdecker der nach ihm benannten Klangfiguren.

20) Die erste von Chladni wahrgenommene Klangfigur ist in unserer Fig. 231 dargestellt. Sie bildete auf einer kreisrunden Scheibe einen 10 strahligen Stern, oder nach anderer Auffassung fünf Diameter. Es ist sehr erklärlich, wie mit diesem einmaligen Versuche ein weites Feld der theoretischen und experimentellen Forschung eröffnet war, ein Feld, das fast keine Grenzen hat, indem ja die zu wählenden Formen der Scheiben unendlich mannigfaltig sein können. Was die strenge mathematische Theorie betrifft, so ist sie wohl erst nur in wenigen Fällen dahin gelangt, Resultate zu liefern, die allseitig eine Anwendung auf das Experiment gestatten. Diese wenigen Fälle setzen möglichst einfache Figuren voraus und werden wir namentlich sehen, wie bei bestimmten Figuren, auf einer Kreisfläche erzeugt, die Theorie vollkommen befriedigende Resultate lieferte.



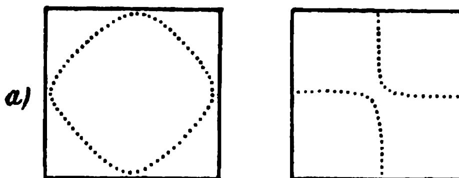
(Fig. 231.)

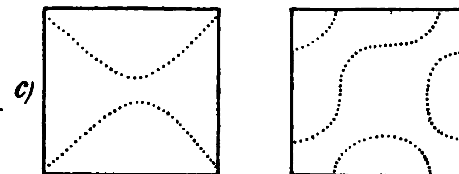


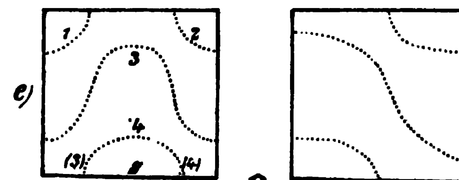
(Fig. 232.)

Zunächst muss eine Thatsache hervorgehoben werden, nämlich die, dass eine Scheibe, sie mag eine äussere Begrenzung haben wie sie will, ein System von regelmässigen Partialtönen liefert, denen entsprechend die Scheibe auch ganz bestimmte Klangfiguren zeigt. Fig. 232 mag diesen merkwürdigen Satz erläutern. Die Figur stellt auf einer sehr unregelmässig begrenzten Scheibe drei Klangfiguren dar, denen die Töne mit 242, 356 und 640 Schwingungen entsprachen. Der Einfachheit halber sind die drei verschiedenen Klangfiguren auf derselben Fläche verzeichnet, nämlich die Curven *a* (punktirt) *b* (gestrichelt) und *c* (gestrichelt punktirt). Die äussere, stärker gezeichnete Contour der Figur bedeutet die Umgrenzung der Scheibe.

Chladni wählte als Umgrenzungsform der Scheiben das Rechteck, das Quadrat, das Dreieck und das Sechseck, ferner den Kreis und die Ellipse. Wir werden uns hier zu beschränken haben auf einige Haupterscheinungen für quadratische und kreisförmige Scheiben. Fig. 233 versinnlicht nun die sechs verschiedenen Arten von Figuren, wie sie bei quadratischen Scheiben vorkommen und allein vorkommen können, nämlich:



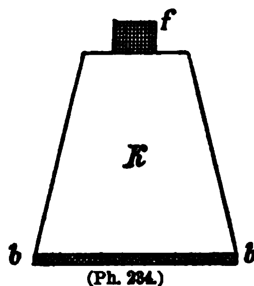




(Fig. 233.)

a) symmetrisch zu den beiden Diagonalen der Ecken und den beiden Diagonalen der Mitten der Seiten,
b) symmetrisch zu den beiden Diagonalen der Ecken,
c) symmetrisch zu den beiden Diagonalen der Mitten der Seiten,
d) symmetrisch zu einer Diagonale der Ecken,
e) symmetrisch zu einer Diagonale der Mitten der Seiten,
f) unsymmetrisch.

CHLADNI wandte zum Herausbringen einer bestimmten Klangfigur den Violinbogen an und strich an einer Stelle des Scheibenrandes, während er die Scheibe selbst zwischen dem Daumen und Zeigefinger der andern Hand festhielt. Es ist dies ein recht mühsames und für manchen auch geradezu unausführbares Geschäft, da selbst bei kleineren leichteren Scheiben zum Festhalten eine nicht geringe Kraft erforderlich ist. Man hat deshalb später eine besondere Klemme verwendet, in welcher die Scheibe an einer Stelle festgeklemmt werden kann. Hierbei muss jedoch wieder hervorgehoben werden, dass stets durch ein solches Einklemmen der Scheibe Gewalt angethan wird, der zu Folge auch bestimmte Aenderungen in der Lage einer Klangfigur eintreten müssen. Diese Gewalt vermeidet man aber auch durch einen ganz andern Modus der Unterstützung und Tonerregung. Die letztere betreffend verwende ich ein Streichstäbchen, welches je nach der Grösse und Masse der Scheibe seinen Dimensionen nach bald grösser bald kleiner sein kann, so dass man bald von einer zwei bis drei Millimeter dicken Glasröhre, bald von einem feinen, kaum ein halbes Millimeter dicken Glasfaden Gebrauch machen muss. Die Unterstützung einer Scheibe mache ich stets auf sogenannten »Füsschen«. Man stellt sie aus konischen Korkpropfen, *K* Fig. 234, her, welche oben noch je ein Stückchen dicken, steifen Clavierfilz *f* aufgeklebt erhalten und unten auf der breiteren Basisfläche mit Flanell *b* überzogen werden. Mit vier bis fünf solcher Füsschen, von denen Fig. 234 eines in natürlicher Grösse darstellt, reicht man aus, um eine grosse Anzahl von Klangfiguren sofort hervorzubringen. Soll dies wirklich geschehen, so sind zwei Regeln zu beachten, welche als Fundamentalregeln auch bei Stäben und allen tongebenden Körpern in entsprechend gleicher Weise gelten: nämlich erstens müssen die Füsse an solchen Stellen der Scheibe untergesetzt werden, durch welche Stellen voraussichtlich Knotenlinien der gewünschten Partialschwingung laufen, zweitens: das Streichstäbchen muss auf der Oberfläche der Scheibe senkrecht zu dieser an einer solchen Stelle aufgekittet werden, welche bei der betreffenden Partialschwingung ein Schwingungsfeld wird, indem wir unter einem »Schwingungsfeld« ein Flächenstück verstehen, welches eben von einer oder mehreren Knotenlinien bezw. von Knotenlinien und der äusseren Contur der Scheibe begrenzt wird. Nun würde man aber doch noch, wenn eine bestimmte Figur zu beliebiger Zeit wiederholt herausgebracht werden soll, bezüglich des Untersetzens der Füsschen sich immer wieder darüber im Ungewissen befinden, wo die Füsschen sofort hinzusetzen sind und thut man gut, ein Stück Papier unter den Füssen zu verwenden, auf welchem die schon einmal völlig gut gelungene Klangfigur aufgezeichnet wurde. Auf die Knotenlinien dieses Papiers setzt man dann die vier Füsschen, legt auf diese die Scheibe und kittet dann das Streichstäbchen auf der Scheibe fest. Ein Beispiel wird diese Methode noch erläutern. Gesetzt man wolle die Fig. 233 *e*



(Ph. 234.)

haben. Dann legt man die betreffende Zeichnung auf eine ebene Tischplatte, setzt bei 1, 2, 3 und 4 die Füsschen auf, legt auf letztere die Scheibe und kittet auf sie bei *s* das Streichstäbchen. Streicht man das Stäbchen an, so wird augenblicklich der auf die Scheibe gestreute Sand die unterhalb der Scheibe verzeichnete Figur bilden. Das Aufsetzen der Füsschen auf die vorgezeichneten Knotenlinien muss selbstverständlich möglichst rationell geschehen, indem einmal durch die vier Stützen eine möglichst sichere Lage der Scheibe erzielt werden muss und andererseits auch vier Punkte von Knotenlinien gewählt werden müssen, die dem betreffenden Curvensystem am besten zur Entstehung verhelfen. So würde es, was den letzteren Punkt anlangt, z. B. nicht rationell gewesen sein, wenn wir das Füsschen 3 weggenommen hätten und mit 4 so placirt hätten, wie es (3) und (4) anzeigt. Denn bei dieser Vertheilung hätten wir für die längste die Scheibe durchziehende Knotenlinie gar keinen Ruhepunkt vorbereitet.

21) Wenn es nun auch nicht in unserer Absicht liegt, auf bestimmte theoretische Entwicklungen weiter einzugehen, so müssen wir doch eine Reihe allgemeiner Gesetzmässigkeiten hervorheben, die z. Thl. schon von CHLADNI entdeckt wurden und in seiner Akustik zur Darstellung kamen. Hierbei werden wir aber solche Gesetzmässigkeiten, welche als allgemeine akustische anzusehen sind und als allgemein bekannt angenommen werden dürfen, nicht mehr hervorheben.

a) Die Schwingungsfelder beiderseits einer Knotenlinie befinden sich im selben Momente in entgegengesetzter Schwingungsbewegung.

b) Einem und demselben Tone können unter Umständen zwei verschiedene Klangfiguren entsprechen. Als interessantes Beispiel dienen die beiden Figuren 233 *d* und *e*. Ob die eine oder die andere Figur herauskommt, das hängt nämlich von der Unterstützung der Scheibe und der Anstreichstelle ab. Der Ton war z. B. bei einer von mir untersuchten Messingscheibe für beide Figuren gleich 436 Schwingungen.

c) Unter den Klangfiguren können zweifelsohne auch geradlinige Knotenlinien vorkommen. Dahin sind z. B. zu rechnen die beiden Figuren 233 *b* und *c*. Man bekommt zwar meistens Hyperbeln, aber diese sind sicherlich nur die Folge von Unregelmässigkeiten der Scheibe. Denn wenn man eine absolut gleichmässige Scheibe voraussetzen darf, so ist gar kein Grund denkbar, wesshalb nicht bei der Fig. 233 *b* die durch die Mitten der Seiten gehenden Geraden existiren sollten, weil nur diese Figur vier absolut gleichartige Quadranten liefert, die auch beim Schwingen der Scheibe als absolut identisch angesehen werden müssen. Ein gleiches gilt vom Kreuz durch die Ecken.

d) Haben zwei Quadratscheiben dieselbe Dicke und sind vom selben Material, so verhalten sich die Schwingungszahlen für Töne derselben Klangfigur umgekehrt wie die Quadratzahlen der Seiten der Scheiben, d. h. es ist

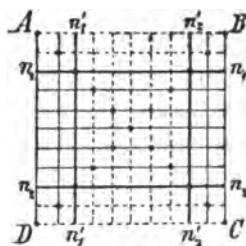
$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{a_2^2}{a_1^2}.$$

e) Haben zwei Quadratscheiben dieselbe Fläche bei ungleicher Dicke, so ist für dieselbe Schwingungsfigur

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Es ist jedoch keineswegs festgestellt, ob diese beiden zuletzt hervorgehobenen Gesetze durchweg für jede Schwingungsfigur bei höheren Obertönen und auch für Scheiben mit immer grösseren und grösseren Dicken gelten.

22) Es fragt sich nun, wie man sich das Zustandekommen der CHLADNI'schen Klangfiguren erklären kann? Bei der Beantwortung dieser Frage tritt uns eine Auffassung WHEATSTONE's[1]) entgegen, die jedenfalls beachtenswerth ist, wenn auch noch nicht sicher feststeht, ob diese Anschauung durchweg haltbar ist. So viel steht aber fest, dass WHEATSTONE im Stande ist, eine Reihe von Klangfiguren nach seiner Manier sehr befriedigend zu construiren. Er nimmt an, dass z. B. bei einer Quadratscheibe sich zwei Primärwellen einstellen, die je parallel zu den Seiten verlaufen, so, dass wenn die Bewegung parallel den Seiten *AB* und *CD* Fig. 235 gedacht wird, in den Geraden $n_1 n_1$ und $n_2 n_2$ zwei Knotenlinien genau so wie bei einem an beiden Enden *AB* und *CD* freien Stabe entstehen; ebenso soll sich



(Ph. 235.)

dann gleichzeitig auch parallel *AD* und *BC* eine Wellenbewegung fortpflanzen, bei welcher die Knotenlinien $n_1' n_1'$ und $n_2' n_2'$ zu Stande kommen. Die Sache wird dann weiter so verlaufen, wie die Fig. 235 genauer darstellt. Sie zeigt nämlich drei verschieden gezeichnete Systeme von geraden Linien, nämlich a) stark hervorgehobene, ganz ausgezogene Geraden als die Knotenlinien der Primärwellen, b) feiner ausgezogene Geraden, welche anzeigen, dass auf den Primärschwingungsfeldern, auf denen sie verzeichnet sind, in einem bestimmten Momente diese Schwingungsfelder nach oben von der Ruhelage der Scheibe aus gerechnet, schwingen; c) gestrichelte Geraden, welche die im selben Momente nach unten schwingenden Schwingungsfelder anzeigen. Demgemäss müssen nun aber, falls die beiden Primärschwingungen zu gleicher Zeit stattfinden, folgende Punkte der Scheibe in Ruhe bleiben:

a) selbstverständlich die Punkte, in welchen sich die Primärknoten schneiden. Denn diese Punkte gehören ja Ruhestellen für beide Primärschwingungen an.

b) auch solche Punkte, in denen sich eine gestrichelte und eine feiner ausgezogene Linie schneiden, jedoch mit der Beschränkung, dass je diese 2 Geraden gleichweit von den entsprechenden Seitenkanten abstehen. Denn nur solche Geraden deuten gleiche Schwingungsintensitäten und zwar im entgegengesetzten Sinne (nach oben und nach unten von der Ruhelage der Scheibe) an. Diese Ruhepunkte sind nun alle in unserer Figur als stärker markirte Punkte hervorgehoben worden, und sieht man, dass dieselben in ihrer Gesammtheit die allbekannte CHLADNI'sche Figur des Kreuzes durch die Ecken der Scheibe bilden.

In neuester Zeit hat SHOHÉ TANAKA in WIEDEM. Ann. Bd. XXXII. 1887 eine Abhandlung veröffentlicht, worin die Klangfiguren CHLADNI's insbesondere mit Rücksicht aut die WHEATSTONE'sche Auffassung behandelt werden und wobei diese letztere eine wesentliche Stütze erfahren hat.

23) Was die Klangfiguren kreisrunder Scheiben betrifft, so muss erwähnt werden, dass hier im allgemeinen einfachere Formen zu erwarten sind. Denn wenn man bei einer Kreisscheibe an irgend einem Punkte die Festklemmung besorgt, so kann durch diesen Punkt und den Mittelpunkt der Scheibe stets ein Durchmesser gelegt werden. Nun ist die am häufigsten vorkommende Form der Klangfiguren bei einer kreisförmigen Scheibe diejenige, wobei sie sich in 4, 6, 8 . . . Sectoren theilt, ganz dem entsprechend, was wir bei einem Ring kennen lernten. Mag man also bei einer solchen Kreisfläche an einem Punkt unterstützen, wo man will: die eine Gattung von Klangfiguren nämlich, das

[1]) Phil. Transact. 1833.

System der sie durchschneidenden Diameter, ist stets gesichert. Das kann bei quadratischen Scheiben nicht eintreten, vielmehr sind es hierbei nur die Diagonalen der Ecken und Mitten der Seiten, welche das Analogon zu den Diametern des Kreises bilden und erscheinen diese Diagonalen als Knotenpunkte nur, wenn die Unterstützungspunkte der Scheibe auch wieder auf den Diagonalen liegen, nicht aber, wenn diese irgendwo daneben gewählt werden.

Ein anderer Umstand bedingt eine weitere Vereinfachung. Es leuchtet ein, dass, wenn man bei einer Kreisscheibe in ihrer Mitte das Streichstäbchen festkittet und die Mitte der Scheibe zu schwingen anfängt, dass diese Schwingungen sich radiär nach dem Rande hin fortpflanzen, hier reflektirt werden und mit neuen Wellen, die vom Mittelpunkt weiter nach aussen verlaufen, zusammentreffen können, um so stehende Wellen zu liefern, mit denen Knotenlinien in Verbindung treten, die nothwendig concentrische Kreise sein müssen. Daher ist das zweite System der Knotenlinien das der »concentrischen Kreise« und dieses System ist auch häufig leicht garantirt, falls irgend ein Punkt der Scheibe unterstützt wird. Denn durch jeden solchen Punkt lässt sich ein concentrischer Kreis legen, welcher dann in vielen Fällen nahezu einen solchen Radius haben wird, dass er auch wirklich Knotenlinie werden kann.

Ebenso leuchtet ein, wie die Combination der beiden Systeme, nämlich das System der Diameter und das der concentrischen Kreise, möglich ist. Alle diese drei Systeme sind einfacher, wie viele andere bei einer quadratischen Scheibe und erklärt es sich wohl, wesshalb das Problem, die drei Systeme der Klangfiguren bei einer Kreisscheibe theoretisch zu behandeln, besser gelungen ist wie die Theorie für die grosse Mannigfaltigkeit von Figuren bei einer Quadratscheibe. Diese schöne theoretische Untersuchung, welche zugleich als eine der hervorragendsten auf dem gesammten Gebiete der theoretischen Physik zu betrachten ist, insofern als sie ein Problem löste, das allen vorangegangenen Anstrengungen getrotzt hatte, verdanken wir KIRCHHOFF.[1])

Indem wir die Hauptresultate dieser theoretischen und experimentellen Untersuchung nun mittheilen, sei bemerkt, dass für den Grundton die Formel

$$N = \frac{d}{4R^2}\sqrt{\frac{E\cdot g}{s}}$$

die Anzahl der Schwingungen zu berechnen gestattet, falls man für d die Dicke uud für R den Radius der Scheibe einsetzt. Die übrigen in der Formel vorkommenden Grössen sind nach den im vorausgehenden mitgetheilten Formeln bekannt. Falls nicht der Grundton, sondern die Obertöne überhaupt in Betracht kommen, existirt eine einfache Formel nicht, vielmehr muss man nach umfangreicher Berechnung eine Tabelle benutzen, die wir für einige der am meisten in Betracht kommenden Klangfiguren mittheilen wollen.

Tabelle für Schwingungszahlen.

Durchmesser	2	0	3	1
Concentrische Kreise . .	0	1	0	1
Schwingungszahlen . . .	1·000	1·613	2·312	3·703

[1]) POGG. Ann. Bd. XXXI. 1850.

Tabelle für die Länge der Radien der Knotenkreise.

Durchmesser	0	0	0	1	1
Concentrische Kreise	1	2	3	1	2
Radien	0·681	0·392 0·842	0·257 0·592 0·894	0·781	0·498 0·871

Es ist sehr interessant, die durch das Experiment gewonnenen Zahlen, die STREHLKE bei sechs möglichst regelmässigen Glasscheiben als Mittelzahlen feststellte, kennen zu lernen, um sie mit den theoretisch vorausbestimmten Zahlen KIRCHHOFF's vergleichen zu können. Wir setzen diese Zahlen des Experiments [1]) hier her:

Schwingungszahlen: 1·000 — 1·610 — 2·312 — 3·698
Radien: 0·677 — 0·391 — 0·258 — 0·779 — 0·497
0·841 — 0·592 0·870
0·895

Dieser Vergleich wird am besten die Bedeutung der KIRCHHOFF'schen Arbeit erkennen lassen.

24. Die zweite Unterabtheilung der flächenförmigen Körper, die durch innere Rigorosität elastisch sind, bilden die »krummflächigen« Körper. Auch hier ist die Formenverschiedenheit, welche diese Körper zeigen können, eine unbegrenzte, indem der Versuch zeigt, dass ein jedes Stück einer dünnen Glasschale, einer Flasche u. s. w., falls es eben noch gross genug ist und passend eingeklemmt und unterstützt werden kann, sich auch zum Tönen bringen lässt. Aus dieser so grossen Mannigfaltigkeit der Formen sind es aber doch nur ganz bestimmte, die schliesslich als die alleinigen einer näheren Untersuchung bis jetzt unterworfen wurden, und können alle diese Formen unter der Bezeichnung »glockenförmige Körper« zusammengefasst werden. Es gehören dahin vor allem die eigentlichen Glocken selbst, sodann alle Formen, die im kleineren Maassstabe in Glas oder Metall die Glockenform erhalten haben; ferner gehören hierher die kreisförmigen Cylinder und die kreisförmigen konischen Flächen. Es ergiebt sich somit, dass man diese Körper auch wohl unter der Bezeichnung »Rotationskörper« zusammenfassen kann. Daraus folgt aber, dass man von elliptisch gestalteten Formen, die ja auch mit Leichtigkeit, insbesondere als elliptisch geformte Blechcylinder, hergestellt und dem Versuch unterworfen werden können, absehen will.

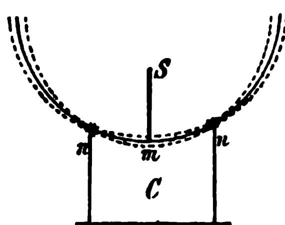
Stellen wir uns nun eine solche Glockenform vor, so leuchtet ein, dass es die ebene Kreisscheibe ist, welche hier zunächst die nöthigen Analogien erkennen lässt. Denn es ist ja eine solche Glocke eigentlich nichts anderes als eine centrisch gebogene kreisförmige Scheibe. Den Uebergang von einer solchen ebenen Scheibe zu einer Glocke würden die Schalen bilden, wie z. B. eine gläserne oder porcellanene Abdampfschale.

Hiernach lässt sich im Voraus erkennen, dass solche Körper zunächst zwei Systeme von Knotenlinien zeigen müssen, nämlich erstens das System der sich durchschneidenden Diameter und zweitens das System der concentrischen Kreise. Ersteres System ist das allgemein bekannte und zeigt eine Glocke, eine Schale, ein Trichter, ein Cylinder bei der Grundschwingung an vier Stellen

[1]) POGG. Ann. XCV. 1855.

können, welche als solche von zwei um 90° von einander entfernten Stellen des Glockenrandes ihren Anfang nehmen, über den Scheitel der Glocke hinlaufen und dann an zwei diametral entgegengesetzten Stellen des Glockenrandes enden. Der ganze Glockenmantel zerfällt hierdurch in vier Quadranten, wodurch der Grundtypus einer Kreisscheibe nachgewiesen ist. Man sieht daher, dass eine Glocke bei ihrem tiefsten Tone vier Knotenlinien zeigen muss.

Merkwürdig ist es nun, dass es bis jetzt noch nicht gelungen ist, das System der concentrischen — mit dem Rande der Glocke parallel laufenden — Kreise herauszubringen. Wenn man aber genauer zusieht, so begreift es sich, dass man hierbei verschiedenen Schwierigkeiten begegnen muss. Vor allem leuchtet sofort ein, dass Glocken, Glasstülpen, wenn dieselben nach dem Scheitel zu dicker und dicker werden oder gar hier in einen Knopf endigen, überhaupt nicht zu solchen Schwingungen gebracht werden können. Fig. 236 stellt eine Schale dar, welche in ihrer Ruhelage durch die ausgezogene Contour angedeutet ist. Soll nun die Grundschwingnng im System mit concentrischen Kreisen eintreten, so müsste die Schale auf einen Cylinder *C* — etwa in einer offenen Schachtel bestehend — gesetzt werden, dessen oberer Umfang so gross ist wie der Umfang des einen Knotenkreises, der sich beim Schwingen der Glocke voraussichtlich bilden kann.



(Ph. 236.)

Das Anstreichen der Glocke kann hierbei nur so geschehen, dass man am Scheitel *m* derselben ein Streichstäbchen *s* ankittet. Gesetzt nun, es wäre alles nach Wunsch geordnet, so würde die Schale in ihren äussersten Schwingungsphasen die gestrichelten Contouren bilden. Um den ganzen Vorgang, wie er ist, zu erkennen, muss man noch die Figur um ihre vertikale Mittelaxe rotiren lassen. Die Punkte *n* werden sich dann in einem Kreise bewegen, der eben der eine herauszubringende Knotenkreis ist. Das Gelingen dieses Versuchs setzt aber vor allem voraus, dass man einen Cylinder *C* anwendete, der gerade den dem Knotenkreise *n* entsprechenden Durchmesser hatte. Aber dies einmal zugegeben, wird der Versuch doch wohl kaum gelingen. Denn man bringt im Anstreichen des Stäbchens *s* nicht die nöthige Energie heraus, welche eine entsprechende Biegung des Theils der Schale, der um den Scheitel *m* herum liegt, veranlassen könnte.


(Ph. 237.)

25) Von diesen centralen Schwingungen sehen wir daher ab und bleiben somit für die Glocken nur die radiären übrig. Zur Sichtbarmachung der Knotenlinien kann man selbstverständlich trockenen Sand, wie bei ebenen Scheiben nicht verwenden. Man verfährt statt dessen so, dass man die Glocke zunächst mittelst eines grösseren Pinsels mit dünner Kalkmilch im Innern überstreicht, dass man dann auf diese Kalkmilch ziemlich grobkörnigen, rein gewaschenen Sand aufstreut und dann die Glocke am Rande mit einem Violinbogen anstreicht. Ist man im Stande, den Bogen sicher und regelmässig zu führen, so zeigt sich eine sehr merkwürdige Erscheinung, welche in Fig. 237 auf photo-

graphischem Wege dargestellt wurde. Während des Schwingens und Tönens der Glocke bewegt sich nämlich der Sand von vier radiären Stellen aus auf bogenförmigen Bahnen durch die Kalkmilch hindurch und wird hierbei nach vier anderen radiären Stellen zusammengeführt, um auf diesen als den zu versinnlichenden Knoten liegen zu bleiben. Hält man mit dem Streichen ein, so bleiben die Bahnen, welche die einzelnen Sandhäufchen und Sandkörner in die Kalkmilch eingruben, dauernd bestehen und die Glocke bietet, wenn man sie passend vom Licht durchscheinen lässt und schief auf dieselbe hinblickt, das Aussehen der Fig. 237, zu deren Erläuterung wohl nichts mehr hinzugefügt zu werden braucht, da ja die vier Knotenlinien und die bogenförmigen Bewegungscurven der Sandpartikelchen deutlich hervortreten.

Die Glocke liefert also beim tiefsten Ton vier, beim nächsten Oberton sechs, beim nächsten acht u. s. w. Knoten. CHLADNI hat verschiedene Glasglocken untersucht und kam zu dem Resultat, dass die Obertöne derselben im Grossen und Ganzen mit den Quadranten der Zahlen 2 . . 3 . . 4 . . 6 . . im Verhältniss übereinkämen. Die grosse Verschiedenheit dieser Glocken insbesondere wegen der nicht gleichmässigen Wandstärke vom Rande der Glocke nach dem Scheitel hin gestatten auch gar nicht ein solches einfaches Gesetz auszusprechen. Will man es mit Regelmässigkeit zu thun haben, so muss man überhaupt Glasgefässe verlassen und Metallgefässe nehmen. Die letzteren lassen sich in zwei Formen recht regelmässig herstellen, einmal als Cylinder und dann als Trichter. Letztere sind auf ihr genaues Verhältniss der Schwingungen der Obertöne und überhaupt noch nicht genauer untersucht, dagegen verdanken wir FENKNER[1]) eine recht interessante Arbeit über die kreisförmigen Cylinder. Nach dieser Untersuchung verhalten sich die Schwingungszahlen N_0 und N zweier Cylinder — sie wurden sorgfältig von Weissblech hergestellt — wenn die D_0 und D Durchmesser, d_0 und d die Dicken der Wandstärke bedeuten — wie

$$\frac{N_0}{N} = \frac{d_0}{d} \cdot \frac{D_2}{D_0^2},$$

wobei also das Merkwürdige besteht, dass die Höhe der Cylinder von keinem Einfluss ist. In einer anderen Arbeit beschäftigte sich FENKNER mit den Obertönen und fand, dass diese den Zahlen

$$1 : \tfrac{8}{3} : 5 : 8 : 12 : 16 \ldots$$

d. h. den Tönen

$$C : f : c_1 : c_2 : g_2 : c_3 \ldots$$

entsprächen.

26) Wir wenden uns nun noch zur letzten Gruppe der transversal schwingenden Körper: zu den flächenförmigen Körpern, aber solchen, die durch Spannung elastisch werden, also zu den »Membranen«. Auch hier setzt die Theorie voraus, man habe es mit absolut biegsamen Körpern zu thun, welche erst durch Spannung in sich Elasticität aufnehmen. Dass auch bei Membranen ein solches absolutes Fehlen von Elasticität der Biegung nicht angenommen werden darf, leuchtet ein. Denn auch das feinste Seidenpapier zeigt, dass es nicht jede ihm gegebene Biegung beibehält, sondern bestrebt ist, sie wieder zu verlassen, namentlich zeigt ein kleines Flächenstückchen eines solchen Papiers, das etwa an einer Seite festgehalten und gebogen wird, wie die ursprüngliche Gestalt sofort wieder eingenommen wird, falls die äussere Kraft aufhört. Membranen bieten nun gleich von vornherein zwei Schwierigkeiten, die wir bei Saiten nicht antreffen. Zunächst ist es unmöglich, sich eine Membran zu verschaffen, welche in ge-

[1]) WIED. Ann. VIII, pag. 185—192.

spanntem Zustand in allen ihren Theilen gleichartig ist. Denn einmal ist ja das Material, aus welchem man Membranen macht: thierische Felle, thierische Blasen, Papiersorten und Kautschuk, von vornherein mehr oder weniger unregelmässig. Sodann aber, eine solche Regelmässigkeit auch zugegeben, wird diese während des Aufziehens mehr oder weniger verloren gehen. Hierbei muss nämlich, wenn wir vom Kautschuk absehen, der betreffende Körper vorher nass gemacht werden: nach dem Aufziehen verschwindet die Feuchtigkeit und da diese von vornherein nicht gleichmässig vertheilt sein konnte, so kommen bestimmte Partien der Membran auch später wie andere zum Trocknen, womit nothwendig die Theilchen dieser Partien schliesslich in weitere Abstände von einander kommen wie auf den Stellen, die früher trocken wurden.

Ein anderer Umstand betrifft die Unmöglichkeit, einer Membran eine bestimmte, durch Gewichte auszudrückende Spannung zu geben. Man hat es daher mit einem Körper zu thun, der zwar durch Spannung elastisch wird, dessen Spannung man aber nicht messen kann und nur als eine grössere oder geringere zu erkennen und einzutheilen vermag. Bei den theoretischen Untersuchungen und den aus ihnen hervorgehenden Formeln für die Schwingungszahl wird deshalb die Spannung P zweifelsohne vorkommen müssen, ohne dass man vermag, experimentell sie zu bestimmen und beliebig zu verändern.

Was nun die Art der äusseren Begrenzung der Membranen anlangt, so kann diese ebenso wie bei Scheiben unendlich mannigfach sein. Man beschränkte sich bis jetzt aber auf eine rektanguläre, quadratische, kreisrunde und wohl auch elliptische Begrenzung. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Membranen über einen Rahmen, einen Kasten oder ein Glasgefäss gespannt wurden, so dass schliesslich die äusseren Contouren der Membranen als fest zu betrachten sind. Nicht ohne Interesse und Bedeutung ist aber auch eine Umgrenzung, wobei eine Membran nach einer Seite hin frei wird. Man denke sich z. B. eine aufgezogene kreisförmige Membran, welche hernach in der Richtung eines Diameters durchgeschnitten wird: Eine solche Hälfte der Membran würde dann auf der Länge eines Halbkreises fest und längs ihres Durchmessers mit einem freien Rande schwingen.

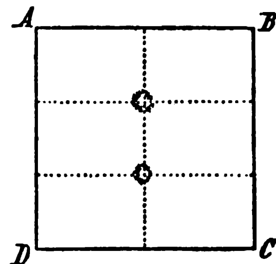
Die Art der Schwingungserregung bei Membranen kann eine sehr verschiedene sein. Das einfachste Mittel ist, sie mit einem Klöpfelchen oder Hämmerchen anzuschlagen: eine Methode, die zunächst in der praktischen Musik die alleinige bildet, aber auch bei akustischen Versuchen, namentlich wenn es sich nur um die Grundschwingung handelt, sehr brauchbar ist. In dieser letzteren Beziehung kann man, falls die Membran über einen Rahmen gespannt ist, auch durch Klopfen auf diesen Rahmen schon diese Membran zum Schwingen bringen. Ein anhaltendes Tönen kommt auf diese Manier nicht heraus und unterscheiden sich die Membranen hierdurch wesentlich von den tongebenden Körpern, die wir bis jetzt betrachtet haben: Ein Stab, eine Saite, eine CHLADNI'sche Scheibe, sie tönen, einmal angeschlagen, längere Zeit nach und wissen wir dies ja namentlich von den Glocken und Stimmgabeln. Der Grund für diese Verschiedenheit liegt in der molekularen Beschaffenheit der Membranen und nicht zunächst etwa in der geringen Masse. Ebenso nämlich wie eine Bleiplatte, eine Gypsplatte, eine Platte aus Papiermaché, nachdem sie angeschlagen wurde, nicht nachtönt, ist dies auch bei der Membran der Fall. Sie ist ein Körper, bei dem das innere Gefüge durchaus nicht so regelmässig wie bei andern Körpern ist, vielmehr durchsetzen die Masse der Membran zahllose Risse und Röhrchen, so dass das Ganze nicht

den regelmässigen molekuaren Zusammenhang bekommt wie bei einer Glas- oder Messingscheibe.

Ein Anstreichen der Membranen mittelst eines Violinbogens geht nicht an; dagegen gestattet das Streichstäbchen wiederum eine ausgedehnte Anwendung. Da jedoch die Masse einer Membran oft genug sehr dünn ist, so wird das Streichstäbschen in einem solchen Falle immerhin die Schwingungen derselben verändern können. Will man diese Aenderung möglichst ausgeschlossen sehen, so darf nur ein sehr feines Stäbchen verwendet werden, das anzustreichen eine besondere Geschicklichkeit erheischt.

Weiterhin muss bemerkt werden, dass die Membranen sehr gut auch durch Resonanz zum Schwingen, wenn auch nicht zum anhaltenden Tönen gebracht werden können. In vielen Fällen sind die Membranen ja leichte Massen und da sie auf ihrer ganzen Ausdehnung mit Luft umgeben sind, so wird eine Schallbewegung von einem tönenden Körper A nach der Membran B hin sehr leicht durch die Luft übertragen werden können, während eine Scheibe hierbei kaum erregt wird. Gerade diese Eigenschaft, auf die Töne eines anderen schwingenden Körpers wie namentlich einer Orgelpfeife oder die menschliche Stimme hin zu reagiren, macht die Membranen zur Klanganalyse der Körper sehr geeignet, indem man hierbei aus der Bewegung der Membran rückwärts Schlüsse ziehen kann bezüglich der Schwingungen des Körpers selbst, welche die Membran erregten. Ein Beispiel wird diesen wichtigen Umstand sofort erläutern helfen. Wir wollen uns vorstellen, wir hätten eine Reihe von Membranen, deren Grundton nach den Schwingungszahlen der diatonischen Tonleiter stimmten; die Membranen seien in horizontaler Lage der Reihe nach aufgestellt und auf eine jede sei ein klein wenig Sand gestreut. In einiger Entfernung hiervon wollen wir uns vorstellen, dass zwei Personen je einen Ton singen, welch beide Töne zusammen durch die Luft nach den Membranen übertragen würden und es ergebe sich, dass die Membran, deren Grundton *d*, und diejenige, deren Grundton *gis* wäre, eine Sandbewegung zeige, während der Sand auf den übrigen Membranen still läge, so wäre dies der Beweis, dass in dem gemeinsamen Klange, der von den beiden Stimmen erregt wird, ein *d* und ein *gis* stecke.

27) Bezüglich der Schwingungsgesetze der frei schwingenden Membranen wollen wir uns an eine wichtige experimentelle Untersuchung zweier französischer Geleheten Bernaid und Bourget[1]) halten, wobei speciell die quadratischen Membranen berücksichtigt wurden, wobei ferner ein Anschluss an theoretische Untersuchungen von Poisson und Lamé stattfand.



(Ph. 288.)

Nach diesen theoretischen Untersuchungen Poisson's ergiebt sich für die Schwingungszahlen der Obertöne einer quadratischen Membran die Formel

$$N = \sqrt{\frac{(m+1)^2 + (n+1)^2}{2}} \sqrt{\frac{P \cdot g}{Q}},$$

worin zunächst P die Spannung bedeutet: so zu verstehen, dass diese senkrecht zu den Seiten des Quadrats und gleichmässig wirkt. Q bedeutet das Gewicht der Membran. Ferner müssen wir bezüglich der Grössen m und n das Nöthige

[1]) Ann. de chim. et phys. Ser. 3, Bd. LX. 1860.

kennen lernen. Der Grundtypus für sämmtliche Partialschwingungen einer quadratischen Membran erhellt aus der Fig. 238. Sie zeigt eine Klangfigur mit dem Typus $(m, n) = (2, 1)$ d. h. parallel mit den Seiten AB und DC durchsetzen die Membranen in gleichen Abständen von einander zwei geradlinige Knotenlinien, ebenso läuft parallel den Saiten AD und BC eine Knotenlinie, sodass die Membran in sechs congruente Rechtecke zerfällt. Was an diesem speciellen Beispiel erläutert wird, kann verallgemeinert werden und bedeutet (m, n) den allgemeinen Typus, wobei parallel dem einen Seitenpaar des Quadrats m, parallel dem anderen n geradlinige Knotenlinien in je gleichen Abständen von einander die Fläche durchziehen. Für den Grundton ist $m = n = o$, d. h. die Membran schwingt als Ganzes auf und nieder. Für die Fälle, wo $m = n$ ist, sind die Schwingungsfelder der Membran lauter Quadrate, sonst aber lauter Rechtecke.

Berechnet man nach obiger Formel die Schwingungszahlen, indem man den Grundton mit 1 bezeichnet, so ist die Reihe der Obertöne folgende:

1·00	2·00	3·00	4·00	5·00
1·58	2·24	3·16	4·12	u. s. w.
	2·55	3·54	4·30	
	2·92	3·61	4·47	
		3·81	4·53	
			4 74	

Man erkennt hieraus, dass unter den vielen Membrantönen auch die den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 ... entsprechenden vorkommen, und sind diese, wie unschwer zu erkennen ist, diejenigen Töne, wobei die Membran parallel dem einen Seitenpaar m in gleichen Abständen von einander stehenden und parallel dem andern eine ebenso grosse Zahl $n = m$ Knotenlinien zeigt. In obiger Formel würde hierbei also $m = n$ zu setzen sein. Eine Membran, welche sich demgemäss z. B. in vier Quadrate theilt, giebt einen Ton, der die Octave des Grundtons ist. Eine Membran mit neun Quadraten giebt die Quinte der Octave des Grundtons. Dieses Resultat muss auch noch anders abgeleitet werden können. Denn es muss offenbar die Membran mit vier Quadraten denselben Ton geben wie eine quadratische Membran, deren Seite halb so gross ist wie die ganze Membran, die sich beim Schwingen in vier Quadrate teilte. Man beweist dies aus der allgemeinen Formel, wenn man auf den zweiten Factor $\sqrt{\frac{P \cdot g}{Q}}$ achtet. Eine Membran derselben Spannung aber mit einer Seitenlänge gleich $\frac{1}{2}$ hat ein $Q = \frac{1}{4}$ im Vergleich zum Gewicht der Membran mit der Seitenlänge 1. Daher ist anstatt $\sqrt{\frac{P \cdot g}{Q}}$ ein $2 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot g}{Q}}$ zu setzen, womit ja der geforderte Beweis geführt ist. Melde.

Longitudinalschwingungen tönender Körper.

1) In dem Artikel »Allgemeine Wellenlehre« ist ausser der Transversalwellenbewegung noch eine zweite Schwingungsbewegung besprochen worden, welche man die »Longitudinalwellenbewegung« zu nennen pflegt. Daselbst wurde auch schon hervorgehoben, dass die Wellenbewegung in luftförmigen Körpern, insbesondere also in der atmosphärischen Luft, nur eine longitudinale sein

könne, und die transversale hier ganz fehle. Zum Zustandekommen der letzteren ist nämlich eine Formabgrenzung mit freier Oberfläche oder eine lineare Gestalt des betreffenden schwingenden Körpers erforderlich, welcher Gestalt der luftförmige Körper widerstrebt, indem er weder eine freie, in sich abgegrenzte Fläche einnehmen kann, noch sich als eine Luftsaite oder ein Luftstab herrichten lässt. Daher werden auch die schwingenden Luftsäulen und die von ihnen gelieferten Töne nur durch Longitudinalschwingungen der von der Wand der Röhre abgegrenzten Luftmasse zu Stande kommen, so dass wir es in dem jetzigen Artikel namentlich auch mit den Tönen der Luftsäulen, mit den Tönen der Orgelpfeifen zu thun haben werden.

Aber die Longitudinalschwingungen sind auch anderen Körpern eigen und lässt sich unschwer nachweisen, dass sie auch bei dem tropfbar flüssigen Zustand vorkommen, dass z. B. auch eine Orgelpfeife unter Wasser einen Ton geben kann, welchen die Longitudinalschwingungen der von der Pfeife eingeschlossenen Wassermenge erzeugen. Sodann sind es vor allem die festen Körper, bei welchen die Longitudinalschwingungen vorkommen. Diese Thatsache bei festen Körpern ist verhältnissmässig erst spät entdeckt worden und verdanken wir diese Entdeckung dem Altmeister CHLADNI, der in seiner akustischen Erstlingsschrift: »Entdeckungen über die Theorie des Klanges« im Jahre 1787 hervorhebt, dass es ihm gelungen sei, bei einer Saite Töne zu erhalten, die erzeugt würden, wenn man den Violinbogen nicht senkrecht zur Saite, sondern unter einem spitzen Winkel gegen dieselbe hinführe. Bald hierauf hat CHLADNI diesen Schwingungen bei Saiten und Stäben weitere Aufmerksamkeit geschenkt und die Gesetze derselben auf experimentellem Wege vollkommen ermittelt.

Während bei den Transversalschwingungen Biegungen des betreffenden Körpers eintreten und das resultirende Gebilde ein Wellenberg und Wellenthal ist, begegnen wir bei den Longitudinalschwingungen, wie dies im Artikel »Allgemeine Wellenlehre« erläutert wurde, »Verdichtungen« und »Verdünnungen«, doch muss besonders hervorgehoben werden, dass diese nicht etwa die Analoga der Wellenberge und Wellenthäler sind, sondern, dass bei einer Longitudinalschwingung, wenn dieselbe wie sie ist in eine Transversalschwingung umgesetzt wird, den Stellen der Verdichtungen und Verdünnungen die Knotenstellen der Transversalbewegung entsprechen, und dass die Wellenberge und Wellenthäler der Transversalbewegung denjenigen Stellen der Longitudinalbewegung entsprechen, welche man »Bäuche« zu nennen pflegt, d. h. diejenigen Stellen des longitudinalschwingenden Körpers, welche, je zwischen einer Verdichtung und Verdünnung liegend, das Mittelding hiervon bilden und somit Stellen unveränderter Dichtigkeit bleiben.

2) In derselben Weise, wie die Transversalschwingungen der Körper in ihrer theoretischen Behandlung als ein Problem der Elasticitätslehre aufzufassen sind, ist dies nun auch bei den Longitudinalschwingungen der Fall. Bei der allgemeinen Lösung des Problems der Schwingungserscheinungen der Körper würden daher die betreffenden Bewegungsgleichungen in einem Theile die Transversal-, im anderen die Longitudinalschwingungen darstellen.

Die einfachsten Verhältnisse der experimentellen Seite bei den Longitudinalschwingungen der festen Körper bietet ein an beiden Enden freier Stab. Wie er ist, kann er unmittelbar in longitudinale Schwingungen versetzt werden. Es lassen sich hierbei Stäbe von Metall, von Glas oder von Holz verwenden. Metall- und Holzstäbe bringt man dadurch zum Tönen, dass man zunächst sich einen Tuchlappen verschafft, diesen auf einer Seite mit gepulvertem Colophonium

bestreut und mit diesem Lappen den Stab longitudinal reibt. Bei Glasstäben verwendet man am besten einen Flanellappen, der mit Wasser oder verdünntem Alkohol durchnässt ist. Hierbei ist es, wenn die Longitudinaltöne rein herauskommen sollen, nöthig, dass beim Reiben mit dem Lappen, welcher den Stab ringsum umfasst, der letztere durch die Hand, welche den Lappen führt, nicht zu fest gefasst wird, sondern ein gewisses, elastisches Nachlassen während des Reibens stattfindet. An einer Stelle muss der Stab festgehalten werden. Dies macht sich am einfachsten mit der linken Hand, während die rechte das Anstreichen besorgt. Soll die Grundschwingung, der Grundton, herauskommen, so muss der Stab in seiner Mitte festgehalten und an einer seiner freien Hälften gestrichen werden. Das Festhalten wird auch in vorzüglicher Weise dadurch bewirkt, dass man ein etwa zollanges Stück eines Gummischlauches über den Stab streift, bis es aut die Mitte gekommen ist und dass man dann den Stab mit einer passenden Klemme in der Mitte einklemmt. Eine solche sehr brauchbare Klemme ist in Fig. 239 zu sehen und kann dieselbe bequem an eine Tischplatte angeschraubt werden, während der Stab oben zwischen die kreisförmig abgerundeten Klemmbacken gefasst wird. Solcher Klemmen besitzt man für weitere Versuche und namentlich für wichtige Anwendungen longitudinal schwingender Stäbe am besten zwei Stück.


(Fig. 239.)

Es ist selbstverständlich, dass der Querschnitt der Stäbe allermeistens ein kreisförmiger ist, doch können ebenso gut auch Stäbe mit rechteckigem oder quadratischem Querschnitte vorkommen. Sehr gut eignen sich aber zu den Versuchen auch Röhren und lassen sich diese sowohl als Metall- wie als Glasröhren verwenden. Letztere bieten wieder die besondere Eigenthümlichkeit, dass sie im Innern Sand oder irgend ein Pulver oder eine Flüssigkeit aufnehmen können, in deren Bewegungsformen sich mancherlei Interessantes manifestirt.

3) Da auch die Longitudinalschwingungen schliesslich darin bestehen, dass die einzelnen Molekülschichten in je einem Querschnitte des Stabes um eine ursprüngliche Ruhelage Schwingungen ausführen, da bei der Bildung von Tönen stehende Schwingungen nothwendig vorhanden sein müssen, so leuchtet ein, dass die Differentialgleichung für die Longitudinalschwingungen ganz das Aussehen von der bei den Transversalschwingungen bekommt. Unter der Voraussetzung, dass die letzteren nur in einer Ebene vor sich gehen, haben wir ihre Differentialgleichung als

$$\frac{dy^2}{dt^2} = \alpha^2 \frac{dy^2}{dx^2} \; \ldots .$$

im Artikel über die Transversalschwingungen kennen gelernt. In ihr bedeutet y die senkrechte Entfernung der Seitentheilchen von der Ruhelage, x die willkürliche Variable für irgend eine Stelle der Länge der Saite und t die Zeitvariable. Die Grösse α war eine Constante, nämlich

$$\alpha^2 = \frac{P \cdot g}{p},$$

wobei P die Spannung und p das Gewicht der Längeneinheit der Saite bedeutete. Für unsere Longitudinalschwingungen lautet die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad (1)$$

und stellt jetzt ξ die Verschiebung der einzelnen Querschnitte des Stabes in der Richtung der Länge des Stabes vor. Die Constante β dagegen wird durch die Gleichung:

$$\beta^2 = \frac{E \cdot g}{s}$$

dargestellt, in welcher statt der Grösse P jetzt die Grösse E, nämlich der Elasticitätsmodulus figurirt. Die Integration der obigen Differentialgleichung liefert für ξ den Werth

$$\xi = \Sigma \cos \frac{i\pi x}{l}\left(A_i \cos \frac{i\pi\beta t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi\beta t}{l}\right) \ldots . \tag{2}$$

Nehmen wir wiederum einmal an, es solle die Grundschwingung stattfinden, und es wäre B_i gleich Null, so würde

$$\xi = \cos \frac{\pi x}{l} \cdot A_1 \cdot \cos \frac{\pi \cdot \beta t}{l} \ldots . \tag{3}$$

die Gleichung für die Verschiebung der einzelnen Stabschichten sein. Dieser Ausdruck für ξ wird gleich Null, wenn $\cos \frac{\pi x}{l} = 0$, d. h. $x = \frac{l}{2}$ wird. Daher ist die Mitte des Stabes bei der Grundschwingung stets eine Knotenstelle. Differentiiren wir ξ nach x, so ergiebt sich

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l} \cdot A_1 \cdot \cos \frac{\pi \cdot \beta \cdot t}{l},$$

welcher Ausdruck für $x = 0$ und $x = l$ gleich Null wird. Dies beweist, dass an den Enden des Stabes keine Dichtigkeitsänderungen vorkommen, dass mithin die Enden Stellen der »Bäuche« sind.

Um den Ausdruck für die Schwingungsdauer abzuleiten, beachten wir, dass für ein jedes x alle Phasen durchlaufen sind in der Zeit, in welcher der Ausdruck $\frac{\pi \cdot \beta \cdot t}{l}$ alle Werthe von $0 - 2\pi$ angenommen hat, Die Grösse t erreicht innerhalb dieser Zeit den Werth T' der Schwingungsdauer und ergiebt sich hierfür also die Bedingungsgleichung

$$\frac{\pi \cdot \beta \cdot T_1'}{l} = 2\pi$$

oder

$$T_1' = \frac{2l}{\beta} = \frac{2l}{\sqrt{\frac{Eg}{s}}} = 2l\sqrt{\frac{s}{Eg}}$$

oder für die Schwingungszahl

$$N_1' = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{Eg}{s}} \ldots . \tag{4}$$

wobei E in Kilogrammen, g in Millimetern, L in Metern und s wie gewöhnlich ausgedrückt werden kann.

Der nächste Oberton, der zweite, tritt ein, wenn $i = 2$ gesetzt wird und ergiebt sich hierfür

$$N_2' = \frac{2}{2 \cdot L}\sqrt{\frac{E \cdot g}{s}};$$

ebenso allgemein für den i' Oberton,

$$N_i' = \frac{i'}{2 \cdot L}\sqrt{\frac{E \cdot g}{s}} \ldots . \tag{4*}$$

wonach sich leicht die Einzelgesetze der Longitudinalschwingungen ableiten lassen. Das wichtigste ist das, dass diese Longitudinalschwingungen vom Quer-

schnitt der Stäbe unabhängig sind. Denn in den Formeln für T' und N' kommt die Querschnittgrösse oder eine Dimension des Querschnitts nicht vor. Das war bei den Transversalschwingungen der Stäbe anders und können die Formeln hierfür in dem betreffenden Artikel verglichen werden. Für den Fall, dass ein Stab mit rektangulärem Querschnitt in Betracht kommt und an beiden Enden frei ist, kann die Grösse ε, welche in dem Ausdruck für die Schwingungszahl N_i der Transversalschwingungen vorkommt, gleich $\frac{2i+1}{2}$ gesetzt werden. Das Verhältniss von N_i' zu N_i würde demgemäss gleich

$$N_i'/N_i = \frac{i'}{2L}\sqrt{\frac{E\cdot g}{s}} \Bigg/ \frac{\left(\frac{2i+1}{2}\right)^2 \pi \cdot h \sqrt{\frac{E\cdot g}{s}}}{4\cdot\sqrt{3}\cdot L^2}$$

oder

$$\frac{N_i'}{N_i} = \frac{8\cdot\sqrt{3}\cdot i'\cdot L}{(2i+1)^2\cdot\pi\cdot h}$$

sein, d. h. es ist, wenn man $\frac{8\cdot\sqrt{3}}{\pi}$ ausrechnet:

$$\frac{N_i'}{N_i} = 4{\cdot}406\,\frac{i'}{(2i+1)^2}\cdot\frac{L}{h}$$

Nehmen wir z. B. an, der Stab wäre 1 *m* lang und 0·01 *m* dick, so ergiebt sich

$$\frac{N_i'}{N_i} = 4{\cdot}406\,\frac{i'}{(2i+1)^2}\cdot 100 = 4{\cdot}40{\cdot}6\,\frac{i'}{(2i+1)^2}\;\ldots\ldots \tag{5}$$

Welcher Oberton des transversalschwingenden Stabes ist es nun, der dem Grundtone des longitudinalschwingenden am nächsten kommt? Zu dem Ende haben wir $i' = 1$ zu setzen und bekommen die Bedingungsgleichung

$$(2i+1)^2 = 440{\cdot}6,$$

woraus sich

$$i = 9{\cdot}99$$

berechnet, d. h. der 10. Transversalton kommt dem Grundton des longitudinalschwingenden Stabes am nächsten.

4) Man kann sich vorstellen, dass ein Stab auch an beiden Enden fest gemacht und ebenfalls in der Richtung seiner Länge gerieben wird. Dieser Fall kommt bei Stäben wohl nicht häufig vor, aber bei Saiten ist es der gewöhnliche Fall. Da es überhaupt bei den Longitudinalschwingungen nicht auf den Querschnitt weder der Form noch der Grösse nach ankommt, so muss auch eine an beiden Enden befestigte Saite dasselbe sein wie ein an beiden Enden befestigter Stab. Die Gleichung für diesen Fall ist nun

$$\xi = \sum_{i'=1}^{i'=n} \sin\frac{\pi x}{l}\left(A_i \cos\frac{i'\pi\beta t}{l} + B_i \sin\frac{i'\pi\cdot\beta t}{t}\right); \tag{6}$$

und unterscheidet sie sich von der Gleichung (2) nur dadurch, dass vor der Klammer anstatt eines Cosinus ein Sinus steht. Unter der Annahme, dass B_i gleich Null und $i' = 1$ hat man

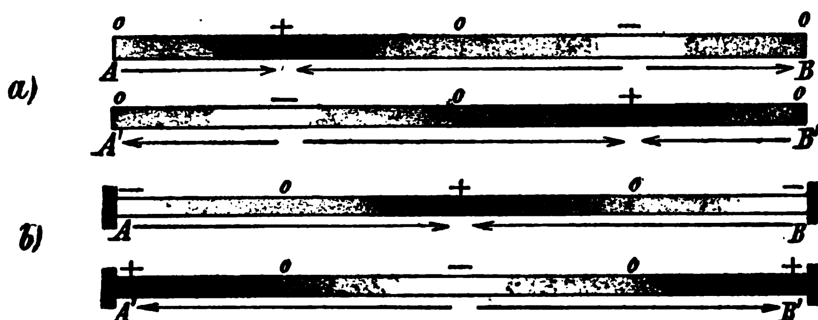
$$\xi = A_i\cdot \sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi\cdot\beta t}{l}.$$

Differentiiren wir wiederum nach x, so ergiebt sich

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = A_i\frac{\pi}{l}\cdot\cos\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi\cdot\beta t}{l},$$

welcher Ausdruck für $x = \frac{l}{2}$ gleich Null wird, demgemäss die Saite beim Longitudinalgrundton in ihrer Mitte einen Bauch besitzt.

Die Schwingungsdauer und die Schwingungszahl ist genau dieselbe wie bei einem an beiden Enden freien Stabe. Auch die Tonhöhe der übrigen Obertöne ist in beiden Fällen dieselbe und nur die Abtheilungsart zeigt eine Verschiedenheit. Um dies für die 2. Oberschwingung noch deutlicher zu machen, wollen wir die Fig. 240 betrachten, die überhaupt noch mancherlei zu erläutern



(Ph. 240.)

gestattet. Die Fig. stellt in a) einen Stab *AB*, *A'B'*, mit beiderseits freien Enden, in b) einen solchen mit beiderseits festen Enden dar und können wir uns bei b) anstatt eines Stabes auch eine Saite denken. Auf der Länge des Stabes sind Schattirungen angebracht und bedeuten die dunkelsten mit + bezeichneten Stellen »Verdichtungen«, die ganz hellen mit — bezeichneten Stellen »Verdünnungen« und die mittels stark schattirten Stellen 0 die sogen. »Bäuche«. Bei a) sowohl wie bei b) ist der Stab in zwei um eine halbe Schwingungszeit auseinander liegende Schwingungsphasen dargestellt. Fig. 240*a* stellt in *AB* den Stab vor im Moment, wo im linken Viertel vom linken Ende aus gerechnet eine Verdichtung stattfindet; im selben Moment wird dann im Viertel vom rechten Ende aus gerechnet eine Verdünnung eingetreten sein. Denken wir, dass von diesem Momente aus gerechnet der Stab eine halbe weitere Schwingung vollendet hat, so ist der Zustand wie Fig. 240*a* bei *A'B'* geworden: an der Stelle, wo *AB* eine Verdichtung zeigte, ist jetzt eine Verdünnung entstanden und umgekehrt; die Stellen der Bäuche bleiben während der Schwingungen, was sie sind. Die Stellen + und — entsprechen demgemäss den Knotenstellen. Bei b) zeigt *AB* bei seiner 2. Longitutinaloberschwingung in der Mitte eine Verdichtung und gleichzeitig an den beiden Enden die Mitte von je einer Verdünnung, eine halbe Schwingungszeit später ist der Zustand wie bei b) *A'B'*. Um zu zeigen, wie die Querschichten gerade in den beiden Schwingungsmomenten bei a) und b) im Schwingen begriffen sind, wurden noch Pfeile beigezeichnet. Man wird den Zusammenhang der Pfeilrichtungen mit den Verdichtungen und Verdünnungen bald erkennen, und namentlich erkennen, wie die Mitten der langen Pfeile den Stellen der Bäuche entsprechen.

Wir können die Auffassuug des Zusammenhangs noch anders gestalten, wenn wir den Begriff der »Wellenlänge« festhalten. Wie in dem Artikel allgemeine Wellenlehre auseinandergesetzt wurde, versteht man bei der Longitudinalbewegung unter Wellenlänge die Strecke von einer Verdichtung bis zur nächsten, oder von einer Verdünnung bis zur nächsten, während die Strecke von der Mitte einer Verdichtung bis zur Mitte einer benachbarten Verdünnung eine $\frac{1}{2}$ Wellenlänge ist. Ebenso ist die Strecke von der Mitte einer Verdichtung oder der Mitte einer Verdünnung bis zur Mitte eines Bauches gleich einer $\frac{1}{4}$ Wellenlänge. Beim 2. Oberton ist demgemäss die Länge des ganzen Stabes l gleich einer ganzen Wellen-

länge a des betreffenden Tones. Denn l enthält z. B. bei Fig. 240a, für AB von links nach rechts gerechnet, die Strecke 0 + als $\frac{1}{4}\lambda$, die Strecke + — als $\frac{1}{2}\lambda$, die Strecke — 0 als $\frac{1}{4}\lambda$ in Summa demnach 1λ.

Beim Grundton liegt beim beiderseits freien Stab ein Knoten in der Mitte des Stabes und je ein Bauch an den Enden und ist demgemäss die Länge l des Stabes gleich $\frac{\lambda}{2}$. Allgemein: bedeutet i die Ordnungszahl des Obertons eines solchen oder eines an beiden Enden festen Stabes oder einer Saite, l deren Länge so wie λ_i die betreffende Wellenlänge des Tons, so besteht die wichtige Gleichung

$$l = \frac{i' \cdot \lambda_i'}{2} \quad \ldots . \tag{7}$$

oder

$$\lambda_{i'} = \frac{2l}{i'} \quad \ldots . \tag{8}$$

eine Gleichung, die bald in ihrer weiteren Bedeutung sich zeigen wird.

5) Wenn wir aus Gleichung (7) den Werth $\frac{i' \cdot \lambda}{2}$ für $l = L$ in Gleichung (4*) einsetzen, bekommen wir

$$N_i' = \frac{1}{\lambda_{i'}} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot g}{s}}$$

oder

$$\lambda_{i'} N_{i'}' = \sqrt{\frac{E \cdot g}{s}} \quad \ldots . \tag{9}$$

oder

$$\lambda_{i'} = \frac{\sqrt{\frac{E \cdot g}{s}}}{N_{i'}'} \quad \ldots .$$

Achten wir darauf, dsss die Schwingungszahl N_i' gleich dem reciproken Werth der Schwingungsdauer und umgekehrt $1/N_i' = T_i'$ ist, so besteht auch die Gleichung

$$\frac{\lambda_i}{T_i'} = \sqrt{\frac{E \cdot g}{s}}$$

Nach einem Hauptsatze der allgemeinen Wellenlehre ist aber der Quotient λ/T nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in dem betreffenden Medium. Denn in der Zeit, in welcher eine Schwingung vollendet ist, pflanzt sich die Schwingungsbewegung progressiv um eine Wellenlänge fort; folglich ist $v = \lambda/T'$ oder allgemein $v = \lambda_i/T_i'$. Hieraus ergiebt sich aber der sehr bemerkenswerthe Zusammenhang:

$$v = \sqrt{\frac{E \cdot g}{s}} \quad \ldots . \tag{10}$$

Es lässt sich demgemäss auch das v bestimmen, wenn ausser g und s auch der Elasticitätsmodul des betreffenden Stoffes bekannt ist. Besser ist es aber, wenn man zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit die Gleichung (9) verwendet. Denn da rechts gemäss Gleichung (10) der Wurzelausdruck gleich v ist, so besteht die Gleichung

$$v = \lambda_i N_i' \quad \ldots . \tag{11}$$

oder auch mit Rücksicht auf Gleichung (8)

$$v = \frac{2l}{i} \cdot N_i \quad \ldots . \tag{12}$$

Man bestimmt demgemäss die Anzahl der Schwingungen N_l' und multiplicirt diese Zahl mit der doppelten Länge des Stabes. Fast ausschliesslich wird hierbei wohl der Grundton oder bei gewissen Versuche, welche wir hernach kennen lernen werden, auch der 2. Oberton verwendet.

Diese letztere Methode: die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls durch feste Körper hindurch aus der Anzahl der Schwingungen und der Länge eines in Longitudinalschwingungen versetzten Stabes zu bestimmen, wurde zuerst von CHLADNI zur Anwendung gebracht und muss diese Anwendung als eine der interessantesten und wichtigsten Errungenschaften betrachtet werden, welche wir diesem hochbedeutenden Forscher zu verdanken haben. Indem CHLADNI die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft als Einheit ansah, fand er für

Zinn	7·5	Eichenholz	10·7
Silber	9·0	Buche	12·5
Messing	10·7	Ahorn	13·3
Kupfer	12·0	Ulme	14·4
Eisen	16·7	Linde	15·0
Gebrannte Erde .	11·0	Fichte	16·8
Glas	16·7	Tanne	18·0

6) Die Formeln für die Transversal- und Longitudinalschwingungen der Stäbe enthalten als eine Hauptgrösse den »Elasticitätsmodulus«. Falls diese Formeln dazu dienen sollten, die Schwingungszahlen N oder N' zu bestimmen, muss demgemäss E bekannt sein, eine Voraussetzung, der nicht immer entsprochen wird. Denn wenn auch bei vielen Körpern der Elasticitätsmodulus hinreichend genau bekannt ist, so ist er bei anderen nicht oder nicht hinreichend genau bekannt. Aber gerade dieser Umstand lässt die Schwingungen der Stäbe und namentlich die Longitudinalschwingungen wiederum in anderer Hinsicht bedeutungsvoll erscheinen, indem man aus ihnen nicht N, sondern gerade E bestimmt. Diese Bestimmung des Elasticitätsmodulus pflegt man die »akustische« zu nennen und ist sie von besonderem Werthe gegenüber der »mechanischen«, welche letztere einen umfangreichen Apparat und eine sehr solide Aufstellung des Apparats nebst sehr sorgfältiger Messung verlangt.

Soll nun E auf akustischem Wege bestimmt werden unter Benutzung unserer Formeln für die Stäbe, so setzt dies voraus, dass N als bekannt oder als direkt bestimmbar angesehen werden darf. Dies ist nun in der That der Fall. Die Anzahl der Schwingungen eines Stabes lässt sich auf verschiedenen Wegen mit Genauigkeit bestimmen. Da die Formeln für die Transversalschwingungen der Stäbe complicirter sind wie die für die Longitudinalschwingungen, so benutzt man vortheilhafter diese letzteren. Man hat also, wenn man einen beiderseits freien Stab voraussetzt und die Gleichung (4) beachtet, für E jetzt die Gleichung

$$E = \frac{4 \cdot N'^2 \cdot L^2 \cdot s}{g} \quad \ldots \quad (13)$$

wobei angenommen wird, dass man den Longitudinal-Grundton gelten lassen will. Soll E in Kilogrammen erhalten werden, so muss, der Bemerkung entsprechend, welche der Gleichung (4) angeschlossen wurde, L in Metern, g in Millimetern und s wie gewöhnlich angegeben sein.

Was die Bestimmung von N' anlangt, so muss noch auf den folgenden Umstand aufmerksam gemacht werden. Bekanntlich ist das Ohr, wenn es die richtige

[1]) In J. H. VOIGT's Magazin für den neuen Zustand der Naturkunde. Jahrgang 1799.

sondere dann, wenn der Vergleichston vielleicht in einer anderen Klangfarbe auftritt. Ein solcher Irrthum tritt häufig bei Longitudinaltönen ein, da dieselbe meistens sehr hoch sind und man genöthigt ist, das N' nach einer tiefer gestimmten Octave eines anderen tongebenden Körpers zu bestimmen. Es liegt bei den Bestimmungen, welche ich häufig gemacht habe, die Sache z. B. so, dass ein APPUNN'sches Sonometer, mit Harmonikazungen construirt, benutzt wird, dessen Töne der »kleinen« Octaven von $c = 128$ bis $c_1 = 256$ angehören und mit 4 zu 4 Schwingungen in 32 Stufen aufsteigen. Diesen Tönen gegenüber kann man bei einem hohen Longitudinalton zweifelhaft sein, ob ein N' um 2 oder 3 oder 4 Oktaven höher ist wie der Harmonikaton. Eine solche Ungewissheit und ein hiermit in Verbindung stehender Fehler wird jedoch bald entdeckt, indem bei einem solchen Fehler E, worüber man doch schon so ungefähr eine Annahme machen zu dürfen glaubt, so auffällig verschieden erhalten wird, dass man merkt, es müsse wohl das N' um eine oder zwei Oktaven falsch angenommen sein.

Ein Beispiel möge diese Methode erläutern. Ein kreisrunder Stahlstab von 1·398 *m* Länge gab einen Longitudinalgrundton, der mit No. 25 der APPUNN'schen Sonometers mit einem tiefsten Ton = 126 Schwingungen den Octaven nach genau übereinstimmte. Dies No. 25 war gleich $126 + 4 \cdot 25 = 226$ Schw. Gesetzt ich hätte angenommen, dass N' gleich der zweiten Octave von 226 sei, so wäre $N' = 226 \cdot 4 = 904$. Der hiermit berechnete Werth von E ist gleich 5080 und ergiebt sich sofort, dass die Annahme für N' eine irrige war und dass N' nicht als die 2., sondern als die 3. Oktave von 226 anzusehen war. Es ist also anstatt des angenommenen $N' = 904$ ein $N' = 2 \cdot 904$ und statt N'^2 ein $2^2 \cdot 904^2$ einzusetzen, dem fürs Endresultat genügt wird, wenn wir unseren Werth 5080 mit 4 multipliciren um $E = 20320$ zu erhalten.

7) Bei dieser Methode der Bestimmung des Elasticitätsmodulus ist die Grösse s, das specifische Gewicht, als bekannt vorausgesetzt. Doch wäre es erwünscht, eine Methode zu besitzen, bei welcher man dieser Grösse nicht bedarf. Man gelangt hierzu durch folgende Betrachtungen. In der Formel für die Longitudinalschwingungen lässt sich in dem Wurzelausdruck $\sqrt{\frac{E \cdot g}{s}}$ das s auch durch einen anderen Ausdruck ersetzen. Bezeichnen wir nämlich den Querschnitt einer Saite (oder eines Stabes) mit $q = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$, wo d den Durchmesser der Saite bedeutet, so ist das Gesammtgewicht eines Saitenstücks gleich $q \cdot L \cdot s = p$ und somit $s = \frac{p}{q \cdot L} = \frac{4p}{d^2 \pi \cdot L} = \frac{4p}{d^2 \pi}$, falls man unter p das Gewicht der Längeneinheit der Saite versteht. Demgemäss ist auch

$$N' = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E \cdot g \cdot d^2 \pi}{4 \cdot p}}.$$

Für die Transversalschwingungen des Grundtons derselben Saite ist ferner

$$N = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{P \cdot g}{p}}$$

und demgemäss nun

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{\frac{E \cdot d^2 \cdot \pi}{4 \cdot P}}.$$

Hieraus folgt

$$E = \frac{N'^2}{N^2} \cdot \frac{4P}{d^2 \pi},$$

wobei wir uns nur merken wollen, dass, wenn E in Kilogrammen gefunden werden soll, P ebenfalls in Kilogrammen ausgedrückt sein muss. Der Durchmesser d muss ferner in Millimetern gemessen sein. Zur Bestimmung von E hat man demgemäss nötig, neben der Spannung P der Saite, die ja unmittelbar gegeben ist, die Schwingszahl N' des Longitudinal-Grundtons, N des Transversalgrundtons, sowie den Durchmesser d der Saite zu bestimmen, welches letztere mittelst einer Mikrometerschraube leicht gelingt. Ein Beispiel mag die Methode erläutern.

Eine 1 *m* lange Stahlseite ergab nach dem APPUNN'schen Sonometer beim Longitudinalton eine höhere Octave des Tons No. 8 gleich $126 + 32 = 158$ Schwingungen. Da ferner der Longitudinalton die 4. Octave hiervon war, so war $N' = 158 \cdot 2^4 = 2528$ Schwingungen. Ferner ergab sich der Transversalgrundton als die tiefere Octave vom Ton No. 10 gleich $\frac{126 + 10 \cdot 4}{2} = \frac{166}{2}$ d. h. $N = 83$ Schwingungen. Mittelst einer Mikrometerschraube wurde d gleich 0·414 *mm* gemessen. Die Saite war mit 3 *kg* gespannt. Es ist somit hiernach

$$E = \frac{2528^2}{83^2} \frac{4 \cdot 3}{0{\cdot}414^2 \cdot 3{\cdot}1415} = 20675 \; kg.$$

8) Die Schallschwingungen bei der Gruppe der gasförmigen Körper kann nur eine longitudinale sein und sind die Gründe hierfür im Artikel über die »Transversalschwingungen tönender Körper« hervorgehoben worden. Die hohe Bedeutung der Schallschwingung in Gasen, insbesondere der Hauptsache nach in der atmosphärischen Luft besteht nicht blos in dem Faktum, dass solche Körper auch Töne zu erzeugen vermögen, sondern vor allem darin, dass es ja ein Gas, nämlich die athmosphärische Luft ist, welche die Schwingungsbewegungen anderer tönender Körper aufnimmt und von diesem Körper aus zu unserem Ohre weiter leitet. Fehlt dieses Zwischenmedium der Luft, so hört auch die Wahrnehmung eines Tones für uns auf. Indem wir als primär schwingenden Körper z. B. eine Stimmgabel voraussetzen, werden wir als die ursprüngliche Bewegung eine stehende Transversalschwingung der Gabel haben; diese Bewegung überträgt sich auf die Luft und wird in dieser in eine fortlaufende Longitudinalschwingung umgesetzt, bei welcher Verdichtungen und Verdünnungen sich fortpflanzen; diese treffen unser Ohr, passiren zunächst den äusseren Gehörgang, schlagen sodann an das Trommelfell an und rufen bei diesem wiederum eine stehende Transversalbewegung hervor, deren Weiterführung nach dem inneren Ohre hier nicht zu betrachten ist.

Ueberall, wo wir es mit fortlaufenden Wellen zu thun haben, kommt das in Betracht, was wir »Schalleitung« zu nennen pflegen und interessirt uns hierbei ganz besonders auch die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Wellen fortflanzen, mit welcher sie das Medium »weiterleitet». Demgemäss ist das Hauptschema aller Schallbewegung und Schallwahrnehmung folgendes.

1) Schallquelle,	2) Schalleiter,	3) Schallempfänger
Primärer schwingender Körper mit stehenden Schwingungen.	Luft mit fortlaufenden Schwingungen	Ohr mit stehenden Transversal-schwingungen.

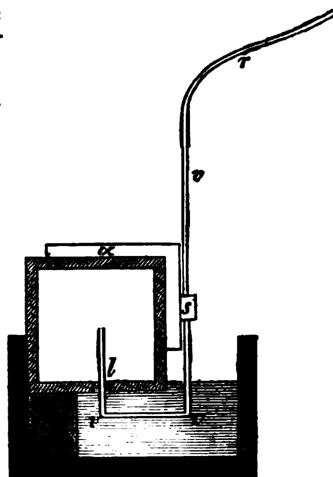
Betracht. Aber wir wissen, dass dieses Medium auch im Stande ist, als primär schwingender Körper mit stehenden Schwingungen aufzutreten und so wie ein anderer schwingender Körper Töne zu liefern. Wir haben es also bei den Gasen, insbesondere bei der Luft, auch mit demjenigen Medium zu thun, welches bei der überaus grossen und mannigfachen Gruppe der Blasinstrumente die Rolle spielt. Hierbei kommt die Luft durchweg in einer begrenzten Form vor, feste Wände hüllen eine Luftmasse ein, diese Luftmasse geräth in stehende Longitudinalbewegungen, diese theilen sich der übrigen weiten Luftmasse mit, werden hier zur fortlaufenden Longitudinalbewegung, um zuletzt sich wieder auf unser Ohr zu werfen und das Trommelfell in eine stehende Transversalbewegung zu versetzen.

Unendlich mannigfaltig kann die Begrenzung der Luftmasse bei den Blasinstrumenten sein, wie wir ja schon daraus erkennen, dass fortwährend unter unseren Augen neue Formen von Instrumenten erfunden und practisch verwerthet werden. Es kann nicht in unserer Absicht liegen, uns hier weiter zu verbreiten, vielmehr müssen wir uns beschränken auf die einfachsten Formen und diese sind die cylindrischen oder prismatischen geradlinigen Röhrenformen, das was man auch wohl mit dem Namen einer »Luftsäule« bezeichnet. also auch das, was in der Praxis als »Orgelpfeife« figurirt. Hierbei wollen wir aber gleich bemerken, dass, wenn wir jetzt von den Schwingungen und Tönen einer Orgelpfeite reden, wir nur die sogenannten »Labialpfeifen« meinen, dass dagegen nicht an die »Zungenpfeifen« gedacht werden soll. Diese letzteren, bei denen ja, wie bekannt, vor allem eine schwingende Lamelle, also ein transversalschwingender Körper vorkommt, sind tongebende Körper anderer Art und kommen hier jetzt nicht zur Betrachtung.

9) Man sollte meinen, dass die Orgelpfeife, die schon Jahrhunderte hindurch als tongebender Körper verwendet wird und mit ihren Tönen das ganze Wesen des Menschen zu ergreifen vermag, indem sie ja recht eigentlich ihre Verwendung beim Gottesdienste findet, man sollte meinen, dass ein solcher Apparat, mit dem sich so überaus viele Theoretiker und Praktiker beschäftigt haben, nach jeder Richtung hin erkannt sei und dass man kaum bei ihm noch eine Frage aufwerfen könne, die nicht sofort ihre Beantwortung erhielt. Dem ist aber nun ganz und gar nicht so, vielmehr müssen wir heute noch gestehen, dass der Bewegungsvorgang und Schwingungsvorgang bei der Luft, die ja das tönende Element bei der Orgelpfeife abgiebt, keineswegs vollkommen erforscht und erkannt ist, ja man muss, trotz aller Untersuchungen, die namentlich auch in neuerer Zeit gemacht worden sind, gestehen, dass die Frage über die eigentliche Entstehunng des Tones bei den Orgelpfeifen noch nicht endgültig gelöst ist, nicht so gelöst ist, dass man sagen kann: man übersehe klar und deutlich den Zusammenhang der einzelnen Factoren, man habe nicht mehr mit Vermutungen und einem wenig beweisenden Raisonnement, sondern mit vollgültigen Beweisen und zwar vollgültigen experimentellen Beweisen zu thun. Denn dass mit Redensarten wie z. B. »der aus der Stimmritze kommende Luftstrom bricht sich an der Oberlippe und erzeugt so stehende Wellen etc.« nichts gewonnen ist, leuchtet ein. Ich halte an der, auch in meiner »Akustik« vertretenen Auffassung fest, nämlich an der Auffassung, dass die Töne der Orgelpfeifen »Töne stärkster Resonanz« sind und dadurch zu Stande kommen, dass der aus der Stimmritze austretende Luftstrom gegenüber der Oberlippe einen Reibungston erzeugt, der mit der Schnelligkeit der Luftausströmung an Höhe wächst, der ferner von der Stellung

des Labiums abhängig ist und eben diejenige Höhe erreichen muss, welche für den Eigenton der darüberstehenden Luftsäule passt, wenn letztere in kräftiges Mitschwingen geraten soll. Hat der Reibungston diese richtige Höhe nicht, so erfolgt das möglichst beste Mittönen der Luftsäule nicht und sagt man von dieser dann, »sie spreche nicht an«. Der ganze Vorgang ist demgemäss ein Vorgang der Resonanz, die namentlich deshalb so kräftig ausfällt, weil sie unter den möglichst günstigen Verhältnissen zu Stande kommt. Denn es besteht ein bemerkenswerthes Gesetz, dass feste Körper am besten durch feste, flüssige am besten durch flüssige und gasförmige Körper am besten durch gasförmige in Resonanz versetzt werden können. Die Vibrationen des Reibungstones sind aber Luftvibrationen und das Medium des resonirenden Körpers ist ebenfalls Luft.

10) Da die Luftsäule nur longitudinale Schwingungen ausführen kann, so haben wir es bei ihr mit Verdichtungen und Verdünnungen und ferner mit sogen. Bäuchen zu thun. Eine erste wichtige Frage kann nun sein, wo liegen diese Gebilde auf der Länge des tönenden Luftrohres? Auch diese Frage hat ganz besondere Schwierigkeiten der experimentellen Forschung und Entscheidung bereitet. Am meisten endschied hier in einem Sinne eine Untersuchung von RUD. KÖNIG[1]), dem ja die Akustik so viele werthvolle Errungenschaften zu verdanken hat. Zur Erläuterung diene die Fig. 241. Sie stellt einen Querdurchschnitt durch das Pfeifenrohr und die übrigen Theile der Versuchseinrichtung dar. Der einfach schief schraffirte Theil ist der Querschnitt der Pfeife, die ihrer Länge nach 2·330 *m* und in der Quere 12 *cm* im Quadrat mass. Diese Pfeife war in der Längsmitte ihrer Rückwand mit einer 1 *cm* breiten Spalte *l* durchsetzt. Befestigt wurde die Pfeife auf einer Unterlage, die in der Fig. 241 in dem doppelt schief schraffirten Theile zu sehen ist. Der schwarz angelegte Theil der Figur stellt den Querdurchschnitt durch einen Trog vor, in welchen die Pfeife mit der Rückwand nach unten gelegt wurde. Wurde ferner in diesen Trog Wasser gegossen — in der Figur horizontal schraffirt — so kam durch dieses die Pfeife auf der Rückwand wieder zum Verschluss, indem das Wasser die Spalte *l* ausfüllte. Ferner bedeutet α einen rechtwinkligen Schieber, der auf der Pfeife hin und her bewegt werden konnte. An diesem Schieber war durch eine passende Klemmvorrichtung *s* ein zweifach rechtwinklig umgebogenes Glasrohr *vv* befestigt, welches letztere mit dem kurzen, offenen Ende bis in die Längsaxe der Pfeife hineinragte und am anderen Ende mit einem Gummischlauch *r* communicirte. Beim Versuch wurde *r* mit seinem freien Ende in den Gehörgang des Beobachters eingesetzt, um so zu hören, an welchen Stellen der Pfeife der Ton am stärksten, an welchen er am schwächsten wirkte.



(Ph. 241.)

Die Verschiebung des Schiebers α incl. der Röhre *v* konnte aufs genaueste gemessen werden. An den Stellen der Pfeife, an welchen die Verdichtungen und Verdünnungen wechseln, muss der Ton ein Maximum seiner Stärke erreichen,

[1]) »Quelques expériences d'Acoustique«, Paris 1882, pag. 206—217, und hiernach WIED. Ann. 13, pag. 569—582.

während an den Bäuchen das Minimum der Tonstärke eintritt. Es zeigte sich jedoch, dass auch hier das betreffende Beobachtungsorgan, also in diesem Falle das Ohr, besser urtheilte, wenn es Abweichungen vom Minimum der Stärke als vom Maximum erkennen sollte und war demgemäss die Bestimmung der Knotenstellen nicht sicher, während die Stellen der Bäuche mit der grössten Schärfe bestimmt werden konnten. Gleitet man, sagt König, mit dem Suchrohre (v) durch eine Bauchstelle hin und her, so lässt sich das plötzliche Auftreten der Verstärkung des Tons auf beiden Seiten der Bauchstelle wie Glockenschläge vernehmen. Diese beiden Punkte, wo der plötzliche Uebergang von der geringen zu der beträchtlich stärkeren Intensität des Tones stattfindet, markirt man und in der Mitte zwischen beiden liegt dann der Bauch. Diese zwei Punkte rücken bei den höheren Theiltönen nicht nur absolut, sondern auch im Verhältnis zu der Wellenlänge des Tons immer näher aneinander nnd werden immer schärfer ausgeprägt, sodass, wenn sie beim zweiten Ton der offenen Pfeife um 14 *cm* auseinander liegen, also um $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{7}$ der halben Wellenlänge, sie beim achten Ton nur noch um 2 *cm* von einander entfernt sind, eine Länge, die blos ungefähr dem $\frac{1}{15}$ der halben Welle des betreffenden Tons entspricht.

Bei einer so langen Pfeife, wie sie von König verwendet wurde, lassen sich, wenn sie offen ist, die Obertöne leicht bis zum achten erhalten; bei der gedeckten kommen nur die ungeradzahligen Obertöne vor und beobachtete König noch bequem den 17. Oberton. Um aber einen bestimmten Oberton zu erhalten, wurde einestheils der Winddruck H, mit dem die Pfeife angeblasen wurde, verändert und andierntheils auch die Oberlippe der Kernspalte gegenüber verstellt. Je grösser H, desto höher der Oberton; je kleiner der Abstand A der Oberlippe von der Kernspalte, desto höher ebenfalls der Oberton. So war H bei dem III. Oberton der offenen Pfeife gleich 4 *cm* und A gleich 27 *cm*, dagegen beim VIII Oberton H gleich 10 *cm* und A gleich 15 *cm*. Fast dieselben Werthe von H und A ergaben sich für den V. und XVII. Oberton der gedeckten Pfeife. In der folgenden Tabelle enthält nun die erste Verticalcolumne die Ordnungszahl des betreffenden Obertons, in der zweiten Columne die Schwingungszahl N des betr. Obertons und zwar in ganzen Schwingungen gerechnet. Ferner bedeutet nach den Signirungen die Columne

n die Anzahl der Bäuche;

E_1 den Abstand des nächsten Bauches von der Kernspalte in *mm*;

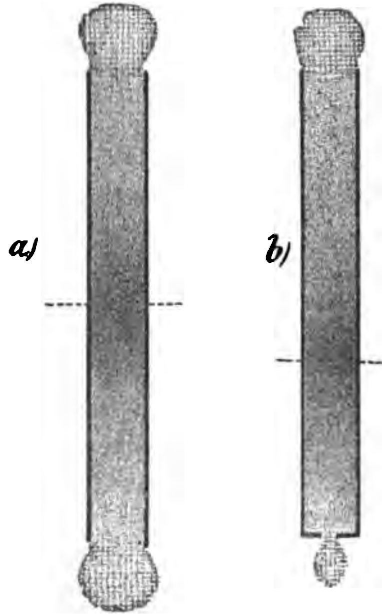
E_2 den Abstand des letzten Bauches vom offenen Ende der Pfeife;

$\frac{\lambda}{2}$ den mittlereren Abstand der Bäuche: identisch mit der mittleren halben Wellenlänge des betr. Tons;

v die aus der Grösse $\frac{\lambda}{2}$ berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in Metern.

Ord.	N	n	E_1 *mm*	E_2 *mm*	$\frac{\lambda}{2}$ *mm*	v *m*	d_1 *mm*	d_2 *mm*	s *mm*	L^* *m*
III.	188	2	620	810	900	338·4	280	90	370	2·700
IV.	256	3	412	602	658	336·9	246	56	302	2·632
V.	328	4	315	477	513	336·5	198	36	234	2·564
VI.	400	5	263	368	425	340·0	162	57	219	2·549
VII.	468	6	208	298	365	341·6	90	67	157	2·487
VIII.	540	7	173	271	314	339·1 338·77	98	43	141	2·471

11) Diese Experimente KÖNIG's belehren uns über mancherlei. Zunächst zeigt die Columne *n*, dass bei jedem Oberton durchs Experiment sich zwei Bäuche weniger constatiren liessen, wie wir sonst bei einem beiderseits offenen Rohre anzunehmen pflegen. Ein solches Rohr zeigt nach den üblichen Annahmen, wenn es seine Grundschwingung liefert, in der Mitte 1 Knoten und an beiden Enden je einen, also im ganzen 2 Bäuche. Beim 2. Oberton treten 2 Knoten, ein Bauch in der Mitte und je ein Bauch an den Enden, also 3 Bäuche auf. So müsste denn der 3. Oberton 3 Knoten und 4 Bäuche haben. Es muss dem gegenüber aber bemerkt werden, dass auch bei einer beiderseits ganz gleich verlaufenden Luftsäule mit beiderseits offenen Enden der Schwingungsvorgang keineswegs so verläuft, dass gerade an den offenen Enden sich die Bäuche befinden. Die stehende Schwingung greift vielmehr beiderseits über die offenen Enden hinaus und fallen demgemäss die beiden äussersten Bäuche ausserhalb der Säule in den freien Luftraum. Fig. 242 versinnlicht diesen Vorgang für die Grundschwingung und zwar *a* bei gleichen offenen Enden, *b* bei einer Luftsäule, welche an einem Ende nicht völlig offen ist, sondern einen Deckel mit einem Loche als theilweisen Abschluss erhalten hat. Die Schraffirung deutet an, wie bei *a* genau in der Mitte ein Knoten liegt, für welchen aber der Moment einer Verdichtung angenommen ist. Bei *b* dagegen liegt dieser Knoten näher nach dem nur theilweise offenen Ende hin. Die Schwingungen greifen auch hier beiderseits über die Enden hinaus in die freie Luft. Eine Pfeife mit einer Labiumeinrichtung an einem Ende kann als eine Röhre Fig. 242*b* entsprechend angesehen werden. In ähnlicher Weise gestalten sich auch die Verhältnisse bei den folgenden Obertönen.



(Ph. 242)

Die Zahl der beobachteten Bäuche bei den KÖNIG'schen Versuchen steht demnach nicht im Widerspruch mit den Erscheinungen bei Luftsäulen mit beiderseits offenen Enden. Um den Zusammenhang aber noch etwas vollständiger zu übersehen, wurden in obiger Tabelle noch die Columnen d_1, d_2, s und L^* gebildet. In der Columne d_1 steht die Anzahl Millimeter, um welche man von der Kernspalte aus nach aussen unterhalb vom Labium gehen müsste, um wieder auf einen Bauch zu kommen, dessen Entfernung von dem der Kernspalte am nächsten beobachteten Bauch gleich der gefundenen mittleren Entfernung zweier Bäuche gleich $\frac{\lambda}{2}$ zu setzen wäre. Der unterste Bauch bei N_ν steht z. B. um $E_1 =$ 315 *mm* von der Kernspalte ab; $\frac{\lambda_\nu}{2}$ beträgt 513 *mm*; folglich müsste man von der Kernspalte aus um $d_1 = 513-315 = 198$ *mm* noch unter die Kernspalte gehen, um auf einen Bauch zu kommen. Die Columne d_2 enthält die ähnlichen Zahlen für das offene obere Ende der Pfeife. Der von diesem Ende um $E_2 = 477$ *mm* entfernte nächste Bauch für N_ν würde einen ausserhalb der Pfeife gelegenen

nächsten Bauch bekommen, der um $d_2 = 513-477 = \times 56\,mm$ vom offenen Ende entfernt läge. Die Columne s enthält die Summe $(d_1 + d_2)$, welche Summe zur Länge der Pfeife nämlich 2·330 m hinzugefügt, eine beiderseits offene Pfeife lieferte, die als eine ideale zu betrachten wäre, indem sie z. B. für N_V die Abtheilungen so zeigte, wie die Fig. 243, bei welcher wirklich 6 Bäuche und 5 Knoten vorhanden sind, mit der speciellen idealen Annahme, dass zwei dieser Bäuche genau an den offenen Enden liegen. Die Bäuche sind in der Figur mit $b_1 \ldots b_6$, die Knoten mit $k_1 \ldots k_5$ bezeichnet und deuten die k mit ungeraden Indices Verdichtungen, die k mit geraden Indices dagegen die im selben Moment stattfindenden Verdünnungen an den Knotenstellen an.



(Ph. 243.)

Man erkennt aus den vorausgehenden Darstellungen, dass die Methode, aus der Länge L und der Anzahl der Schwingungen N einer Luftsäule, insbesondere einer Orgelpfeife, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu bestimmen, zunächst keine genaue werden kann. Denn, wenn wir unter Benutzung des Grundtons einer offenen Orgelpfeife diese Bestimmung machen wollten, so würde die Formel

$$v = 2L \cdot N$$

zur Anwendung kommen müssen. Aber wir sahen, dass die Strecke $2L$ nicht die Wellenlänge λ des betreffenden Tones repräsentirt, indem die beiden Bäuche für den Grundton der Pfeife ausserhalb derselben fallend anzunehmen sind und demgemäss L nicht ein $\frac{\lambda}{2}$ und $2L$ nicht ein λ, sondern weniger repräsentirt. Es müsste also zu L noch eine Grösse ΔL hinzugefügt werden, um v richtig zu erhalten. Diese Grösse ΔL hängt von verschiedenen Factoren ab, so dass sie nicht so ohne weiteres bekannt ist. Allen diesen Schwierigkeiten entgeht man aber nach den Untersuchungen König's, wenn man nicht die Länge der Orgelpfeife sondern die Grösse $\frac{\lambda}{2}$ oder die Entfernung zweier benachbarten Bäuche einführt, welche Entfernung ja sehr scharf bestimmt werden kann. Demgemäss wird allgemein, wenn der $i$te Oberton zur Bestimmung von v benutzt werden soll, bei welchem zwei benachbarte Bäuche im Sinne von König im gegenseitigen Abstand $\frac{\lambda_i}{2}$ gemessen sind, die Formel

$$v = 2 \cdot \frac{\lambda_i}{2} \cdot N_i = \lambda_i \cdot N_i$$

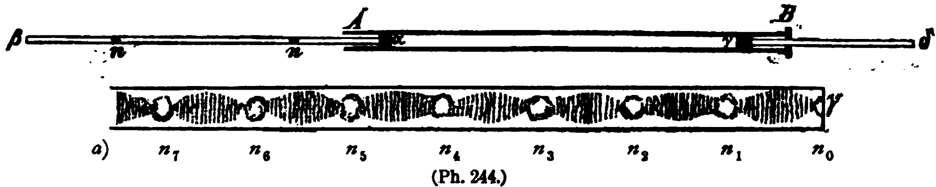
zur Anwendung kommen müssen. Um noch ein Beispiel aus der Tabelle zu geben, wäre für den 4. Oberton

$$v = 2 \cdot 658 \cdot 256 = 336896\ mm = 336 \cdot 9\ m.$$

12) Die Longitudinalschwingungen der Stäbe und der Luftsäulen sind auch durch verschiedene Untersuchungen Kundt's[1]) nutzbar gemacht worden in der Art, dass man jetzt im Stande ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in Gasen, festen und tropfbar flüssigen Körpern mit besonderer Schärfe zu bestimmen. Diese Untersuchungen gipfelten in einer Entdeckung Kundt's, welche man als die »Kundt'schen Staubfiguren« zu bezeichnen pflegt, und wollen wir diesem Gegenstande hier noch Aufmerksamkeit schenken, namentlich auch deshalb, weil diese Staubfiguren ein vorzügliches Mittel abgeben, um eine Auf-

[1]) Pogg. Ann. 127, Bd. 1865, pag. 487 u. f.; ferner ib., Bd. 135, pag. 337.

klärung über den Vorgang einer schwingenden Luftsäule, über die Abtheilungen hierbei u. s. w. zu erhalten. Es gestatten diese Figuren, ganz so wie die Methode KÖNIG's, die wir im Vorausgehenden betrachteten, die Lage der Knoten und Bäuche aufs genaueste festzustellen, aber mit dem Unterschiede, dass man bei der KUNDT'schen Methode nicht das Ohr zu Hilfe nimmt, sondern in einer Formgestaltung, welche der Staub in dem Luftrohr schliesslich dauernd behält, sofort die Knoten und Bäuche vor Augen hat. Man kann demnach die KÖNIG'sche Methode eine subjektive, die KUNDT'sche eine objektive nennen.



(Ph. 244.)

Fig. 244 versinnlicht die Einrichtung, welche getroffen werden kann, um diese Staubfiguren zu erhalten. *AB* stellt eine ca. 1·5 *m* lange Glasröhre von ca. 30 *mm* lichter Weite vor. Ins offene Ende *A* kann eine Glasröhre oder ein Glasstab αβ von etwa 15 *mm* Dicke eingeschoben werden, jedoch so, dass vorher an das Ende α dieses Stabes ein cylindrischer Korkstopfen befestigt wurde, der so dick sein muss, dass er eine Verschiebung von αβ noch gestattet, ohne dass hierbei etwa stärkere Reibung am Innern des Rohrs *AB* eintritt. Der Durchmesser des Stopfens muss also nur nahezu den inneren Durchmesser von *AB* erreichen. Die Länge αβ kann ebenso gross sein wie die von *AB*, doch können auch, je nachdem man bestimmte höhere oder tiefere Töne haben will, die Längen von αβ innerhalb weiter Grenzen variiren. Für andere Anwendungen kann aber auch anstatt eines Glasstabs oder einer Glasröhre ein Metallstab oder eine Metallröhre oder auch ein Holzstab genommen werden. Der Stab αβ möge der »Klangstab« heissen. Da er nur mit seinen Longitudinaltönen zur Verwendung kommt, so muss er zunächst in passender Weise mittelst einer oder zweier Klemmen, nach Art der in Fig. 239 dargestellten, über einer Tischplatte festgehalten werden. Eine Klemme ist nöthig, wenn der Stab αβ mit seinem Longitudinal-Grundton erklingen soll. Denn hierbei muss er in seiner Mitte eingeklemmt sein und auf seiner Hälfte nach α oder β hin mit einem nassen Lappen bezw., wenn er aus Metall oder Holz besteht, mit einem mit Harzpulver überstreuten Lappen gerieben werden. Der Stab αβ kommt hierbei, da er nur an einer Stelle unterstützt ist nicht in eine so sichere Lage, als wenn er an zwei Stellen unterstützt werden kann, d. h. wenn man nicht den Grundton, sondern den zweiten Oberton benutzt. Alsdann wird in je einem Viertel vom Ende α und β aus gerechnet an den Stellen *n* der Stab durch je eine Klemme der Fig. 239 festgemacht werden müssen. Dieses Festmachen darf jedoch nicht rigorös geschehen sondern nur annähernd, und habe ich, wie schon oben bemerkt, gefunden, dass man mit grossem Vortheil einen, bezw. zwei über den Stab αβ gezogene und über den Stellen *n* haftende Gummiringe verwendet, auf welche hernach die Backen der Klemmen aufdrücken. Ist der Stab αβ nun fest gelagert, so wird die »Luftröhre« *AB* mit dem Ende von *A* über das Ende von α gebracht und ihrerseits hernach möglichst genau so unterstützt, dass ihre Mittelaxe mit der von αβ coincidirt. Am Ende *B* wird ferner ein »Stempel« γδ verwendet, um das Luftrohr hier bei *B* zu einem gedeckten machen zu können und ausserdem auch, je nachdem der Stempel weiter oder weniger weit in *AB* hereingeschoben wird, die schwingende Luftsäule zwischen

sich ordentlich centrisch verschieben lässt, kann man auf das Ende B einen mit einem Loche durchsetzten Messingdeckel aufkitten, in welchem Loche der Stiel des Stempels hin und her gleiten kann. Der Apparat ist dann zum Versuche fertig.

Um diesen Versuch nun weiter anzustellen, bedarf es eines leichten Pulvers oder Staubs und eignet sich hierzu vor allem Korkfeilicht, welches leicht aus einem guten Korkstopfen mittelst einer mittelfeinen Holzraspel hergestellt werden kann. Vor allem muss dann das Luftrohr vollkommen trocken gemacht werden. Ist dies geschehen, so bringt man eine kleine Menge Korkpulver in die Röhre und vertheilt dies der Länge nach möglichst regelmässig in derselben. Sodann schiebt man die Luftröhre AB mit dem Ende A über α und streicht $\alpha\beta$ zwischen den Stellen nn an. Alsbald wird sich hierbei der Staub in eigenthümlichen Staubriefen wie sie in Fig. 244a versinnlicht sind, ordnen. Sollte es aber nicht alsbald geschehen, so verstelle man den Stempel $\gamma\delta$ oder auch, man verschiebe das Rohr AB bis eben die Staubriefen beim Anstreichen von $\alpha\beta$ sofort eintreten. Die Stelle γ muss nothwendig einem Knoten entsprechen. Von hier nach dem Ende α hin bilden sich weiter eine Anzahl Knoten n_1, n_2 . . . und sind die Stellen mitten zwischen diesen Knoten, die in der Figur sich als kleine Staubkreise documentiren, als die Bäuche zu betrachten. Am Ende α kann ebenfalls ein Knoten liegen, nämlich dann, wenn die Länge $\alpha\gamma$ gleich einer ganzen Zahl von Halbwellen des betreffenden Tons des Klangstabs ist. Ist diese Länge um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge grösser oder kleiner, so liegt der nächste Knoten vom Ende α um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge ab.

Es hängt von verschiedenen Verstellungen des Stempels ab, ob gerade die Staubfiguren sich so wie in der Fig. 244 zeigen. Jedenfalls aber liegt nahe am Ende γ stets ein Knoten, der sich in bestimmter Weise documentirt. Alle Stellen, welche dann gleich der Stelle an γ gebildet sind, sind dann ebenfalls Knoten. Die Entfernung zweier Knoten ist gleich $\frac{\lambda_i}{2}$ gleich einer halben Wellenlänge des betreffenden Tons und knüpfen sich an diese Grösse $\frac{\lambda_i}{2}$ nun die bedeutungsvollen Anwendungen der KUNDT'schen Methode.

13) Zunächst leuchtet ein, wie man sofort im Stande ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls durch die Luft in der Röhre zn bestimmen. Zu dem Ende misst man die Länge L einer möglichst grossen Zahl von Halbwellen zwischen der Mitte zweier Knoten, die nicht die nächsten an α und γ sind und dividirt diese Länge durch die Anzahl m der Halbwellen, um $\frac{\lambda}{2} = \frac{L}{m}$ zu erhalten. Ist dies geschehen, so benützt man die am Schlusse von Abschnitt 11 gegebene Formel, wobei vorausgesetzt wird, dass man den Longitudinalton des Stabes $\alpha\beta$ kennt. Ein Beispiel mag diesen Fall erläutern. Der Stab $\alpha\beta$ wurde mit seiner Grundschwingung benutzt und gab hierbei ein $N_l = 1648$ Schwingungen. Ferner fand ich, dass 12 Halbwellen im Luftrohr AB eine Länge L von 1207 *mm* einnahmen. Es war demgemäss $\frac{\lambda}{2} = 1207/12 = 100{\cdot}6$ *mm* und sonach $v = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot N = 201{\cdot}2 \cdot 1648$ *mm* $= 331{\cdot}5$ *m*.

Es leuchtet sofort ein, wie man das Rohr AB auch anstatt mit Luft mit einem andern Gase füllen kann und liess ich die Luft durch Leuchtgas verdrängen. Es fand sich, dass 9 Halbwellen auf 1218 *mm* gingen. Demgemäss war $\frac{\lambda}{2} = 135{\cdot}33$ *mm* und $v = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot N = 270{\cdot}7 \cdot 1648$ *mm* $= 446{\cdot}1$ *m*. Die »speci-

fische Fortpflanzungsgeschwindigkeit« des Leuchtgases wäre demgemäss gleich $V = \frac{446\cdot1}{331\cdot5} = 1\cdot33$. Hierbei ist aber zu erkennen, dass dies kein reines, sondern noch stark mit Luft gemengtes Leuchtgas war. Denn als die Luft sorgfältiger aus der Röhre *AB* herausgeschafft und durch Leuchtgas ersetzt wurde, gingen auf 8 Halbwellen 1177 *mm*; und war hiernach $\frac{\lambda}{2} = 147\cdot1\,mm$ und $v = 294\cdot2 \cdot 1648\,mm = 484\cdot8\,m$. Bei diesen Versuchen wurden die Gase, Luft und Leuchtgas genommen wie sie waren. Selbstverständlich müssen aber die Zahlen für v sich ändern, wenn wir völlig reine, von Wasserdampf und Kohlensäure befreite Luft und gereinigtes Leuchtgas nehmen. KUNDT fand bei seinen Versuchen, dass nahezu für

Luft	32	Halbwellen
Kohlensäure . . .	40	„
Leuchtgas	20	„
Wasserstoff	9	„

eintraten, so dass die specifischen Schallleitungen in diesen Gasen sich für

Luft	gleich	1·00
Kohlensäure	„	0·80
Leuchtgas	„	1·60
Wasserstoff	„	3·56

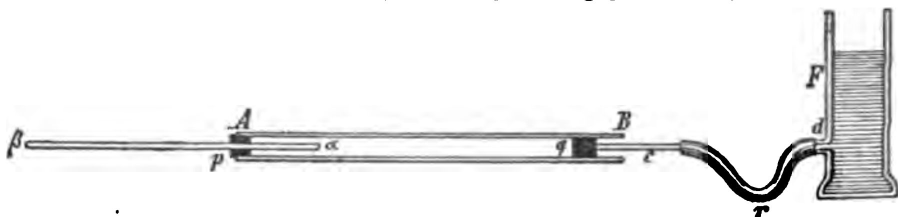
herausstellten, demgemäss sich der Wasserstoff auch hier wieder vor andern Gasen in bemerkenswerther Weise auszeichnet. Der erste Nutzen der KUNDT'schen Methode besteht also in einer überaus leichten und sicheren Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in **Gasen** und **Dämpfen**.

Die zweite Bedeutung der Methode besteht darin, dass man in sehr leichter Weise auch die Schallleitungsfähigkeit in **festen** Körpern bestimmen kann. Zu dem Ende ist daran zu denken, dass der Klangstab $\alpha\beta$, wenn er seine Longitudinal-Grundschwingung macht, genau in seiner Länge $2 \cdot \frac{\lambda^*}{4}$ misst, wenn wir mit λ^* die Wellenlänge des betreffenden Tons fürs Medium des Stabes bezeichnen. Demgemäss ist auch $v^* = 2 \cdot l^* \cdot N$. In unseren bisherigen Versuchen bestand $\alpha\beta$ in einem Glasstab, dessen Länge gleich 1505 *mm* war. Es war also $2l^* = 3010\,mm$ und $v^* = 3010 \cdot 1648\,mm = 4960\,mm$. Dieses v^* ist berechnet worden aus der Schwingungszahl N und der Länge $l^* = 2 \cdot \frac{\lambda^*}{4}$ des Stabes, d. h. diese Bestimmung von v^* ist diejenige, welche wir im Abschnitt 5 als die CHLADNI'sche kennen gelernt haben. Aber die Methode KUNDT's gestattet v^* zu finden, ohne dass N bekannt ist. Denn wir hatten beim ersten Versuche, wo wir Luft in der Röhre *AB* verwendeten, gefunden, dass 12 Halbwellen auf 1207 *mm* gingen und war demgemäss für die Luft $v = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot N = 201\cdot2 \cdot N \cdot mm$. Für unseren Stab $\alpha\beta$ ist ferner $v^* = 2 \cdot \frac{\lambda^*}{2} \cdot N$, mithin $v^*/v = \lambda^*/\lambda = 3010/201\cdot2 = 14\cdot96$, d. h. das betreffende Glas leitet den Schall ca. 15 mal schneller fort wie die Luft in der Röhre.

14) Die KUNDT'sche Methode, Longitudinalschwingungen in einem Körper zu erregen, kann auch leicht bei tropfbar flüssigen Körpern zur Anwendung kommen. Bereits CAGNIARD DE LA TOUR wies im Jahre 1834 nach[1]), dass eine in einer Glasröhre befindliche Flüssigkeitssäule, wenn die Glasröhre mit einem

[1]) Annal. de chim. et phys. T. LVI.

Orgelpfeife, die im Innern und Aeussern von Wasser umgeben war, tönte, sobald eben durch eine Druckpumpe Wasser durch die Pfeife getrieben wurde, ein Versuch, der sich auch leicht in anderer Form wiederholen lässt, wenn man über einen entsprechenden Druck in einer Wasserleitung verfügen kann. Im Anschluss an seine Untersuchungen über schwingende Luftsäulen, deren Bedeutung in den beiden vorausgehenden Abschnitten dargethan wurde, hat KUNDT in Verbindung mit O. LEHMANN im Jahre 1874 nachgewiesen[2]), dass auch eine in einer Röhre enthaltene Flüssigkeitssäule in ganz gleicher Weise, wie eine Luftsäule in Schwingung versetzt werden kann, und dass hierbei auch in ganz ähnlicher Weise die eigenthümlichen Rippen-Figuren bei einem auf der innern Basis der Röhre vertheilten Pulver sich bilden, welche Figuren dann in derselben Weise, wie die Staubfiguren bei den Gassäulen, zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls



(Ph. 245).

in Flüssigkeiten benutzt werden können. Fig. 245 versinnlicht eine hierbei getroffene Einrichtung. Unter der Voraussetzung, dass der Klangstab $\alpha\beta$ seinen 2. Oberton liefert, wird er in einem 1/4 von α aus, mittelst eines Kautschuckpropfens p ins Ende A des Flüssigkeitsrohrs AB eingesetzt. Am Ende B ist ein Stempel verschiebbar, bestehend aus einem cylindrischen Kautschuckpropfen q in welchen ein enges, beiderseits offenes Glasrohr c fest eingekittet ist, welches Rohr c einestheils mit der Flüssigkeit in AB und andererseits durch den Gummischlauch r und das Ansatzrohr d mit dem Gefäss F communicirt, welches letztere mit derselben Flüssigkeit, welche auch das Rohr AB enthält, bis zu passender Höhe angefüllt ist. Durch Hereinschieben oder Herausziehen des Stempels qc kann die Flüssigkeitssäule in AB verkürzt oder verlängert werden und bleibt AB, wenn es einmal ganz mit Flüssigkeit gefüllt ist, auch hierbei gefüllt, denn es dringt beim Hineinschieben von qc aus AB Flüssigkeit ins Reservegefäss F und umgekehrt beim Herausziehen von qc Flüssigkeit aus letzterem ins Rohr AB nach.

Soll der Versuch aber gelingen, so sind zwei Bedingungen zu erfüllen. Die eine besteht darin, dass jede Spur von irgend einem Gas, welches die Flüssigkeit in sich enthält, durch anhaltendes Kochen ausgetrieben wird. Insbesondere muss also, wenn Wasser verwendet wird, die Luft aus diesem vollkommen entfernt werden. Die zweite Bedingung liegt in der richtigen Wahl des feinen Pulvers, welches man in die Röhre bringt. Korkpulver lässt sich hier nicht verwenden, vielmehr muss statt seiner ein schweres, feines Pulver verwendet werden, als welches sich namentlich Eisenpulver *(ferrum limatum)* sehr gut erwies. Ueber die Riefenfiguren, welche dieses Pulver bildet, ist nichts weiter zu sagen, da sie genau den Korkpulverriefen, wie sie in einem Gas entstehen, gleichen. MELDE.

[1]) Ann. de. chim. et phys. Sér. III. T. XXV.

[2]) POGG. Ann., Bd. CLIII.

Zusammenklang der Töne.

1) Der »Zusammenklang der Töne« ist eine bedeutungsvolle Sache und kann damit alles gemeint sein, was Harmonie, Disharmonie, als das Hauptwesen der Musik betrifft. In einer solchen Ausdehnung darf das Thema des vorliegenden Artikels nicht aufgefasst werden, vielmehr wollen wir uns in ihm nur mit rein physikalischen Erscheinungen befassen, ohne dass wir diese auch näher auf das eigentliche Gebiet der Musik hin verfolgen.

Wenn von einem »Zusammenklang« die Rede ist, so kommt bei ihm etwas doppeltes in Betracht, einmal nämlich der Vorgang, wie er objektiv ausserhalb unseres Ohres stattfindet und welcher Vorgang besteht, ohne dass von einer subjektiven Thätigkeit eines Beobachters die Rede ist; sodann der Vorgang in uns selbst, welcher letztere auch wieder aus zwei Vorgängen sich zusammensetzt: einem rein mechanischen oder wenn man will, physiologischen, und dann dem Schlussvorgang, dem psychologischen oder dem seelischen. Hiernach würde bei einem Zusammenklang wohl auch besser nach zwei Hauptrichtungen unterschieden, nämlich

A. Mechanisches.
   1) Ausserhalb des Ohres oder rein mechanisches.
   2) Innerhalb des Ohres bezw. im Gehirn oder physiologisches.

B. Psychisches.

Es ist diese Verschiedenheit und Eintheilung aber nichts, was den Schallschwingungen allein eigen wäre, sondern gilt für jedes Gebiet der Erscheinungen als maassgebend. Es kann also dieselbe Eintheilung oder irgend eine anders ausgedrückte ebenso gut für das optische oder ein anderes Gebiet gelten.

Was wir hier zunächst zu betrachten haben, sind die Bewegungsphänomene ausserhalb unseres Ohres. Da es jedoch in der Darstellung zu Weitläufigkeiten führen würde, wenn wir von dem, was diese äusseren Bewegungen schliesslich bei der Umsetzung ins Psychische erzeugen, ganz ahsähen, so müssen wir die ersteren doch in einer gewissen Verbindung mit dem letzteren auffassen. Es wird dies ebenso geschehen müssen, wie es bei optischen Dingen geschieht, wo wir ja auch z. B. von einfachen Farben, von Complementärfarben, von starken und schwachen Lichtreizen u. s. w. reden, Dinge, welche zwar als Folge äusserer Bewegungen zu denken sind, aber doch meistens erst nach unserer Perception entsprechend erkannt und classificirt werden.

2) Die Schallerscheinungen, deren Wahrnehmung durchs Organ des Ohrs und nur allein durch dieses der Seele möglich gemacht wird, sind gar mannigfacher Art und werden die Hauptarten hiervon auch durch specifische Namen unterschieden. Man kann alle diese Arten mit dem gemeinsamen Namen »Schall« umfassen. Zeigt es sich hierbei, dass regelmässige, in gleichen Zeitabschnitten sich wiederholende Eindrücke stattfinden, Eindrücke, welche namentlich auch rasch genug erfolgen, so hat man es im allgemeinen mit dem zu thun, was wir einen »Klang« zu nennen pflegen. Aber auch das, was »Klang« genannt wird, ist nach zwei Richtungen hin verschieden. Im Falle nämlich, dass bei den Pulsen, welche erfolgen, nur ein einziges Tempo obwaltet und die Pulse auch die denkbar einfachsten sind, und nicht etwa noch aus einfacheren zusammengesetzt betrachtet werden müssen, hat man es zu thun mit einem einfachen Klang, den man dann auch mit dem Namen

»Ton« bezeichnet. Ist dagegen ein einheitliches Tempo der Pulse nicht vorhanden, lassen sich diese letzteren in Componenten zerlegen, von denen erst jede Componente, wenn sie allein aufträte, einen einfachen Ton bilden würde, so redet man von einem zusammengesetzten Klang und gebraucht hierfür auch häufig den Ausdruck »Klang« allein ohne ein bezeichnendes Beiwort. Ebenso kann dann ein »Klang«, auch durch die Bezeichnung »zusammengesetzter Ton« gegeben sein, wobei das Beiwort »zusammengesetzt« aber nicht fehlen darf. Das Analogon aus der Optik heranzuziehen, ist nicht nur zulässig, sondern auch nothwendig. Was für das Ohr, für den *nervus acusticus* Schallwellen, schliesslich Töne und Klänge sind, das sind fürs Auge, für den *nervus opticus*, die Lichtwellen und schliesslich die Farben. Auch bei diesen reden wir von sogen. »einfachen« oder »homogenen« Farben und verstehen darunter solche Farben, bei welchen bloss eine Schwingungsgattung des Aethers mit nur einer Schwingungszahl oder wenigstens mit sehr nahe zusammenfallenden Schwingungszahlen des Lichtes thätig ist. Solche Farben sind z. B. das Gelb des Natriumlichtes, das Grün des Thalliumlichtes, das Blau des Indiumlichtes. Sodann reden wir aber auch von »zusammengesetzten« Farben oder von »Mischfarben«. Solche Farben sind vor allem das Sonnenlicht, wie überhaupt das Licht der Planeten, ferner das Licht unserer irdischen Lichtquellen, das Licht einer Bariumflamme u. s. w.

Diese Beispiele aus der Optik sind leicht zu wählen, und fragt es sich, welches sind denn nun in der Akustik einfache und welches sind zusammengesetzte Töne? Hier muss man sagen, dass, wenn wir die Sache streng nehmen wollen, genau einfache Töne, ohne irgend welche Beimengungen von Nebentönen und, was wir noch zu betrachten haben, ohne Beimengungen von »Geräuschen« gar nicht existiren, sondern dass, wenn von einfachen Tönen die Rede ist, diese es nur der Hauptsache nach sind, bei der man von kleinen und schwachen Nebendingen absehen kann. Wir wissen, dass wir als Beispiele für solche einfache Töne annähernd diejenigen ansehen können, welche beim Anblasen kugelförmiger Lufträume, bei gedeckten Orgelpfeifen, bei Stimmgabeln die durch den elektrischen Strom ins Schwingen versetzt werden, auftreten.

3) Bei einfachen und zusammengesetzten Tönen ist das Charakteristische die Regelmässigkeit der Pulse, der strenge Isochronismus dieser Pulse, wobei also z. B. genau in jedem $\frac{1}{100}$ einer Sekunde sich ein Puls wiederholt oder wobei, falls etwa ein zusammengesetzter Ton in Betracht kommt, sich neben den 100 Pulsen in einer Sekunde gleichzeitig noch ein zweiter Ton mit 150 Pulsen, von denen jeder Puls in $\frac{1}{150}$ Sekunden erfolgt, auftritt. Nun können wir uns auch vorstellen, dass z. B. in der Sekunde zwar 100 Pulse erfolgen, aber dass dies in den verschiedensten Intervallen geschieht, dass z. B. ein solcher Puls die Zeit von $\frac{1}{100}$, ein anderer von $\frac{1}{200}$, ein dritter von $\frac{1}{80}$ u. s. w. Sekunde in Anspruch nimmt. Eine solche Schallbewegung erzeugt nicht das, was ein Ton oder ein Klang ist, vielmehr haben wir es hier mit dem zu thun, was den Tönen und Klängen gegenüber als »Geräusch« unterschieden wird. Das Geräusch wird demgemäss von uns dann wahrgenommen, wenn ausserhalb des Ohres die Pulse keinen Isochronismus besitzen. Die Natur liefert uns vielfach solche Geräusche, die wir wiederum ihrer besonderen Art nach und zum Theil sehr fein zu charakterisiren und zu unterscheiden vermögen, ja das Leben in der Natur, die sonst, wenn wir vom Thier- und Pflanzenleben absehen, ohne Leben zu sein scheint und häufig als die »leblose« Natur bezeichnet wird, ist der Haupt-

sache nach in solchen Geräuschen vertreten. Vom Brausen des Meeres bis herab zum Murmeln, Plätschern und Rieseln eines Bächleins, vom Tosen und Sausen des Sturmes bis herab zum Fächeln eines Lüftchens, vom mächtigen, sinnbetäubenden Schlage des Donners bis zum leisen noch kaum wahrnehmbaren Grollen des in der Ferne abziehenden Gewitters, alles dies sind Sprachen der leblosen Natur, die uns begeistern und unsere Phantasien zu erregen vermögen, Sprachen, die der Akustiker aber unter der gemeinsamen Benennung Geräusche zusammenfassen muss. Unzählige andere Formen der Geräusche können wir künstlich hervorrufen: beim Sägen, beim Hämmern, beim Reiben u. s. w. entstehen Geräusche; beim Durchströmen der Luft durch unregelmässige Ritze oder beim Vorbeistreifen derselben an allerhand Kanten und Hindernissen entstehen Geräusche; überall begegnen wir diesen Schallerscheinungen, überall leben wir in ihnen und mit ihnen.

Das Geräusch entsteht aber auch noch in einer zweiten Weise, wobei ausserhalb unseres Ohres an und für sich ganz regelmässige isochrone Schwingungen vorhanden sind. Denken wir uns nämlich eine grössere Anzahl sonst im Einzelnen ganz regelmässiger Töne, die jedoch alle nur wenig von einander abweichen, z. B. zehn Töne von *c* aufwärts so, dass jeder folgende Ton etwa nur um vier Schwingungen höher ist wie der vorausgehende. Wir werden noch näher sehen, dass je zwei solcher Töne bei ihrem Zusammenklang das Phänomen der »Schwebungen« oder »Stösse« liefern, welches Phänomen von uns als ein im Ganzen unangenehmes empfunden wird. Klingen nun so nahe liegende Töne zusammen, so tritt etwas Doppeltes ein: einmal nämlich ist das Ohr, abgesehen von den Stössen, nicht im Stande, die einzelnen Componenten getrennt wahrzunehmen, so dass in unserer Schlusswahrnehmung eine Unbestimmtheit in der Auffassung der Tonhöhe eintritt; sodann aber sind die Stösse, auch wenn sie ganz allein und auf irgend eine andere Weise mechanisch erzeugt werden, ganz dazu angethan, speciell das Gefühl von dem zu erzeugen, was wir ein »Rasselgeräusch« zu nennen pflegen. Ganz dieselbe Empfindung eines Geräusches erhalten wir auch durch das bekannte Experiment, wobei ein längeres Lineal auf die Tastatur eines Claviers gelegt wird und beim Niederdrücken des ersteren eine grössere Summe wenig von einander verschiedener Töne zum Ohre gelangt.

Die Geräusche spielen demnach bei jeder Tonbildung und Tonwahrnehmung eine sehr wichtige Rolle und muss mit ihnen, wenn wir von Klängen und von »Klangfarbe« reden, sehr wohl gerechnet werden.

4) Bevor wir auf die einzelnen Erscheinungen des Zusammenklangs näher eingehen, wollen wir eine Parallele zwischen dem Auge und dem Ohre ziehen, welche uns zeigen wird, dass hier neben den Analogien auch wesentliche Verschiedenheiten bestehen. Zunächst besteht eine Analogie darin, dass die Gebiete des Lichts und des Schalls an Grenzen gebunden sind, indem, wie wir wissen, beim Licht etwa 400—800 Billionen Schwingungen des Aethers diejenigen Schwingungsmengen umfassen, welche vom äussersten Roth an bis zum Ultraviolett hin von uns als die verschiedenen Farben wahrgenommen werden. Keine der Grenzen nach der einen und nach der anderen Seite hin ist eine strenge. Beim Schall sind es ganz andere Grenzzahlen, nämlich etwa 24 nach der unteren und höchstens etwa 40000 nach der oberen Grenze hin. Schon hieraus erkennen wir, dass zwischen beiden Erscheinungsgebieten eine weite Kluft gelegen ist. Denn von der Zahl 40 Tausend bis 400 Billion ist eine weite Entfernung, auf welcher wir bis jetzt noch nicht im Stande gewesen sind, etwaige Verbindungsglieder nachzuweisen. Dass, wie wir wissen, über Roth hinaus noch eine weite

Wärmestrahlen erwiesen und wobei die geringste Schwingungszahl etwa 60 Billion ist, ändert an dem Vorhandensein jener Kluft kaum etwas, denn es bleibt hiernach immer noch der Sprung von 40 Tausend auf 60 Billion.

Die absoluten Zahlen für beide Gebiete weichen demgemäss sehr ab, ebenso sehr die Materie, welche sich bei den Schwingungen betheiligt. Dort ist es der hypothetische Aether, der Lichtäther, dessen Materiellität bis jetzt von uns nicht direkt nachgewiesen werden konnte. Hier ist es die greifbare Materie fester und flüssiger Körper und vor allem auch der Hauptträger des Schalls: die Luft. Sehen wir auf relative Zahlen, so zeigt sich zwischen Licht und Schall ebenfalls eine Verschiedenheit. Beim sichtbaren Licht bewegen sich die Verhältnisse der Schwingungszahlen zwischen 1 und 2, so dass, wenn wir die Nomenclatur von den Schallerscheinungen anwenden wollen, das sichtbare Licht etwa eine Octave umfasst. Beim Schalle dagegen, wenn wir die äussersten Grenzen 24—40000 annehmen, liegen die Verhältnisszahlen zwischen 1 und höchstens zu 2^{11}, d. h. die hörbaren Töne würden etwa 11 Octaven umfassen und würde hiernach eine Ueberlegenheit des Ohres zu erkennen sein, wenn wir uns gestatten wollen, den Intervallenmaassstab für's Auge und Ohr gemeinsam anzulegen.

Ueber die Zulässigkeit dieses gemeinsamen Maassstabes kann gestritten werden und wäre demgemäss auch die für das Ohr sich ergebende Ueberlegenheit, bezüglich der bemessenen Intervalle, keine apodiktische. In anderer Beziehung aber ist das Ohr dem Auge entschieden überlegen, nämlich in der Fähigkeit: aus einem ihm dargebotenen Klange die einzelnen, den Klang bildenden Componenten, die einzelnen Töne herauszuhören, d. h. in der Fähigkeit des Ohrs: eine Klanganalyse unmittelbar fertig zu bringen. Dies vermag das Auge nicht und wollen wir zunächst dieser Verschiedenheit Aufmerksamkeit schenken. Denken wir einen bestimmten Fall. Nehmen wir ein blaues Cobaltglas zur Hand und sehen durch dasselbe hindurch nach einer hellen, weissen Wand, so empfinden wir ein schönes Blau; nehmen wir anstatt eines Glases zwei oder drei Gläser hintereinander, so ist die Farbe noch dieselbe, aber dunkler. Die Farbe der Perception ist also das, was wir »Blau« nennen, d. h. wir haben die Empfindung von einer Farbe und sind gänzlich ausser Stand, durch unser Auge festzustellen, ob in dem, was wir blau nennen, vielleicht auch etwas anderes steckt. Um dies festzustellen, müssen wir eine Farbenanalyse anwenden, die bekanntermaassen darin besteht, dass wir das zu untersuchende Licht, ehe es in unser Auge gelangt, durch ein Glasprisma gehen lassen, oder dass wir uns eines Spectralapparates bedienen. Geschieht dies nun, so zeigt sich, dass das Spectrum, falls die Dicke der Glasscheibe die entsprechende ist, aus zwei völlig getrennten Theilen besteht. Der eine Teil umfasst das Blau und Violett des Spectrums, der andere ein Stück vom Roth, während die zwischen liegenden Farbentheile des Spektrums: Orange, Gelb und Grün nicht vertreten sind. Dass der blauviolette Theil des Spectrums übrig bleibt, war wohl zu erwarten und entspricht in ihm die Spectralanalyse der direkten Wahrnehmung durchs Auge; dass aber auch noch ein entschiedenes Roth vertreten ist, das kann das Auge nicht erkennen, das muss ihm erst vom Spectralapparat gesagt werden, der im Stande ist, die einzelnen Farbenantheile zu trennen und die getrennten Theile an verschiedenen Stellen auf der Strecke eines Farbenbandes, das wir mit dem Namen »Spectrum« bezeichnen, uns vorzuhalten.

Suchen wir nach dem analogen Fall beim Ohr, so würde es etwa so sein, als wenn wir auf dem Clavier ein *a* und gleichzeitig das unter ihm liegende *c*

anschlagen. Unser Ohr vernimmt einen Zusammenklang, aber nicht so, dass hierbei von uns etwa das *c* als solches nicht herausgehört würde, im Gegentheil, wir hören wirklich beide Töne, beide Componenten einzeln ohne dass wir nöthig hätten, erst eine künstliche Trennung der Schallwellen vorzunehmen. Das Ohr ist also im Stande, nicht nur wenn zwei Töne gleichzeitig erklingen, diese einzeln zu hören, sondern vermag auch aus einer noch mehr zusammengesetzten Klangmasse eine Reihe von Tönen einzeln herauszuhören und dürfen wir bezüglich der letzteren Sache uns nur einen Dirigenten seinem Orchester und Chor gegenüber vorstellen, der ja oft in staunenswerther Weise im Stande ist, die einzelnen Töne herauszuhören.

5) Die erste wichtige Thatsache, welche uns beim Tönen der festen Körper entgegentritt, ist das Phänomen der sogenannten »Obertöne«, doch wollen wir diese zunächst ohne ihre Bedeutung beim Zusammenklang betrachten. Alle tongebenden Körper haben nämlich die Eigentümlichkeit, dass sie bei den Schwingungen nicht blos einen, sondern zwei, drei und mehr Töne von verschiedener Höhe liefern, bei welchen einzelnen Tönen der schwingende Körper sich je mit anderen Abtheilungen zeigt. Diese Abtheilungen werden dann stets durch sogen. »Knoten« gebildet, und je nachdem eben diese Knoten mehr einem Punkte, einer geraden Linie oder einer Curve entsprechen, redet man von »Knotenpunkten« und »Knotenlinien«. Diese Knoten sind während des Schwingens und Tönens des Körpers Stellen der Ruhe und zwar frei sich bildende Stellen der Ruhe, welche beim Einklemmen und Abgrenzen der schwingenden Körper als solche von vornherein in Betracht kommen. Eine Saite muss an beiden Enden eingeklemmt werden und sind demgemäss die Endpunkte so wie so Stellen der Ruhe. Beim Schwingen der Saite können sich aber noch weitere Stellen ihrer Länge als Ruhestellen ausbilden und sind dies dann die eigentlich »freien« Knoten. Eine CHLADNI'sche Scheibe kann an einer Stelle festgeklemmt werden. Ist diese dann auch ein Ruhepunkt, so bilden sich beim freien Schwingen hernach Ruhelinien, die wir als CHLADNI'sche Klangfiguren kennen und bewundern. Man kann sehr passend diejenigen Theile des schwingenden Körpers, welche von Knotenpunkten und Knotenlinien begrenzt werden, als »Schwingungsstrecken« oder »Schwingungsfelder« bezeichnen und wird man die erstere Benennung bei linienförmigen, die letztere bei flächenförmigen Körpern zu gebrauchen haben. Liegt eine solche Strecke so, dass sie zwischen zwei freie Knoten oder so, dass sie rings herum von einer freien Knotenlinie eingeschlossen ist, so kann man von einer »inneren« Schwingungsstrecke oder einem »inneren« Schwingungsfeld reden. Liegen solche Strecken und Felder aber so, dass sie einerseits nur von einem Knoten oder einer Knotenlinie begrenzt sind, während die andere Grenze von der äusseren Contour des schwingenden Körpers gebildet wird, so kann man sie als »Endstrecken« bezw. »äussere« Schwingungsfelder ansehen. Bei einer kreisförmigen Membran z. B. besteht eine Hauptschwingungsart darin, dass jene als Knotenlinien lauter concentrische Kreise besitzt. Das innerste Schwingungsfeld wäre dann eine Kreisfläche und ebenso wäre das äussere Schwingungsfeld eine Ringfläche, die nach innen von einer freien kreisförmigen Knotenlinie, nach aussen aber von der festen kreisförmigen Grenze des Rahmens begrenzt wird.

Der einfachste und regelmässigste Fall einer Schwingung besteht nun strenggenommen bei einer longitudinal schwingenden Saite. Ihre Schwingungen vollziehen sich in der Richtung der Saitenlänge. Beim tiefsten Tone bildet sich in der Mitte der Saite ein Bauch und besteht die Saite beim Ertönen ihres Grund-

tons somit aus nur einer Endstrecke. Nun kann dieselbe Saite auch einen freien Knoten bekommen, der sich in der Mitte der Saite einstellt. Es bilden sich demnach zwei äussere Schwingungsstrecken. Der Ton, den sie hierbei liefert, hat doppelt so viel Schwingungen wie der Grundton. Bei einer dritten Abtheilung bekommt die Saite zwei freie Knoten. Der Ton hat dreimal so viel Schwingungen wie der Grundton. Solche Töne nennt man nun insbesondere, weil sie alle höher sind wie der Grundton »Obertöne« oder mit Rücksicht darauf, dass die Saite sich bei den einzelnen Obertönen in immer andere Schwingungsstrecken theilt, auch »Partialtöne« oder auch »Aliquottöne«. Um einen solchen bestimmten Oberton bezeichnen zu können, pflegt man den Grundton auch den ersten Oberton zu nennen. Demgemäss würde eine longitudinal schwingende Saite folgendes Schema aufzustellen gestatten.

Oberton	Schwingungszahl	Zahl der freien Knoten
1	1. N'	0
2	2. N'	1
3	3. N'	2
.		
.		
.		
i	$i.\ N'$	$i-1$

Das Merkwürdigste hierbei ist die in der zweiten Columne sich darstellende Gesetzmässigkeit, welche sich im Satze aussprechen lässt: dass die Obertöne einer longitudinal schwingenden Saite bezüglich der Schwingungszahlen das Gesetz der natürlichen Zahlen befolgen. Mit der weiteren Rücksicht darauf, dass die nächsten Primzahlen 1, 2, 3 und 5 mit ihren nächsten Verdoppelungen 4, 6 und 8 die Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 8 liefern, welche Zahlen in den Verhältnissen 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5, 5 : 6, 3 : 5 und 5 : 8 die Intervalle Octave, Quinte, Quarte, grosse und kleine Terz, grosse und kleine Sexte darstellen, welche Intervalle ja unser ganzes Musikwesen, sofern Harmonie und Wohlklang hierbei vertreten ist, ausmachen, pflegt man ein solches System von Obertönen ein »harmonisches« zu nennen und nennt auch die Obertöne selbst harmonische Obertöne.

Da die Obertöne 7 (9), 11, 13, 14 u. s. w. unter sich und auch mit den tieferen Obertönen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 8 keine Verhältnisse liefern. die von uns zu den »harmonischen« gerechnet werden, so ist es klar, dass, wenn man den Namen »harmonisch« gebraucht, er eigentlich nur für die tieferen und dem Grundton 1 am nächsten gelegenen Obertöne 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 8 so wie deren weitere Verdoppelungen gilt, nach welchen folgende harmonische Obertöne-Reihe bis zum 64. gerechnet resultirt:

1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 8 — 10 — 12 — 16 — 20 — 24 — 32 — 40 — 48 — 64.

6) Dasselbe Gesetz der Obertöne finden wir bei den Longitudinalschwingungen der Stäbe, falls diese entweder an beiden Enden frei oder an beiden Enden fest sind, genau bestätigt. Stäbe, welche an einem Ende fest, am anderen frei sind, befolgen ein anderes Gesetz, indem bei ihnen sich die Schwingungszahlen der Longitudinal-Obertöne wie die ungeraden Zahlen 1 : 3 : 5 . . . verhalten.

Aber die Longitudinaltöne fester Körper, so bedeutungsvoll sie sonst sind, finden in der Musik keine Verwendung, weil sie einestheils zu hoch, und anderntheils den Transversaltönen gegenüber zu schwer herauszubringen sind. Es existirt daher kein einziges Instrument, bei welchen die Longitudinaltöne fester

Körper eine musikalische Verwendung gefunden hätten. Anders ist es bei den gasförmigen Körpern. Denn bei ihnen sind es nur Longitudinaltöne, welche überhaupt vorkommen können. Die Obertöne der Luftsäulen, der Orgelpfeifen, die Obertöne der grossen Reihe der Blasinstrumente sind daher von hoher Bedeutung. Indem wir die einfache Luftsäule einer Orgelpfeife berücksichtigen, kommt es darauf an, ob man es mit offenen oder gedeckten Pfeifen zu thun hat. Bei offenen Pfeifen lautet das Gesetz der Schwingungszahlen der Obertöne so wie bei den Longitudinalschwingungen einer Saite oder eines an beiden Enden freien oder festen Stabes. Die Schwingungszahlen verhalten sich wie die Zahlen 1:2:3:... Aber es muss sofort bemerkt werden, dass bei Orgelpfeifen dies Gesetz im allgemeinen nicht streng befolgt wird, dass die Verhältnisse 1:2, 2:3, 3:4 nur annähernd erreicht werden. Man kann sich davon überzeugen, wenn man eine Orgelpfeife so anbläst, dass sie ihren Grundton giebt und hernach durch stärkeres Blasen den nächsten Oberton, die höhere Octave herauszubringen sucht. Es kann diese Abweichung vom strengen Gesetz nicht auffallen, wenn man bedenkt, dass eine Orgelpfeife an beiden Enden verschieden beschaffen ist und der Begrift einer »offenen« oder auch der einer »gedeckten« Pfeife ein relativer ist. Je nachdem die Labiumöffnung grösser oder kleiner ist, wird die Pfeife mehr oder weniger an diesem Ende als offen oder geschlossen gelten können. Ferner spricht entschieden hier noch mit die Grösse des Querschnitts der Pfeife zu ihrer Länge sowie beider Dimensionen zur Weite und sonstigen Einrichtung des Labiums. So zeigte es sich, dass eine engmensurirte offene Holzpfeife von 588 *mm* Länge und einem quadratischen Querschnitt mit einer Seitenlänge von 20 *mm* die ersten vier Obertöne fast genau im Verhältniss 1 : 2 : 3 : 4 gab. Eine andere Pfeite, cylindrisch, 585 *mm* lang bei einem Durchmesser von 50 *mm* gab ihren Grundton mit 260, den nächsten Oberton dagegen nicht mit 520, sondern mit 552 Schwingungen.

In früherer Zeit bestanden die Blechblaseinstrumente in einer längeren oder kürzeren engen Röhre, die nur nach dem einen Ende hin sich trichterförmig erweiterte. Die verschiedenen Töne, welche ein solches Instrument geben konnte, waren nur die »natürlichen« Obertöne, also diejenigen, welche wir bis daher als solche kennen lernten. Die höheren Obertöne lagen so nahe, dass sie nur um Stufen der diatonischen bezw. chromatischen Tonleiter von einander abwichen. Solche Obertöne nannte man daher auch »Naturtöne« und pflegt man auch jetzt noch von einer »Naturtrompete« zu reden, d. h. einer solchen, welche aus einem continuirlichen Luftrohr ohne Klappen oder Ventile besteht. Diese Naturinstrumente haben im Laufe der Jahrzehnte mehr und mehr andern Platz machen müssen, nämlich den Ventil- und Klappeninstrumenten Bei diesen ist der Luftkanal an bestimmten Stellen ähnlich wie schon lange bei den Holzblaseinstrumenten, der Flöte u. s. w., durch Löcher unterbrochen, die ihrerseits wiederum durch Ventile oder Klappen geöffnet oder geschlossen werden können. Man erreicht beim Oeffnen einer solchen Klappe ein Luftrohr mit kürzerer Länge und werden die höheren Töne mechanisch auch leichter zu erhalten sein, als wenn der Bläser aus einem langen Rohr diesen oder jenen Oberton herausblasen soll. Ob hiermit aber nicht eine gewisse Charakterverschiedenheit der Töne und zwar häufig zum Nachteil der Ventilinstrumente eintritt, mag dahin gestellt bleiben.

7) Ebenso wie das System der Obertöne bei den nur longitudinal schwingenden Luftsäulen eine bedeutungsvolle Sache ist, zeigt sich dasselbe auch bei den transversalschwingenden Körpern, vor allem bei den Saiten von Bedeutung.

Das Gesetz der Obertöne bei einer solchen Saite ist das der natürlichen Zahlen, der pythagoreï'schen Zahlen, also der Zahlen 1, 2, 3 ... Man pflegt diese Obertöne bei Saiten auch »Flageolettöne« zu nennen. Da das Gesetz in möglichster Strenge befolgt wird, so sind die Obertöne 1, 2, 3 und 5 wie deren Vielfache bei den transversalschwingenden Saiten auch als harmonische zu bezeichnen: ein Umstand, an welchen sich im Laufe der Zeiten eine merkwürdige Spekulation angeknüpft hat.

Alle andern transversalschwingenden Körper besitzen Obertöne, welche nicht das Gesetz der natürlichen Zahlen befolgen und nennt man daher solche Obertöne »unharmonische«. Für einen an beiden Enden freien Stab z. B. verhalten sich die Obertöne wie die Quadrate von $\left(\frac{2n+1}{2}\right)$, wenn man hierin für n die Zahlen 1, 2, 3 ... als Ordnungszahlen der betr. Obertöne einsetzt. Der $(n+1)$ Oberton zum $n$ten verhält sich demgemäss wie

$$\left(\frac{(2n+1)+1}{2}\right)^2 : \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 = (2n+3)^2 : (2n+1)^2.$$

Bezeichnet man die Schwingungszahl des Grundtons mit 1, so würde die Zahlenreihe für die nächsten Obertöne folgende sein:

1; 2·77; 5·44; 9·00; 13·44 ...,

woraus man erkennt: erstens, dass die Schwingungszahlen rasch wachsen und zweitens, dass sie Tönen angehören, von denen die auf den Grundton nächstfolgenden zu diesem unharmonisch sind.

In ähnlicher Weise sind die Obertöne transversalschwingender Platten, ferner die der glockenförmigen Körper und ebenso die der Membranen unharmonisch. Die Angaben über die Schwingungszahlen dieser Obertöne mögen hier unterbleiben und verweise ich speciell auf die Darstellungen in meiner »Akustik«[1]).

8) Bisher hatten die Obertöne eines schwingenden Körpers für uns nur in so fern Bedeutung, als wir einen jeden einzelnen Oberton, für sich allein bestehend, auffassten und noch nicht weiter an die Möglichkeit dachten, dass auch gleichzeitig zwei und mehr Obertöne zusammen erklingen können. Dieses letztere Phänomen ist es aber gerade, welches unsere Zeit, wenn von Obertönen die Rede ist, vorzugsweise im Auge hat. Thatsache ist nämlich: dass wenn irgend ein schwingender Körper zum Tönen gebracht wird, er allermeistens nicht blos einen seiner Obertöne, sondern gleichzeitig deren zwei, drei oder mehr hören lässt, daher rührend, dass der betreffende Körper gleichzeitig sich in verschiedene Partialabtheilungen theilt, welchen verschiedenen Abtheilungen je ein Oberton entspricht. Es gehen also von dem schwingenden Körper gleichzeitig zwei oder mehr Töne aus, entsprechend dem, was wir von einem leuchtenden Körper wissen, der ja auch meistentheils mehrere Farben gleichzeitig aussendet. Die zweite merkwürdige Thatsache ist die: dass unser Ohr im Stande ist, die einzelnen Obertöne, welche gleichzeitig ausgesendet werden, vielfach auch einzeln zu erkennen, einzeln zu hören, um sich hierdurch wesentlich vom Auge zu unterscheiden, welches nicht die einzelnen Farben aus einem ihm überlieferten Farbengemische allein zu erkennen vermag.

Vor allem erhebt sich nun die wichtige Frage: seit wann kennt man diese merkwürdige Thatsache vom gleichzeitigen Erklingen und Wahrnehmen der Obertöne? Man sollte meinen, dass diese Thatsache bereits den

[1]) Leipzig bei Brockhaus 1883.

Pythagoräern aufgefallen wäre. Aber es sind uns m. E. keine dahin zielende Berichte überliefert worden, ja es wird meistens angenommen, dass erst im Jahre 1701 durch den französischen Forscher SAUVEUR die genannte Thatsache erkannt und bekannt wurde. Dem muss aber widersprochen werden. POGGENDORFF bezeichnet in seinem »Biographisch-literarischen Handwörterbuch« als Denjenigen, welcher zuerst dieses Phänomen erkannt habe, einen Anderen, nämlich den Fellow des Menton College in Oxford WILLIAM NOBLE, welcher im Jahre 1681 starb. Die Abhandlung, in welcher nach POGGENDORFF diese Thatsache constatirt sein soll, rührt von Dr. WALLIS her und findet sich in den Philosophical Transactions vom Jahre 1677 unter dem Titel: »On the trembling of consonant strings, a new musical discovery«. Schon der Titel zeigt, dass der Inhalt dieser Abhandlung es zu thun hat mit einer Resonanzerscheinung. Es wird hierbei nämlich nachgewiesen, dass eine Saite, welche z. B. auf *g* abgestimmt ist, eine andere, welche eine Quinte plus einer Octave tiefer ist, also *C* giebt, zum Mitschwingen veranlassen kann und zwar so, dass die tiefere Saite sich hierbei in drei gleiche Theile mit zwei Knotenpunkten abtheilt, d. h. nicht etwa als ganze Saite mitschwingt, sondern nur ihre dritte Oberschwingung macht, wobei sie ebenfalls ein *g* im Einklang mit der primär zum Tönen gebrachten Saite hören lässt. Solche Experimente sind es, welche in dieser Abhandlung beschrieben werden. Ich habe aber nicht finden können, dass es sich hierin auch um das gleichzeitige Hören« von Obertönen handle. Nach CHLADNI (Akustik, § 185) muss man annehmen, dass MERSENNE (1588—1648), bezw. auch CARTESIUS (1596—1650) das betr. Phänomen kannten, wenn beide auch vielleicht die Erklärung hierfür noch nicht richtig zu geben wussten. Leider giebt CHLADNI die betr. Stelle in den Schriften von MERSENNE nicht näher an und ist es mir nicht möglich gewesen, dieselbe im Wortlaut kennen zu lernen. Die betr. Stellen bei CARTESIUS finden sich in seinen Epistolis P. II im 75. und 106. Briefe. Jedenfalls ist es eine sehr merkwürdige Thatsache, dass dieses Phänomen der Wahrnehmung der Obertöne insbesondere bei Saiten nicht früher als gegen das Ende des 16. Jahrhunderts erwähnt wird, und dass namentlich die Pythagoräer, welche doch so viel mit den Tönen und Tonverhältnissen der Saiten zu thun hatten, darauf nicht aufmerksam wurden. Wenn dem nun aber so ist, so darf hieraus auch ein Schluss gezogen werden, nämlich der, dass das gleichzeitige Wahrnehmen von Obertönen zum Begriffe einer musikalischen Con- und Dissonanz von vornherein nicht nöthig ist. Denn etwas, was man akustisch überhaupt nicht wahrnimmt, kann unmöglich als existirend und bestimmend angesehen werden. Der Begriff der Quinte z. B. existirt vollkommen und die Quinte gilt nach der Octave seit dem Alterthum als die nächst vollendetste Consonanz auch dann, wenn die beiden primären Töne ohne jede Spur von Obertönen auftreten. Treten sie mit solchen auf, so ist die weitere Frage: erstens: welche klingen mit und zweitens in welcher Stärke klingen sie mit? Hiervon hängt es weiter ab, ob zwei Töne z. B. *C* und *G*, wenn sie zusammen klingen, noch eine sogenannte Con- oder eine Dissonanz bilden. Die vier ersten Obertöne von *C* sind *C'-c-g-c'*, die von *G* sind *G-g-d'-g''*. Klingt *c'* und *d'* hinreichend stark mit, so stört offenbar diese Secunde den Wohlklang von *C* und *G*. Man hat es dann auch gar nicht mehr mit einem *C* und *G* allein zu thun, sondern im gegebenen Beispiele mit vier Tönen einerseits und vier Tönen andererseits. Auch die Octave kann zur Dissonanz werden, wenn wir voraussetzen, es klänge z. B. mit dem Grundton *C* der siebente Oberton, das *b'*, stark mit und fände neben sich den vierten Oberton von *c* nämlich das *c''*, das ebenfalls als stark mitklingend vorausgesetzt werden

griffes einer Con- oder Dissonanz gar nicht, vielmehr besteht die Thatsache, dass das Verhältniss 1 : 2 oder 2 : 3 u. s. w. auch ohne jede Spur einer Wahrnehmung von Obertönen seit Alters her als ein dem Ton-Gefühl nicht widersprechendes angesehen wird.

9) Die tongebenden Körper unterscheiden sich nach dem Vorausgehenden nach zwei Richtungen, nämlich als solche, welche sogenannte »harmonische« und solche, welche »unharmonische» Obertöne besitzen. Die ersteren Körper spielen allein bei der Construktion derjenigen Instrumente eine solche Rolle, dass wir die letzteren im strengeren Sinne als »musikalische Instrumente« bezeichnen können. Es sind dies die »Saiteninstrumente« und die »Blasinstrumente«. Erstere, bei welchen Saiten mit ihren Transversalschwingungen verwendet werden, besitzen am reinsten Obertöne, welche sich wie die Zahlen 1 : 2 : 3 . . . verhalten. Die Blasinstrumente thun dies auch, aber im allgemeinen nicht so rein und liegt darin schon ein Grund, wesshalb letztere im musikalischen Sinne nicht auf derselben Rangstufe wie die Saiteninstrumente anzunehmen sind, eine Thatsache, welche bereits das Alterthum zu würdigen verstand. Denn der Streit des Apollo mit dem Marsyas, d. h. der Leyer mit der Flöte, welcher zu Ungunsten des Letzteren entschieden wurde, ist bekannt. Die Instrumente mit unharmonischen Obertönen, z. B. die Trommel, die Pauke, die Becken, der Triangel u. s. w. sind zwar nicht gänzlich von der Theilnahme im Concerte der eigentlichen musikalischen Instrumente ausgeschlossen, aber sie spielen doch nur eine untergeordnete Rolle. Sie dienen nur bei bestimmten Gelegenheiten und bestimmten Momenten dem Tondichter zur Erzielung besonderer Effekte, welche sich allerdings dann nur durch solche Instrumente erzielen lassen.

Diese Thatsachen verweisen uns nun wiederum speciell auf die Zahlenreihe

1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 8 . . .

Eine etwas lange Saite lässt die Obertöne dieser Reihe hören und fühlt sich das Ohr hierbei wohl. Die Aeolsharfe ist ein solcher Obertöne-Apparat und wissen wir, dass derselbe von zauberhafter Wirkung auf unser Ohr ist. Auch Appunn hat einen sogenannten »Obertöneapparat« construirt, bei welchem die tongebenden Körper Harmonikazungen sind. Bei einem dieser Apparate giebt der tiefste Ton 32 Schwingungen und reihen sich an ihn dann weitere 64 Obertöne. Man kann nun den interessanten Versuch machen und die oben am Schlusse von Abschnitt 5 aufgeführten 16 Obertöne zu gleicherzeit ertönen lassen. Man erhält hierbei nur Töne des Dreiklangs *c-e-g* und fühlt sich das Ohr einer solchen Klangmasse gegenüber sehr wohl. Ja es würde noch mehr sich befriedigt fühlen, wenn jeder Harmonikaton ein einfacher Ton wäre, während man doch weiss, dass solche Harmonikatöne je für sich wiederum Obertöne und zum Theil unharmonische, wenn auch schwache, im Gefolge haben. Ganz anders fällt aber das Experiment aus, wenn wir z. B. 16 Untertasten des Claviers auf einmal mittelst einer Latte niederdrücken oder auch nur die Hälfte von dieser Zahl auf einander folgender Tasten bewegen. Das Ohr empfindet hierbei ein vollständiges Geräusch und wird von einer solchen Tonmasse beleidigt. Diese beiden Thatsachen lassen sich in folgenden zwei wichtigen Sätzen zusammenfassen.

Erster Satz. Wenn eine Tonmenge zum Ohre gelangt, deren einzelne Componenten als der Reihenfolge der Töne 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 8 und deren Verdoppelungen entsprechend angesehen werden können und wobei auch einzelne Componenten fehlen können, so wird selbst

eine solche zusammengesetzte Klangmasse vom Ohre in befriedigender Weise aufgenommen.

Zweiter Satz. Wenn dagegen eine Klangmasse zum Ohre gelangt, deren einzelne Componenten, den Grundton mit eingerechnet, nicht das Gesetz der natürlichen Zahlen befolgen, sondern namentlich vom Grundton aus gerechnet nahe zusammenliegende Töne sind, so empfindet das Ohr keinen Wohlklang, sondern einen Missklang bezw. geradezu ein Geräusch.

10) Nehmen wir einmal als tiefsten Ton das C_{-1} mit 32 Schwingungen an, so würde der 8. Oberton $32 \cdot 8 = 256$ Schwingungen vollführen und gleich dem eingestrichenen c_1 sein. Der höchste auf dem Clavier etwa noch benutzte Ton würde das fünfgestrichene c_5 sein mit 4096 Schwingungen. Dividiren wir hierein mit 32, so ergiebt sich 128. Es könnten also, wenn alle Obertöne zum C_{-1} mitklängen, deren 128 sein, so dass die Reihe der Obertöne, die dieser Annahme entspräche, nach den natürlichen Zahlen von $1 - 2 - 3 \ldots$ bis 128 verlaufen würde.

Unendliche Spekulationen können sich an diese Zahlenreihe der Obertöne anschliessen und sind von Alters her auch wirklich angeschlossen worden. Wir wollen hier auf den Werth oder Unwerth dieser Spekulationen nicht eingehen und nur noch auf eine Gesetzmässigkeit aufmerksam machen.

Es kann nämlich die Frage entstehen: wenn wir irgend einen zu einem Anfangstone T_1 gehörigen Oberton T_n herausgreifen und auch von ihm aus die zu ihm gehörigen Obertöne beachten, kommen dann diese Obertöne von T_n auch in der Reihe der Obertöne von T_1 vor? Diese Frage muss bejaht werden. Denn denken wir z. B. unter T_n den 5. Oberton von $T_1 = 1$ an gerechnet, so würde die Reihe der Obertöne von dem Ton T_5 sein

$$1 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \ldots$$

$$\text{d. h. } 5 - 10 - 15 - 20 \ldots,$$

welches Zahlen sind, die auch in der Zahlenreihe der Obertöne vom Ton $T_1 = 1$ vorkommen.

Erklingt daher zu einem Tone T_1 die Schaar seiner Obertöne mit, so klingt in ihr auch die Schaar der Obertöne für einen Ton T_n mit. Da ferner die Obertöne von T_n auch schon in denen von T_1 vertreten sind, so kann die Sache auch so aufgefasst werden, als verstärkten die Obertöne von T_n bestimmte Obertöne von T_1, für welche sich leicht ein allgemeines Gesetz angeben lässt. Dieses Gesetz lautet nun so:

Setzt man voraus, dass ein Ton T_1 mit seinen Obertönen erklingt und dass hierbei sich auch der Ton T_n gleichzeitig mit seinen Obertönen hören lässt, so werden durch die Obertöne von T_n die $m \cdot n$ Obertöne von T_1 verstärkt, wobei m jede positive ganze Zahl bedeutet. Klängen auch die Obertöne noch irgend eines andern Tons T_p aus der Reihe der Obertöne des Tons T_1 mit, so werden bei diesen letzteren auch die $m \cdot p$ Obertöne durch die von T_p verstärkt, allgemein also würden, wenn bei sämmtlichen Obertönen von T_1 deren jeweilige Obertöne mitklängen, durch letztere **sämmtliche** Obertöne des primären Tons T_1 verstärkt werden.

11) Die Hauptbedeutung der Obertöne besteht darin, dass sie in Verbindung mit den Geräuschen das bewirken, was wir die »Klangfarbe« eines Tons zu nennen pflegen, eine Constatirung, welche wir den Forschungen von v. Helmholtz seit dem Erscheinen seines Werkes: »Lehre von den Tonempfindungen 1863«

die Lichtsorten. Der Name »Klangfarbe« wurde wohl auch von v. HELMHOLTZ zuerst eingeführt, und ist dies der Beweis dafür, dass wir es hier in der Akustik und in der Optik mit einem vollkommenen Analogon zu thun haben. Wir gebrauchen für Farbeneindrücke die entsprechenden Benennungen und reden z. B. von »Blau«. Aber dieses Blau ist ein ausserordentlich verschiedenes und würde es schwer sein, alle die Namen für die verschiedenen »Blau« hier anzuführen. Wir reden von »Dunkelblau«, »Hellblau«, »Schwarzblau«, »Weissblau«, »Grünblau«, »Wasserblau«, »Himmelblau«, »Veilchenblau« u. s. w. Es entsprechen alle diese »Blau« etwa dem, was wir in der Akustik einmal ein »c_1« nennen: Eine Sängerin kann es uns vorsingen, eine Männerstimme kann es, eine Orgelpfeife ertönt mit diesem c_1, eine Glocke lässt denselben Ton vernehmen, ein Violinspieler, ein Zitherspieler, ein Clavierspieler giebt dieses c_1 an und können wir, wenn wir einigermaassen geübt sind, alle diese »c_1« als von einander verschieden erkennen und können sogar angeben, von welchem Organe und von welchem Instrumente sie stammen. Worin liegt nun der Grund dieser Verschiedenheit in dem, was wir »Klangfarbe«, in dem, was wir »Lichtfarbe« nennen? Für das Letztere weiss man es längst. Das Prisma belehrt uns sofort, dass wenn wir mit ihm die verschiedenen »Blau« untersuchen, ein verschiedenartiges Spektrum bei ihnen eintritt. Wir sind mittelst des Prismas im Stande, in objektiver Weise ein Spektrum zu erzeugen, d. h. räumlich auf einem Schirm oder auch auf unserer Netzhaut nebeneinander die Componenten, welche sich bei der Mischfarbe, die wir als dieses und jenes »Blau« bezeichnen, zusammenfinden, abgesondert darzustellen. Das Auge für sich ohne Prisma vermag diese Componenten nicht zu erkennen, sondern muss den Gesammteindruck von diesem und jenem Blau hinnehmen wie er ist. Das Ohr befindet sich wohl häufig auch in derselben Lage wie das Auge, nämlich dann, wenn die Componenten, die zu dem am stärksten wirkenden Tone hinzutreten, zu schwach sind. Allermeistens aber ist das Ohr bei aufmerksamer Beobachtung im Stande zu sagen: in diesem c_1, von der Violine angegeben, höre ich noch ein g_2 und ein e_3 mit u. s. w. Gelingt es dem Ohre direkt nicht, die Componenten wegen ihrer zu geringen Stärke neben dem Hauptton zu erkennen, so giebt es nach v. HELMHOLTZ ein Hauptmittel um dies fertig zu bringen, nämlich die »Resonatoren«. Sie bestehen meistens in einer Kugel aus Glas oder Metall, die an zwei diametral entgegengesetzten Stellen offen ist. Je nach der Grösse dieser Kugel und je nach der Grösse der Oeffnungen, giebt das von ihr eingeschlossene Luftquantum, wenn es mit dem Munde oder einer Luftspalte angeblasen wird, einen bestimmten Grundton, der selbst möglichst frei von Obertönen ist. Nehmen wir an, ein solcher Resonator liefere beim Anblasen ein g_2 und wir hielten ihn bei der Untersuchung des oben erwähnten c_1, welches der Violinist anstreicht, vor unser Ohr. Was wird geschehen? Der Resonator wird durch das leise im Tone c_1 mitklingende g_2 zum Mittönen gebracht. Die Töne c_1 und die Componente e_3 dagegen veranlassen ihn nicht zur Resonanz, und folgt hieraus nothwendig, dass diesen Tönen c_1 und e_3 gegenüber die Componente g_2 in verstärktem Maasse von uns wahrgenommen, d. h. ihr Vorhandensein in unzweifelhafter Weise als Componente des Klanges c_1 erkannt wird.

Es muss bezüglich der Resonatoren hier auf einen Umstand aufmerksam gemacht werden, dessen Nichtbeachtung zu wesentlich fehlerhaften Schlüssen führen kann. Der Vorgang bei der Anwendung der Resonatoren ist der der

Resonanz. Nun wissen wir aber, dass ein tönender Körper »II«, der einem Körper »I« gegenüber mitschwingt, dies am besten thut, wenn er und der Körper »I« unisono gestimmt sind. Aber »II« resonirt auch dann, wenn sein Eigenton ein Oberton von »I« ist, d. h. auch dann, wenn die Schwingungszahl seines Grundtons 2, 3, . . . mal so gross ist, wie die von »I«. Dieses Resoniren von »II« kann also auch dann eintreten, wenn dieser Ton als Oberton in dem Klange von »I« gar nicht enthalten ist. Wenn demgemäss in unserem obigen Beispiel das c_1 ein völlig einfacher Ton ist, der die Componenten g_2 und e_3 die wir annahmen, gar nicht besitzt, so würde der Resonator g_2 vors Ohr gehalten, dennoch gemäss des Resonanzgesetzes leise mitklingen. Ein Schluss, durch den Resonator mit seinem Grundton g_2 veranlasst: als stecke in c_1 die Componente g_2 wäre in diesem Falle ein irriger und mancher Irrthum mag wohl auf diese Weise theils mit, theils ohne nachtheilige Folgen für die Beurtheilung eines Thatbestandes entstanden sein. Wenn es sich demnach um den Nachweis des Vorhandenseins eines Obertons von einem Klange T handelt, so muss man vorsichtig in seinem Urtheile bei der Anwendung von Resonatoren vorgehen. Nicht selten wird in solchen Fällen eine direkte optische Untersuchung der Schwingungsbahnen eines Punktes des tongebenden Körper »I« zum sicheren Ziele führen.

12) Das, was wir die Qualität eines Tones, oder seine Klangfarbe zu nennen pflegen, besteht also im Mitschwingen der Obertöne zu einem Hauptton. Von der Stärke dieses Mitschwingens und von der Zahl der mitschwingenden Obertöne und ebenso von den Ordnungszahlen dieser Obertöne hängt diese oder jene bestimmte Klangfarbe ab. Ferner muss noch auf eine andere Quelle der Verschiedenheit der Klangfarbe aufmerksam gemacht werden und besteht diese in dem Mitschwingen desjenigen Körpers, an welchem der tönende Körper befestigt ist. Eine Saite z. B. wird einen anderen Klang liefern, je nachdem sie über einem Resonanzboden von Holz oder über einer Steinplatte ihre Ausspannung erhalten hat. Wir wissen ebenso, dass eine Orgelpfeife einen anderen Klangcharakter bekommt, je nachdem ihr Körper aus Holz oder Metall gearbeitet ist, ja nachdem im letzteren Falle vielleicht dünnes Messingblech oder dickeres Zinn genommen wird. Es besteht zwischen einem tongebenden Körper und seiner nächsten Umgebung, an welche er angrenzt, eine entschiedene Wechselbeziehung. Der schwingende Körper überträgt von den Unterstützungsstellen aus seine Bewegung auf seine Unterstützung, und setzt diese auch auf gewisse Strecken hin in eine Vibrationsbewegung; diese Unterstützung wirkt auch wieder rückwärts auf den schwingenden Körper und modificirt wiederum dessen Schwingungen. Auf diese Weise ist es erklärlich, wie die Unterstützung sich bei der Klangfarbe betheiligt und können hier namentlich auch Geräusche mitwirken.

Was nun die Arten der Klangfarben anbetrifft, so lassen sich dieselben wohl im Allgemeinen classificiren. Wir würden nach dem Vorausgehenden zunächst vier Hauptarten zu unterscheiden haben, nämlich:

A Töne ohne Obertöne,
B Klänge mit harmonischen Obertönen,
C Klänge mit unharmonischen Obertönen,
D Klänge mit Geräuschen.

Was die Abtheilung *A* betrifft, so ist schon erwähnt worden, dass sie eigentlich kaum existirt. Man pflegt als Repräsentanten hierfür die Töne anzusehen, welche entstehen, wenn man ein dickbauchiges Glas mit kurzem Hals durch eine Luftspalte anbläst. Diese Töne zeichnen sich durch eine eigenthümliche Weichheit aus. Aber völlig frei von jeder Beimengung sind sie auch nicht, indem

mindestens immer ein Luftgeräusch, vom Anblaseakt herrührend, sich beimischt und so eigentlich ein Ton der Gruppe *D* erklingt.

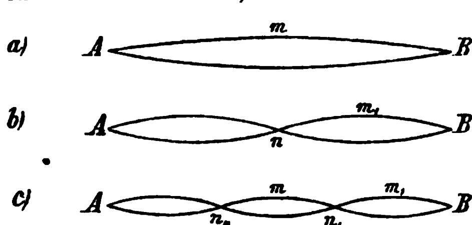
Ein anderes und vielleicht noch besseres Beispiel erhält man in einer Stimmgabel, wie sie v. Helmholtz zu seinem Obertöneapparat verwendete, welche durch den elektrischen Strom zum Schwingen gebracht wird und vor welcher noch ein Luftresonator auf ihren Grundton abgestimmt sich befindet. Im Allgemeinen muss man sagen, dass die Gruppe *A* umsomehr erreicht wird, je leiser man den Grundton eines Körpers herausbringen kann. Denn jede Verstärkung des Anstreichens, des Anblasens und des Anschlagens begünstigt das Auftreten der Obertöne und das Hineinmischen von Geräuschen.

Die grosse Gruppe *B* schliesst sich den Instrumenten an, welche das musikalische Orchester bilden, und lassen sich hier noch zwei Unterabtheilungen machen, nämlich

B_1 Klänge mit geradzahligen und ungeradzahligen Obertönen,

B_2 Klänge nur mit ungradzahligen Obertönen.

Um die Art B_1 herauszubringen, kann man sich zunächst am besten an die Saiten halten. Ihre Obertöne befolgen das Gesetz der natürlichen Zahlen, indem ihre Schwingungszahlen sich wie 1:2:3:4:5 . . . . verhalten. Es kommt nun lediglich auf die Art des Anstrichs, des Anschlags u. s. w. an, ob die Saite möglichst mit allen aufeinanderfolgenden Obertönen oder nur mit bestimmten Obertönen erklingt, und giebt es hier namentlich ein leichtes Mittel, um eine Saite zu veranlassen, dass sie nur den Grundton und einen einzigen weiteren Oberton hören lässt. Fig. 246 *a*, *b* und *c* zeigt, wie eine Saite sich abtheilt, wenn sie die drei ersten Obertöne giebt. Aus dieser Figur erkennt man sofort die Bedingungen, welche eingehalten werden müssen, wenn man bestimmte Obertöne haben will oder auch ausgeschieden wünscht. Bei den Oberschwingungen liegt an den Stellen der Saite bei *m* stets eine Stelle der weitesten Elongation. Daraus ergiebt sich, dass, wenn man die Obertöne haben will, man als Erregungsstelle die Stellen *m* der Saite wählen muss. Will man die 3. Oberschwingung gerade nicht haben, so darf man also nicht in *m* oder m_1 Fig. 246 *c* anstreichen oder anschlagen, sondern etwa bei *n* oder n_1. Will man die 2. Oberschwingung nicht haben, so darf man nicht in m_1 Fig. 246 *b*, sondern etwa in *n* anstreichen oder anschlagen. Daher die allgemeine Regel: schlägt oder streicht man die Saite an einer Stelle an, und diese Stelle entspricht z. B. als Knoten dem *p* Oberton, so wird durch die Wahl einer solchen Anschlag- oder Anstreichstelle das Zustandekommen des *p*-Obertons gerade unmöglich gemacht. Beim Clavier wird z. B. von dieser Regel schon seit lange Gebrauch gemacht, indem die Hämmer in einem $\frac{1}{7}$ vom einen Endpunkt der Saiten anschlagen, wodurch bewirkt wird, dass der 7. Oberton, der ja bekanntlich bis jetzt sich nicht recht in unser Musiksystem gefügt hat, und den wir bisher auch immer in der Reihe der acht ersten Obertöne weggelassen haben, nicht zur Geltung kommt.



(Ph. 246.)

Bekanntermaassen kommen die Obertöne, die Flageolettöne, je einzeln zum Vorschein, wenn man die Saite an einer Knotenstelle des betr. Obertons leise berührt und an einem nächsten Schwingungsbauch oder in der Nähe eines solchen anschlägt oder anstreicht. Will man den Ton 3 haben, so würde also am ratio-

nellsten in $n_{\prime}$ zu berühren und in $m_{\prime}$ zu erregen sein oder auch so, dass in $n_{\prime\prime}$ berührt und in m oder $m_{\prime}$ erregt würde. Wenn man nun die Berührung in $n_{\prime}$ oder $n_{\prime\prime}$ mit einem Finger der linken Hand und die Erregung mit der rechten Hand ausführt, so kann man, nachdem die Erregung stattgefunden hat, den Finger der linken Hand von der Stelle $n_{\prime}$ oder $n_{\prime\prime}$ abgleiten lassen, jedoch so, dass man gleichzeitig die ganze Saite ein wenig auszieht und sie so nöthigt, ihre Grundschwingung zu machen. Man combinirt auf diese interessante Manier die Grundschwingung mit dem betr. 3. Flageoletton.

In gleicher Weise wie bei Saiten bieten sich die Obertöne auch bei den Orgelpfeifen dar und ist bei diesen die Gruppe B_2 mit nur ungeradzahligen Obertönen ganz speciell in den »gedeckten« Pfeifen vertreten, deren Obertöne, wie schon erwähnt, sich wie die Zahlen 1 : 3 : 5 . . . verhalten. Die offenen Labialpfeifen liefern Obertöne mit geraden und zugleich ungeraden Ordnungszahlen.

Die grosse Gruppe tönender Körper mit unharmonischen Obertönen ist sehr reich vertreten. Es gehören zu ihr die ebenen Klangscheiben, die Glocken und Alles, was eine Form ähnlich einer Glocke annimmt, ferner die geraden und krummen Stäbe, die Stimmgabeln, ferner die Membranen. Da diese Körper, insbesondere die Glocken, sich durch ihre grosse Masse hervorthun, so sind die Klänge, welche sie liefern, auch von ganz besonderer Mächtigkeit. Auch die nächsten Obertöne treten häufig zum Grundton mächtig hinzu, so dass es oft nicht leicht ist, den eigentlichen Hauptton der Glocke rasch anzugeben.

Noch müssen wir das, was Klangfarbe ist, nach anderen Gesichtspunkten betrachten. Man pflegt das, was man Klangfarbe nennt, häufig mit einem Beiwort noch näher zu bezeichnen. Man redet z. B. von einem »hellen«, einem »dumpfen« Klang, namentlich auch von einem »Metallklang«. Das Wesen eines hellen Klanges besteht darin, dass bei ihm sich hohe Obertöne zum Grundton hinzugesellen, wodurch offenbar etwas Schärferes, etwas Helleres erzielt werden kann. Werden diese hohen Töne auch noch besonders mächtig, so sind sie wegen ihrer Höhe und auch wegen ihrer Intensität fürs Ohr beleidigend, man redet sodann von einem »gellenden« Klang.

Sind die Grundtöne tief und von wenig Obertönen begleitet, so entstehen die dumpfen Klänge. Metallklang treffen wir namentlich in seinem Gegensatze zu einem dumpfen Klange bei der Zither an. Die Metallsaiten liefern Töne erstens von grösserer Mächtigkeit, zweitens von grösserer Höhe, und drittens namentlich begabt mit höheren Obertönen wie die übrigen Saiten des Instruments. Daher kommt bei diesen Metallsaiten das Charakteristische, das wir aber auch gerade wegen der hohen Obertöne weniger lange vertragen. Kurz, man sieht, dass das Wesen der Klänge, nachdem es einmal in dem Zusammenwirken der Obertöne erkannt ist, sich auch als von diesen nach den verschiedensten Richtungen hin abhängig erweist.

Um noch ein Beispiel zu geben von der Bedeutung der Geräusche bei den Klängen, wollen wir an die Zungenpfeifen denken. Bei ihnen existirt eine Art, wobei die Zunge auf die Ränder des Luftkanals aufschlägt. Es wird hierdurch ein Schnarren erzeugt und pflegt man ja diese Pfeifen, wenn sie in einer Orgel Verwendung finden, auch »Schnarrwerke« zu nennen.

13) Diese letztere Erscheinung des »Schnarrens« ist nichts weiter, als eine rasche Aufeinanderfolge einzelner Pulse, die hier durch einen schwingenden Körper, die Zunge, bei ihrem Aufschlagen auf einen Metallrand erzeugt werden. Das Tempo derselben ist dasselbe wie das der Schwingungen der Zunge, also gleich der Schwingungszahl des Tones, den die Zungenpfeife giebt. Es ist aber

auch denkbar, dass zu einem Tone sich noch rein mechanische Pulse hinzugesellen, welche nicht im selben Tempo der Schwingungszahl des Tones, sondern in einem langsameren Tempo erfolgen. Es lässt sich dies auf mannigfache Weise in's Werk setzen, indem wir nur neben einem regelmässig tönenden Körper, z. B. einer Labialorgelpfeife, noch irgend eine sirenenartige Einrichtung in Gang zu bringen, also vielleicht neben der Orgelpfeife noch ein Rad mit Zähnen in Umdrehung zu bringen haben, gegen welche Zähne ein Kartenblatt aufschlägt. Hat das Rad eine hinreichende Anzahl Zähne und wird es schnell und regelmässig genug gedreht, so kann das Tempo der Pulse, durch's Aufschlagen des Kartenblattes erzeugt, auch dasselbe werden, wie das der Schwingungen des Tones der Pfeife, so dass wir jetzt zwei Töne von gleicher Tonhöhe neben einander hätten, jedoch mit wesentlich anderem Klangcharakter. Im Allgemeinen wird das Hinzutreten von mechanischen Pulsen zu einem regelmässigen Tone als eine Störung dieses Tones betrachtet werden müssen.

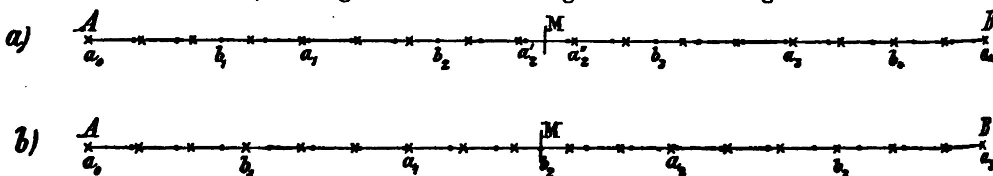
Wir begegnen hier nun einem zweiten bedeutungsvollen Phänomen beim Zusammenklang der Töne, nämlich dem der »Schwebungen« oder »Stösse«. Sie treten bekanntermaassen auf, wenn zwei Töne nahezu *unisono* erklingen und sind in diesem Falle als eine Interferenzerscheinung aufzufassen. Das Gesetz derselben ist dann folgendes:

Wenn in einer Zeit T, welcher wir den Namen der »Schwingungsperiode« beilegen wollen, bei einem Tone »I« eine Anzahl n und gleichzeitig bei einem zweiten höheren Tone »II«, der mit »I« zusammenklingt, n' Schwingungen erfolgen, so vernimmt das Ohr beim Zusammenklang der beiden Töne in der Zeit T eine Anzahl Stösse gleich $m = n' - n$. Hierbei muss bemerkt werden, dass n' und n die kleinsten ganzen Verhältnisszahlen der Schwingungen von »I« und »II« sein sollen, welche der Periode T entsprechen.

Der letztere Zusatz bedarf wohl noch der Erläuterung. Gesetzt der Ton »II« vollende in der Sekunde 260, der Ton »I« dagegen 256 Schwingungen. Diese beiden Zahlen sind nicht die kleinsten Verhältnisszahlen, vielmehr gestatten beide eine Division mit 4 und werden sonach zu $n' = 65$ und $n = 64$. Aber dementsprechend ist T auch nicht gleich 1 Sekunde, sondern gleich $\frac{1}{4}$ Sekunde. Es ergiebt sich hieraus, dass n' und n keinen gemeinsamen Theiler mehr besitzen und somit zwei Fälle existiren, nämlich

Erster Fall, beide Zahlen n und n' sind ungerade.

Zweiter Fall, n ist gerade und n' ungerade oder umgekehrt.



(Ph. 247.)

14) Zum näheren Verständniss des ersten Falles diene die Fig. 247 *a*. In ihr sind durch Punkte und durch Kreuze die Pulse der beiden Töne bezeichnet und sollen diese Punkte, bezw. Kreuze zugleich Verdichtungen bedeuten, wie sie bei der Fortpflanzung des Schalles an unser Ohr anschlagen. Die Stellen zwischen je zwei Verdichtungen entsprechen demgemäss den Verdünnungen. Indem wir annehmen, dass bei A die 0te Verdichtung eines Tones »I« von 17 Pulsen mit der 0ten Verdichtung eines Tones »II« von 21 Pulsen zusammen-

fällt, verläuft die Sache so, wie auf der Geraden AB verzeichnet ist. Wir wollen nun in einzelnen Sätzen das Phänomen der Schwebungen charakterisiren.

Ein vollständiges Zusammenfallen der beiden Verdichtungen findet nur nach Ablauf je einer Periode T statt.

Dieses vollständige Zusammenfallen entspricht selbstverständlich einer Wahrnehmung einer grösseren Tonstärke.

Aber auch während der Periode T fallen je zwei Verdichtungen wenn auch nicht vollständig, so doch sehr nahe zusammen, nämlich bei den Stellen a_1, a_2' und a_2'' und a_3.

Die Stellen a_2' und a_2'' müssen wir, da sie nur um eine einzige Schwingung bei den Tönen auseinanderliegen, als eine einzige Verstärkung a_2 auffassen. Demgemäss hätten wir für unser gewähltes Beispiel in der Zeit T beim Zusammenklang von »I« und »II« vier Tonverstärkungen gleich $21 - 17 = 4$.

An den Stellen b_1, b_2, b_3 und b_4 fallen sehr nahe je eine Verdichtung des Tones »I« mit einer Verdünnung des Tones »II« bezw. umgekehrt zusammen.

Sind die Töne von genau gleicher Intensität, so wird an diesen Stellen b ein nahezu vollständiges Vernichten des Tones eintreten. Jedenfalls wird aber, selbst wenn die Gleichheit der Intensitäten auch nicht ganz besteht, an den Stellen b gegenüber den Stellen a eine Tonschwächung eintreten.

Das ganze Phänomen der Schwebungen besteht demgemäss in vier Verstärkungen mit dazwischen liegenden Schwächungen und wird durch diesen Wechsel noch eine grössere Contrastwirkung aufs Ohr hervorgerufen.

Von der Mitte M der Periode aus verläuft das Phänomen der Schwebungen sowohl zeitlich wie sachlich genau symmetrisch.

Fig. 247 *b* stellt den Verlauf der beiden Pulsreihen für »I« mit $n = 17$ und »II« mit n' gleich 20 dar. Wir erkennen, wie hier ebenfalls bei den Stellen a die Verdichtungen zusammenfallen und wie an den Stellen b eine Verdichtung von »I« mit einer Verdünnung von »II« zusammentrifft und wie hiernach die Zahl der Schwebungen gleich $n' - n = 20 - 17 = 3$ ist.

15) Es ist nun sehr interessant, das Gesetz der Schwebungen auch in einem merkwürdigen Zahlenzusammenhang kennen zu lernen. Wir wählen hierfür die Zahlen 21 und 17, die der Fig. 247 *a* entsprechen. Ihre Differenz ist 4. Dividiren wir 21 und 17 durch 4, so ergiebt sich $5\frac{1}{4}$ und $4\frac{1}{4}$. Bildet man nun die Vielfachen dieser Zahlen in einer Fortsetzung bis 21 und 17 erhalten ist, so sind diese Zahlen

0	0
$5\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{4}$
$10\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$
$15\frac{3}{4}$	$12\frac{3}{4}$
21	17.

Rundet man nun die Zahlen in jeder Horizontalreihe, wobei Brüche vorkommen, auf ganze Zahlen ab, so erhält man die Zahlen

0	0
5	4
{10	8}
{11	9}
16	13
21	

Bei den Brüchen $\frac{2}{4}$ können wir offenbar nach oben und nach unten hin abrunden, so dass hier je zwei Zahlen 10 und 8, bezw. 11 und 9 verzeichnet werden müssen. Das bemerkenswerthe Zahlengesetz lautet nun:

»Das möglichste Zusammenfallen der Verdichtungen findet statt bei den in den letzten Zahlenreihen nebeneinander stehenden Pulszahlen, die wir als Coincidenzzahlen bezeichnen können und deren Gesetz der Ableitung aus dem Vorstehenden leicht zu erkennen ist.«

Im Falle Fig. 247 *b* ist $n' = 20$ und $n = 17$, mithin die Differenz gleich 3. Die Division mit 3 in diese beiden Zahlen nebst den Vielfachen hiervon ergiebt:

0	0
$6\frac{2}{3}$	$5\frac{2}{3}$
$13\frac{1}{3}$	$11\frac{1}{3}$
20	17.

Mithin sind die Coincidenzzahlen im obigen Sinne:

0	0
7	6
13	11
20	17.

Hieraus erkennen wir, wie es die Fig. 247 *b* auch darthut, dass im Falle, wo eine der beiden Zahlen n und n' gerade, die andere ungerade ist, nicht zwei Zahlen vorkommen, die je beide einem möglichsten Zusammenfall der Pulse entsprechen, wie wir dies für $n' = 21$ und $n = 17$ für die Pulse 10 und 8 sowie unmittelbar dahinter für die Pulse 11 und 9 sahen.

Es ist nun ferner interessant zu erfahren, um wie viel, zeitlich gerechnet, das Eintreten der möglichst nahen Pulse auseinanderliegt.

Beim Falle Fig. 247 *a* sind hierbei zunächst die Coincidenzzahlen 5 und 4 zu beachten. Da wir T auch gleich der Einheit setzen dürfen, so würden zu 5 Schwingungen des Tones »II« 5/21 und zu 4 Schwingungen des Tones »I« 4/17 der Zeiteinheit gehören. Demgemäss wäre die Differenz:

$$5/21 - 4/17 = 1/21 \cdot 17.$$

Die Zeitdifferenz, welche der Stelle a_1 der Fig. 247 *a* entspricht. Für die Stellen a_2' und a_2'' ergeben sich die Differenzen

$$10/21 - 8/17 = 2/21 \cdot 17,$$
$$11/21 - 9/17 = -2/21 \cdot 17;$$

für die Stelle a_3 die Differenz

$$16/21 - 13/17 = -1/21 \cdot 17.$$

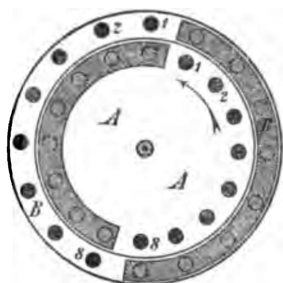
Im Falle Fig. 247 *b* werden diese Differenzen für die

Stelle a_1 gleich $7/20 - 6/17 = -1/20 \cdot 17$,
" a_2 " $13/20 - 11/17 = -1/20 \cdot 17$.

Für die Coincidenzen einer Verdichtung von »I« mit einer Verdünnung von »II« oder umgekehrt lassen sich die analogen Zahlengesetze unschwer ablenken und mag dies dem Leser überlassen bleiben.

16) Diese, durch zwei wirkliche Töne erzeugten Schwebungen lassen sich in mechanischer Weise auch mit einem einzigen Tone erzeugen und ist der Effekt genau derselbe. Hierbei kann man z. B. die DOVE'sche Sirene sehr gut benutzen und soll diese Methode hier erläutert werden. Fig. 248 stellt die wesentlichen Theile einer solchen Sirene dar. Bekanntermaassen liegen bei ihr drei Löcherscheiben über einander: nämlich von innen nach aussen gerechnet a) die vier Ventilringe mit 16, 12, 10 und 8 Löchern; b) die feste Mittellochscheibe mit denselben Löcherreihen; c) die bewegliche äussere Scheibe mit

ebenfalls denselben vier Löcherkreisen. Die letztere Scheibe kommt durch den nach aussen dringenden Luftstrom in Rotation, wenn einer oder mehrere der Ventilringe mit den Löchern der festen Mittelscheibe in Coincidenz gestellt sind. Da sich nun die folgende Erläuterung des Vorgangs nicht wohl im Anschluss an eine Zeichnung geben lässt, bei welcher die Löcherreihen übereinander gestellt erscheinen, so ist der Ventilring mit 16 Löchern als *BB* und die bewegliche Scheibe *AA* mit den 16 Löchern concentrisch nebeneinander gezeichnet. In Wirklichkeit muss man sie dann übereinander denken. Die feste Mittelscheibe kann in der Zeichnung entbehrt werden. Nun wird, um unsere Schwebungen auf künstliche Weise hervorzurufen, über die eine Hälfte der Löcher des Ventilrings ein Kartenblatthalbring mittelst Klebwachs fest aufgeklebt, welcher Ring in der Figur schraffirt gezeichnet ist; ein ebensolcher Kartenblatthalbring läuft über eine Hälfte der 16 Löcher der beweglichen Scheibe *AA*. Er kann auf der äusseren Fläche der letzteren Scheibe oder auch, wenn die Drehaxe der beweglichen Scheibe ein entsprechendes Höherstellen der letzteren gestattet, auch auf der Unterseite der beweglichen Scheibe aufgeklebt werden. Man muss sich also nun, wie gesagt, diese so theilweise veränderten Löcherreihen über einander denken. Denkt man sich ferner die bewegliche Scheibe anfangs in der in der Figur gezeichneten Stellung, so kommt von innen nach aussen keine Luft hindurch. Denn was an Luft durch die acht offenen Löcher 1—8 des Ventilrings *BB* hindurchgeht, wird durch den Kartenblattring von *AA* aufgehalten. Ebenso gelangt die Luft, die durch die 8 offenen Löcher 1—8 der beweglichen Scheibe *AA* hindurch könnte, wegen der darunter liegenden Verdeckung der Ventillöcher gar nicht zu den ersteren Löchern. Setzt man nun aber die bewegliche Scheibe in der Richtung des Pfeils in Rotation, so kommt zunächst das Loch 1 von *AA* über das Loch 1 von *BB*: ein Luftpuls erfolgt; sodann kommt das Loch 1 von *AA* über 2 von *BB* und im selben Moment das Loch 2 von *AA* über 1 von *BB*: ein zweiter Luftpuls erfolgt, aber ein etwas stärkerer, weil jetzt gleichzeitig durch zwei Löcher die Luft nach aussen stürzt. So geht es weiter, das Maximum der Stärke des Luftpulses tritt ein, wenn die acht Löcher von *AA* gerade über den acht Löchern von *BB* stehen, worauf hinwieder die Stärke der Pulse abnimmt, bis wieder die in der Fig. 3 gezeichnete Stellung der Scheibe *AA* eintritt. Bei jeder Umdrehung von *AA* hat man demgemäss eine Schwebung zu vernehmen, die sich in der Sekunde 10mal wiederholt, falls man 10 Umdrehungen in der Sekunde erreicht.


(Ph. 248.)

Auf diese und viele andere Arten lassen sich akustische Schwebungen in rein mechanischer Weise erzeugen, deren Wirkung genau dieselbe ist, wie die durch zwei wirkliche Töne, d. h. durch Interferenz erzeugten Schwebungen.

17) Eine andere höchst merkwürdige Erscheinung beim Zusammenklang zweier primärer Töne »I« und »II« bilden die sogen. »Combinationstöne«. Auch ihre Entdeckung fällt erst in die erste Hälfte des vergangenen Jahrhunderts und muss dem Gräflich Reuss-Plauen'schen Hof- und Stadtorganisten zu Lobenstein Georg Andreas Sorge zugeschrieben werden. In seinem »Vorgemach der musikalischen Composition« 1745, Thl. I, Cap. V, § 5 sagt er: »Wenn man auf einer Orgel *C* anschläget, so werden *c*, *g*, $\bar{c}$, $\bar{e}$ u. s. w. so lange gelind beben als man den Ton hält. Ja noch mehr: Wenn man in einer Orgel eine Quinte z. B. $\bar{c}$ und $\bar{g}$ rein gestimmet, so wird sich das $\bar{c}$ auch ganz gelinde mit hören

die Sesquialter, so aus einer Quinte ($\bar{g}$) und Terz ($\bar{e}$) bestehet, summt. Ja sogar zwei *Flutes douces* geben, wenn man $\bar{c}$ und $\bar{a}$ rein zusammenbläset, noch den dritten Ton, nämlich ein *f*, welches zu probiren steht.« Dennoch kann es etwas zweifelhaft sein, ob nicht schon kurz vor SORGE im Jahre 1743 ein Anderer, nämlich der Franzose ROMIEU, die Entdeckung der Combinationstöne gemacht hat, welche Entdeckung zuerst unbeachtet blieb, bis acht Jahre später ROMIEU der Akademie zu Montpellier eine Abhandlung unter dem Titel »Nouvelle decouverte des sons harmoniques graves, dont la résonance est très sensible dans les accords des instruments à vents.« Der nächste, der ein Anrecht darauf hat, die Combinationstöne beobachtet und auch in seinem Musiksystem verwendet zu haben, ist TARTINI, ja nach ihm pflegte man einen solchen dritten Ton 1, der z. B. beim Intoniren einer reinen Quinte (2:3) oder reinen Quarte (3:4) auf der Violine entstand, den »TARTINI'schen« Ton zu nennen. Merkwürdigerweise hörte TARTINI diesen Ton aber um eine Octave zu hoch, also als den Ton 2, da er ausserdem von anderen Combinationstönen wie dem Tone 2 nicht redet, so muss seine Kenntniss von diesen Tönen als nicht gross angesehen werden und jedenfalls ist es nicht am Platze, diese Töne anstatt »Combinationstöne« »TARTINI'sche« Töne zu nennen.

Es handelte sich nun bald um die Erklärung dieses dritten Tons. Der erste, der sie gab, war kein geringerer wie LAGRANGE (nicht wie mehrfach angenommen wird, THOMAS YOUNG)[1]). In den Misc. Taur., Tab. I, pag. 103—105, betrachtet er die Bewegung eines Lufttheilchens in Folge des gleichzeitigen Erklingens zweier Töne und sagt, dass beim Begegnen dieser Töne ein Lufttheilchen eine Bewegung erhält, welche verschieden ist von derjenigen, die von jedem einzelnen Tone hervorgebracht wird. Fallen nun ihre Schwingungen immer nach einer gegebenen Zeit zusammen, »so kann der fortgesetzte regelmässige Eindruck dieser zusammengesetzten Bewegung von den einfachen Bewegungen der einzelnen Theile ausgeschieden werden und ein hinlänglich gutes Ohr wird einen dritten Ton hören, dessen Verhältniss zu den übrigen gefunden wird, wenn man die Anzahl der Schwingungen mit einander vergleicht, welche jeder der Töne zwischen zwei auf einander fallenden zusammentreffenden vollbringt.«

Hiernach ergiebt sich, dass LAGRANGE als Ursache der Combinationstöne die Schwebungen oder Stösse annimmt, die, wenn sie schnell genug werden, vom Ohre nicht mehr einzeln unterschieden werden können und sonach das Gefühl eines neuen Tones hervorrufen.

Wir haben aber das Gesetz der Schwebungen kennen gelernt und gesehen, dass wenn der Ton I in der Sekunde z. B. n, der Ton II dagegen n' Schwingungen vollbringt, zu gleicher Zeit $n' - n$ Schwebungen entstehen. Die Zahl $n' - n = m$ ist also dann auch die Schwingungungszahl des dritten Tons oder des Combinationstons.

Diese Erklärungsweise der Combination ist stets unbeanstandet geblieben, bis v. HELMHOLTZ im Jahre 1856 in POGGENDORFF's Ann., Bd. 99, pag. 497—540, eine Abhandlung »Ueber Combinationstöne« veröffentlichte. In dieser Abhandlung wird eine neue Auffassung des Zustandekommens der Combinationstöne auf theoretischem Wege begründet.

---

[1]) Man vergleiche hierbei die werthvolle Abhandlung von R. HUYER »Ueber Combinationstöne« als Programm des Oberrealgymnasiums zu Reichenberg. Leipzig. 1882, 1883 und 1884.

Die bisherige Art und Weise, die Zusammenwirkung zweier Töne zu erläutern, wird bekanntermaassen auch durch mancherlei Mechanismen, Wellenapparate versinnlicht, wobei Stäbe oder Drähte, oben mit kleinen hellen Kugeln versehen, verwendet werden. Diese Drähte sind ungleich lang, und wenn ihre Füsse alle auf einer horizontalen Unterlage aufgesetzt werden, so stehen ihre Köpfe in einer Wellenlinie mit so viel Wellenlängen als eben gewünscht wird. Sagen wir z. B. 20. Richtet man sich nun für das Aufsetzen der Füsse der Drähte auch eine Wellenleiste ein, so können auf dieser auch 20 Wellen vorhanden sein. Je nachdem man nun diese Wellenleiste gegen die Wellenlinie der Köpfe einstellt, bekommt man die Erscheinungen der Interferenz versinnlicht, wie sie zwei Wellenbewegungen mit gleicher Schwingungszahl, also zwei Unisonotöne, liefern. Wenn aber die Wellenleiste auf die Länge von 20 Wellen der Köpfe nicht auch 20, sondern deren 21 erhält, dann ist die resultirende Wellenfigur eine ganz andere. Lässt man z. B. ein Thal der Füsse mit einem Berg der Köpfe zusammen anfangen, so werden die resultirenden Wellen von Anfang an bis zur Mitte der Periode immer höher, um von hier aus bis zum anderen Ende der Periode wieder abzunehmen. Wir haben in der betreffenden Periode eine Schwebung erhalten. Nehmen wir an, die Drähte wären in doppelter Anzahl vorhanden und es kämen für dieselbe Zeit 40 Wellen der Köpfe auf 42 der Füsse, so würden in dieser Zeit, also z. B. in einer Sekunde, sich zwei Anschwellungen in der resultirenden Wellencurve zeigen.

Der Mechanismus dieser Wellenapparate huldigt einem Princip, nämlich dem der einfachen Superposition. Hierbei wird angenommen, dass wenn eine Wellenbewegung mit einer zweiten zusammenwirkt, die Resultante gleich der Summe der einzelnen Componenten sei. Das Grundgesetz, welches den Wellenbewegungen angehört, ist, wie wir schon im Artikel über allgemeine Wellenbewegung gesehen haben, das, dass ein schwingender Punkt, der aus seiner Ruhelage herausgebracht wird, mit einer Kraft $k = ax$ wieder in die Ruhelage zurück strebt, d. h. diese Kraft k ist proportional dem Abstande x von der Ruhelage. Hält man an diesem Grundgesetz fest, so zeigt sich, dass wenn zwei Wellen mit den Schwingungszahlen n und n' und den Elongationsweiten p und q zusammenkommen, das resultirende x die Form

$$x = p \sin 2n\pi(t + \vartheta) + q \cdot \sin 2n'\pi t$$

annimmt, d. h. x ist die Summe der beiden einzelnen Componenten

$$x_1 = p \cdot \sin 2n\pi(t + \vartheta) \quad \text{und} \quad x_2 = q \cdot \sin 2n'\pi t.$$

Aber das Fundamentalgesetz $k = ax$ gilt nur für kleine Elongationsgrenzen d. h. für Töne mit geringer Intensität. Wird letztere grösser und grösser, werden die beiden zusammenklingenden Töne mächtiger, dann ist die Kraft, mit welcher ein den beiden Wellenbewegungen folgender Punkt in seine Ruhelage zurückzukehren sucht, nicht mehr $k = ax$, sondern es spricht in diesem Falle noch ein zweites Glied bx^2 mit, so dass

$$k = ax + bx^2$$

anzunehmen ist. Unter Berücksichtigung dieses Fundamentalgesetzes fand nun v. HELMHOLTZ für die resultirende Bewegung ein ganz anderes Resultat, nämlich eine grössere Anzahl von Tönen, die ausser den Tönen der primären Componenten mit den Schwingungszahlen n und n' noch neu auftreten. Diese Töne sind

1) $2n$ und $2n'$
2) $n' - n$ „ $n + n'$
3) $3n$ „ $3n'$
4) $2n + n'$ „ $2n - n'$
5) $n + 2n$ „ $n - 2n'$.

Die Töne unter 1) und 3) sind offenbar gleich den beiden nächsten Obertönen der primären Töne n und n'. Die Töne der Gruppe 4 und 5 lassen sich zusammenfassen als $n \pm 2n'$ und $n' \pm 2n$ und mögen diese vorläufig ausser Acht bleiben. Die Töne der Reihe 2) aber, die sind es, auf welche es uns jetzt ganz besonders ankommt. Denn offenbar ist $n' - n$ nichts weiter als ein Ton gleich der Differenz der primären Töne. Diese Differenz ist aber, wie wir gesehen haben, das, was wir bisher als Combinationston von n und n' auftreten sahen, als Ton, den wir als aus $n' - n$ Schwebungen hervorgegangen annahmen, den wir jetzt aber, nach der Untersuchung von v. HELMHOLTZ, auf ganz andere Weise entstehen sehen, nämlich als Folge eines in veränderter Weise anzunehmenden Grundgesetzes.

Der Ton $n + n'$ in der 2. Reihe ist etwas ganz neues, nämlich ein vierter Ton ausser n, n' und $n' - n$ mit einer Schwingungszahl gleich der Summe der einzelnen Componenten n und n'. Es ist dieser Ton ein zweiter Combinationston, dem v. HELMHOLTZ den Namen »Summationston« gegeben hat. Da demgemäss mit der Benennung »Combinationston« eine Unbestimmtheit eintrat, insofern als man nicht wusste, ob der bisher als alleiniger Combinationston betrachtete Ton $(n - n')$ oder der neue $(n + n')$ gemeint war, so gab v. HELMHOLTZ dem seitherigen Combinationston den Namen »Differenzton«.

18) Stellen wir uns vor, dass der Combinationston $n' - n$, also der Differenzton mit einem der primären Töne n oder n' wieder einen Differenzton liefert, so erhält man die Töne $n - (n' - n)$ und $n' - (n' - n)$ oder $(2n - n')$ und n, von denen der erstere ein weiterer neuer Ton ist und den man einen Combinationston »zweiter Ordnung« zu nennen pflegt. Derselbe ist ebenfalls in der Gruppe 4 oben zu finden, so dass also auch die Combinationstöne zweiter, dritter und vierter Ordnung durch die HELMHOLTZ'sche Theorie erklärt würden, wobei wir uns aber auf den Ton $2n - n'$ beschränkt haben, während, wie die Gruppen 4 und 5 beweisen, auch noch Summationstöne höherer Ordnung in Betracht gezogen werden können.

Es fragt sich nun, wann diese Combinationstöne im Sinne von v. HELMHOLTZ deutlich entstehen und gehört werden. Die erste Bedingung für ein deutliches Hören derselben sind möglichst starke Primärtöne. Zweitens ist es nothwendig, dass diese Primärtöne möglichst von einem und demselben Centrum ausgehen. In erster Linie erfüllt nun beide Bedingungen die DOVE'sche Sirene, welche vier Löcherreihen mit 8, 10, 12 und 16 Löchern besitzt, so dass man sechs verschiedene Intervalle mit ihr zur Verfügung hat nämlich:

4:5, 5:6, 6:8 (= 3:4), 4:6 (= 2:3), 5:8 und 4:8 (= 1:2).

Schreiben wir uns die Reihe der acht ersten Obertöne mit Ausschluss des 7. von C an hin, so haben wir

$$\begin{matrix} C & c & g & \bar{c} & \bar{e} & \bar{g} & \bar{\bar{c}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8. \end{matrix}$$

Nach dieser Zusammenstellung erkennen wir sofort den merkwürdigen Zusammenhang der Differenztöne mit den Obertönen, denn es bestätigt sich der merkwürdige Satz:

»Die Differenztöne irgend eines Intervalls sind tiefer wie der obere primäre Ton gelegene Obertöne der Obertönereihe, in welcher die primären Töne ebenfalls als Obertöne figuriren.

Die verschiedenen sechs Differenztöne unserer sechs Intervalle bei der Sirene sind z. B.

1 1 2(1) 2(1) 3 4(1).

Die in Klammern beigesetzten Zahlen gehören demjenigen Differenzton an, bei welchem das betreffende, oben in der Reihe der sechs Verhältnisse in eine Klammer gesetzte Verhältniss angenommen wird, wenn man das in der Reihe der Obertöne gegebene Verhältniss z. B. 4 : 6 eine Octave tiefer, d. h. als 2 : 3 nimmt.

Man könnte meinen, der Differenzton müsste auch immer tiefer gelegen sein wie der tiefste Primärton. Dem ist jedoch nicht so, denn, wenn wir aus der Reihe der Obertöne z. B. das Verhältniss 3:8 nehmen, so klingt als Differenzton ein Ton gleich 5 mit. Jedenfalls können wir nunmehr den allgemeiner gültigen Satz aussprechen, ein Satz, der aber auch sofort als für die Summationstöne gültig angesehen werden kann und sich so formuliren lässt.

Wenn aus der Reihe der Obertöne je zwei Töne als Primärtöne zusammen erklingen, so klingt ein Differenzton mit, welcher ebenfalls ein Ton der Obertonreihe ist und tiefer liegt wie der höchste Primärton; es klingt ferner ein Summationston mit, welcher ebenfalls ein Ton der Obertonreihe ist und höher ist als der höchste Primärton.

Bei der Sirene lassen sich die Differenztöne ohne Schwierigkeit wahrnehmen. Mittelst eines Resonators gelingt es aber selbstverständlich besser. Man nimmt dann einen Resonator, der z. B. das *c* verstärkt. Sodann lässt man die Löcher reihe 8 und 10, wobei das Verhältniss 4:5 in Betracht kommt, wirken. Die Töne dieses Verhältnisses werden, je schneller die Sirene umlauft, immer höher. Im Moment, wo die Löcherreihe 8 den Ton $\bar{\bar{c}}$ und die Löcherreihe 10 den Ton $\bar{\bar{e}}$ hören lässt, wird das mit dem Resoantor *c* hörende Ohr eine deutliche Tonverstärkung des *c* hören. Denn $\bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} = 4:5$ lassen den Differenzton 1, d. h. die tiefere Doppeloctave von 4 gleich 1 hören.

Dasselbe Experiment lässt sich auch objektiv beobachten, indem man den Resonator durch eine Membran ersetzt. Reagirt diese auf einen schwach klingenden Ton *c*, so wird der auf sie in geringer Menge gestreute Sand, sobald die Sirenen-Töne $\bar{c}$ und $\bar{e}$ geworden sind, sich in Bewegung setzen.

Die Differenztöne sind den primären Tönen gegenüber viel schwächer und setzen, um sie überhaupt wahrzunehmen, besondere Verhältnisse voraus. Schon bei einem Harmonium wird man aufmerksam sein müssen, um sie zu hören.

Noch weniger werden sie bemerkt, wenn die primären Töne von zwei ganz getrennten Centren, z. B. zwei Violinen, zwei Singstimmen ausgehen. Noch weit weniger sind aber die Summationstöne und die Differenztöne höherer Ordnung wahrzunehmen. Da diese Thatsache existirt und eine sogen. Con- oder Dissonanz auch besteht, wenn wir die leisesten Primärtöne auf unser Ohr einwirken lassen, wobei sicher keine Spur eines Differenz- oder Summationstones wahrgenommen wird, so scheint mir auch ein Princip, welches diese Töne heranzieht, um aus ihnen heraus das Wesen einer Con- und Dissonanz abzuleiten und eine Classification der Con- und Dissonanzen zu begründen, nicht haltbar zu sein.

19) So stand nun diese Angelegenheit bis zum Jahre 1876, als RUD. KÖNIG eine bedeutungsvolle Untersuchung[1]) »Ueber den Zusammenklang zweier Töne« veröffentlichte, wodurch eine wesentlich neue Sache nach verschiedenen Richtungen hin bekannt und ebenso fest begründet wurde. v. HELMHOLTZ war der Ansicht, dass die Combinationstöne nicht durch Stösse erzeugt werden könnten, man könne sogar weit über 100 Stösse noch mit dem Ohre als ein Schwirren nachweisen,

---

[1]) WIEDEMANN's Ann., Bd. 157, pag. 177—237.

ohne dass man einen Ton durch sie erhalte. Die Stösse spielten nur die Rolle, dass sie die Töne rauh machten und daher die Hauptursache auch von dem seien, was man »Dissoniren«, »Dissonanz« nennt. Dem ist nun nach den Untersuchungen König's nicht so, vielmehr besteht die alte Auffassung, nach welcher die Stösse, wenn sie schnell genug werden, sich zu Tönen gestalten, vollständig zu Recht und nennt König diese Töne ihrer Entstehung gemäss »Stosstöne«. Ferner muss sofort noch weiter bemerkt werden, dass es nach dieser Untersuchung von König zwei Arten von Stosstönen giebt, die von ihm als »untere« und »obere« unterschieden werden.

Die nächste Thatsache, welche König veranlasste, diesem Gegenstande seine volle Aufmerksamkeit zu schenken, war der festeingewurzelte Irrthum, als kämen Stösse nur vor bei zwei zunächst wenig von einander verschiedenen Tönen, z. B. einem Ton gleich 128 und einem solchen gleich 132, welche Töne nach dem, was wir bereits wissen, 4 Stösse hören lassen. Wird anstatt des Tones 132 ein Ton 136 genommen, so zeigen sich 8 Stösse, wird der höhere Ton höher und höher, so werden die Stösse zahlreicher und zuletzt so schnell, dass sie nur noch eine Rauhigkeit des Zusammenklangs hervorbringen, die aber auch nach und nach immer weniger auffällt, gerade als wenn bei einem Licht, welches auf irgend eine Weise flackernd gemacht wird, das Tempo des Flackerns schliesslich so rasch wird, dass man letzteres überhaupt nicht mehr wahrnimmt und in Folge dessen glaubt, das Licht brenne ruhig und continuirlich. Nun wies König nach, dass vor allem auch Stösse entstehen und zwar recht langsame, wenn man weit auseinander liegende Töne, z. B. Töne, die nahe um eine Octave, eine Duodecime, eine Doppeloctave u. s. w. auseinander liegen, zusammen erklingen lässt. Diese Thatsache wurde König gegenüber so zu erklären versucht, dass man annahm, die Obertöne des tieferen Tons im Zusammenklang mit dem primären höheren seien die Ursache dieser Stösse, aber diese Annahme ist unhaltbar, denn die Stösse der weit auseinander liegenden Intervalle existiren auch ohne jede Spur eines Vorhandenseins eines Obertons des tieferen primären Tons.

Diese merkwürdige Untersuchung König's wurde mit einem Apparate akustischer Einrichtungen durchgeführt, der einer der grossartigsten ist, welche je zur Verwendung kam und auch durch ihn hat der hochberühmte Forscher und Construkteur auf dem Gebiete der Akustik sich glänzend hervorgethan. Wenn ich hernach zur Verfolgung der ersten hauptsächlichsten hierher gehörenden Erscheinungen andere einfachere Hilfsmittel angebe, so muss doch, um eine genauere Vorstellung von der Arbeit König's zu bekommen, der Apparat, den dieser Forscher benutzt hat, hier in seinen Theilen aufgeführt werden. Es kamen zur Verwendung:

A. Stimmgabeln.

1) Fünf Stück G_{-1}, C, E, G und c gebend. Durch Laufgewichte konnte G_{-1} auf C_{-1} und ebenso jede der vier auf G_{-1} folgenden Gabeln auf den Ton der vorhergehenden tieferen gebracht werden, so dass die kleinsten Tonfortschreitungen möglich wurden. Die Gabel G_{-1} hatte Zinken von 35 *mm* Dicke, 55 *mm* Breite und 75 *cm* Länge. Die fünf Gabeln wogen 130 *kgr*.

2) Acht Gabeln c, e, g, c', c', e', g', c''.

3) Neun Gabeln auf die Töne der Octave c'' bis c''' und den siebenten Oberton von c also für das b''.

4) Zwölf Gabeln für c''' zu c^{IV}, ferner für den elften, dreizehnten und vierzehnten Oberton von c und ebenso noch für einen Ton mit 1194·65 ganzen Schwingungen, der mit $c' = 256$ Schwingungen das Verhältniss 3 : 7 bildet.

5) Elf Gabeln für c^{IV} bis c^{V} und den 11., 13. und 14. Oberton von c'.

6) Elf Gabeln für h''' bis c^{IV}.

7) Neun Gabeln für den Ton 3968 bis $c^{V} = 4096$ mit Zinken von 14 *mm* Breite und 8 *mm* Dicke.

Im Ganzen also 65 Gabeln.

B. Resonatoren.

1) Zwei Stück für die Töne von C bis g, aus Messing gearbeitet mit einem Durchmesser von 30 *cm* und einer Länge von 115 *cm*. Oeffnung der Deckelplatte 27 *cm* lang, 12 *cm* breit.

2) Zwei Resonatoren für G bis g'. Durchmesser gleich 25 *cm*, Länge gleich 50 *cm*. Oeffnung der Deckelplatte 23 *cm* lang, 7 *cm* breit.

3) Zwei Resonatoren für g bis c''. Länge gleich 37 *cm*, Durchmesser gleich 25 *cm*. Oeffnung der Deckelplatte 15 *cm* lang und 7 *cm* breit.

4) Zwei grosse Resonatoren von Holz, den einen von 40, den andern von 60 *cm* Höhe und Breite und beide von einer Länge von 2 *m*. Sie waren wie die oben beschriebenen Messingresonatoren mit Schraubenstempeln versehen, so dass sich die Stimmung mit der grössten Genauigkeit herstellen liess.

C. Einrichtungen zur graphischen Darstellung der Vibrationen.

Von ganz besonderem Interesse waren die vibrographischen Darstellungen, welche König mit seinen Stimmgabeln herstellte. Sie wurden nach der von Lissajous und Desains zuerst bekannt gemachten Manier so erhalten, dass eine Gabel an einem ihrer Zinken eine berusste Glasplatte, die andere einen Schreibstift trug. Schwangen beide Gabeln, so combinirten sich ihre Schwingungen und man erhielt auf der Glasplatte die entsprechenden resultirenden Schwingungscurven.

20) König wählte Stimmgabeln, um Töne zu haben, welche frei von Obertönen waren. Einwürfe, als könnten bei diesen Stössen und Stosstönen Obertöne des tieferen primären Tons das maassgebende Element bilden, sind somit unbegründet. Um nun auf eine andere Weise zu operiren, wobei Stimmgabeln nicht nöthig sind und man zunächst die ersten Fundamentalgesetze leicht experimentell bestätigt finden kann, benutzte ich den bekannten Appunn'schen Stossapparat mit 33 Zungen von $c = 128$ bis $c' = 256$ Schwingungen. Zu einem solchen hatte ich mir noch einen zweiten machen lassen mit 67 Zungen von c' bis c''. Bei ersterem und letzterem Apparate gab also jeder folgende mit jedem vorausgehenden Tone 4 Stösse. Mit diesen beiden Apparaten standen mir vier Obertöne,

$$c = 128, \quad c' = 252, \quad g' = 384, \quad c'' = 512,$$

zu Gebot. Bleiben wir zunächst beim Intervall $c - c'$ stehen. Man nehme den Ton 128 und den nächsten Ton 132 und lasse sie zusammen erklingen. Man hört die bekannten 4 Stösse, ebenso beim Ton 128 und 136 die bekannten 8 Stösse u. s. w. Das sind die Stösse, wie sie von König zur Erklärung der Combinationstöne herangezogen wurden. Man kann von c an fortschreiten und schliesslich zum Intervall einer Octave kommen. Man würde aber sehr irren, wenn man glaubte, dass z. B. der Ton $c = 128$ und $c' - 4 = 252$ eine Anzahl 124 Stösse hören liessen, vielmehr hört man deren nur 4. Ferner, wenn man den Ton $c = 128$ mit $c' - 8 = 248$ zusammenklingen lässt, hört man nicht 120, sondern deren nur 8 Stösse. Geht man über 256 hinaus, so kann mit 128 der Ton $c' + 4 = 260$ oder $c' + 8 = 264$ zusammen erklingen. Auch hier hört man

nicht 132 und 136, sondern 4 und 8 Stösse. Es besteht demnach zunächst die erste wichtige Thatsache:

»Dass nicht nur zwei nahe unisono klingende Töne, sondern auch zwei nahe um eine Octave (Oberton 2) aus einander liegende Töne langsame und leicht zu zählende Stösse liefern.

Geht man mit dem höheren primären Ton über den 2. Oberton hinaus, so nähert man sich mehr und mehr dem 3. Oberton, dem $g' = 384$. Nimmt man anstatt des Tones 384 den Ton $g' - 4 = 380$ oder $g' + 4 = 388$, so hört man in beiden Fällen 4 Stösse. Geht man über den Oberton 3 hinaus, so nähert man sich dem 4. Oberton $c' = 512$. Ist er erreicht, so vernimmt man keine Stösse, verändert man ihn aber nach oben oder unten, so lassen sich wieder deutlich zählbare Stösse vernehmen. Diese Thatsachen bestätigen nun den allgemeinen Satz:

»Dass zwei Töne, die nicht weit um die Strecke eines Obertones auseinander liegen, langsame und leicht zu zählende Stösse liefern.

König unterscheidet »untere« und »obere« Stösse. Geht man von einem Tone »I« aus und betrachtet diesen als 1. Oberton, so lässt sich ihm gegenüber auch der 2. Oberton u. s. w. auffassen. Entfernt man sich nun mit einem Tone »II« von dem Tone »I« und zwar je von einem Obertone aus gerechnet, so hat man es mit Stössen zu thun, die immer schneller werden und diese Stösse nennt König »untere« Stösse. Zugleich mit diesen hört man aber nach König eine zweite Art von Stössen, welche bei dieser Entfernung des Tons »II« vom Grundton »I« an Zahl abnehmen und mehr und mehr deutlich zählbar werden, wenn »II« sich einem Oberton von »I« nähert um ihrer Zahl nach gleich Null zu werden, wenn dieser Oberton von I bei der Annäherung von II gänzlich erreicht ist. König giebt für die Zahl m der »unteren« Stösse die Formel:

$$m = n' - h \cdot n$$

und für die Zahl m' der »oberen« Stösse die Formel:

$$m' = (h + 1)\, n - n',$$

wobei zu bemerken ist, dass n die Zahl der Schwingungen des Grundtons »I«, n' die des höheren Tons »II« und ferner h die Ordnungszahl der Obertonperiode bedeutet, für welche also $h = 1$ zu setzen ist, wenn n' sich von n bis $2n$ bewegt, wobei ferner $h = 2$ zu setzen ist, wenn n' sich von $2n$ bis $3n$ bewegt u. s. w. Nehmen wir also $h = 1$ an, so wird

$$m = n' - n \text{ und } m' = 2n - n',$$

mithin

$$m + m' = n,$$

daher der Satz:

»In der ersten Periode, d. h. innerhalb des 1. und 2. Obertons ist die Summe der unteren und oberen Stösse unabhängig von n' und stets constant gleich n, gleich der Schwingungszahl des Grundtons.«

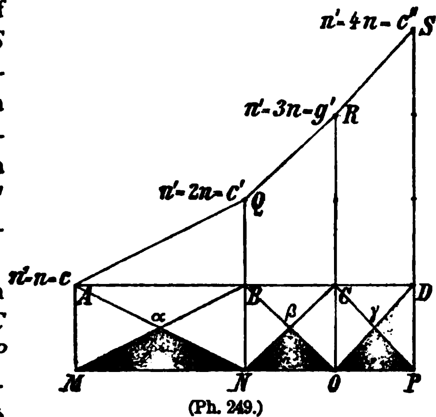
Nehmen wir $h = 2$, so wird:

$$m = n' - 2n \quad \text{und} \quad m' = 3n - n',$$

somit auch hier $m + m' = n$.

Eben dies wird sich für jedes h ergeben, so dass der zuletzt ausgesprochene Satz nicht blos für die erste Periode, sondern für die 2, 3. u. s. w. gilt. Mit diesem Zusammenhang lässt sich nun auch eine anschauliche Darstellung geben und habe ich dies in Fig. 249 versucht. Auf der Strecke MP stellt MN das Intervall einer Octave, NO das einer Quinte und OP das einer Quarte vor. Ferner bedeutet die Ordinate MA wie überhaupt alle Ordinaten zwischen AD und MP denselben Ton, nämlich den Grundton c, welcher als tieferer Ton beim Zusammenklang

beibehalten werden soll, wenn nach und nach der höhere Primärton, der durch die Ordinaten, welche zwischen den schief aufsteigenden Geraden AQ, QR und RS einerseits und der Abscisse MP andererseits nach ihrer Schwingungszahl zu denken sind, mit dem tieferen Ton zusammenklingt. Diese letzteren Ordinaten stellen also den immer höher werdenden Ton n' dar, der in der Ordinate NQ den 2. Oberton, in OR den 3. und in PS den 4. Oberton erreicht. Die Ordinaten zwischen den schief aufsteigenden Geraden MB, NC und OD einerseits und der Abscisse MP andererseits stellen nun die Schwingungszahlen der unteren Stösse und ebenso die Ordinaten zwischen den schief abwärts laufenden Geraden AN, BO und CP einerseits sowie der Abscisse MP andererseits die Schwingungszahlen der oberen Stösse dar. Innerhalb dieser dreieckigen Felder ist aber noch eine Schraffirung ausgeführt worden, welche das Phänomen der doppelten Stösse, wie es dem Ohre gegenüber verläuft, noch näher charakterisirt. Es ist schon oben bemerkt worden, dass die Wahrnehmung der Stösse als solche sich mit dem Wachsen der Anzahl derselben mehr und mehr verliert und somit umgekehrt Stösse um so mehr sich in einem Zusammenklang bemerklich machen, je langsamer sie erfolgen. Die dunklere Schraffirung in der Nähe der Punkte M, N, O und P deutet dies nun an. Sie zeigt, dass wenn der Ton n' anfängt sich von den betreffenden Obertönen nach oben hin zu entfernen, die langsameren unteren Stösse an Deutlichkeit abnehmen und wenn er sich diesen Obertönen nach oben hin stark nähert, die langsamen oberen Stösse hervortreten und als solche sich deutlich abheben, um auch leicht ihrer Zahl nach festgestellt werden zu können. An den Stellen α, β, γ treffen die beiden Arten von Stössen mit gleicher Anzahl zusammen; in der Nähe dieser Stellen sind die Schwingungszahlen dieser beiden Stossarten wenig verschieden und begreift man, wie hier vielleicht ein besonder verworrenes Zusammenwirken der Stösse sich bemerklich macht.



(Ph. 249.)

21) Ebenso wie man die langsamen Stösse einzeln als untere und obere vernehmen und zählen kann, ebenso gehen sie nun, wenn sie schneller und schneller werden, in von einander zu unterscheidende Töne, in die von König als »untere und obere Stosstöne« bezeichneten über. Es wird einleuchten, dass nicht beim Zusammenklang zweier Töne aus beliebigen Octaven, das Phänomen der Stosstöne in derselben Weise verläuft. König untersuchte aufs genaueste folgende Zusammenklänge:

A Intervalle mit dem Grundton $C = 64$ und dem zweiten primären Ton $n' = C = 64$ bis zum $n' = 8n = 512$.

B Intervalle mit $c = 128$ und $n' = c = 128$ bis $n' = 8 \cdot n = 1052$.

C Intervalle mit $c' = 256$ und $n' = c'$ bis $n' = 6n = 1536$.

D Intervalle mit $c'' = 512$ und $n' = c''$ bis $n' = 4n = 2048$.

E Intervalle mit $c''' = 1024$ und $n' = c'''$ bis $n' = c^{V} = 4096$.

F Intervalle mit $c^{IV} = 2048$ und $n' = c^{IV}$ bis $n' = 4096$.

Wir wollen nun gerade einmal die Erscheinungen für die Periode *B*, welche im Vorausgehenden von mir angenommen wurde, nach der Darstellung König's schildern hören. Er sagt:

»Bildet man die verschiedenen Intervalle vom Einklange ($n' = 128$) bis zur dritten Octave, so kann man die Stösse in den verschiedenen Perioden nicht mehr, wegen ihrer doppelt grossen Anzahl, bei ganz so weiten Intervallen beobachten, als sich dies mit dem tieferen Tone C thun liess.«

»Die erst einzeln hörbaren Stösse gehen bei der Sekunde in ein einfaches Rollen, bei der Terz in ein verworrenes Rasseln über, welches über die Quarte hinaus schon schwach wird. Zwischen der Quinte und Sexte bilden die Töne einen rauhen Znsammenklang aus dem zwischen der Sexte und Septime ein deutlicheres Rollen hervorzutreten anfängt, welches bei der Septime in einzelnen vernehmbaren und bei $n = 248$ in 8 einzeln zählbare Stösse übergeht, die bei der Octave $n' = c'$ verschwinden.«

»In der zweiten Periode $n = c$ mit $n' = c'$ bis $n' = g'$ ist schon bei $n' = 292$ nur noch eine Rauhigkeit wahrzunehmen, und bei $n' = 304$ bilden die beiden Töne bereits einen ganz ungestörten Zusammenklang, der erst bei 352 wieder rauh wird und bei 360 in ein Rollen übergeht, welches sich darauf in die einzelnen Stösse auflösst, die bei der Duodezime $n' = g'$ verschwinden.«

Man sieht demnach, dass der Zusammenklang eines höheren Tones mit dem Grundton c eigentliche untere und obere Stosstöne nicht zu beobachten gestattete. Anders ist dies bei der unter C bezeichneten Gruppe. König bemert hierbei:

»Die erst einzeln hörbaren unteren Stösse gehen, schon ehe die Sekunde erreicht ist, in ein Rasseln über, welches bis zur grossen Terz ($n' = 320$ mithin $m = 320 - 256 = 64$ Stösse) zu einer blossen Rauhigkeit wird. Zugleich hört man ein schwaches grosses $C = 64$. Bis zur Quinte ($n' = 384$) steigt dieser Ton (also der untere Stosston) bis zum kleinen $c = 128$, während von der Rauhigkeit von etwa $n' = 360$ bis 368 ab nichts mehr zu spüren ist. Von $n' = 384$ bis 448 steigt der untere Stosston bis g und ist auffallend stark im Verhältniss zu der Intensität, welche er von $m = 64$ bis $m = 128$ hatte. — Der durch die oberen Stösse m' erzeugte Ton lässt sich schon von der Terz ab bis zur Quinte, während er von g bis c sinkt, vermittelst der Stösse von Hilfsgabeln nachweisen, wenn er auch sonst kaum hörbar ist.«

Ferner gebe ich nun eine Zusammenstellung der Resultate nach den Beobachtungen der Gruppe E. König bemerkt:

»Nehmen wir jetzt c''' zum Grundton der Intervalle, so kommen wir damit in diejenige Gegend der Scala, welche für die Beobachtung der Stosstöne ebenso geeignet ist, als die tiefsten Octaven für die Untersuchung der einzelnen, noch nicht zu einem Tone verschmolzenen Stösse waren.

»Die Stosstöne der ersten Periode lassen sich in folgender Weise hören: Der Grundton $n = c'''$ giebt mit

n'	Intervall	m	m'	Bemerkungen.
d'''	8 : 9	c	....	m ist allein und gut bemerkbar.
1194·6	6 : 7	f	....	„ „ „ „ „ „ „
e'''	4 : 5	c'	g''	m ist lauter, m' schwächer wie m.
f'''	3 : 4	f'	f''	m und m' verschmelzen zu einem Klange.
1408	8 : 11	g'	e''	m und m' sind gleich laut.
g'''	2 : 3	c''	c''	$m = m'$, der Ton ist sehr stark.
1664	8 : 13	e''	g'	m und m' gleich stark und deutlich.
a'''	3 : 5	f''	f'	m und m' stärker als bei der Quarte und auch einzeln hörbar.
1792	4 : 7	g''	c'	m und m' etwa gleich stark und deutlich.
h'''	8 : 15	...	c	m ganz unhörbar, m' hörbar und deutlich.

22) Zum Schlusse dieses Artikels wollen wir die Haupterscheinungen auf dem Gebiete des Zusammenklanges der Töne in einigen Sätzen kurz charakterisiren.

1) Eigentlich einfache Töne existiren kaum und erreichen wir dieselben nur möglichst annähernd in den Schwingungen von Stimmgabeln, wenn diese insbesondere vor entsprechenden Luftresonatoren stehen und ferner in den Tönen kugelförmiger Lufträume. Geräusche mischen sich aber auch hier häufig mit ein.

2) Die allermeisten tönenden Körper lassen gleichzeitig zwei oder mehr Töne erklingen, von denen einer als **Hauptton** seiner Intensität nach hervortritt, und zu dem andere Töne sich leiser hinzugesellen.

3) Dieser Hauptton braucht keineswegs immer der Grundton zu sein und ist es denkbar, dass bei einer Saite z. B. der 3. Oberton *g'* der stärkste Ton ist, und dass zugleich der Grundton *c* ganz leise zum Mitschwingen veranlasst wird.

4) Das, was wir »**Klangfarbe**« nennen, wird nach den Forschungen von v. Helmholtz hervorgerufen durch das gleichzeitige Zusammenklingen eines Hauptones mit leiseren Nebentönen oder Obertönen, meistens aber auch durch Hinzukommen von Geräuschen.

5) Das Wesen der sogen. »**Con- und Dissonanzen**« dagegen besteht für unser Ohr, nach des Verfassers Ueberzeugung, ohne dass irgend ein dritter Ton zu den beiden primären Tönen in Betracht zu kommen braucht. Es muss daher nach dieser Ueberzeugung unstatthaft erscheinen, dass eine Lehre von den Con- und Dissonanzen auf die Obertöne, Combinationstöne und Stosstöne gegründet werde. Kommen solche Töne zu den primären Tönen hinzu, so können diese selbstverständlich entweder im Sinne des Con- oder Dissonirens wirken, und kann dann eine jede vollkommene Consonanz zur Dissonanz werden, wenn zu ihr sich den Wohlklang störende Nebentöne beigesellen.

6) Die Bezeichnung »harmonische« Obertöne passt nur für die Töne mit den Schwingungszahlen 1, 2, 3 und 5, sowie deren weiteren Verdoppelungen. Denn Alles, was mit diesen Zahlen sich zusammenstellen lässt, sind Töne des grossen und kleinen Dreiklangs.

7) Eine Hauptstörung eines regelmässigen Tones oder eines consonirenden Zusammenklanges bilden die **Stösse** oder **Schwebungen**. Sie können durchs Zusammenwirken der primären Töne, also durch Interferenz entstehen, oder es können auch auf rein mechanische Weise solche Stösse erzeugt werden. Ihre Wirkung muss in beiden Fällen mehr oder weniger die einer Beimischung eines Rasselgeräusches sein. Zur Erklärung des inneren Wesens einer Con- oder Dissonanz können aber nach des Verfassers Ueberzeugung auch nicht die Stösse herangezogen werden, denn eine sogen. Dissonanz besteht sicherlich auch ohne jedes Vorhandensein von Stössen.

8) Die sogen. »**Combinationstöne**« sind Töne, welche im Allgemeinen von den sogen. »**Stosstönen**« verschieden sind, und auch auf verschiedene Weise erklärt werden müssen; jene nach der Theorie von v. Helmholtz, diese nach der Auffassung von Lagrange und

der festen Begründung dieser Auffassung durch die Forschungen Rud. König's.

Im Anschluss an diesen zuletzt hervorgehobenen Zusammenhang muss hier noch eine in neuester Zeit erschienene Abhandlung von W. Voigt citirt werden, in welcher auf theoretischem Wege die Richtigkeit der Untersuchungen R. König's über Stosstöne vollkommen bestätigt wird. Diese Abhandlung Voigt's erschien in No. 5 der »Nachrichten von der Königl. Ges. d. Wiss. d. Univ. Göttingen« vom Jahre 1890. Melde.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls.

1) Wenn man die Literatur der Akustik überschaut, so wird man finden, dass diejenige, welche sich auf die Fortpflanzung des Schalls, also vor allem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls bezieht, eine ganz besonders umfangreiche ist. Der Grund muss zunächst in der Wichtigkeit des Gegenstandes liegen, andererseits auch darin, dass man bei der Erforschung dieses Gegenstandes in der mannigfachsten Weise vorgehen kann, während z. B. bei der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts nur auf wenigen Wegen das Ziel erreicht werden kann. Da das Luftmeer es ist, welches die Schallwahrnehmungen fast ausschliesslich ermöglicht, so leuchtet ein, wie gerade die Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in der Luft in erster Linie in Betracht kommen musste. Der Weg zur experimentellen Bestimmung war zu klar vorgezeichnet und schien auch in so leichter Weise zum Ziele zu führen, dass man seit der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts bis zum ersten Viertel des gegenwärtigen Jahrhunderts in verschiedenen Ländern die Versuche ausführte. Alle diese Beobachtungen wurden in bekannter Weise so angestellt, dass auf einer Station *A* ein Geschütz abgefeuert wurde, dass man auf einer zweiten Station *B*, die möglichst weit von *A* entfernt lag, nach einer Uhr den Zeitunterschied zwischen der Wahrnehmung des Lichtblitzes und der hierauf folgenden Wahrnehmung des Knalls bestimmte, dann die Distanz von *A* nach *B* maass und letztere durch den erhaltenen Zeitunterschied dividirte.

So einfach indess die Sache aussah und wegen ihrer Einfachheit anlockte, so zeigte es sich doch bald, dass Schwierigkeiten vorhanden waren, die man nicht so leicht überwinden sollte. Jedenfalls aber lieferten die Untersuchungen ein erstes Resultat, dem zu Folge zwei Dinge in ihrem Einfluss auf die Schallgeschwindigkeit erkannt wurden, nämlich der Wind und die Temperatur, während ein drittes Element, der Luftdruck, sich ohne Einfluss herausstellte. Was den Einfluss des Windes betraf, so ergab sich, dass die Schallfortpflanzung mit dem Winde rascher, gegen den Wind langsamer als in ruhender Luft vor sich geht. Bezüglich der Temperatur erkannte man, dass ein Zunehmen derselben auch eine Vermehrung der Schallgeschwindigkeit im Gefolge hatte, und hiermit waren die ersten bedeutungsvollen Nachweisungen des Zusammenhangs der Hauptelemente geliefert.

2) Diesen, insbesondere zu Anfang des 19. Jahrhunderts angestellten Experimenten ging eine bedeutsame theoretische Entwicklung voraus, welche ihren Autor in keinem geringeren als in Newton hatte. Bereits im Jahre 1686 am 28. April hatte dieser der Royal Society sein unsterbliches Werk »Philosophiae

naturalis principia mathematica« handschriftlich vorgelegt, welche Schrift im folgenden Jahr in London gedruckt erschien und später noch in zwei weiteren Auflagen von Anderen mit Zusätzen herausgegeben wurde und im Jahre 1872 durch WOLFERS auch eine Uebersetzung ins Deutsche erfuhr. Der *Tomus secundus* dieses Werkes enthält neun Sectiones und ist es die Sectio VIII, welche »De motu per fluida propagato« handelt. Die Propositio XLVIII enthält den wichtigen Satz, der, in einer Formel dargestellt, das ist, was man die »NEWTON'sche Formel für die Schallgeschwindigkeit« zu nennen pflegt. Der Satz lautet: *Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione composita ex subduplicata ratione vis elasticae directe et subduplicata ratione densitatis inverse; si modo fluidi vis elastica ejusdam condensationis proportionalis esse supponatur.*

NEWTON bezeichnet mit dem Worte *pulsus* einen »Schlag«, eine »Welle«' und bedeutet bei ihm ein »*motus pulsuum*« das, was wir »Wellenbewegung« nennen. Demgemäss war bei ihm die Fortpflanzung des Schalls in der Luft als die Fortpflanzung einer »Wellenbewegung« anzusehen, bei welcher nicht etwa die Sache so zu deuten ist, dass dieselben Lufttheilchen, welche am Orte der primären Schallerregung eine Erschütterung und primäre Bewegung erhalten, sich nun nach ferneren und ferneren Punkten im Raum hinbegeben, so, wie etwa eine fortgeschleuderte Kugel immer an fernere und fernere Stellen kommt, sondern vielmehr so, dass die zunächst primär erregten Lufttheilchen an Ort und Stelle in ihrer Bewegung eine Reihe von Phasen durchmachen, dass sie dann zur Ruhe kommen, während eine weitere benachbarte Summe von Lufttheilchen nun dieselben Phasen in derselben Reihenfolge wie die erste Summe durchmacht u. s. w. u. s. w. Wir wissen, dass man nach den Darstellungen im Artikel über »allgemeine Wellenbewegung« von »Primitivbewegungen« und einer »resultirenden Bewegung« reden kann. Handelt es sich, wie wir hier zunächst voraussetzen, um die Fortpflanzung einer Wellenbewegung, »Schall« genannt, in der Luft, so kann nur von Longitudinalbewegungen die Rede sein. Hierbei bestehen die Primitivbewegungen aus einer, das Gesetz der Pendelschwingungen befolgenden, hin- und hergehenden Bewegung von Luftschichten, wobei dann sehr bald das resultirende Gebilde der Luftverdichtungen bezw. auch Luftverdünnungen eintritt, welche Gebilde sich von Strecke zu Strecke im Raume weiter fortpflanzen. Halten wir demnach nur an einer Verdichtung fest, so schreitet diese Verdichtung von Strecke zu Strecke fort, d. h. es gerathen immer fernere und fernere Theile der Luft in den Zustand dieser Verdichtung. Meistens stellt man sich die Sache zunächst so vor, dass man annimmt, es könne sich der ursprüngliche Bewegungsmodus von einer punktförmigen, oder besser ausgedrückt, von einer engbegrenzten, kugelförmigen Anfangsstelle aus rings herum um diese gleichmässig ohne jedes Hinderniss weiter verbreiten. Unter dieser Annahme leuchtet ein, dass das, was wir anfangs als eine Verdichtung der Luft ins Auge fassen, bei der weiteren Verbreitung Kugelschalen bilden muss, deren Radius immer grösser und grösser wird, ähnlich dem Gebilde der Wellenberge, die wir auf einer Wasserfläche in Form von Wellenkreisen mit immer grösserer Ausbreitung mit dem Auge leicht verfolgen können. Diese Uebertragung auf immer grössere Kugelschalen bringt es mit sich, dass die Intensität des Schalles bei dessen Fortpflanzung rasch abnehmen muss. Denn fassen wir irgend eine Kugelschale um das Erregungscentrum ins Auge, so bildet diese den Complex aller Lufttheilchen, welche sich in gleicher Schwingungsphase befinden. Um die Bewegung vom Erregungscentrum bis zu dieser Schale mit dem Radius, den wir l nennen wollen, fortzupflanzen, verfliesst eine gewisse Zeit t.

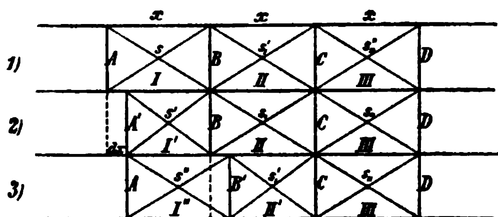
Nach der Zeit $2t$ sind viermal so viel Theilchen einer Kugelschale mit doppelt so grossem Radius von der Bewegung ergriffen. Die gesammte lebendige Kraft, welche auf dieser 4mal so grossen Kugelschale in Betracht kommt, muss aber dieselbe sein, wie die auf der ersten Schale. Ein Flächenstück f auf der 4mal so grossen Schale besitzt sonach den vierten Theil der lebendigen Kraft, wie dasselbe Flächenstück f auf der ersten. Da nun diese Fläche f auch als der Querschnitt unseres Gehörgangs angesehen werden kann, so würde hieraus folgen, dass die Intensität des Schalles im Quadrat der Entfernung von der Schallquelle abnimmt.

Der NEWTON'sche Satz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit basirt in seiner Ableitung auf dem im Jahre 1679 von MARIOTTE erkannten Gesetze und beziehen sich auf dieses Gesetz offenbar die Schlussworte der obigen Aufschrift zur Propos. XLVIII. Der Satz selbst lässt sich in einer Formel

$$c = \sqrt{\frac{p}{D}}$$

ausdrücken.

3) Es mag zunächst im folgenden eine Ableitung dieser Gleichung gegeben werden. Fig. 250 1) stellt ein Stück einer Schallstrecke dar, wie wir sie vom Erregungscentrum ausgehend denken können. Auf dieser Strecke können wir den Zustand der Luft in einer cylindrischen oder prismatischen Begrenzung denken, so dass die Querschnitte, senkrecht zur Längsaxe diese Cylinders oder Prismas Kreise oder z. B. Quadrate sind. Auf der angenommenen Schallstrecke mögen nun zwischen den Querschnittsflächen A, B, C und D (Fig. 250) drei Luftpartien begrenzt liegen, deren Länge in der Richtung der Fortpflanzung des Schalls, von links nach rechts gerechnet, bei ruhender Luft gleich x ist. Bei dieser Fortpflanzung der Bewegung wird die Grenzschicht A zuerst einen Impuls von links nach rechts erhalten und wird von der Ruhelage A in 1) aus nach rechts bis A' wie in 2) hin verschoben werden. Die Zeit, innerhalb welcher diese Verscheibung sich vollzieht, mag t heissen. Der Schwerpunkt s der ersten zwischen A und B gelegenen Schicht, den wir hier und im weiteren im Durchschnitt der beiden Diagonalen der Rechteckflächen erkennen wollen, rückt hierbei bis zu einem Punkte s' in 2) vor und ist die Verschiebung dieses Schwerpunkts, wenn wir die Verschiebung der Grenzschicht A mit dx bezeichnen, wie sich leicht erkennen lässt, gleich $\frac{dx}{2}$. Sich selbst überlassen, gleicht die zwischen A und B gelegene Luft in 2) ihre vermehrte Dichtigkeit bald wieder aus und überträgt die Verdichtung auf die zwischen B und C gelegene Luftmasse, wobei die Schicht B aus ihrer Stellung in 1) und 2) nach B' in 3) rückt und wobei weiter der Schwerpunkt s_1 in 2) an die Stelle von s_1' in 3) rückt und somit gegen s_1 in 2) ebenfalls um $\frac{dx}{2}$ verschoben ist. Vom Momente, der in 2) versinnlicht ist, bis zum Momente 3) ist demnach die Verdichtung, die in 2) in ihrer Mitte durch den Punkt s' bezeichnet ist, bis s_1' in 3) weiter vorgerückt, welches Vorrücken, wie sich ebenfalls leicht erkennen lässt, auf einer Strecke gleich x stattgefunden hat.



(Ph. 250.)

Bezeichnen wir nun die Spannung, di
mit p, so hat sie zwischen A' und B in
nach dem Mariotte'schen Gesetze, wenn
mit 1 bezeichnen, die Beziehung:

$$(p + dp)\,(x - dx$$

oder nach Ausführung der Multiplication un
und dx, gegen p und x gehalten, klein sind

$$- p \cdot dx + x \cdot$$

oder

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x}{p}.$$

Die Bewegung, welche in die zwischen
Momente 2) bis zum Moment 3) gekomm
Spannungsverhältnissen beiderseits dieser L
herrscht im Momente 2) in der Masse von
der Masse I, die Spannung $p + dp$, also ein
3) ist der letztere Ueberdruck auf Null gesu
in I'' und III wieder die Spannung p. Wi
vom Moment 2) an bis zum Moment 3) von
dass, wenn ein gleichmässig wirkender
die Zeit t hindurch gewirkt hätte, dieselbe
worden wäre. Da hierbei die Schicht B m
und im folgenden als 1 bezeichnen wollen,
und in der Zeit t der Gegendruck $\frac{dp}{2}$ überw
M, welche von $\frac{dp}{2}$ geleistet wird, gleich

$$M = \frac{dp}{2} \cdot d$$

Eine durch die Zeit t hindurchwirkende
Schwerpunkt einer Masse so wirkt, dass dies
schiebt, ertheilt diesem aber nach den Gese
eine Geschwindigkeit

$$v = \frac{\frac{2 \cdot dx}{2}}{t} =$$

demgemäss die hierbei entstandene lebendig

$$L = \frac{x \cdot D \cdot v^2}{2} =$$

ist. Da die Werthe von M und L gleich se

$$\frac{dp \cdot dx}{2} = \frac{x \cdot}{}$$

oder

$$dp = \left(\frac{x}{t^2}\right) \cdot L$$

oder, da nach (1)

$$dp = \frac{p\,d}{x}$$

ist, auch

$$1 = \left(\frac{x}{t}\right)^2 \cdot \frac{D}{p}$$

oder

$$\frac{x}{t} = \sqrt{\frac{p}{D}}$$

sein muss. Die Verdichtung schritt vom Moment 2) bis zu 3) in der Zeit t um die Strecke x fort. Daher ist $\frac{x}{t}$ nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c des Schalls und somit

$$c = \sqrt{\frac{p}{D}}$$

oder

$$c = \sqrt{\frac{p \cdot g}{s}}. \tag{5}$$

Es bedeutet hierin p den Druck in Gewichten auf die Flächeneinheit und s das Gewicht der Cubikeinheit und kann zunächst p leicht durch andere Grössen ersetzt werden. Denn bezeichnen wir den herrschenden Luftdruck, durchs Barometer gemessen und auf 0° reducirt, mit b und das specifische Gewicht des Quecksilbers bei 0° mit σ, so ist $p = b \cdot \sigma$. Bezeichnen wir ferner das specifische Gewicht der Luft bei 0° und 76 *cm* Quecksilberdruck mit s_0, dagegen bei irgend einer Temperatur t^0 und irgend einem Drucke b, wie in der Formel (5) angenommen, mit s, so ist

$$s = s_0 \frac{b}{76(1 + \alpha t)},$$

wobei α den Ausdehnungscoëfficienten der Luft vorstellt. Führen wir nun für p und s die zuletzt gefundenen Werthe ein, so ergiebt sich

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot 76 \cdot \sigma \cdot (1 + \alpha t)}{s_0}}. \tag{6}$$

Da hierbei sich b weghob, so ergiebt sich der wichtige Satz, dass die Schallgeschwindigkeit vom Barometerstand, also überhaupt vom Drucke, unter welchem die Luft steht, unabhängig ist. Dies gilt jedoch streng genommen nur, so lange die Luft völlig frei von Wasserdampf ist. Ist dies nicht der Fall, so muss im Ausdruck für s anstatt b ein $(b - 0{\cdot}3779 \cdot f)$ gesetzt werden, worin f die Spannkraft des vorhandenen Wasserdampfes darstellt. Dieser hiernach corrigirte Werth von s mit dem für $p = b \cdot \sigma$ in Gleichung (5) eingeführt, liefert aber

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot b \cdot \sigma \cdot 76 \cdot (1 + \alpha t)}{s_0 (b - 0{\cdot}3779 \cdot f)}}, \tag{7}$$

wobei noch zu bemerken ist, dass, wenn g, b und f in Centimetern ausgedrückt werden, man das c ebenfalls in Centimetern erhält, welche Zahl dann, um Meter zu erhalten, noch mit 100 zu dividiren ist.

4) Bei den Methoden der direkten Bestimmung der Schallgeschwindigkeit bis zum Jahre 1822 hin waren die hauptsächlichsten Resultate folgende[1]). Es fanden:

Mersenne und Gasendi um 1640 . . . . $v = 448$ *m*.
Die Mitglieder der Academie del Cimento zu Florenz u. J. 1660 $v = 361$ *m*.
Robert Boyle, ferner Cassini und Huyghens um 1700 . . . . $v = 351$ *m*.
Flamsteed und Halley 1708 und 1709 . . . . $v = 348$ *m*.

---

[1]) Man vergleiche auch die werthvolle Abhandlung von Dr. Hilfer »Ueber die Methoden, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in gasförmigen Körpern zu bestimmen.« Programm des Gymn. zu Schweidnitz 1880.

LA CAILLE, MARALDI, CASSINI DE THURY im J. 1738	$v = 337$ *m.*
BIANCONI 1740	$v = 318$ *m.*
DE LA CONDAMINE 1740 zu Quito, um bei einem bedeutend geringeren Luftdruck (55 *cm*) zu messen . . .	$v = 339$ *m.*
Derselbe 1744 zu Cayenne an der Meeresküste und bei einer bedeutend höheren Temperatur	$v = 358$ *m.*
KÄSTNER in Göttingen 1778 und MÜLLER ebendaselbst. . . .	$v = 338$ *m.*
ESPINOSA und BAUZA zu San Jago de Chili 1794 bei 21—25° C.	$v = 356$ *m.*
BENZENBERG 1809 und 1811 aus sorgfältigen und zahlreichen Versuchen bei 0°	$v = 333{\cdot}7$ *m.*
GOLDINGHAM bei Madras 1820 und 1821 bei 0°	$v = 331{\cdot}0$ *m.*

Das waren Versuche genug, um entscheiden zu können, in wie weit die von NEWTON gegebene Theorie mit der Erfahrung übereinstimmte. Rechnet man nun obige Formel (7) für $t = 0°$ und unter Annahme völlig trockener Luft aus, so findet man

$$v = 279{\cdot}93\ m,$$

ein Resultat, welches so auffällig selbst vom kleinsten der obigen Werthe, nämlich $v = 331{\cdot}0$, abweicht, dass man unmöglich glauben konnte, es wäre die NEWTON'sche Formel richtig. Dies wurde auch schon in dem zweiten Decennium unseres Jahrhunderts deutlich erkannt, und war es LAPLACE, welcher im Jahre 1816 den merkwürdigen Grund der Nichtübereinstimmung der beiden Werthe in einer Abhandlung bekannt machte, welche unter dem Titel »Sur la vitesse du Son dans l'air et dans l'eau« im Tome III der Annales de chimie et de physique pag. 238—241 erschien, nachdem sie am 23. December 1816 in der Academie des Sciences gelesen war. Man kann nichts besseres thun, als die Worte des Autors nach dem Originaltexte hierher setzen, indem hierdurch der nächste Zusammenhang der Verhältnisse wohl am besten erhellt. LAPLACE sagt:

»NEWTON hat in dem zweiten Buche der mathematischen Principien der Naturphilosophie einen Ausdruck für die Geschwindigkeit des Schalls gegeben. Die Art und Weise, wie er dazu gelangt, ist einer der bemerkenswerthesten Züge seines Genies. Die Geschwindigkeit, nach diesem Ausdruck erhalten, ist eine viel zu kleine und ungefähr um ein Sechstel kleiner als diejenige, welche sich nach den Experimenten ergab, die im Jahre 1738 von den Mitgliedern der (französischen) Akademie ausgeführt wurden. NEWTON, der schon diese Differenz, nach den Experimenten, die zu seiner Zeit angestellt wurden, erkannt hatte, versuchte jene zu erklären; aber die neueren Entdeckungen über die Natur der atmosphärischen Luft haben diese Erklärung zu nichte gemacht und ebenso alle diejenigen Erklärungen, welche verschiedene andere Mathematiker in Vorschlag gebracht hatten. Glücklicherweise beziehen sich diese Entdeckungen auch auf ein Phänomen, welches mir der wahre Grund des Ueberschusses der beobachteten Geschwindigkeit des Schalls über die berechnete zu sein scheint. Der grösste Theil der Physiker hat denn auch alsbald diesen Grund angenommen. Dieses Phänomen ist die Wärme, welche die Luft bei ihrer Compression freigiebt. Sobald man die Temperatur der Luft erhöht, unter der Voraussetzung, dass der Druck der letzteren derselbe bleibt, so wird ein Theil der Wärme, die sie bekommt, nur eben zu dieser Erwärmung verwendet, der andere Theil aber, den sie empfängt und der latent bleibt, dient dazu, ihr Volumen zu vergrössern. Der letztere Theil ist auch derjenige, der wieder frei wird, sobald man durch Zusammendrückung die ausgedehnte Luft wieder auf ihr ursprüngliches Volumen zurückführt. Die bei der Näherrückung zweier benachbarten

Molekülschichten einer schwingenden Luftsäule frei werdende Wärme erhöht daher deren Temperatur und zerstreut sich nach und nach in die Luft bezw. die anstossenden Körper; da aber diese Diffussion und Strahlung im Vergleich zur Geschwindigkeit der Schwingungen sich nur langsam vollzieht, so kann man, ohne merkliche Fehler zu machen, annehmen, dass die Menge der Wärme während der Dauer je einer Schwingung zwischen zwei benachbarten Molekülschichten dieselbe bleibt. So werden denn diese Schichten, wenn sie sich nähern, sich auch stärker abstossen, einmal, weil ihre gegenseitige Abstossung, auch wenn die Temperatur als unveränderlich vorausgesetzt wird (nach MARIOTTE), im umgekehrtem Verhältniss ihrer Abstände wächst, sodann aber auch, weil die latente Wärme, welche (bei der Annäherung) frei wird, die Temperatur der Luftschichten und somit die Spannkraft zwischen ihnen erhöht. NEWTON hat sein Augenmerk nur auf die erste der beiden Ursachen gerichtet, aber es ist klar, dass auch die zweite die Schallgeschwindigkeit vergrössern muss, weil sie die Abstossung der Luft vermehrt. Indem ich diese Ursache beim Calcul berücksichtigte, gelangte ich zu folgendem Theorem:

»Die wirkliche Geschwindigkeit des Schalls ist gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit, wie sie die NEWTON'sche Formel liefert und der Quadratwurzel aus dem Verhältniss der specifischen Wärme der Luft unter Voraussetzung, dass dieselbe stets demselben Drucke unterworfen bleibt, aber verschiedene Temperaturen annehmen kann, zur specifischen Wärme der Luft unter Annahme, dass diese Aenderungen der Temperatur ohne Volumveränderung der Luft erfolgen.«

5) Es ist nun nicht schwierig, den Beweis für die Richtigkeit dieses LAPLACE'schen Satzes zu erbringen. Zu dem Ende betrachten wir noch einmal unsere Fig. 250 und fassen in ihr die zwischen B' und C in 3) gelegene Luftmenge II' ins Auge. Ihre Masse ist noch dieselbe, wie die von II in 1) und 2), d. h. da wir den Querschnitt der Schicht als 1 ansehen, gleich

$$1 \cdot x \cdot D = x \cdot D.$$

Wenn wir uns nun vorstellen, dass durch Wärmezufuhr dieses Volumen ohne Veränderung des auf ihm bestehenden Druckes auf das ursprüngliche Volum II in 1) oder II in 2) ausgedehnt werden sollte, d. h. um ein Volum $1 \cdot dx = dx$ zunehmen sollte, so müsste die vorhandene Temperatur t um eine Anzahl τ Grade erhöht werden. Diese Wärmezufuhr bewirkt dann etwas Doppeltes: Erstens eine Erhöhung der Temperatur von t auf $(t + \tau)$, und zweitens eine Volumvergrösserung von $(x - dx)$ auf x, also um dx. Um das Letztere fertig zu bringen, muss aber, wenn wir mit c_p die specifische Wärme der Luft bei constantem Druck und mit c_v die bei constantem Volumen bezeichnen, die Wärmemenge

$$w = x \cdot D \cdot (c_p - c_v) \cdot \tau$$

verwendet werden, welche Menge als latent im neuen Volumen x bestehen bleibt. Wenn wir nun jetzt plötzlich das Volumen x auf $x - dt$, d. h. auf's Volumen II' in 3) zusammendrückten, so würde diese latente Wärme w wieder frei. Sie würde sich demgemäss der Luftmenge II' mittheilen und deren Temperatur von $(t + \tau)$ auf ein $(t + \tau + \tau')$ erhöhen, zum Theil aber würde sie sich hernach auch, wenn wir uns die ganze Luftstrecke in eine Röhre eingeschlossen denken, in die Wand dieser Röhre hin verbreiten können. Aber, wenn wir bedenken, dass das, was wir eine Compression der Luftmasse von x auf $x - dt$ nannten, bei der Schallfortpflanzung während einer Verdichtung der Luft eintritt und ferner beachten,

dass die Zeit, die auf eine solche Verdichtung kommt, eine sehr kurze ist, so dürfen wir, wie dies ja LAPLACE in den oben citirten Worten schon klar ausgesprochen hat, annehmen, dass der Verlust an Wärme, der bei einer raschen Compression, d. h. während des kurzen Zeittheilchens einer Verdichtung nach den Wänden der Röhre hin in Betracht kommen könnte, gleich Null zu setzen ist, d. h. wir dürfen annehmen, dass die ganze Compressionswärme nur dazu kommt, die Luft von II′ in 3) zu erwärmen, so, dass unser τ' den vollen Betrag der Temperaturgrade darstellt, der durch die Compressionswärme w in II′ hervorgerufen wird. Dies vorausgesetzt, wird demnach diese frei werdende Wärmemenge w das II′ so erwärmen, dass die Gleichung

$$w = x \cdot D \cdot c_v \cdot \tau'$$

besteht, oder, wenn man für w den oben schon erhaltenen Ausdruck gesetzt denkt und $x \cdot D$ beiderseits weglässt, es wird

$$(c_p - c_v)\,\tau = c_v \cdot \tau'$$

oder, wenn wir das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen

$$\frac{c_p}{c_v} = k \tag{8}$$

setzen, auch

$$(k-1) = \frac{\tau'}{\tau} \;\ldots\ldots \tag{9}$$

Es kommt nun weiter darauf an, für τ und τ' andere Werthe einzuführen. Bei der Volumvergrösserung durch Wärmezufuhr, wobei das Volum $(x - dt) =$ II′ in 3) in's Volumen x übergeht, ohne dass der Druck, der auf dem Gase lastet, sich ändert, kommt das GAY-LUSSAC'sche Gesetz zur Anwendung, dem zu Folge

$$1 \cdot dx = x \cdot \alpha \cdot \tau$$

ist, wenn α den Ausdehnungsconfficienten der Luft bedeutet. Demgemäss ist also

$$\tau = \frac{dx}{x \cdot \alpha} \tag{10}$$

Wenn ferner die Luftmasse II′ eine Temperaturerhöhung um τ' Grade bei einer Verdichtung erhält, so muss die in ihr schon herrschende Spannung $(p + dp)$, wobei also dp dem MARIOTTE'schen Gesetz entspricht, noch um eine Spannung dp' wachsen, für welche die GAY-LUSSAC'sche Spannungsformel giltig ist, der gemäss:

$$dp' = (p + dp)\,\alpha \cdot \tau'$$

wird, d. h. es ist, wenn wir den Summanden $dp \cdot \alpha \cdot \tau'$ als verschwindend klein ansehen:

$$dp' = p \cdot \alpha \cdot \tau',$$

d. h.

$$\tau' = \frac{dp'}{p \cdot \alpha} \;\ldots \tag{11}$$

zu setzen. Führen wir diese Werthe für τ' und τ in die obige Gleichung (9) ein, so ergiebt sich

$$(k-1) = \frac{dp' \cdot x}{p \cdot dx}$$

oder

$$dp' = \frac{(k-1) \cdot p \cdot dx}{x}.$$

Die Spannungsvermehrung ist demnach nicht blos dp, wie es NEWTON glaubte, sondern $dp^* = (dp + dp')$ oder

$$dp^* = dp + \frac{(k-1) \cdot p \cdot dx}{x} = dp + k\,\frac{p \cdot dx}{x} - \frac{p \cdot dx}{x}.$$

Nach Gleichung (1) ist aber $\frac{\text{[illegible]}}{x} = dp$; daher

$$dp^* = \frac{k \cdot p \cdot dx}{x}.$$

Setzen wir anstatt dp in Gleichung (4a) diesen Werth von dp^* **ein**, so ergiebt sich

$$\frac{k \cdot p \cdot dx}{x} = \frac{x}{t^2} \cdot D \cdot dx$$

oder

$$k \cdot p = \frac{x^2}{t^2} \cdot D$$

oder

$$c = \sqrt{\frac{p}{D}} \cdot \sqrt{k} \ldots\ldots$$

oder

$$c = \sqrt{\frac{p \cdot g}{s}} \cdot \sqrt{k} \ldots \qquad (12)$$

als die dem LAPLACE'schen Satze entsprechende Formel.

Da k für die verschiedenen Gase verschieden ist und ebenso s verschieden ist, so gestattet die Gleichung (12) auch für andere Gase im Vergleich mit der Luft die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf theoretischem Wege zu bestimmen. Bezeichnen wir für ein zweites Gas die genannten beiden Grössen mit k' und s', so ist

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{s}{s'}} \cdot \sqrt{\frac{k'}{k}}$$

oder, falls s und c für die Luft als 1 angenommen werden:

$$c' = \sqrt{\frac{k'}{s'k}}.$$

Es berechnet sich hiernach[1]), wenn man für c' die von REGNAULT für verschiedene Gase gefundenen Werthe von c' benutzt.

	$\frac{c'}{c}$	$\sqrt{\frac{1}{s'}}$	k'
Luft	1	1	1·395
Wasserstoff	3·801	3·799	1·396
Kohlensäure	0·801	0·809	1·368
Stickoxydul	0·801	0·810	1·361
Ammoniak	1·228	1·303	1·239.

6) Die directe Bestimmung der Schallgeschwindigkeit der Luft, wie sie bis zum Jahre 1822 vielfach ausgeführt wurde, hatte in der bestimmtesten Weise ergeben, dass der Wind von bedeutendem Einfluss war. In Folge dieser Erkenntniss hatte man verschiedentlich nicht blos auf der einen, sondern auch auf der anderen Station die Schüsse abgefeuert, um eben aus den je beiderseitigen Werthen das Mittel nehmen zu können. Soll dieses Mittelnehmen aber eine Berechtigung haben, so müssen die Schüsse gleichzeitig abgefeuert werden, denn nur dann wird ja die Schnelligkeit des Windes für beide Schüsse als genau dieselbe angenommen werden können.

LAPLACE musste das höchste Interesse daran haben, seine Theorie mit der Erfahrung vergleichen zu können, und waren zu dem Ende vor Allem tadellose und einwurfsfreie Experimente erforderlich. Auf seine Veranlassung wurden daher

[1]) Verg. WÜLLNER, Experimentalphysik, 4. Aufl., Bd. I, pag. 794.

die Versuche der französischen Akademiker vom Jahre 1738 wiederholt. Das *Bureau des Longitudes* zu Paris setzte eine Commission nieder. Als Stationen waren gewählt Monthlery und Villejuif, deren Distanz von ARAGO gleich 18622·27 *m* gefunden worden war. Zu Monthlery beobachtete A. v. HUMBOLDT, GAY-LUSSAC und BOUVARD, in Villejuif ARAGO, MATTHIEU und DE PRONY. Die Beobachtungen fanden statt in den Nächten des 21. und 22. Juni im Jahre 1822. Auf beiden Stationen wurden 12 Kanonenschüsse abgefeuert und zwar so, dass auf jeder Station alle 10 Minuten ein Schuss abgegeben wurde, und die Schüsse der einen Station mitten zwischen die der anderen fielen, d. h. je zwei der aufeinander folgenden Schüsse der beiden Stationen um 5 Minuten auseinanderlagen. Aus 7 solchen wechselseitigen Schüssen am 21. Juni berechnete sich die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft bei 0° und unter Benutzung des von GAY-LUSSAC und WELTER berechneten Werthes $k = 1{\cdot}3748$ gleich

$$c = 330{\cdot}8\ m.$$

Im nächsten Jahre unternahmen die holländischen Physiker MOLL, VAN BEEK und KUYTENBROUWER neue Beobachtungen, wobei möglichst gleichzeitig an beiden Stationen die Schüsse abgegeben wurden. Die Standpunkte waren zwei Hügel 5 Meilen von Amsterdam in der Heide gelegen. Das Schlussmittel aus den Berechnungen von MOLL und VAN BEEK war für 0° C. und 76 *cm* Druck

$$c = 332{\cdot}05\ m,$$

wobei jedoch bemerkt werden muss, dass hierbei der Ausdehnungscoëfficient der Luft nach GAY-LUSSAC zu $\alpha = 0{\cdot}00375$ benutzt wurde, während später von JOLLY der genauere Werth gleich 0·003669 gefunden wurde, bei dessen Zugrundelegung sich

$$c = 332{\cdot}25\ m$$

ergiebt.

Es verdient nun weiter hervorgehoben zu werden, dass RÖBER[1]) auf einen principiellen Fehler in der Berechnung der Schallgeschwindigkeit von MOLL und VAN BEEK und Anderen aufmerksam machte, und dass weiter VAN REES zeigte, wie man genau bei dieser Berechnung zu verfahren habe. Der Satz nämlich, dass man bei gleichzeitig erfolgenden Schüssen, wenn Wind geht, einfach nur das Mittel aus den beiderseitigen Schallgeschwindigkeiten v_1 von der Station A nach B und v_2 von B nach A zu nehmen habe, gilt nur unter der Voraussetzung, dass der Wind genau in der Richtung von A nach B oder umgekehrt weht während, wenn er die Verbindungslinie von A nach B kreuzt, complicirtere Verhältnisse stattfinden. Für die erstere Voraussetzung lässt sich der Zusammenhang leicht erkennen. Nennen wir w die Geschwindigkeit des Windes in der Richtung von A nach B so ist, wenn t_1 und t_2 die an den Stationen B und A erhaltenen Zwischenzeiten zwischen Wahrnehmung des Lichtblitzes und des Schalles, ferner c die Geschwindigkeit bei Windstille und d die Wegstrecke zwischen A und B bedeuten

$$d = c \cdot t = (c + w)t_1 = (c - w)t_2;$$

mithin

$$\frac{d}{t_1} + \frac{d}{t_2} = 2c$$

oder

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{t_1} + \frac{d}{t_2}\right),$$

d. h. es ist die wahre Schallgeschwindigkeit das arithmetische Mittel aus den einzelnen Schallgeschwindigkeiten. Hieraus ergiebt sich sofort die Nothwendig-

[1]) Fortschr. der Physik der Berliner physikal. Ges., Jahrg. 1865, pag. 137. Anm.

keit von gleichzeitigen Schüssen. Denn, wenn der Wind die Richtung von *A* nach *B* auch beibehält, aber bei einem Schuss von *B* aus, der z. B. später wie der von *A* aus erfolgen soll, eine andere Geschwindigkeit hat, so sind die *w* in den obigen Gleichungen ungleich und lassen sich nicht eleminiren.

Wenn aber nun weiter der Wind nicht von *A* nach *B*, sondern unter einem Winkel φ gegen die Verbindungsrichtung *AB* weht, so zeigte VAN REES[1]), dass *c* durch eine complicirtere Formel dargestellt wird und dass hierbei

$$c = d\sqrt{\frac{1}{t_1 t_2} + \frac{(t_2 - t_1)^2}{4 t_1^2 \cdot t_2^2 \cos \varphi^2}}$$

zu setzen ist, welcher Werth für $\varphi = 0$ in die oben mitgetheilte Form übergeht.

Es hat nun SCHRÖDER VAN DER KOLK im Jahre 1865 die mitgetheilten und andere Verhältnisse, welche MOLL und VAN BEEK übersehen hatten, genau berücksichtigt[2]) und die von den beiden letzteren Beobachtern vorliegenden Beobachtungen bei einer neuen Berechnung zu Grunde gelegt. Diese ergab

$$c = 332{\cdot}77 \pm 0{\cdot}093\ m,$$

also 0·72 *m* mehr wie bei der früheren Rechnung.

7) Die Lösung der Frage: Wie kann die Schallgeschwindigkeit direkt im Sinne der im Vorausgehenden so zahlreichen Versuche bestimmt werden, trat in ein neues Stadium, als REGNAULT sich der Sache bemächtigte, und gerade von diesem Forscher konnte man etwas Neues und Bedeutungsvolles erwarten. REGNAULT hatte zunächst die Ueberzeugung gewonnen, dass die früheren Methoden der direkten Messung der Schallgeschwindigkeit einen Fehler in sich bargen, der im Beobachter selbst lag und ein physiologischer genannt werden muss. REGNAULT bemerkte nämlich, dass der Beobachter sowohl vom Lichtblitz der Geschütze als auch von dem Schall des Geschützdonners überrascht werde, dass einmal eine gewisse, wenn auch noch so kleine Zeit, verfliessen müsse zwischen dem wirklichen Eintreffen des Lichtblitzes auf der Netzhaut und dem Momente der selischen Wahrnehmung, ebenso zwischen dem Anschlag des Donners an das Trommelfell und der eigentlichen selischen Perception des Schalles, dass ferner auch jedenfalls eine gewisse Zeit verflösse zwischen diesen selischen Momenten und der wirklichen Ausführung der Notirung der Zeiten für den Lichtblitz und den Donner. Aus diesen Gründen suchte REGNAULT nach einer Methode, wobei die subjektive Thätigkeit eines Beobachters in Wegfall kam, indem starre mechanische Einrichtungen zu functioniren hatten, denen er zutraute, dass sie die entsprechenden Schallwellen genau im Momente ihrer Ankunft auch signiren müssten. Ob dem wirklich so ist, mag zunächst dahingestellt bleiben. Denn man kann der Ansicht sein, dass, wenn z. B. eine Membran an das eine Ende eines Hebels angelehnt ist, dessen anderes Ende einen Schreibstift trägt, und die Membran plötzlich einen Stoss nach der Seite des Hebels hin erfährt, dass dann doch eine kleine Zeit verfliesst, bis der Hebel anfängt mit dem Schreibstifte die Marke auf einer berussten Trommel oder Scheibe zu notiren. Vielleicht aber konnte diese Zwizchenzeit bei starren Mechanismen viel geringer sein, als bei dem von der subjektiven selischen Beschaffenheit des Menschen wesentlich äbhängigen Muskelmechanismus.

Wenn Lufterschütterungen mechanisch auf starre Körper, wie Hebel übertragen werden sollen, so kommen als diejenigen Körper, auf welche die Erschütterungen zunächst einwirken, nur Membranen in Betracht und machte desshalb REGNAULT bei seiner Methode von diesen einen ausgedehnten Gebrauch.

1) POGG. Ann., Bd. 124, pag. 465.

2) POGG. Ann., Bd. 124, pag. 453.

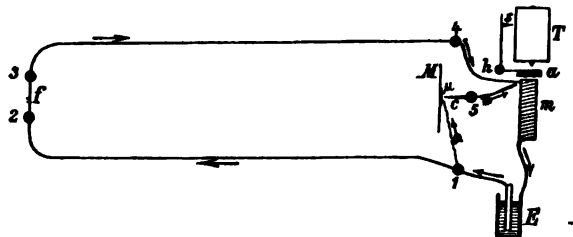
Die Grundgedanken bei den Regnault'schen Methoden waren nun folgende:

1) Man erzeugt an einer Station *A* eine Lufterschütterung, wobei im selben Moment, wo diese entsteht, ein ausgespannter Draht zerrissen wird, und so ein elektrischer Strom unterbrochen wird, der bis zu diesem Momente an der Station *B* einen Elektromagneten in Thätigkeit erhielt, in welcher Thätigkeit ein Hebel mit dem einen Ende nach dem Elektromagneten hingezogen wurde und mit dem anderen Ende auf eine um eine verticale Axe sich drehende Schreibtrommel seine Aufschrift machte. Diese Aufschrift hörte also auf im Moment, wo der in *A* ausgespannte Draht zerriss, d. h. im Momente, als die Verdichtungswelle sich von *A* aus nach *B* hin in Bewegung setzte.

2) Im Momente, wo die Verdichtungswelle in *B* ankommt, trifft sie auf eine in verticaler Ebene ausgespannte Membran. Diese macht eine Excursion nach aussen und kommt hierbei in Contakt mit einem besonderen Metallstift, wodurch wiederum ein elektrischer Strom geschlossen wird, der denselben Elektromagneten, welcher im Momente, als die Verdichtung die Station *A* verliess, unthätig geworden war, momentan wieder in Thätigkeit setzt und so den Hebel veranlasst eine zweite Aufschrift zu machen, die aber jetzt, da die Bewegung der Membran nur eine kurz andauernde ist, auch nur auf eine kurze Strecke hin auf der Schreibtrommel bemerkbar wird.

3) Die Zwischenstrecke zwischen den beiden Stellen der Schreibtrommel, an denen einmal der Schreibstift aufhörte und dann wieder anfing zu schreiben, entspricht der Zeit, welche die Schallwelle gebraucht hat, um von *A* nach *B* zu gelangen. Es muss demnach noch ein Zeitmesser hinzukommen, und benutzte Regnault eine Stimmgabel, welche ihre Schwingungen neben dem Schreibstift auf die Trommel aufschrieb. Kennt man die Zahl ihrer Schwingungen genau, so lässt sich aus der, auf die den beiden Momenten entsprechende Zwischenstrecke, gehenden Zahl von kleinen Wellen auch die Zwischenzeit bestimmen, wie dies ja zur Genüge aus andern Experimenten bekannt ist. Kennt man die Zahl der Gabel-Schwingungen nicht genau, so muss noch ein Pendel verwendet werden, das neben der Stimmgabel die Sekundenmarken oder halbe Sekundenmarken notirt.

Mit Ausnahme der Stimmgabel und des Pendels stellt die Fig. 251 schematisch den Zusammenhang dar, der klar wird, wenn noch die einzelnen Theile, die durch beigesetzte Buchstaben bezeichnet sind, jetzt namhaft gemacht werden. Es stellt nämlich vor:



(Ph. 251.)

E die Elektricitätsquelle, von welcher der elektrische Strom in der Richtung des beigesetzten ungefiederten Pfeils nach den Klemmeu 1, 2 u. s. w. verläuft;

f das Drahtstück der Stromleitung, welches zerrissen wird im Moment, wo die Schallwelle sich von links nach rechts in Bewegung setzt;

m den Elektromagneten;

a den Anker, der sich um *h* dreht, damit der Schreibstift *s* auf die Trommel *T* schreiben kann;

M die Membran, die in μ ein kleines Platinblech trägt, das durch einen feinen Draht mit der Klemme 1 verbunden ist. Schwingt *M* nach rechts, so geräth μ

in Contakt mit dem Metallstift *c*; es ist daher wiederum von der Klemme 1 aus über die Klemme 5 in der Richtung der gefiederten Pfeile der Strom hergestellt.

8) REGNAULT stellte nun seine Versuche in verschiedener Weise an, einmal so, dass er die Lufterschütterung an einem Ende einer langen Röhrenleitung durch einen Pistolenschuss erzeugte, während das andere Ende durch eine Membran abgeschlossen war; sodann auch so, dass er in freier Luft Kanonenschüsse abfeuerte und deren Erschütterung ebenfalls auf eine weit davon aufgestellte Membran wirken liess; sodann so, dass das eine Ende plötzlich durch einen eingeführten Kolben comprimirt wurde.

Die Röhrenleitungen in Paris waren von ungleichem Durchmesser und ungleicher Länge nämlich:

1) eine Gasröhrenleitung, deren Weite gleich 0·108 *m* war und von welcher Strecken von 566·74, 899·25 und 1351·95 benutzt werden konnten;
2) eine Wasserleitung mit Röhren von 0·300 *m* Weite und einer Gesammtlänge von 1905·0 *m*;
3) eine Gasleitung mit Röhren von 0·216 *m* Weite und einer Totallänge von 3625·24 *m*;
4) eine Wasserleitung mit Röhren von 1·10 *m* Weite und einer Totallänge von 4886·45 *m*.

In der ersten Leitung wurde ausser der atmosphärischen Luft auch Kohlensäure, Wasserstoff und Leuchtgas auf die Leitungsfähigkeit untersucht, wobei je die Werthe von c' sich ergaben, die bei den Berechnungen auf pag. 798 benutzt wurden.

Die ganze Untersuchung REGNAULTS vertheilt sich auf die Jahre 1862—1866 und muss als eine der umfangreichsten betrachtet werden, welche jemals zur Lösung eines wissenschaftlichen Problems unternommen wurde. Dem entsprechend ist auch der gesammte Apparat, den man REGNAULT zur Verfügung gestellt hatte, so grossartig, wie er wenigstens auf dem Gebiete der Lehre vom Schall zum zweiten Mal bis jetzt nicht anzutreffen ist.

Wir geben in kurzen Worten die Hauptresultate, welche REGNAULT durch seine Untersuchung feststellen wollte[1]).

1) Die Intensität der Schallwelle nimmt beim weiteren Fortschreiten in den Röhren ab und zwar um so rascher, je enger die Röhren sind.
2) Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Schalls, falls man dieselbe Intensität der Erregung voraussetzen darf, ist in verschiedenen Röhren nicht dieselbe, sondern verringert sich mit dem Durchmesser der Röhren.
3) Ein Schall von grösserer Intensität pflanzt sich mit einer grösseren mittleren Geschwindigkeit fort, wie einer von geringerer.
4) Die mittlere Geschwindigkeit eines und desselben Schalles in derselben Röhre verringert sich merklich mit der Länge des von ihm zurückgelegten Weges.
5) Die Beschaffenheit der Röhrenwände (ihre Rauhigkeit) übt auf die Intensität des Schalls einen Einfluss aus, der sich jedoch um so mehr abschwächt, je grösser der Durchmesser wird. Diese Einwirkung ist in Leitungen von 1·1 *m* Durchmesser verschwindend klein, so dass man annehmen darf, es pflanze sich in ihnen der Schall ebenso schnell wie in freier Luft fort.

[1]) Vergl. auch die oben citirte Abhdl. v. Dr. HILFER.

Mit der weitesten Röhre machte REGNAULT sehr ausgedehnte Versuche, deren Darstellung in der Originalabhandlung allein schon 233 Quartseiten einnimmt. Der Hauptwerth, welcher für die Schallgeschwindigkeit unter der Voraussetzung, dass ein Pistolenschuss mit einer Pulverladung von 0·5 *gr* Pulver abgefeuert wurde, war bei 0°

$$c = 330{\cdot}6\ m.$$

Da in der Formel für die Schallgeschwindigkeit der Coëfficient k vorkommt, so lässt sich, wie dies vielfach nach Schallexperimenten geschehen ist, k auch berechnen. Der REGNAULT'sche Werth wird dann unter Zugrundelegung des zuletzt mitgetheilten c gleich

$$k = 1{\cdot}3945.$$

9) Mit besonderem Interesse muss auch das Resultat der ausgedehnten Versuche in freier Luft aufgefasst werden. REGNAULT fand bei einer Distanz gleich 1280 *m* aus 18 Einzelwerthen den Mittelwerth:

$$c = 331{\cdot}37\ m$$

und aus 149 Einzelwerthen bei einer Distanz gleich 2445 *m*

$$c = 330{\cdot}71\ m.$$

Vergleichen wir diesen letzteren Werth mit dem oben mitgetheilten für die Röhrenleitung mit dem grössten Durchmesser, so ist er blos um 0·11 *m* grösser, was dem mehrfach, wie wir noch sehen werden, auch von Andern bestätigten Satze entspricht, dass die Schallgeschwindigkeit in weiter und weiter werdenden Röhren mehr und mehr den Werth wie in freier Luft annimmt.

Wenn man nun ganz absieht von den REGNAULT'schen Versuchen bei Röhren und nur dessen Versuche in freier Luft betrachtet, so muss der REGNAULT'sche Werth 330·71, verglichen mit dem von SCHRÖDER VAN DER KOLK genau berechneten Werthe aus den Beobachtungen von MOLL und VAN BEEK, nämlich $c = 332{\cdot}77$ als ein auffälliger erscheinen. Die Differenz beträgt — 2·07 *m* und ist diese doch zu gross, als dass sie nicht eine besondere Ursache voraussetzte. Es fragt sich nur welche? Die Standlinie bei den Versuchen der holländischen Physiker war 17669·5 *m*. Die bei REGNAULT nur 2445 lang, mithin nur der siebente Theil von ersterer. Nach der von REGNAULT selbst bestätigten Thatsache, dass die Geschwindigkeit mit der Länge des durchlaufenen Weges etwas abnehme — denn er fand bei 1280 *m* Distanz $c = 331{\cdot}37$ und bei 2445 *m* Distanz $c = 330{\cdot}71$ — könnte man erwarten, dass die holländischen Physiker eher einen noch kleineren Werth wie 330·71 hätten finden müssen; sie fanden aber einen um 2·06 *m* grösseren. Es bleibt hiernach nur eine Annahme übrig, nämlich die Verschiedenheit, welche bei den beiden Methoden in dem Notirungsmodus lag. MOLL und VAN BEEK notirten persönlich und können wir diese Notirung geradezu eine persönliche nennen. Im Moment, wo der Lichtblitz wahrgenommen wurde, wurde die Zeit notirt, im Moment, wo der Schall zur Wahrnehmung kam, die zweite Zeit. Einmal war also das Organ des Auges, das andere Mal das des Ohres der Vermittler zur Auslössung der Willensäusserungen. REGNAULT wollte nun gerade die Fehler, welche bei dieser persönlichen Methode sich einstellen konnten, also Verzögerungen, vermeiden und griff zur Methode der mechanischen Notirungen. Bei ihr muss sich zunächst eine Membran in Bewegung setzen, dann muss ein Hebel von einem Elektromagneten angezogen werden. Man darf wohl annehmen, dass die Membran, sobald sie von der Verdichtungswelle getroffen wird, ohne Verzug sich auch in Bewegung setzt. Anders ist es aber bei der Hebelbewegung. Denn wenn auch der elektrische Strom momentan den Einsenkern des Elektromagneten umkreist, so wird sicherlich eine kurze Zeit verfliessen, bis letzterer das

Maximum des Magnetismus annimmt und, wenn er dieses Maximum hat, wird auch eine kurze Zeit noch verfliessen, bis der Hebel so weit und so stark angezogen wird, dass er einen Eindruck auf die Schreibtrommel machen kann. Wie dem nun auch sei, das Faktum der Verschiedenheit besteht, und können wir dasselbe noch specieller numerisch bezeichnen. Da nämlich die Differenz der beiden Werthe 2·06 *m* beträgt und das *c* rund gerechnet 332 *m* ist, so würde die hierfür nöthige Zeitdifferenz gleich 2·06/332 Sekunden sein, d. h. die persönliche Notirung ist der mechanischen um 1/166 Sekunde voraus. So würde die Zeitdifferenz bei einer Sekunde Zwischenzeit anzunehmen sein, d. h., wenn aus der Entfernung von 332 *m* eine Schallerregung ausginge, würde sie nach der mechanischen Notirungsweise gegenüber der persönlichen mit einer Verzögerung von 1/166 Sekunde notirt werden. Ganz anders fällt aber die Sache aus, wenn wir die ganzen Zwischenzeiten zwischen Licht- und Schalleindruck bei REGNAULT und den holländischen Physikern in Rechnung ziehen. Da nämlich die Schallgeschwindigkeit $c = \frac{d}{t}$ ist, so besteht, wenn wir Weg und Zeit bei den holländischen Beobachtern mit d und t, bei REGNAULT mit d_1 und t_1, und die Verzögerung bei REGNAULT mit Δt bezeichnen, die Gleichung

$$\frac{d}{t} = \frac{d_1}{t_1 - \Delta t}.$$

Denn hätte REGNAULT nicht eine Zwischenzeit t_1, sondern eine um Δt kleinere Zwischenzeit erhalten, so würde sein c ebenso gross wie das der holländischen Physiker geworden sein. Nun ist aber $t = \frac{d}{c}$ und $t_1 = \frac{d_1}{c_1}$ mithin

$$c = \frac{d_1}{\frac{d_1}{c_1} - \Delta t}$$

oder

$$c = \frac{c_1 d_1}{d_1 - \Delta t \cdot c_1}$$

oder

$$\Delta t = \frac{(c - c_1) d_1}{c \cdot c_1}.$$

Setzt man die entsprechenden Zahlenwerthe für d_1, c und c_1 ein, so erhält man in runder Zahl

$$\Delta t = \frac{1}{22} \text{ Sekunde}$$

als den Unterschied der Notirungszeiten zwischen den beiden Beobachtungsmethoden.

10) Ein Resultat der REGNAULT'schen Experimente, welches später in seiner Richtigkeit angezweifelt wurde, ist das oben im dritten Satze mitgetheilte Ergebniss. Nach REGNAULT soll hiernach die Schallgeschwindigkeit bei einer intensiveren Schallerregung ebenfalls eine grössere sein. Wenn dies zugegeben werden muss, so leuchtet ein, dass auch die Theorie, soweit sie unserer Formel Gleichung (7) entspricht, noch nicht vollständig ist. Denn sie enthält kein Element, welches sich auf die Intensität des Schalls bezieht. Derjenige, welcher nun die REGNAULT'sche Arbeit genau prüfte, namentlich, um auch diese jetzt in Betracht kommende Frage wegen des Einflusses der Intensität zu entscheiden, war der holländische Physiker H. J. RINK, dessen Untersuchung auch in einem Aufsatze der POGGENDORFF'schen Annalen, Bd. 149, pag. 533—546 im Jahre 1873 unter dem Titel »Ueber die Geschwindigkeit des Schalls nach Herrn REGNAULT's Ver-

suchen« veröffentlicht wurde. RINK macht zunächst darauf aufmerksam, dass man es bei den REGNAULT'schen Versuchen auch mit sogen. »Explosionswellen« zu thun habe, im Gegensatze zu den Wellen, wie sie durch einen wirklich tönenden Körper erzeugt werden. Diese Explosionswellen, Explosionsverdichtungen werden da entstehen, wo wir es mit einem mehr oder minder heftigen Knalle zu thun haben, also bei der Entzündung eines exlosiven Stoffes, ferner beim Ueberspringen eines starken, elektrischen Funkens durch die Luft, ferner beim sehr raschen und sehr heftigen Auftreffen eines harten Gegenstandes auf einen zweiten u. s. w. Das Wesen einer hierdurch erzeugten Welle besteht zunächst in der Heftigkeit, in der Intensität der Erregung und aller meistens auch in der Ausdehnung, welche die Erschütterung gleich von vornherein annimmt. Diese grosse Intensität bringt es mit sich, dass die Luftmasse, welche zuerst erschüttert wird, nicht etwa wie die an eine Stimmgabel oder eine Saite anstossende Luft an Ort und Stelle verbleibt und hier in Verdichtungen und Verdünnungen geräth, sondern, dass diese nächste Luftmasse in der Richtung der Fortpflanzung des Schalles fortgeschleudert wird, d. h. eine Progressivbewegung erhält. Eine solche Luftmasse, wie sie durch einen Pistolenschuss oder einen Kanonenschuss bewegt wird, kann gewissermaassen selbst wie ein Geschoss betrachtet werden, das anfangs als eine compakte Masse vorwärts eilt, hierbei aber sich mehr und mehr zerstreut und schliesslich nicht mehr im Stande ist, eine weitere merkliche Progressivbewegung den vorliegenden Luftschichten mitzutheilen, sondern von da an nur eine Verdichtungswelle im Sinne der eigentlichen Wellenbewegung fortzupflanzen vermag. Dieser Charakter der Explosionswelle ist von REGNAULT selbst deutlich erkannt worden. Denn er sagt auf pag. 45 seiner berühmten Abhandlung: »*On doit donc admettre qu'au moment du tir d une arme à feu, le gaz comprimé qui s'en échappe est lancé d'abord comme un projectile, qui imprime, non seulement une compression, mais aussi un translation aux couches d'air voisines. Ce dernier effet devient probablement insensible à une certaine distance, mais il doit troubler notablement la vitesse de propagation élastique dans le voisinage du départ. J'ai eu souvent occasion de reconnaître les effets de cette translation dans mes experiences, surtout dans celles qui ont été faites dans de tuyaux de petite section.*«

Man darf wohl annehmen, dass auch bei der Erregung der Luft durch wirklich tönende Körper eine solche Translation nicht ausgeschlossen ist. Bei einem plötzlichen Trompetenstoss, den ein Bläser in die Luft hinein thut, wird zweifellos auch eine solche Translation eintreten.

Wenn dem nun so ist, so leuchtet ein, dass die Geschwindigkeit des Schalls, der durch eine Explosionswelle erzeugt wird, zunächst eine grössere werden muss. Denn die Translation wirkt ja gerade so wie ein die Schalleitung begünstigender Wind. Es leuchtet ferner ein, dass, wenn man die Schallgeschwindigkeit zwischen zwei Strecken *B* und *C* misst, welche durch eine Schicht *AB* von der Explosionsquelle *A* getrennt ist, man mit dem Einflusse der Translation weniger oder gar nicht mehr wird zu schaffen haben. Ferner ist klar, dass, wenn die in *A* (Fig. 252) durch einen Pistolenschuss erzeugte Explosionswelle in der Röhrenleitung nach *B* läuft und hier die Membran *m* erschüttert hat, sie nach der Reflexion wieder nach ihrer Ausgangsstation zurückkehren kann. Wenn man nun, wie REGNAULT es wirklich that, nach dem Abfeuern eines Schusses rasch in das Ende *A* eine zweite Membran einsetzt, so wird bei der Rückkehr der Welle von *B* nach *A* auch die Membran m_1 erschüttert



(Ph. 252.)

werden. Von hieraus kann die Welle zum zweiten Mal nach *B*, dann zum zweiten Mal nach *A* u. s. w. laufen. Es leuchtet somit ein, dass, wenn wir zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit den ersten Lauf von *A* nach *B* nicht berücksichtigen, vielleicht auch noch den Rücklauf von *B* nach *A* unberücksichtigt lassen und erst vom zweiten Lauf von *A* nach *B* hin u. s. w. die Schallgeschwindigkeit bestimmen, wir dann einen von der Translation unabhängigen, d. h. kleineren Werth c erhalten müssen.

Eine solche Benutzung der Regnault'schen Beobachtungszahlen hat nun Rink gemacht, und geben wir zunächst eine Zusammenstellung von Zahlenwerthen, nach welcher seine Schlussfolgerung sich als gerechtfertigt erweist.

Durchlaufener Weg $L = 1417{\cdot}95$ *m*,
Röhrendurchmesser $= 1{\cdot}1$ *m*.

Reihe	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
2te	332·15	331·14	330·36	330·83	330·58
5te	332·21	331· . . *	330·04	330·48	330·31
8te	340·16 *	331·46	330·79	330·41	330·77
Mittel	332·18	331·30	330·40	330·57	330·55

Es bedeutet hierin L_1 die Strecke, welche zum erstenmal von *A* nach *B* durchlaufen wurde, ferner L_2 dieselbe Strecke aber von *B* nach *A* durchlaufen, L_3 dieselbe Strecke wieder von *A* nach *B* durchlaufen. Man erkennt, selbst wenn man die beiden, jedenfalls nicht richtig und mangelhaft abgedruckten Werthe, die mit einem * versehen sind, weglässt, sehr deutlich, dass die Werthe der Columne L_1 grösser sind wie die von L_2 und die von L_2 entschieden wieder grösser wie die von L_3, L_4 und L_5.

Nun gebe ich noch eine vollständige Tabelle mit Rücksicht auch auf verschiedene Pulverladungen, um den Einfluss der Intensität der Schallerregung auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beurtheilen zu können.

Länge des durchlaufenen Wegs $L = 1417{\cdot}95$ *m*.
Durchmesser der Röhren $= 1{\cdot}1$ *m*.

Reihe	Lad. *gr*	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	
1	0·5	330·02	330·59	329·89	330·37	329·71	330·24	328·99	330·86	
17	0·5	329·40	331·50	329·45	330·84	330·69	331·40	327·44	—	
Mittel	0·5	329·71	331·04	329·67	330·61	330·20	330·82	328·22	330·86	330·12
2	1·0	330·36	330·83	330·56	330·69	329·76	330·32	329·70	330·34	
5	1·0	330·04	330·48	330·31	330·11	319·86	330·56	329·86	330·45	
6	1·0	330·36	331·38	329·77	331·23	330·06	330·26	330·05	330·32	
7	1·0	330·81	330·35	330·89	330·37	330·65	329·93	330·10	329·85	
16*	1·0	330·28	331·12	330·10	331·35	329·93	331·59	329·84	330·15	
Mittel	1·0	330·37	330·83	330·33	330·95	329·98	330·53	329·91	330·62	330·44
3	1·5	330·29	330·84	330·47	330·74	329·99	330·82	329·53	330·82	
Mittel	1·5	330·29	330·84	330·47	330·74	329·99	330·82	329·53	330·82	330·31
4	2·0	330·60	330·12	331·50	329·03	330·68	329·58	329·86	330·45	
8	2·0	330·79	330·41	330·77	330·93	330·30	330·49	330·47	330·17	
Mittel	2·0	330·70	330·27	331·13	329·99	330·44	330·03	330·17	330·31	330·38
		330·27	330·75	330·40	330·57	330·15	330·55	329·46	330·65	

Diese Zahlenzusammenstellung, insbesor
nommenen Mittel, sind sehr instruktiv. Zunäc
der Pulverladung von 0·5 auf 2·0 *gr*, also a
der Schallgeschwindigkeit anzeigt. Denn wenn
reihe eine Zunahme garantirt scheint, so zei
weise wieder gerade das Gegentheil. Auch
aus den Einzelmitteln gebildet wurden und
hinter dem Verticaldoppelstrich notirt sind, l
geschwindigkeit mit der Pulverladung const
der Strecke L_3 erwartet werden konnte.

Eine weitere interessante Thatsache e
Zahlenmaterial. Es sind nämlich auch die G
den Einzelmitteln in den Verticalcolumnen.
Evidenz, dass die Werthe für die L mit eine
sind, wie bei einem ungeraden. Auch in jed
sich dieses regelmässige Ab- und Zunehmer
erkennt man deutlich den Einfluss der Me
m und m_1 waren nämlich sicherlich nicht vö
der ganze Notirungsmechanismus auf der Sta
nirt haben wie in A. Bezeichnen wir daher d
wird, mit V_b, die, welche in A eintritt, mit l
digkeitswerthe für L mit ungeraden und V_a
und erklärt sich hieraus die vorhandene Tha

Nimmt man aus den vier Mittelwerthen
Mittel, so ergiebt sich $c = 330·31$. Dieser
Werth, den Regnault fand für die Geschwi
oben mitgetheilt, gleich 330·71 war. Dieser U
wenn auch die Röhrenleitung, für welche die
1·10 *m* Durchmesser hatte, und, wie wir noch
ihrer grossen inneren Weite kaum einen Einflu
der Einfluss der Membranen und der ganze
schied von 0·40 *m* hervorgerufen haben.

11) Die Methode der Bestimmung der Sc
bis jetzt verfolgt haben, lässt sich auch bei
festen Körpern verwenden. Da man bei
eines Unterschiedes zweier specifischen Wärm
für sie die Gleichung (5) unmittelbar hera
Gleichung

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot p}{s}} \,.$$

In ihr ist bezüglich s nichts weiter z
Gleichung (1) resultirenden Werth ein, so er

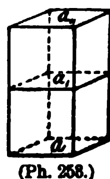
$$c = \sqrt{\frac{g}{s} \cdot \frac{dp}{d}}$$

Es hindert uns nichts, da wir bis daher
auch noch die Länge x der Einzelschichte
demzufolge wird dann:

$$c = \sqrt{\frac{g}{s} \cdot \frac{d}{d}}$$

Bezüglich g ist weiter nichts zu bemerk

stehen, dass wir anstatt eines Luftprismas oder Luftcylinders, wie wir in Fig. 250 annahmen, ein solches Gebilde aus einer tropfbaren Flüssigkeit oder einem festen Material bestehend, hätten. Wir können zweitens in Fig. 253 uns zwischen den Flächen a und $a_{,}$ eine solche Schicht einer Flüssigkeit oder eines festen Körpers denken, auf welche eine zweite Schicht, zwischen $a_{,}$ und $a_{,,}$ legend aufgesetzt ist. Bezeichnen wir den Druck, den diese letztere Schicht auf die erstere ausübt, mit $d'p$, so wird diese erstere um $d'x$ zusammengedrückt und es besteht die Beziehung:



(Ph. 258.)

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d'p}{d'x}.$$

Nun ist aber, wenn s das specifische Gewicht des betr. Stoffes bedeutet, da der Querschnitt und die Höhe der Schichten gleich 1 ist, auch

$$d'p = s$$

und somit

$$\frac{dp}{dx} = \frac{s}{d'x}.$$

Führen wir diesen Werth für den Quotienten dp/dx in obige Gleichung für c ein, so wird

$$c = \sqrt{\frac{g}{d'x}}$$

oder, wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, für $d'x$ ein δ setzt

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

Es kommt nun darauf an, für δ die entsprechenden Werthe zu finden und wird man offenbar bei festen Körpern von jenen Thatsachen auszugehen haben, welche bei der Bestimmung des Elasticitätsmodulus E in Betracht kommen. Denn wenn man z. B. weiss, dass eine bestimmte Kraft P eine bestimmte Verlängerung λ hervorbringt, falls man sie an einem Stabe oder einem Drahte, der oben befestigt ist, unten wirken lässt, so würde dieselbe Kraft P, wenn sie zur Compression des Stabes verwendet werden könnte, denselben verkürzen und zwar um dasselbe Stück λ. Wenn man nun an einen Stab von der Querschnittseinheit ein Gewicht E, gleich dem Elasticitätsmodulus anhängt, so würde dies eine Verlängerung um die eigne Länge des Stabes bewirken, also, wenn wir diese gleich 1 annehmen, eine Verlängerung gleich 1 liefern. Hängen wir anstatt E aber das Gewicht der Längeneinheit des Körpers an, so wird die Verlängerung nicht E sondern δ. Es besteht demgemäss die Gleichung

$$\frac{E}{s} = \frac{1}{\delta},$$

d. h. es ist

$$\delta = \frac{s}{E},$$

und somit geht für feste Körper unsere Gleichung (13) auch in folgende über:

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot E}{s}} \ldots, \qquad (14)$$

worin wir, um c in Metern zu erhalten, $g = 9{\cdot}81$, E in Grammen und s wie gewöhnlich gleich 7·8 auszudrücken haben. So würden wir, wenn wir für Stahl $E = 21000 \cdot 1000\,gr$ setzten,

$$c = 5139\ m$$

erhalten.

Bei tropfbaren Flüssigkeiten suchen wir die Grösse δ mit dem sogen.

»Compressionscoëfficienten« in Verbindung zu bringen. Bekanntermaassen hat man für verschiedene Flüssigkeiten die Volumveränderung bestimmt, für den Fall, dass man eine Druckvermehrung von 1 Atmosphäre auf die Volumeinheit der Flüssigkeit einwirken lässt. Bezeichnen wir daher den Atmosphärendruck mit b, so würde, mit Rücksicht auf die Fig. 253, der Compressionscoëfficient gleich μ gesetzt, die Gleichung

$$\frac{b}{s} = \frac{\mu}{\delta}$$

bestehen, d. h. es wäre:

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot b}{s \cdot \mu}}.$$

Es ist bekannt, dass im Jahre 1827 COLLADON und STURM auf dem Genfer See Versuche über die Schallfortpflanzungsgeschwindigkeit im Wasser anstellten, indem sie in geschickter Weise die Methode, wie sie vorher für die Schallgeschwindigkeit in freier Luft zur Anwendung kam, auch für Wasser anwandten. Die Temperatur des Wassers war 8·0° C., und wurde die Geschwindigkeit

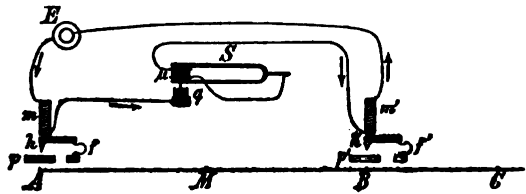
$$c = 1437\ m$$

gefunden. Um diesen Werth der Erfahrung mit dem aus obiger Gleichung sich ergebenden vergleichen zu können, setzen wir $s = 0{\cdot}9998$, $b = 0{\cdot}76 \cdot 13{\cdot}59$ und $\mu = 0{\cdot}000049$, wonach sich in voller Uebereinstimmung mit dem Resultate der Erfahrung

$$c = 1438\ m$$

berechnet.

12) An die Methoden der direkten Bestimmung der Schallgeschwindigkeit, soweit sie bis jetzt besprochen wurden, und wobei eine Wegstrecke und eine Zeitdifferenz in Betracht kam, reihen sich andere Methoden, namentlich die zuerst von BOSCHA angegebenen Methoden an, welche man als die Methoden der »Coincidenzen« zu bezeichnen pflegt, Methoden, wobei schliesslich zwar auch wieder eine Wegstrecke und eine Zeitdifferenz in Betracht kommt, die aber doch von der früheren Methode verschieden sind, schon desshalb, weil hierbei wesentlich kleinere Distanzen benutzt werden können. Das Problem der akustischen Coincidenzen wollen wir nun im folgenden, soweit es im Zusammenhang mit unseren jetzigen Fragen steht, betrachten. Ich knüpfe meine Erläuterung gleich an eine Einrichtung an, die sich nach den Angaben BOSCHA's und R. KÖNIG's, in der einen oder der andern Form realisiren lässt.



(Ph. 254.)

In Fig. 254 ist eine Einrichtung versinnlicht, die in zwei Schlagwerken mit »trockenen« Schlägen besteht, welche Schlagwerke durch den elektrischen Strom im Gang erhalten werden. Zwei Hebel h und h' werden durch je einen Elektromagneten m und m', sobald der Strom von einem Elektromotor E in der Richtung der Pfeile läuft und in einem Quecksilbernäpfchen q durch einen Stimmgabelunterbrecher S, dessen Elektromagnet μ zwischen den Gabelzinken liegt, geschlossen und geöffnet wird, so in Bewegung gesetzt, dass sie bei jeder Stromöffnung durch eine passend angebrachte Feder zum präcisen Aufschlagen auf je eine Metallplatte p und p' kommen, dagegen bei jedem Stromschluss durch die Elektromagnete m und m' von den Platten p und p' entfernt werden. Den Stromunterbrecher S muss man sich mit langsamen Schwingungen vorstellen, demgemäss KÖNIG eine Gabel gebrauchte, welche

auch sehr wohl eine Eisenlamelle genommen werden, die in einer Sekunde vielleicht blos 5 Mal schwingt. Ebenso kann der Stromunterbrecher auch in Gestalt eines Uhrpendels mit ganzen, halben oder viertel Sekundenschlägen vertreten sein.

Man kann sich nun vorstellen, dass beide Schlagwerke möglichst nahe an einer Station A sich befinden. Ein aus unmittelbarer Nähe auf sie hörender Beobachter wird dann beide mit vollkommenen Unisonoschlägen hören.

Man kann sich zweitens vorstellen, das zweite Schlagwerk wäre nicht in A sondern in B stationirt. Ein Beobachter, der in A verbleibt, wird dann im allgemeinen, wenn er auf beide Schlagwerke hört, die Schläge des einen mit denen des andern nicht mehr im Einklang vernehmen. Ist die Strecke von A nach B gleich d, so brauchen die Schläge des rechten Schlagwerks, falls c die Schallgeschwindigkeit ist, eine Zeit Δt, um von B nach A zu gelangen und ist diese Zeit $\Delta t = d/c$, oder es ist

$$c = \frac{d}{\Delta t}.$$

Das c wäre also schon gefunden, wenn man nur im Stande wäre, Δt genau zu bestimmen. Auch wenn der Beobachter in B sich aufstellt, wird er im allgemeinen ebensowenig wie in A ein Unisono der Schläge vernehmen. Denn jetzt kommen die Schläge des linken Schlagwerks um Δt später zum Ohr wie die des rechten. Es kann aber vielleicht eine Coincidenz der Schläge vernommen werden, wenn der Beobachter zwischen A und B steht? Selbstverständlich. Denn, wenn der Beobachter sich mitten in M zwischen A und B befindet, ist er ja von beiden Schlagwerken gleich weit entfernt; jeder Schlag braucht demnach dieselbe Zeit $\frac{\Delta t}{2}$ um zum Ohre des Beobachters zu gelangen. Ebenso ist das Unisono garantirt, falls das Ohr in irgend einem Punkte einer Ebene liegt, welche in M die Standlinie AB senkrecht durchschneidet. Begreiflicher Weise ist aber mit einem solchen Unisono, in M vernommen, im allgemeinen auch nichts anzufangen. Denn man ist ausser Stand, $\frac{\Delta t}{2}$ zu bestimmen. Alles dies gilt im Allgemeinen. Im besondern kann aber die Sache so kommen, dass, wenn die faktische Zwischenzeit zwischen je zwei Schlägen der Schlagwerke gleich τ ist, auch Δt gerade gleich τ ist, also z. B. wenn $\tau = \frac{1}{5}$ Sekunde ist, auch Δt gleich $\frac{1}{5}$ Sekunde ist. Dies tritt aber ein, wenn B von A soweit entfernt ist, dass die Strecke d ein Vielfaches einer Strecke σ bildet, welche Strecke σ vom Schalle eben in der Zwischenzeit τ der Schläge durcheilt wird. Denn gesetzt d wäre gleich $3 \cdot \sigma$, so wird, wenn der Beobachter sich beim Schlagwerk in B befindet, jeder ($n - 3$te) Schlag von A mit dem $n$ten von B coincidiren, d. h. das Unisono ist überhaupt garantirt. Nunmehr ist aber die Bestimmung von c sofort klar. Denn τ kennt man ja von vornherein aus dem Tempo der Uhrschläge; d lässt sich leicht abmessen. Das einzige, was nur noch unbestimmt bleibt, ist die Ordnungszahl k von σ. Das schadet aber zur Sache nichts, denn gesetzt man habe, falls die Schlagwerke $\frac{1}{5}$ Sekunden schlagen, für ein $d = 134\ m$ das Unisono vernommen, so würde die Gleichung

$$c \cdot k \cdot \tau = c \cdot k \cdot \tfrac{1}{5} = 134$$

oder

$$c \cdot k = 5 \cdot 134 = 670$$

bestehen, aus welchem Werthe man sofort erkennt, dass die Ordnungszahl k für τ gleich 2 angenommen werden muss, demgemäss $c = 335$ gefunden wird.

Es leuchtet daher ein, dass man nach der bisherigen Auseinandersetzung folgenden Modus der Beobachtung einzuhalten hat: Man nimmt das Schlagwerk B in die Hand und entfernt sich mit ihm langsam von A soweit, bis wiederum der völlige Einklang der trockenen Schläge vernommen wird. Die betreffende Distanz AB ist dann gleich

$$d = c \cdot \tau.$$

Dies Experiment kann beliebig wiederholt werden, um schliesslich für d einen genaueren Mittelwerth zu erhalten. Gestattet es die Wahrnehmung der Schläge, so kann man sich mit dem Schlagwerk über die erste Distanz d auch hinausbewegen, bis zum zweiten- oder drittenmal die Coincidenz der Schläge wahrgenommen wird, wofür dann offenbar die Gleichungen

$$\frac{d}{2} = c \cdot \tau \quad \text{oder} \quad \frac{d}{3} = c \cdot \tau$$

bestehen, aus denen sich c ebenfalls berechnen lässt.

12) Die Methode BOSCHA's, die wir soeben kennen gelernt haben, setzt Unisono-Schlagwerke voraus. Interessanter noch ist aber die zuerst auch von BOSCHA im Jahre 1853 beschriebene[1]) Methode, wobei Schlagwerke mit nahezu Unisono-Schlägen verwendet wurden, z. B. zwei Schlagwerke, von denen das eine in 100 Sekunden genau 100 Schläge machte, während das andere in dieser Zeit 99 lieferte. Demgemäss sind die Zwischenzeiten zwischen je zwei Schlägen des zweiten Schlagwerks keine genauen Sekunden, sondern sind um $\frac{1}{99}$ Sekunde länger oder anders ausgedrückt: es sind n Schläge vom schnell schwingenden Schlagwerk gleich $\frac{n \cdot 99}{100}$ des langsameren. Allgemein also ist, wenn das Schlagwerk I in a Sekunden auch a Schläge thut, und II in dieser Zeit einen Schlag weniger also $(a-1)$ Schläge macht, die Zeitdifferenz zwischen zwei Schlägen von II und zwischen zwei von I gleich $\Delta\tau = 1/(a-1)$.

Fig. 254 (pag. 809) stellt in der Strecke AB die Distanz dar, in welcher die Schlagwerke »I« und »II« aufgestellt werden. Wir wollen diese Strecke wie seither mit d bezeichnen. Wenn nun ein Beobachter in A sich befindet und auf die Schläge von »I« und »II« hört, so kommen die Schläge von »II« aus doppeltem Grunde später in A an als die unmittelbar in A vernommenen Schläge von »I«. Bezeichnet Δt die Zeit, welche der Schall gebraucht, um von B nach A zu gelangen und $\Delta\tau$ die Zeit des Unterschieds der Zwischenzeiten zweier Schläge von »I« und »II«, so können wir einmal voraussetzen, es vernehme der Beobachter in A in einem bestimmten Momente t_0 einen genauen Zusammenschlag zweier Schläge von »I« und »II«. Soll dies möglich werden, so muss offenbar der Hammer von »II«, der diesen Schlag that, um die Zeit Δt früher aufgeschlagen haben wie der von »I«. Wenn wir nun diesen Schlag von I und II als den 0ten bezeichnen, wie hört der Beobachter in A nun die nächsten beiden Schläge von »I« und »II«? Antwort: Er hört den Schlag »1« von »I« zur Zeit $(t_0 + 1)$ Sekunden. Dagegen den Schlag »1« von II zur Zeit $(t_0 + 1) + \Delta\tau$. Wie hört der Beobachter die Schläge 2 von I und II? Antwort: Er hört den Schlag 2 von I im Momente $(t_0 + 2)$ Sekunden und den Schlag 2 von II zur Zeit $(t_0 + 2) + 2 \cdot \Delta\tau$. Denn die Schläge von I und II sind jetzt um $2 \cdot \Delta\tau$ auseinander. Allgemein also wird der Beobachter von einem Momente t_0 an gerechnet, wo er zwei Schläge von I und II genau zusammenschlagen hörte, den $n$ten Schlag von II um die Zeit $n \cdot \Delta\tau$ später hören wie den $n$ten von I. Auch kann man diese Thatsache

[1]) Allgemeene Konst- en Letterbode 1853, No. 51, und POGG. Ann., Bd. 92, pag. 485 bis 494. 1884.

n Schläge von I vernimmt, nur $n \cdot \left(\frac{a-1}{a}\right)$ Schläge von II. Hieraus ergiebt sich aber, dass der Beobachter in A vom Momente der zuerst wahrgenommenen Coincidenz zweier Schläge aus gerechnet, niemals wieder zwei Schläge von I und II mit derselben Ordnungszahl n in Coincidenz vernehmen kann. Denn es müsste ja

$$(t_0 + n) = (t_0 + n) + n \cdot \Delta\tau,$$

d. h. $n \cdot \Delta\tau = 0$ sein. Eine Coincidenz kann also nur eintreten, wenn wir eine andere Ordnungszahl des Schlages von II gegenüber der von I zulassen. Bezeichnen wir sie mit n', so besteht die Gleichung

$$(t_0 + n) = (t_0 + n') + n' \cdot \Delta\tau,$$

d. h. es muss

$$n = n'(1 + \Delta\tau) = n'\left(1 + \frac{1}{a-1}\right) = n' \frac{a}{a-1}$$

sein, oder es müssen die Proportionen

$$\frac{n}{n'} = \frac{a}{a-1} = \frac{2a}{2(a-1)} = \frac{ma}{m(a-1)}$$

bestehen, d. h. es coincidiren, falls wir unserem Beispiel gemäss $a = 100$ und $(a-1) = 99$ voraussetzen, der je 100te Schlag von I mit dem je 99ten von II. Die Wegstrecke d kommt demnach bei dem Phänomen dieser Coincidenzen unter den angegebenen Voraussetzungen nicht weiter in Betracht.

Befindet sich der Beobachter, falls I und II in einer Distanz gleich d aufgestellt bleiben, nicht in A oder B, sondern dauernd an irgend einem andern Punkte, z. B. in C (Fig. 254), so verläuft vom Momente einer einmal wahrgenommenen Coincidenz an gerechnet, das Phänomen gerade so wie vorhin. Denn, bezeichnen wir die Strecke AC mit d', so ist die Strecke $BC = (d' - d)$. Bezeichnen wir ferner die Zeit, welche der Schall gebraucht, um von A nach C zu gelangen, mit $\Delta t'$, so ist die Zeit, die er braucht, um von B nach C zu kommen, gleich $(\Delta t' - \Delta t)$. Soll also im Momente t_0 in C eine Coincidenz wahrgenommen werden, so muss der 0te Schlag von I um die Zeit $\Delta t'$ vor t_0 und der 0te Schlag von II um die Zeit $(\Delta t' - \Delta t)$ vor t_0 erfolgen. Von da ab kommen aber dann die Grössen $\Delta t'$ und $(\Delta t' - \Delta t)$ nicht mehr in Betracht, sondern nur noch, wie vorhin die Grösse $\Delta\tau$.

Es ergiebt sich hieraus der Satz, dass das Phänomen der Coincidenzen bei zwei Schlagwerken, deren Anzahl Schläge nicht übereinstimmen, schliesslich, d. h. vom Momente t_0 der 0ten Coincidenz an gerechnet, dasselbe ist, gleichgültig ob die beiden Schlagwerke sich dauernd mit dem Beobachter an derselben Stelle befinden oder ob der Beobachter sich dauernd irgend wo anders befindet, sei es im letzteren Falle so, dass die Schlagwerke beide an demselben Orte oder auch an verschiedenen Orten sich befinden.

14) Dieser Satz gilt aber nur so lange, als der Beobachter während der Beobachtungen seinen Platz nicht verlässt oder falls eins der Schlagwerke oder auch beide während der Beobachtung an Ort und Stelle verbleiben. Bewegt sich dagegen der Beobachter, nachdem er im Momente t_0 in A eine Coincidenz zweier Schläge vernommen hat, fort, so ändert sich das Phänomen, und auch die hierbei eintretenden Erscheinungen gestatten, wie Boscha gezeigt hat, eine Bestimmung der Schallgeschwindigkeit c.

Wir nehmen mit Boscha den Fall so an, dass nach dem Moment t_0, wo

der Beobachter in A die Coincidenz wahrnimmt, er sich dann durch die ganze Strecke d hindurch nach B begiebt. Thut er dies, so vernimmt er in B irgend einen Schlag von I um die Zeit Δt später und irgend einen von II um dieselbe Zeit früher als wenn er in A geblieben wäre. Eine vom Momente t_0 an gerechnete nächste, nicht in A sondern in B wahrgenommene Coincidenz von I und II kann also eintreten, wenn die Zeit

$$t_0 + n + \Delta t = t_0 + n - \Delta t + n \cdot \Delta\tau,$$

d. h. wenn

$$2\Delta t = n \cdot \Delta\tau \ldots$$

ist. Es müsste also, da n nothwendig ja eine ganze Zahl sein muss, auch

$$\frac{2\Delta t}{\Delta\tau}$$

eine ganze Zahl sein. Setzen wir für Δt seinen Werth $\frac{d}{c}$ und für $\Delta\tau$ seinen Werth $1/(a-1)$, so muss auch

$$\frac{2d \cdot (a-1)}{c}$$

eine ganze Zahl sein. Da aber auch $(a-1)$ schon als eine ganze Zahl angenommen wurde, so wird der Quotient

$$\frac{2d}{c}$$

stets eine ganze Zahl sein, sobald $2d$ ein ganzes Vielfaches von c ist, also namentlich, wenn $2d = c$ ist. Nehmen wir z. B. $c = 332\,m$ an, so müsste hiernach $d = 166\,m$ sein. Da ferner in unserem Beispiel $a = 100$, mithin $(a-1) = 99$ angenommen wurde, so wäre $n = 99$ ein Resultat, dessen Richtigkeit sich auch direkt bestätigen lässt. Denn der 0te Schlag von I, in A vernommen, erfolgte zur Zeit t_0; der 0te Schlag von II, ebenfalls in A vernommen, müsste faktisch zur Zeit $(t_0 - \Delta t)$ erfolgen, weil er erst die Strecke d in der Zeit Δt zu durchlaufen hatte, um im Moment t_0 ebenfalls in A einzutreffen. Der 99te Schlag von I in A vernommen erfolgt im Moment $(t_0 + 99)$; der 99te Schlag von II erfolgt zur Zeit $t_0 + 99 - \Delta t + 99\,\Delta\tau$. Der 99te Schlag von I, nun aber nicht in A sondern in B vernommen, wird zur Zeit $(t_0 + 99 + \Delta t)$ und der 99te Schlag von II nicht in A, sondern auch in B vernommen, wird natürlich im selben Momente vernommen, wo er erfolgte, d. h. im Moment $t_0 + 99 - \Delta t + 99\,\Delta\tau$. Im Falle einer zweiten in B vernommenen Coincidenz muss demnach $(t_0 + 99 + \Delta t) = (t_0 + 99 - \Delta t + 99\,\Delta\tau)$, oder, da $\Delta\tau = \frac{1}{99}$ ist, auch $\Delta t = -\Delta t + 1$ oder $2\Delta t = 1$, d. h.

$$2d = c$$

sein, wie wir von vornherein annahmen.

Auf dieser Auseinandersetzung, wobei also auf der Station B die Coincidenz des $(a-1)$ten Schlages von I und II vernommen werden soll, basirt demnach eine Methode der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit. Man verfährt hierbei folgendermaassen. Das Schlagwerk II wird vorläufig von I etwa um die Hälfte von c also etwa 160 m entfernt. Sodann begiebt man sich in unmittelbare Nähe von I und wartet eine Coincidenz ab. Nach diesem Moment begiebt man sich nach II, zählt mit den Schlägen von I oder II weiter und beobachtet scharf, ob im Moment, wo man $(a-1)$ zählt, eine Coincidenz erfolgt. Erfolgt sie nicht, erfolgt z. B. der Schlag von I noch früher wie der von II, so muss zunächst II weiter von I entfernt werden. Sodann begiebt man sich wieder nach A, wartet eine Coincidenz ab; geht dann nach B und hört, ob jetzt die $(a-1)$ten Schläge coincidiren u. s. w.

Man kann noch eine Vorfrage in Betracht ziehen, welche BOSCHA und ebenso RÖBER, der die BOSCHA'schen Formeln genauer entwickelte, nicht zu stellen für nöthig hielten, die aber doch ein gewisses Interesse darbietet. Die Frage ist die: ob es denn unter allen Umständen überhaupt möglich ist, von zwei Schlagwerken mit den Schägen a und $(a-1)$ in A eine genügende Coincidenz der Schläge einmal zu bekommen? Die Formeln, welche BOSCHA und RÖBER zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit entwickeln, gehen von der Bejahung dieser Frage aus, und auch ich habe bei der im vorhergehenden von mir entwickelten Methode diese Frage als bejaht angenommen. Um hierüber zu entscheiden, wollen wir einmal annehmen, der Beobachter habe zwei Schlagwerke, bei welchen 49 Schläge des langsameren auf 50 genaue Sekundenschläge des schnelleren gehen, und er nehme im Momente t_0 wahr, dass ein als 50ter Schlag von I angenommener Schlag nicht gerade mit einem von II coincidire, sondern es wäre so, dass der auch hier einmal als 50ter Schlag von II angenommene Schlag wegen der Entfernung des B von A um $\frac{1}{10}$ Sekunde später als der von I gehört werde. Dies angenommen, wird der 49. Schlag von I, also der unmittelbar vorausgehende, und der 49. von II auseinander gewesen sein um

$$(t_0-1)-\left[\left(t_0-1\right)-\frac{1}{49}+\frac{1}{10}\right]=\frac{1}{49}-\frac{1}{10};$$

es wird der 48te Schlag von I und der 48te von II auseinander sein um

$$(t_0-2)-\left[\left(t_0-2\right)-\frac{2}{49}+\frac{1}{10}\right]=\frac{2}{49}-\frac{1}{10};$$

es wird der 46te von I und der 46te von II auseinander sein um

$$\frac{4}{49}-\frac{1}{10}=-\frac{9}{490}$$

Sekunde; es wird der 45te von I und der 45te von II auseinander sein um

$$\frac{5}{49}-\frac{1}{10}=+\frac{1}{490};$$

ferner der je 44te Schlag um

$$\frac{6}{49}-\frac{1}{10}=\frac{11}{490}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass der 45te von I und der 45te von II die Schläge sind, welche als die nächsten zu einander betrachtet werden müssen; aber auch die Schläge 46 und 44 weichen so wenig von einander ab, dass ein Ohr auch bei ihnen vielleicht noch eine völlige Coincidenz annehmen wird. Der Bruch $\frac{11}{490}$ gleich $\frac{1}{45}$ Sekunde kann aber schon bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit von Bedeutung sein. Denn er würde einer Strecke gleich $\frac{332}{45}$ $= 7\cdot3\ m$ entsprechen. Von einer absoluten Coincidenz kann demnach im allgemeinen hier nicht die Rede sein, wie dies ja überhaupt auch bei allen Uhrvergleichungen, wo Coincidenzen in Betracht kommen, bekannt ist.

Ich verweise jetzt nur noch auf die Entwickelung der Formeln, welche RÖBER in den »Fortschritten der Physik, herausg. v. d. Berlin. physik. Ges. »vom Jahre 1864, auf pag. 129—132 gegeben hat.

14) Eine genaue Reihe von Versuchen hat AKAS SZATHMARI[1]) mit Unisonoschlagwerken angestellt, wobei der Unterbrecher nicht wie bei KÖNIG eine Stimmgabel sondern ein Pendel war und als Schlagwerke zwei elektrische Klingeln verwendet wurden. Das Pendel hatte eine Schwingungsdauer gleich 0·2961 Sekunden.

[1]) CARL, Rep. XIV, pag. 592.

Die Versuche wurden in einem Garten an einem windstillen Abend angestellt, und gelangte der Beobachter zu folgenden Resultaten, die ich vollständig mittheile, um aus ihnen zu erkennen, mit welcher Genauigkeit man es hier zu thun hat.

Beob.	Entfernung der beiden Klingeln	Beob.	Entfernung der beiden Klingeln	Beob.	Entfernung der beiden Klingeln
1	99·37	11	99·89	21	99·33
2	99·79	12	99·71	22	99·23
3	99·81	13	98·93	23	98·93
4	98·63	14	99·97	24	98·56
5	99·99	15	99·87	25	98·97
6	98·93	16	99·01	26	99·89
7	98·53	17	98·49	27	99.84
8	98·95	18	99·81	28	99·71
9	98·69	19	98·93	29	98·97
10	98·96	20	99·01	30	98·93

Gesammt-Mittel 99·25 *m*.

Grösste + Abweichung = + 0·74 *m*,

„ — „ = — 0·76 *m*.

Diese kleinen Abweichungen vom Mittel gestatten zu berechnen, dass die Coincidenzen der beiden Schlagwerke etwa innerhalb der Grenzen $\pm \frac{1}{400}$ Sekunde erkannt werden können. Der aus dem Mittelwerth 99·25 *m* abgeleitete Werth c der Schallgeschwindigkeit ist gleich 335·19 *m*, welcher reducirt auf 0° Lufttemperatur und auf trockne Luft zu

$$c = 331{\cdot}57\ m$$

wird. REGNAULT fand 330·7 und MOLL und VON BOCK 332·26, so dass das Resultat aus Coincidenzen gefunden nahezu das Mittel aus den beiden letzten Werthen ist.

16) Wir gehen nun über zur Betrachtung derjenigen Methoden der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit, welche man die indirekten Methoden zu nennen pflegt. Bei ihnen kommt der Hauptsatz der allgemeinen Wellenlehre in Betracht demzufolge

1) eine Schwingungsbewegung innerhalb der Zeit, in welcher eine sogenannte Primitivbewegung (siehe die betr. Auseinandersetzung im Artikel über allgemeine Wellenlehre) stattfindet, um die Strecke einer Wellenlänge l progressiv vorwärts schreitet.

2) Nennt man die Zeit einer Primitivbewegung t, so ist t auch die Zeit, innerhalb welcher die Wellenbewegung um l fortschreitet, und ist daher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung nichts anderes als der Quotient

$$c = \frac{l}{t}.$$

3) Da die sogen. Schwingungszahl N der Primitivbewegungen, der Primitivschwingungen aber gleich $\frac{1}{t}$ ist, so ergiebt sich die fürs folgende wichtige Gleichung

$$c = N \cdot l \ldots \qquad (15)$$

Hiernach wird die Methode, die wir eine »indirekte« Methode der Schallgeschwindigkeitsbestimmung zu nennen pflegen, sofort klar und besteht in folgendem:

1) Wir erregen in einem Körper einen Ton;

2) wir bestimmen die Schwingungszahl N des betreffenden Tons;

3) wir suchen es dahin zu bringen, dass wir die, diesem Tone entsprechende Wellenlänge l bestimmen können und multipliciren dann

4) N mit l.

Es leuchtet hiernach ein, dass der Schwerpunkt aller jetzt weiter in Betracht kommenden Methoden in der Bestimmung von l liegt. Hat man es mit Transversalwellenbewegungen zu thun, so bedeutet l die Länge einer Transversalwelle; hat man es mit Longitudinalschwingungen zu thun, so bedeutet l die Länge einer Longitudinalwelle. Bei der Luft und allen Gasen kommen nur Longitudinalwellen in Betracht, bei festen und flüssigen Körpern sowohl Transversal- wie Longitudinalwellen.

Wir wollen nun zunächst gerade einmal bei der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen bei festen Körpern verweilen. Insbesondere sind es hier auch Fäden, Schnüre und Saiten, für welche man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegungen bestimmen kann. Auch hier kann man die Methode der direkten Bestimmung, wie sie bereits von den Gebrüder Weber angewandt wurde, betrachten. Eine lange Schnur wird ausgespannt; man erregt an einem Ende dieser Schnur eine Transversalwelle und beobachtet die Zeit bis diese ans andere Ende und nach der Reflexion wieder zum Anfangsende zurückgelaufen ist. Ist dieser Weg gleich $2L$ und T die entsprechende Zeit, so ist

$$c = \frac{2L}{T}.$$

Nach Taylor besteht die Gleichung

$$N = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P \cdot g}{p}}, \tag{16}$$

wenn man unter L die Länge einer Saite, einer Schnur, eines Fadens, unter P das spannende Gewicht, unter g die Constante der Erdschwere und unter p das Gewicht der Längeneinheit der Saite, Schnur oder des Fadens versteht. Denken wir daran, dass bei dieser Formel zunächst stehende Transversalwellen gemeint sind, so ist, um fortlaufende in Betracht ziehen zu können, nach einem weiteren Satze der allgemeinen Wellenlehre die Wellenlänge l, die für die betreffende stehende Wellenbewegung in Betracht kommt, oder

$$l = 2L$$

in die Formel (16) einzuführen, demgemäss auch

$$N = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{P \cdot g}{p}}$$

ist. Es besteht demnach, da

$$c = N \cdot l$$

ist, für c auch die wichtige Beziehung

$$c = \sqrt{\frac{P \cdot g}{p}} \ldots \tag{17}$$

16) Man kann nun aber auch die Wellenlängen bei stehenden Transversalschwingungen in allgemeinerer Weise benutzen und eignet sich hierzu in vorzüglicher Weise, die von mir nach verschiedenen Richtungen hin ausgebildete Methode, einen fadenförmigen Körper mittelst transversalschwingender Körper, so namentlich mittelst Stimmgabeln, in eine stehende Wellenbewegung zu versetzen. Man vergleiche hierfür ausser den Originalabhandlungen[1]) namentlich auch Kapitel 5 meiner »Akustik«, insbesondere das, was über das von mir

[1]) Pogg. Annal., Bd. CIX, pag. 193—215, Jahrg. 1859, und Bd. CXI, pag. 513—537, Jahrg. 1860.

construirte »Elektromonochord« gesagt ist. Man kann mit Hülfe dieses Apparates mit der grössten Schärfe die halben Wellenlängen $\frac{l}{2}$, wie sie bei verschiedenen Spannungen P sich einstellen, messen und somit alle Fragen, welche sich bei ganz dünnen Drähten und weichen Fäden auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversal-Wellenbewegung beziehen, ohne Schwierigkeit beantworten.

Im Jahre 1865 hat KUNDT eine Arbeit[1]) »über eine neue Art akustischer Staubfiguren und über Anwendung derselben zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern und Gasen« veröffentlicht, welche die ganze Angelegenheit der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit sehr wesentlich gefördert hat. Diese Methode bildet das vollkommene Analogon zu meinen Fadenexperimenten insofern, als sie für Longitudinalwellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit liefert, welche ich bei meinen Fäden für transversale Impulse bestimmen kann. In beiden Fällen hat man nämlich ein sehr bequemes und scharfes Mittel, um die Halbwellen und somit auch die ganzen Wellen einer Longitudinal- bezw. einer Transversalschwingung in schönster Weise sichtbar zu machen, so dass man die Längen der betreffenden Halbwellen bis auf einen Bruchtheil eines Millimeters genau messen kann, wonach ja mit Rücksicht auf unsere Gleichung (15) die Bestimmung von c sofort ermöglicht ist. Vor allem war es die KUNDT'sche Methode, welche in äusserst bequemer und scharfer Weise die Schallgeschwindigkeit in Luft, überhaupt in Gasen und in Dämpfen und ebenso in festen Körpern und in Flüssigkeiten zu bestimmen gestattete. Wir haben die Methode bereits im Artikel über Longitudinalschwingungen tönender Körper auseinandergesetzt und brauchen jetzt auf dieselbe nicht mehr genauer einzugehen. Es ist eben die »Methode der KUNDT'schen Staubwellen«, die ja in allen Lehrbüchern der Physik sich beschrieben findet.

Zur Ausführung dieser KUNDT'schen Versuche »der Staubfiguren« wie auch zu meiner Methode »der Fadenschwingungen« gehört zweierlei, nämlich ein primär tönender und ein von diesem zum Mitschwingen gebrachter Körper. Nennen wir jenen den »Schwingungserreger«, diesen den »mitschwingenden Körper«, so sind folgende Combinationen möglich:

Schwingungen des Schwingungserregers	Schwingungen des mitschwingenden Körpers
1) transversale	transversale
2) „	longitudinale
3) longitudinale	longitudinale
4) „	transversale.

Die Combination 1) ist die meiner Fadenschwingungen im eigentlichen Sinne. Ich verwendete als Schwingungserreger vorzugsweise Stimmgabeln, glockenförmige Körper und Lamellen. Es lassen sich aber alle übrigen transversalschwingenden Körper ebenfalls benutzen. Als mitschwingende Körper kommen bei meiner Methode Fäden, dünne Schnüre und dünne Saiten in Betracht. In dem Maasse, als man die Dimensionen des Schwingungserregers vergrössern und somit dessen Schwingungsenergie vermehren kann, kann auch der mitschwingende Körper, insbesondere in seinen Querschnittsdimensionen, mehr und mehr wachsen, ohne dass die Methode aufhört, ihre Giltigkeit zu besitzen.

[1]) Zuerst 1865 der Acad. d. Wiss. zu Berlin im Auszuge und dann in POGG. Annal., Bd. CXXVII, pag. 497—523, vollständig mitgetheilt.

näher verfolgt worden, ohne dass aber ihrer Realisirung etwas im Wege stände. Denn offenbar kann man auch die Longitudinal-Stösse eines Glas- oder Metallstabes auf einen Faden oder eine Saite transversal überleiten und diesen somit zwingen, Transversalschwingungen auszuführen.

Dass man im Sinne von No. 2 durch transversalschwingende Körper insbesondere die Luft in einer Röhre in Longitudinalschwingungen versetzen kann, ist bekannt. Denn jede Resonanz einer solchen Luftsäule auf eine davor gehaltene schwingende Stimmgabel, Membran oder CHLADNI'sche Scheibe beweist den Zusammenhang. Es handelt sich hier aber namentlich auch um die KUNDT'schen Staubfiguren und fragt es sich, entstehen diese auch durch Schwingungserreger mit transversalen Schwingungen? Dies gelingt sehr wohl, namentlich, wie ich gezeigt habe[1]), durch schwingende Blechscheiben, welche man als Boden eines trichterförmigen Vorsatzes durch ein Streichstäbchen in Transversalschwingungen versetzt, eine Zusammenstellung, welche in der Fig. 255 versinnlicht ist. Es stellt hierbei R das Luftrohr, C den Blechkonus mit dem Boden m vor, welcher durch das Streichstäbchen s in Transversalschwingungen versetzt wird.



(Ph. 255.)

KUNDT war es, der nun insbesondere die Zusammenstellung No. 3 benutzte und in der Weise verfuhr, dass er als Schwingungserreger einen Glas- oder Metallstab nahm, diesen entweder in seiner Mitte oder in je einem Viertel von den Enden einklemmte, und mit einem nassen bezw. einem mit Harz überpulverten Lappen in Longitudinalschwingungen versetzte. Das eine Ende des Klangstabes trägt eine runde Scheibe, mit welcher der Stab in das eine offene Ende eines Luftrohres hineinragt, in welch letzterem eben die Longitudinalschwingungen erregt werden sollen.

17) In dem Maasse, wie der Ton des Schwingungserregers tiefer wird, werden die Wellenlängen bei ihm und auch in dem Luft- oder Gasrohr länger. Da man nun zur Beobachtung und Messung der Wellenlängen nach der Methode KUNDT's diese fertig gebildeten Staubwellen sehen muss, so verwendete KUNDT ausschliesslich Glasröhren. Da ferner die Länge eines Glasrohres doch eine beschränkte bleibt, so war es gerechtfertigt, zunächst als Schwingungserreger longitudinal schwingende Stäbe zu nehmen, damit man im Luft- oder Gasrohr möglichst viele kurze Wellen hinter einander bekam, und so im Stande war, die Länge einer Einzelwelle genauer zu bestimmen. Um den Zusammenhang mit den Wellenlängen hier zu übersehen, ist es zunächct nöthig. auf die Schwingungen der Stäbe einzugehen. Für longitudinal schwingende Stäbe gilt bekanntermaassen die Formel[2])

$$N = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{E \cdot g}{s}},$$

wobei vorausgesetzt wird, dass der Schwingungserreger, wie es ja bei KUNDT der Fall ist, an beiden Enden frei ist. Für den Grundton ist $n = 1$, für den zweiten Oberton $n = 2$ zu setzen. E bedeutet den Elasticitätsmodulus. Es verhalten sich demnach die Obertöne eines longitudial schwingenden Stabes mit

[1]) Meine Akustik, pag. 287.
[2]) Vergl. meine Akustik, pag. 164.

beiderseits freien Enden genau wie die Zahlen 1, 2, 3 .... Bei einem Stahlstab von 1·5 *m* Länge fand ich die Anzahl N der Schwingungen des Longitudinalgrundtones in runder Zahl gleich 1748, bei einem Glasstab gleich 1780 Schwingungen. Die zweiten Obertöne würden demnach eine Schwingungsmenge gleich 3496 und 3560 haben. Da nun bei den Longitudinal-Grundtönen solche Stäbe in ihrer Länge $\frac{2}{2}l$ oder $\frac{1}{2}l$ also eine halbe Wellenlänge des betreffenden Tones repräsentiren[1]), so ist nach unserer Gleichung (15) für Stahl

$$c = 1748 \cdot 2 \cdot 1{\cdot}5 = 5244\ m$$

und für Glas

$$c = 1780 \cdot 2 \cdot 1{\cdot}5 = 5340\ m.$$

Diese einfachen Rechnungen zeigen schon, wie die Longitudinaltöne eines jeden Klangstabes dazu benutzt werden können, um die Geschwindigkeit des Schalles in ihm in der einfachsten Weise bestimmen zu können. Bereits NEWTON hatte den merkwürdigen Zusammenhang zwischen der Länge einer offenen Luftpfeife, der Anzahl ihrer Schwingungen und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles erkannt[2]). Später war es CHLADNI[3]), der diese Idee weiter verfolgte und ihre Bedeutung nicht blos für Luft, sondern auch für feste Körper erkannte, so dass diese Methode: die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles dadurch zu bestimmen, dass man die Länge L eines Klangstabes misst, die Anzahl N der Schwingungen des Grundtones bestimmt, und nun das Produkt $2L \cdot N = c$ berechnet, die »CHLADNI'sche Methode« der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit« genannt werden kann. Wählt man anstatt des Grundtones bei einem Stabe seinen 2ten, 3ten ... $n$ten Longitudinal-Oberton, so bekommt man, falls die Länge des Stabes allgemein mit L bezeichnet wird, für c die allgemeine Gleichung:

$$c = 2 \cdot \frac{N_n}{n} \cdot L \,.\,.\,.\,.\,., \tag{18}$$

wobei unter N_n die Anzahl der Schwingungen des betr. Obertons, also unter n die Ordnungszahl des letzteren verstanden wird.

Die betreffenden Formeln für Stäbe mit beiderseits freien Enden gelten auch für Stäbe mit beiderseits festen Enden und somit auch für Saiten, die, aufgespannt, als beiderseits fest angenommen werden müssen. Bei Saiten können wir aber viel grössere Längen als bei Stäben zur Anwendung bringen. Ist man daher bei ihnen im Stande die betr. Ordnungszahlen eines Longitudinal-Obertones zu bestimmen, so lässt sich auch bei sehr langen Saiten die Schallgeschwindigkeit leicht bestimmen.

Mit Rücksicht auf die KUNDT'schen Staubfiguren und namentlich auch auf eine von R. KÖNIG ausgebilde Methode[4]) kann man noch eine allgemeiner gültige Auffassung gewinnen. Es ist bei dieser gleichgiltig, ob ein Stab an einem Ende frei, am anderen fest, oder ob er an beiden frei oder an beiden fest ist; ferner, ob eine Luftsäule beiderseits offen oder gedeckt oder bloss an einem Ende offen; ob eine Saite wie gewöhnlich an beiden Enden fest, oder beiderseits frei, falls ihre Enden nämlich an zwei schwingenden Stimmgabeln befestigt sind, oder, falls bei ihr ein Ende fest, das andere frei ist, wie es der Befestigung bei meinem bekannten Wellenapparat entspricht. Allgemein muss man in diesen Fällen, wenn

[1]) Vergl. meine Akustik, pag. 166 u. 167.

[2]) MELDE: »CHLADNI's Leben«, pag. 21. Marburg, bei Elwert, 1888. 2. Aufl.

[3]) Ibid.

[4]) Vergl. den Artikel über Longitudinalschwingungen, pag. 753.

sich Longitudinal- oder Transversal-Halbwellen in verschiedener Anzahl bilden, und man diese ihrer Zahl und Abgrenzung nach bestimmen will, die den Enden R und $R_{,}$ (Fig. 256) zunächst liegenden ausser Acht lassen und mit dem Zählen der Halbwellen erst da beginnen, wo man sicher ist, dass nicht der Einfluss der Tonerregung und die Befestigungsart sich in aparter Weise geltend macht. Man zählt also z. B. in einem gegebenen Falle nicht von R bis $R_{,}$, sondern von x bis y und überzeugt sich, dass hierzwischen beispielshalber acht regelmässige Halbwellen liegen. Bei meinen Fadenexperimenten sind die Stellen n_0, n_1 . . die Stellen der Knoten; ebenso ist dies der Fall bei den KUNDT'schen Staubwellen; ebenso können es Knoten sein bei der Methode von KÖNIG, wobei, wie wir im Artikel über die longitudinal schwingenden Körper gesehen haben, die Lage der Knoten auf akustischem Wege mittelst des Ohres bestimmt wird. Andererseits aber zeigte es sich bei der Methode KÖNIG's, dass man anstatt der Knoten besser die Bäuche ihrer Lage nach bestimmen konnte. Es führt dies zum selben Ziel. Ja man kann, wie insbesondere H. KAYSER in einer Untersuchung »Ueber den Einfluss der Intensität des Schalles auf seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit«[1]) gezeigt hat, von den genauen Stellen der Knoten und Bäuche ganz absehen und allgemein zwei Stellen gleicher Phase wählen, an welchen also z. B. ein mit dem schwingenden Körper verbundenes Fäserchen gleiche Schwingungserscheinungen zeigt. Mit Rücksicht hierauf gestaltet sich nun die Beobachtung und die Schlussformel für c folgendermaassen: Man misst die Gesammtstrecke (Fig. 256) $xy = L$, auf welcher sich eine Anzahl m vollständig ausgebildeter Halbwellen erkennen lässt; es ist also dann



(Fig. 256.)

$$L = m \cdot \frac{l}{2}$$

oder

$$l = \frac{2L}{m};$$

ferner, man bestimmt die Zahl der Schwingungen N des Tones, welcher diese Zahl m Halbwellen hervorrief und berechnet sodann c aus der Gleichung

$$c = \frac{2 \cdot L \cdot N}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (19)$$

18) Die Bedeutung der KUNDT'schen Methode liegt namentlich auch in der grossen Leichtigkeit, mit welcher verschiedene Fragen sich entscheiden lassen. Die Röhren, in welchen die Staubwellen erzeugt werden, können zunächst in den verschiedensten Durchmessern zur Anwendung kommen. Es konnte hierbei zur Evidenz bewiesen werden, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in engeren Röhren mehr und mehr abnimmt. KUNDT hat im Jahre 1868 eine grössere Untersuchung[2]) veröffentlicht, bei welcher namentlich auch diese Thatsache sich bestätigt fand.

Die Abnahme der Schallgeschwindigkeit wurde jedoch erst bei einem Durchmesser von 26 *mm* an abwärts bemerkbar. Hierbei zeigte es sich weiter, dass auch die Höhe des Tones, also die Länge der Halbwellen, von Einfluss war. Die folgende Zusammenstellung wird den Zusammenhang erkennen lassen.

---

[1]) Dissertation, Leipzig 1879.

[2]) POGG. Ann., Bd. CXXXV, pag. 337—372 und pag. 527—561.

Durchm. der Röhre	Halbe Wellenlängen			
	90 *mm*	45 *mm*	30 *mm*	
55·0	332·80	332·80	332·80	0·00
26·0	332·70	332·66	333·45	0·75
13·0	329·47	329·88	330·87	0·40
6·5	323·00	327·14	328·14	5·14
3·5	305·42	318·88		
	— 27·28	— 13·78		

Die Zahlen unter dem horizontalen und hinter dem vertikalen Doppelstrich bedeuten die Unterschiede der Schallgeschwindigkeit in der engsten Röhre gegenüber der Röhre mit 26 *mm* Durchmesser, bezw. die Unterschiede für je zwei Röhren, bei welchen Halbwellen von 30 und 90 *mm* in Betracht kommen.

Der Grund für die grosse Verschiedenheit der Schallgeschwindigkeit in weiten und engen Röhren lässt zur Zeit zweierlei erkennen. Es wurde früher mitgetheilt, dass nach Laplace bei jeder Verdichtung Wärme frei wird, welche nothwendig die Spannkraft und hiermit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft und in Gasen vermehren muss. Hierbei kann man, falls die Bewegung im unbegrenzten Luftraume vor sich geht, annehmen, dass die während einer Verdichtung frei werdende Wärme in ihrer Verbreitung auf das bei der Verdichtung in Betracht kommende Luftquantum beschränkt bleibt, und nicht Zeit hat, sich den umliegenden Massen mitzutheilen. Falls aber die Bewegung in einem begrenzten Raume vor sich geht, falls namentlich die Bewegung in einer Röhre stattfindet, muss man es doch als möglich erachten, dass ein Theil dieser Compressionswärme, oder besser ausgedrückt Verdichtungswärme sich während der Zeit einer Verdichtung wenigstens theilweise in die Röhrenwand verbreitet. Geschieht dies, so wird hierdurch die Temperatur des Gases in der Röhre und hiermit dessen Spannkraft etwas vermindert, und wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, in Röhren gemessen, demnach kleiner gefunden werden. Ferner leuchtet ein, dass auch die Reibung der Gastheilchen an den Röhrenwänden die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beeinflussen muss. v. Helmholtz und Kirchhoff haben nun diese Einflüsse berücksichtigt und sind zu einer Formel gelangt, welche folgende Gestalt hat:

$$c^* = c\left(1 + \frac{\gamma}{2r\sqrt{N \cdot \pi}}\right).$$

In ihr bedeutet c die in einer Röhre vom Durchmesser $2r$ wirklich experimentell gefundene Schallgeschwindigkeit bei einer Schwingungszahl N des betreffenden Tones. Die Constante γ hat nach dieser Untersuchung den Werth

$$\gamma = \sqrt{\mu'} + \left(\frac{c^*}{c'} - \frac{c'}{c^*}\right)\sqrt{\nu},$$

worin c' die Newton'sche Schallgeschwindigkeit, ferner $\sqrt{\mu'}$ und $\sqrt{\nu}$ Constanten bedeuten, deren numerische Werthe

$$\sqrt{\mu'} = 0{\cdot}0039, \; \sqrt{\nu} = 0{\cdot}0047$$

sind. Hiernach berechnete sich

$$\gamma = 0{\cdot}00588.$$

In einer weiteren Arbeit[1]) wiess nun H. Kayser nach, dass dieser Werth von γ nicht genüge, um die Theorie mit der Erfahrung in Einklang zu bringen, dass

[1]) Wiedem. Ann., Bd. II, pag. 218—241.

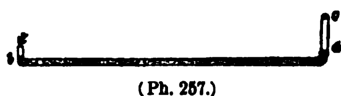
dagegen, wenn man γ viermal so gross nimmt als der soeben aus der Theorie resultirende Werth, d. h. ihm den Werth

$$\gamma = 0{\cdot}0235$$

giebt, die Theorie mit der Erfahrung nahe in Uebereinstimmung kommt.

19) Die Methode der KUNDT'schen Staubfiguren ist von KUNDT und LEHMANN auch benutzt worden, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten zu bestimmen. Auch diese Methode wurde bereits im Artikel über Longitudinalschwingungen besprochen und findet sich die Originalabhandlung der beiden genannten Herren in POGG. Ann., Bd. CLIII, pag. 1—12.

Auch DVORAK hat die Schallgeschwindigkeit bei Flüssigkeiten in Röhren untersucht, hierbei aber eine wesentlich andere Methode wie KUNDT und LEHMANN zur Anwendung gebracht[1]). Er nahm eine etwa 2 *m* lange Glasröhre, schmolz sie an einem Ende zu und bog sie am anderen (rechten) Ende etwa eine Handbreit rechtwinkelig um. Dann wurde die Röhre mit Wasser vollgefüllt, jedoch so, dass in dem kleinen, rechtwinklig umgebogenen offenen Stück noch eine kleine Luftsäule übrig blieb. Blies er nun kräftig über dieses offene Ende hin, so erhielt er einen Ton der Luftsäule, wobei sich deren Schwingungen auch auf die Wassersäule übertrugen und diese in Longitudinalschwingungen versetzten. In diesem Wasser war Schiesspulver suspendirt, das sodann auf der unteren Seite der inneren Röhrenwand die KUNDT'schen Rippenfiguren sehr schön zeigte. Zu Messungen der halben Wellen konnte jedoch ein solches Rohr nicht verwendet werden, da es sich zeigte, dass die Abstände der Knoten nicht gleich gross gefunden wurden.



(Ph. 257.)

Dies trat aber sofort ein, wenn der Versuch so abgeändert wurde, wie es unsere Fig. 257 versinnbildlicht. Das zugeblasene Ende (links in der Figur) wurde nämlich auch auf einer kurzen Strecke umgebogen und sodann eine Luftblase eingelassen, welche eine Strecke *bd* einnahm. Das offene (rechte) Ende blieb wie vorhin, und bildete also die Strecke *ac* das Luftrohr, über welches hingeblasen wurde. Die Halbwellen bildeten sich nun sehr regelmässig und wollen wir einige Versuchsergebnisse der Beobachtung mittheilen. Interessant war zunächst das Ergebniss für zwei Röhren mit nahezu demselben inneren Caliber, nämlich eine mit einem Durchmesser von 11·7 und 11·0 *mm*, während die Wandstärke dieser Röhren sehr verschieden war, indem sie bei der ersteren Röhre 0·63 *mm*, bei der letzteren 2·0 *mm*, also bei ersterer über 3 Mal kleiner war. Die Geschwindigkeiten *c* wurden für die entsprechenden Röhren aus je sechs Einzelversuchen gleich 1046 *m* und 1281 *m* gefunden. Hieraus ergab sich die bemerkenswerthe Thatsache, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles bei Flüssigkeiten in Röhren mit dünneren Wänden wesentlich geringer ausfiel. Diese Thatsache beweist, dass die Röhrenwand den Wasserverdichtungen gegenüber nicht bewegungslos bleibt, sondern wohl Biegungen nach aussen erleidet, oder allgemeiner ausgedrückt, es betheiligt sich die Röhre an den Flüssigkeitsschwingungen. Dasselbe ist ja auch der Fall bei Luftsäulen, die in weniger widerstandsfähige Röhren eingeschlossen sind. Denn man weiss sehr wohl, dass, wenn z. B. bei einer Holzpfeife ihre eine Wand durch Pergament ersetzt wird, der Ton dann wesentlich tiefer wird. Ferner zeigten die DVORAK'schen Versuche auch eine deutliche Verschiedenheit der Schallgeschwindigkeit bei zwei Röhren von gleicher Wandstärke gleich 2 *mm* aber ungleichem inneren Caliber. Es zeigte nämlich eine solche Röhre mit 11 *mm*

1) POGG. Ann., Bd. CLIV, pag. 156—160.

Durchmesser ein $c = 1281$ *m* und eine mit 15 *mm* Durchmesser ein $c = 1213$ *m*. Dies Resultat würde demgemäss gerade das Umgekehrte sein von dem, welches wir bei den Luftschwingungen in Röhren fanden. Denn hier nahm die Schallgeschwindigkeit mit dem inneren Caliber zu, bei Flüssigkeiten aber nimmt nach diesen Versuchen die Schallgeschwindigkeit bei zunehmendem innerem Caliber ab. MELDE.

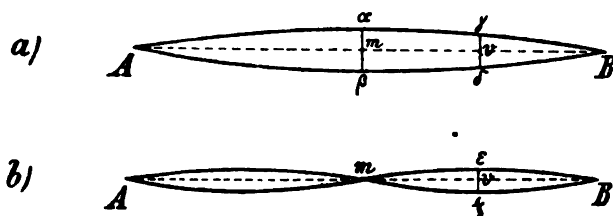
Vibroscopie und Vibrographie.

1) Da mancher tönende Körper mehr oder weniger schon für's blosse Auge wahrnehmbare Schwingungen vollführt, so lag der Gedanke nahe, diese Schwingungen in ihren besonderen Eigenthümlichkeiten und Gesetzmässigkeiten auch optisch näher zu verfolgen. Es kann dies so geschehen, dass man einen, in Schwingung begriffenen, Körper direkt mit dem Auge, oder unter Beihilfe optischer Apparate beobachtet oder auch so, dass man den schwingenden Körper in den Stand setzt, seine Schwingungen auf ein Papier oder auf eine Glasplatte aufzuschreiben. Je nachdem das eine oder andere der Fall ist, kommt man zu den »Vibroscopen« oder den »Vibrographen« und sind im Laufe der letzten Decennien zwei Theile der Akustik zur Ausbildung gelangt, die man unter dem Namen »Vibroscopie« und »Vibrographie« zu denken hat. Es muss jedoch bemerkt werden, dass es hierbei nicht immer die Akustik zu sein braucht, für welche die jetzt zu betrachtenden Methoden von Werth sind, sondern dass hierbei auch andere Wissenschaftstheile, so namentlich die Astronomie und die Physiologie, sehr wesentlich interessirt sind. Es sind in Folge davon so zahlreiche Apparate in verhältnissmässig wenig Decennien construirt worden und haben sich so weite Kreise der Wissenschaft betheiligt, dass es nicht in unserer Absicht liegen kann, auch nur annähernd in diesem Artikel alle die hierher gehörigen Einrichtungen zu schildern, vielmehr wird es sich nur um eine übersichtliche Darstellung des Wesentlichsten handeln können.

Der Erste, welcher in bestimmter Weise mit diesen Dingen in Verbindung trat, war THOMAS YOUNG. In seinen im Jahre 1800 in den Philosoph. Transact. of the Roy. Soc. of London veröffentlichten: »Outlines of experiments and inquiries respecting sound and light« behandelt der 13. Abschnitt die »Schwingungen der Saiten«. Hierbei bemerkt YOUNG: »Man nehme eine von den tiefsten Saiten eines Pianofortes, die mit Silberdraht übersponnen ist, lasse das Licht durch eine enge Oeffnung des Fensterladens darauf fallen, so dass, wenn das Auge in gehöriger Lage gehalten wird, der Lichtschein schmal, glänzend und bestimmt an jeder der Windungen des Drahtes erscheine. Sodann lasse man sie schwingen, so wird der Lichtpunkt seinen Weg bezeichnen wie eine schnell im Kreise geschwungene glühende Kohle, und dem Auge eine Lichtlinie darstellen, welche durch Hilfe des Mikroskops sehr genau beobachtet werden kann. Nach der verschiedenen Art nun, wie der Draht in Bewegung gesetzt wird, ist die Form dieses Weges nicht minder mannigfaltig und unterhaltend, wie die von CHLADNI entdeckten Figuren der Knotenlinien. Jene Erscheinung ist in der That in einer Rücksicht noch interessanter, indem sie mehr für mathematische Bestimmung geeignet zu sein scheint.« Die letztere hat YOUNG nicht weiter beschäftigt, viel-

mehr hat er sich darauf beschränkt, eine Anzahl der beobachteten Curven in einer Zeichnung wiederzugeben und zu beschreiben. Wir wollen aber sofort dazu übergehen, den Werth dieser Methode gerade für das Studium der Saitenschwingungen zu betrachten.

2) In Fig. 258 ist eine Saite AB dargestellt, die ihre Grundschwingung ausführt. Sie bietet für das Auge hierbei das Aussehen wie bei a, indem die äussersten Ruhelagen $A\alpha B$ und $A\beta B$, zwischen denen die Saite mit einer nach der Ruhelage AmB zu wachsenden Geschwindigkeit hin und her schwingt, sich deutlich erkennen lassen, während es wegen dieser rasch wachsenden Geschwindigkeit direkt nicht möglich ist, auch eine Zwischenphase mit dem Auge zu erkennen. Der Mittelpunkt m der Saite bewegt sich in einer genauen geraden Linie $\alpha\beta$ hin und her und auch rechts und links von der Mitte kann man sich durch den Augenschein überzeugen, dass die einzelnen Saitenpunkte sehr nahe geradlinige Schwingungsbahnen verfolgen, so z. B. der Punkt v eine Bahn $\gamma\delta$. Alle diese kleinen Strecken werden in derselben Zeit durcheilt, und wissen wir aus unseren Darstellungen im Artikel über die Transversalschwingungen tönender Körper, dass diese Schwingungen der Saitenpunkte durch eine Sinusfunktion ausgedrückt werden. Bezeichnet man die Elongationsweite für irgend einen Punkt der Saite mit a, ferner die Entfernung des betreffenden Punktes von seiner Ruhelage zur Zeit t mit x, so ist



(Fig. 258.)

$$x = a \sin 2n\pi t \ldots, \tag{1}$$

wenn wir unter n noch die Anzahl ganzer Schwingungen in der Zeiteinheit verstehen. Lassen wir in dieser Zeiteinheit nur eine Schwingung zu, so ist $n = 1$ zu setzen und sonach

$$x = a \cdot \sin 2\pi t \ldots \tag{1*}$$

Hierbei wird aber noch vorausgesetzt, dass man die Schwingungen von der ursprünglichen Ruhelage AmB zu zählen anfangen will. Geschieht dies nicht, will man z. B. von einer der Grenzlagen $A\alpha B$ bezw. $A\beta B$ aus zählen, so muss anstatt t ein $(t + \frac{1}{4})$ bezw. $(t + \frac{3}{4})$ oder allgemein gerechnet für t ein $(t + \vartheta)$ gesetzt werden.

Hiernach ergiebt sich, dass die Schwingungsbahnen der Theilchen einer, ihre Grundschwingung ausführenden, Saite, lauter gerade Linien sind. Eine Saite kann nun aber gleichzeitig ausser dieser Grundschwingung noch eine oder mehrere Oberschwingungen vollführen und wollen wir einmal annehmen, sie liefere noch die 2. Oberschwingung, bei der sie sich so abtheilt wie in Fig. 258 b. Kommen beide Schwingungen zu gleicher Zeit zur Ausführung, so beschreiben die einzelnen Saitenpunkte im allgemeinen keine geradlinigen Bahnen, sondern Curven, die als ebene Curven betrachtet werden dürfen. Ferner leuchtet ein, dass nunmehr sehr verschiedene Curven erhalten werden können, einmal je nach der Stelle der Saite, die man ins Auge fasst, zweitens nach dem Winkel, der zwischen den beiden Schwingungsebenen der Oberschwingungen gelegen ist und drittens nach der Phasendifferenz. Was den zweiten Punkt anlangt, so können zwei Hauptfälle vorkommen: einmal nämlich können die beiden Oberschwingungen in derselben Ebene vor sich gehen oder zweitens so, dass die Schwingungen des Grundtons z. B. in einer Vertikal-, die des zweiten Obertons in einer Horizontal-

ebene stattfinden. Letzteren Fall wollen wir vorläufig allein berücksichtigen. Bezeichnen wir die Entfernungen eines Saitentheilchens von der Ruhelage bei der 2. Oberschwingung mit y, so ist der Gleichung (1^*) entsprechende jetzt

$$y = b \cdot \sin 4\pi t,$$

oder, wenn wir eine Phasendifferenz ϑ' einführen:

$$y = b \cdot \sin 4\pi(t + \vartheta'),$$

wobei jetzt b die Elongationsweite des ins Auge gefassten Saitenpunktes bedeutet, die gleich Null ist, wenn wir speciell den Mittelpunkt m der Saite berücksichtigen. Das gemeinsam bestehende System der Gleichungen wird demgemäss

$$x = a \sin 2\pi(t + \vartheta)$$
$$y = b \cdot \sin 4\pi(t + \vartheta').$$

Es kann jedoch nachgewiesen werden, dass wir unbeschadet der Allgemeinheit eine der Phasendifferenzen z. B. ϑ' gleich Null setzen dürfen, demgemäss das System der Gleichungen nunmehr

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \sin 2\pi(t + \vartheta) \\ y &= b \cdot \sin 4\pi t \end{aligned}\right\} \ldots \qquad (2)$$

wird. Setzen wir $\vartheta = 0$, d. h. nehmen wir an, dass, von der Ruhelage AmB aus gerechnet, beide Bewegungsarten gleichzeitig und zwar im Sinne der positiven x und y beginnen, so lässt sich leicht die Zeitvariable t eliminiren, wonach eine Gleichung zwischen x und y, als Gleichung der ebenen Curve, in welcher der schwingende Punkt sich bewegt, erhalten wird. Zu dem Ende beachten wir, dass auch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} = \sin^2 2\pi t \text{ und } \frac{y^2}{b^2} = 4 \sin^2 2\pi t \cdot \cos^2 2\pi t$$

bestehen, woraus sich durch Elimination von t die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} = 4 \cdot \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

oder

$$y = 2\frac{b \cdot x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

ergiebt. Schon diese Gleichung, obwohl sie einem verhältnissmässig noch sehr einfachen Falle angehört, beweist, dass man es bei diesen Curven mit sehr complicirten Gleichungen zwischen y und x zu thun haben wird. Nähere Auseinandersetzungen würden jedoch zeigen, dass man meistens gar nicht nöthig hat, von vornherein auf die Gleichungen, die nach der Elimination von t zwischen x und y resultiren, Rücksicht zu nehmen, und dass man vielmehr besser thut, die Fragen, welche sich bei der Betrachtung der Eigenthümlichkeiten dieser Curven erheben, aus der Discussion der einzelnen Gleichungen zwischen x und t, sowie zwischen y und t zu beantworten. Bezeichnen wir mit m die Schwingungszahl der einen, mit n die der andern Componente, so sind die Gleichungen allgemein ausgedrückt

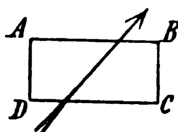
$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \sin 2m\pi(t + \vartheta) \\ y &= b \cdot \sin 2n\pi t \end{aligned}\right\} \ldots \qquad (3)$$

3) Wir hätten demgemäss in einer schwingenden Saite, wenn wir einen ihrer Punkte während der Schwingungen beobachten, ein natürliches Vibroscop namentlich, wenn wir uns noch eines Mikroskops bedienen, um die vielleicht sehr kleinen Schwingungsbahnen im vergrösserten Maassstabe zu sehen. Was die Sichtbarmachung eines der Beobachtung unterworfenen Saitenpunktes betrifft, so kann diese sehr gut in der Weise erreicht werden, dass man die Saite an der Strecke, auf welcher der zu beobachtende Punkt liegen soll, etwa durch Schellacklösung, in welche hinreichend Kienruss eingerührt ist, schwärzt. Nachdem dieser Ueber-

zug völlig trocken geworden ist, kratzt man von ihm mittelst eines Federmessers wieder eine ganz kleine Stelle weg, so dass hier die blanke Metallsaite bloss liegt. Sonnen- oder Lampenlicht, welches von dieser kleinen Metallstelle reflektirt wird, lässt sie dem Beobachter hell glänzend erscheinen und werden demgemäss auch die betreffenden Bahnen, in denen der Punkt schwingt, in voller Helligkeit sich zeigen.

Man pflegt nun solche Curven, in denen sich Punkte eines schwingenden Körpers, gleichgültig, ob dies eine Saite, ein Stab, eine Scheibe u. s. w. ist, abbilden »Schwingungscurven« zu nennen.

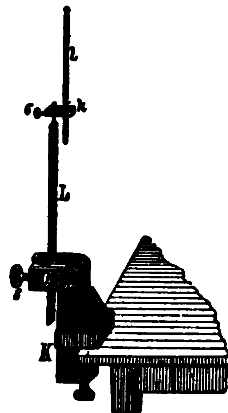
Nach YOUNG war es WHEATSTONE, der im Jahre 1827 eine Einrichtung bekannt machte, durch welche man ebenfalls Schwingungscurven in mannigfacher Weise darstellen konnte. Es wurden bei dem hierbei in Betracht kommenden Apparate Stäbe verwendet und gab WHEATSTONE dieser seiner Einrichtung den Namen »Kaleidophon«. Obwohl der Name sich allgemein erhalten hat, so passt er eigentlich doch nicht recht. Denn die Stäbe, welche verwendet werden, tönen meist gar nicht, weil ihre Schwingungen zu langsam sind, um Töne erzeugen zu können. Doch mag dies nun sein, wie ihm wolle, alle Welt kennt den WHEATSTONE'schen Apparat unter dem Namen »Kaleidophon«. Er besteht in einem Holzbrett, in welches senkrecht verschieden gestaltete Stäbe so eingeschraubt sind, dass die Schwingungen eines an einem Ende festen, am anderen Ende freien Stabes in Betracht kommen. Das freie Ende jedes Stabes trägt ein vergoldetes Messingknöpfchen, welches im Tageslicht oder besser im Sonnenlicht hell glänzend erscheint. Setzt man dann einen der Stäbe in Transversalschwingungen, so beschreibt das helle Knöpfchen auch eine hell glänzende Curve, deren Form im Wesentlichen einmal von der Art des Stabes und dann von der Art der beim Schwingen vorhandenen Combination der Oberschwingungen des Stabes abhängt. Was die Art der Stäbe anlangt, so sei bemerkt, dass dieselben von rechteckigem, quadratischem, dreieckigem oder kreisrundem Querschnitt sein können. Wir wollen zusehen, welche Art von Schwingungscurven von einem Stabe mit rektangulärem Querschnitt 1 : 2 zu erwarten sind. Ein solcher Stab kann zwei Arten ebener Schwingungen ausführen, indem er einmal mit seiner Länge senkrecht zu AB (Fig. 259) oder senkrecht zu BC schwingt. Nach den für die Schwingungen der Stäbe giltigen Gesetzen, sind die letzteren Schwingungen doppelt so rasch wie die ersteren. Versetzen wir den Stab nun in eine der bezeichneten Schwingungen, so wird das leuchtende Knöpfchen am freien Ende nahezu eine gerade Linie beschreiben. Ertheilen wir dem Stab aber eine Ausbiegung etwa in der Richtung des in der Figur angezeigten Pfeils, so lässt sich diese Ausbiegung in zwei Componenten der zuerst bezeichneten Art zerlegen. Der Stab führt deshalb gleichzeitig zwei Schwingungen im Verhältniss 1 : 2 aus, und ist die Folge hiervon, dass auch die Schwingungscurven so sind, wie sie den im vorigen Abschnitt gegebenen Auseinandersetzungen und speciell der Gleichung (2) entsprechen.



(Ph. 259.)

4) In bestimmterer Absicht hat der Verfasser dieses Artikels im Jahre 1861 einen Apparat construirt, dem er den Namen »Universalkaleidophon« beilegte, und der in sehr einfacher Weise gestattet, die Schwingungscurven nicht nur subjektiv, sondern auch objektiv sichtbar zu machen. Fig. 260 zeigt den Apparat in ca. $\frac{1}{10}$ natürlicher Grösse. K stellt zunächst die Hauptklemme dar, mittelst welcher das Ganze an einer Tischplatte festgeklemmt werden kann. Der obere Theil Q dieser Klemmvorrichtung ist um eine Axe s drehbar und kann unter

passt, das gestattet, dass zwischen ihm und der gegenüberstehenden Wand des Loches eine Lamelle L oder auch ein cylindrischer, dicker Draht D durch Anziehen der Schraube s in bestimmter Länge festgeklemmt werden kann. Die Lamelle L endigt oben in einem kurzen Stück angelötheten Drahtes, auf welchen sich die kleine Metallklemme k mittelst der Schraube σ in jeder Lage zur Lamellenebene von L feststellen lässt. Diese Metallklemme ist nach vorn mit einem Schlitze durchsetzt, um in diesen eine schmälere und wesentlich leichtere Lamelle l einzustecken und mittelst einer Klemmschraube festzuklemmen. Anstatt der Lamelle l kann aber auch in k wieder ein feiner, cylindrischer Draht festgeklemmt werden.



(Ph. 260.)

Bezeichnen wir die erwähnten cylindrischen Drähte mit D und d, so sind bei meinem Apparate vier Combinationen möglich, denen auch vier verschiedene Hauptarten von Schwingungscurven entsprechen. Es leuchtet nämlich ein, dass die mit L durch die Klemme k verbundene Lamelle l so in Schwingung versetzt werden kann, dass das combinirte System als Ganzes seine Schwingungen ausführt. Es wird hierbei das hell leuchtende Endknöpfchen der feinen Lamelle l, die incl. der Metallklemme k jetzt nur eine Belastung von L bildet, und somit die Schwingungen von L verlangsamt, eine leuchtende Gerade beschreiben. Hält man aber die Metallklemme k fest, so kann die Lamelle l für sich in Schwingungen versetzt werden; hierbei würde das helle Knöpfchen eine Gerade beschreiben senkrecht zur Lamellenfläche l. Während dies geschieht, kann aber nun auch das ganze System $(L + l)$ in Bewegung gesetzt werden. Es leuchtet so ein, wie nunmehr das Endknöpfchen zweien geradlinigen Vibrationsbewegungen folgen muss. Stehen die Ebenen der Lamellen L und l senkrecht zu einander, so hat man die Schwingungscurven zu erwarten, welche dem System der Gleichungen (3) entsprechen. Mit Leichtigkeit gestattet der Apparat aber auch jede andere Zusammenwirkung der beiden Vibrationsbewegungen, insbesondere solche, bei denen die Schwingungsebenen beider Lamellen gleich gerichtet sind. Die beiden Componenten werden hierbei durch die Gleichungen

$$x' = a \cdot \sin 2m\pi(t + \vartheta)$$
$$x'' = b \cdot \sin 2n\pi t$$

und somit die resultirende Bewegung durch die Gleichung

$$x = a \cdot \sin 2m\pi(t + \vartheta) + b \cdot \sin 2n\pi t \;\ldots \qquad (4)$$

dargestellt.

Ein an einem Ende eingeklemmter cylindrischer Draht oder dünner Stab macht, wenn er aus seiner Ruhelage herausgebogen wird und sich dann selbst überlassen bleibt, im allgemeinen elliptische Vibrationsbewegungen. Demgemäss gestattet unser Universalkaleidophon noch drei andere Arten von Schwingungscurven darzustellen. Denn eine zweite Combination wird ermöglicht, wenn man die Lamelle l durch d ersetzt. Das ganze System $(L + d)$ führt dann ebene, der cylindrische dünne Stab d für sich in Bewegung gesetzt, elliptische Bewegungen aus. Naturgemäss werden die Schwingungen von $(L + d)$ als langsamere wie die von l hergestellt werden können. Bezeichnet daher m die Schwingungszahl der geradlinigen, n die der elliptischen Componente, so

ist jetzt $m < n$ anzunehmen. Nimmt man an, dass die geradlinige Componente mit der x-Axe zusammenfällt, und dass die elliptische Componente so liegt, dass auch die eine Axe $= 2a$ der Ellipse mit der x-, die andere $= 2b$ mit der y-Axe zusammenfällt, so ist das System der Gleichungen für diese Art Schwingungscurven

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cdot \sin 2m\pi(t+\vartheta) + b \cdot \sin 2n\pi t \\ y = b \cdot \cos 2n\pi t \end{array}\right\} \ldots \quad (5)$$

Bei der dritten Combination wird die ebene Lamelle L durch einen cylindrischen dicken Draht D ersetzt, während die Lamelle l bleibt. Man hat es offenbar jetzt auch mit einer elliptischen Componente, herrührend von den Schwingungen des ganzen Systems $(D+l)$ und einer geradlinigen Componente herrührend von den aparten Schwingungen von l zu thun, aber es ist jetzt naturgemässer m grösser wie n anzunehmen. Das System der Gleichungen würde sein:

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cdot \sin 2m\pi(t+\vartheta) \\ y = a \cdot \cos 2m\pi(t+\vartheta) + b \cdot \sin 2n\pi t \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (6)$$

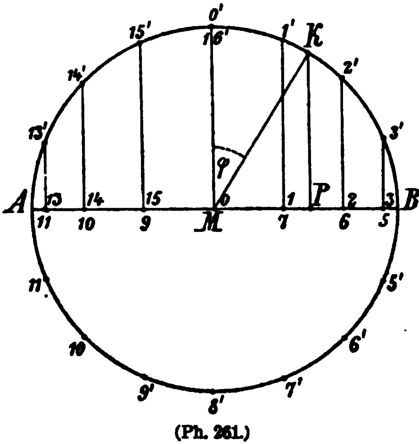
Die vierte Combination besteht in der beiderseitigen Vertauschung von L und l mit D und d. Das ganze System $(D+d)$ und der Draht d für sich liefern elliptische Schwingungen. Das System der Gleichungen hierfür ist, wenn die Halbaxen der beiden Ellipsen mit a und b bezw. mit c und d bezeichnet werden,

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cdot \sin 2m\pi(t+\vartheta) + c \cdot \sin 2n\pi t \\ y = b \cdot \cos 2m\pi(t+\vartheta) + d \cdot \cos 2n\pi t \end{array}\right\} \ldots \quad (7)$$

5) Man verdankt Lissajous zuerst eine sehr werthvolle Untersuchung über die Schwingungscurven, erzeugt durch zwei zu einander senkrechte geradlinige Componenten, also über die Curven, welche durch das System der Gleichungen (3) dargestellt werden. Die Resultate dieser Untersuchung wurden im Jahre 1857 in den Annal. de chim. et de phys., 3. Sér., Tome LI, pag. 147, unter dem Titel »Sur l'Etude optique des Mouvements vibratoires« veröffentlicht. Man kann mit Recht sagen, dass mit der bedeutungsvollen Arbeit des genannten französischen Forschers die Akustik und auch andere Wissenszweige nach verschiedenen Richtungen hin einen neuen Aufschwung genommen haben, indem so erst eine bestimmtere Entwickelung der Vibroscopie und Vibrographie ihren Anfang nehmen und rasch fortschreiten konnte. Auch das im vorigen Abschnitte beschriebene Universalkaleidophon diente zunächst der Hauptsache nach den Lissajous'schen Curven, indem es gestattete, in grosser Einfachheit und mit sehr geringen Mitteln diese Curven zu erhalten, während bei Lissajous, wie wir noch sehen werden, ein umständlicherer Mechanismus in Thätigkeit trat.

Vor allem müssen wir jetzt erst der »graphischen« Darstellung der Schwingungscurven, wie sie von Lissajous gehandhabt wurde, unsere Aufmerksamkeit schenken. Bei dieser Methode spielt die Figur des Kreises eine Rolle und ferner das, was man einen »Sinus- bezw. Cosinusmaassstab« zu nennen pflegt. Fig. 261 stellt den Zusammenhang dar. Ein Punkt P soll auf einer Geraden AB um den Mittelpunkt M zwischen den Elongationsgrenzen A und B eine Vibrationsbewegung ausführen. Er braucht hierbei zu einer Schwingung eine Zeit, die wir als die Zeiteinheit ansehen können. Die Frage ist, wo befindet sich in einem bestimmten Bruchtheil der Zeiteinheit z. B. in irgend einem $\frac{1}{16}$ dieser letzteren der schwingende Punkt? Hierzu dient bekanntermaassen ein um M mit dem Radius $MA = MB$ beschriebener Kreis, der dann in so viel gleiche Theile getheilt werden muss, als man eben die Zeiteinheit getheilt sehen will. In unserem Beispiel sollen Sechzehntel der Zeiteinheit in Betracht kommen, und muss demgemäss der Kreis in 16 gleiche Theile getheilt werden. Zählt man die

Schwingungen des Punktes von der Ruhelage M aus in der Richtung nach B hin, so muss die Kreistheilung senkrecht über M in $0'$ beginnen und weiter in den Theilpunkten $1'$, $2'$ . . . $15'$, $16'$ bestehen. Fällt man nun von diesen Theilpunkten $0'$, $1'$, $2'$ . . . auf AB Perpendikel, so sind deren Fusspunkte die gesuchten Punkte, in welcher sich der auf AB hin- und herschwingende Punkt in den betreffenden Sechzehnteln befindet. Die Fusspunkte für die untere Hälfte des Kreises fallen entsprechend mit denen für die obere zusammen und hat man daher blos die eine Hälfte der Perpendikel nöthig. Zieht man nach irgend einem Punkte K des Kreises einen Radius MK, so bildet dieser mit dem Anfangsradius $M\,0'$ einen Winkel φ und leuchtet ein, dass der Sinus dieses Winkels φ gleich der Strecke MP auf AB ist. Für diese Strecke MP, gleich x gesetzt, besteht demnach, falls noch $MB = a$ gesetzt wird, die Gleichung $x = a \cdot sin\, \varphi$. Der Winkel φ kann in Graden, Minuten und Sekunden und ebenso auch in Theilen des Kreisbogens gegeben sein. Nach der letzteren Auffassung ist offenbar $\varphi = 2\pi t$ zu setzen, falls wir annehmen, dass in der Zeiteinheit eine Schwingung sich vollzieht. Setzen wir für t, unserer Kreistheilung gemäss, irgend ein Sechzehntel, so erhält man dann aus der Gleichung $x = a \cdot sin\, 2\pi t$ einen unserer Bestimmungspunkte auf AB. So z. B. wird für $t = \frac{7}{16}$ der Punkt 7 auf AB erhalten, in welchem der schwingende Punkt P im Momente $\frac{7}{16}$ von B kommend, angelangt ist, um nach M hin seine Schwingungsbewegung fortzusetzen.



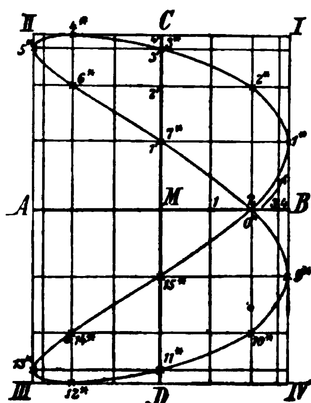
(Ph. 261.)

Nehmen wir an, es solle der schwingende Punkt in der Zeiteinheit zweimal seine Schwingungen zwischen AB wiederholen, so müssen wir den Punkt K auf dem Kreise zwei Umdrehungen machen lassen, d. h. wir müssen einen Bogen von $2 \cdot 2\pi$ Länge in sechzehn Theile theilen. Dasselbe erreichen wir aber auch damit, dass wir einen Bogen gleich 2π nur in Achtel theilen, also halb soviel Theilpunkte wie in unserer Fig. 261 annehmen. Dasselbe erreichen wir aber auch mit unserer Fig. 261, wenn wir sie lassen wie sie ist und allemal, von Null an gerechnet, zwei Theilstrecken als eine rechnen. Im Momente $\frac{7}{16}$ wäre daher der schwingende Punkt im Punkt 14 der Theilung und stände von A kommend in Begriff nach M hin weiter zu schwingen um dann von M aus die zweite Schwingung zu beginnen.

Hiernach ist leicht zu erkennen, dass wenn man anstatt einer Schwingung in der Zeiteinheit deren n annimmt, man für die betreffenden Sechzehntel der Zeiteinheit je um n mal so viel Theilstrecken auf AB fortrücken muss, um zu dem betreffenden Punkte auf AB zu gelangen. Wäre n z. B. gleich 3, so würde der Punkt für den Moment $\frac{7}{16}$ der Zeiteinheit sich da befinden, wo in unserer Fig. 261 der Punkt 21 angezeigt sein sollte. Wir müssen also in unserer Figur in Wirklichkeit oder in Gedanken die Theilpunkte noch über 16 hinaus weiter nummeriren, und würde der Punkt B die Nummer 20 und somit der Punkt 5 auch die Nummer 21 erhalten. Hiernach ist die Bedeutung des Kreises und die Bedeutung des mit Hilfe des Kreises erhaltenen Sinusmaassstabs AB wohl hinreichend klar gestellt.

6) Der Sinusmaassstab, wie wir ihn auf der Strecke AB mittelst eines Kreises

construirten, kann ebenso auf einer anderen Strecke CD (Fig. 262) construirt werden, wenn wir über CD mit dem Radius $MC = \frac{1}{2}CD$ einen Kreis beschreiben und auch diesen in die gewünschte Anzahl Theile, z. B. 16, theilen. In unserer Fig. 262 ist angenommen worden, dass die Mittelpunkte M der beiden Maassstäbe zusammenfallen, und dass zweitens CD auf AB senkrecht steht. Zieht man nun durch die Theilpunkte auf AB Parallelen zu CD und durch die Theilpunkte auf CD Parallelen zu AB, so erhält man ein sogen. LISSAJOUS'sches »Diagramm«, dessen Bedeutung sofort klar wird. Es dient nämlich ein solches Diagramm zum Zeichnen von Schwingungscurven, wofür wir sogleich an einem Beispiel den Beweis liefern können. Angenommen, ein Punkt solle auf AB seine Vibrationsbewegung in der Zeiteinheit zweimal und zugleich auf CD in derselben Zeiteinheit eine Vibrationsbewegung nur einmal ausführen. Ferner sei angenommen, die Phasendifferenz für die Bewegung auf AB sei gleich $\frac{1}{16}$, dagegen für die auf CD gleich Null. Zunächst leuchtet nun ein, dass jetzt eine Theilstrecke auf AB einer Zeit von $\frac{1}{32}$ entspricht. Denn in der Zeiteinheit bewegt sich ja der schwingende Punkt auf AB zweimal hin und her, d. h. er durcheilt $2 \cdot 16 = 32$ Theilstrecken. Auf CD dagegen entspricht einer Theilstrecke die Zeit $\frac{1}{16}$. Mit Rücksicht auf die Phasendifferenz $D = \frac{1}{16}$ ergiebt sich demnach, dass der schwingende Punkt, wenn seine vertikale Bewegung beginnt, bereits in seiner horizontalen Bewegung um zwei Theilstrecken auf AB von M nach B hingerechnet vorgerückt ist, d. h. sich auf AB im Punkte 2 befindet, wenn die zu AB senkrechte Bewegung eben beginnt. Es leuchtet ferner ein, dass wenn der Punkt im nächsten Sechzehntel der Zeiteinheit vom Punkte 2 aus horizontal nach dem Punkte 4 rückt, er gleichzeitig senkrecht zu AB, um eine Theilstrecke $M1' = B\,1^*$ vorrücken muss, d. h. er befindet sich, dem Parallelogramm der Bewegungen entsprechend, am Ende dieses Sechzehntels im Punkte 1^* des Diagramms. Hiermit ist die graphische Auffindung der Punkte, in welchen sich der schwingende Punkt bei der gemeinsamen Bewegung befindet, klar gestellt und gelingt sie einfach, wenn man für das gegebene Beispiel die Regel befolgt: Man fange im Punkte 2 an, rechne allemal auf AB, bezw. auf den Parallelen zu AB zwei Theilstrecken, dagegen senkrecht hierzu auf CD, bezw. auf den Parallelen zu CD nur eine Theilstrecke weiter und markire die Durchschnittspunkte der entsprechenden Diagramm-Parallelen. Man erhält hierbei die mit einem Sternchen versehenen Punkte 0^*, 1^*, 2^* . . . Diese Punkte müssen dann als Bestimmungspunkte einer Schwingungscurve angesehen werden, für deren Zeichnung noch einige Bemerkungen zu beachten sind.



(Ph. 262.)

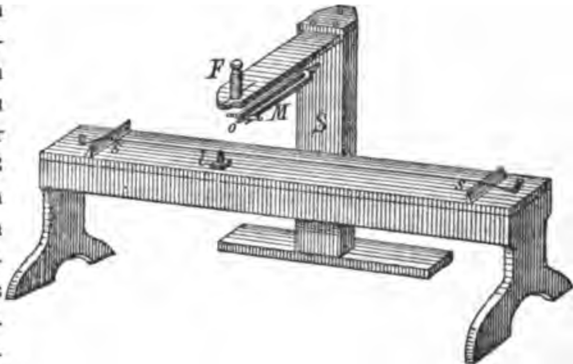
Es leuchtet ein, dass die betreffenden Schwingungscurven schliesslich um so leichter und genauer gezeichnet werden können, je mehr Bestimmungspunkte für sie erhalten wurden. Es würde deshalb ein Diagramm mit doppelt so viel Theilstrecken auf AB und CD, d. h. wenn wir anstatt Sechzehntel Zweiunddreissigstel der Zeiteinheit berücksichtigt hätten, die Curvenzeichnung erleichtert haben. Andererseits muss auch wieder hervorgehoben werden, dass bei einem Maassstabe der Fig. 262 eine Eintheilung in $\frac{1}{32}$ Sekunde vielleicht schon ein wenig verwirrt. Es kommt ferner auch auf das Verhältniss $m : n$ der Schwingungszahlen

der beiden Vibrationen auf AB und CD an. Denn wenn $m:n=1:1$ ist, so werden die Bestimmungspunkte 0*, 1*, 2* . . . die Ecken von je einem Theilparallelogramm bilden, dessen Seiten je nur eine Theilstrecke bilden. Ist wie in unserem Beispiel $m:n=2:1$, so bestehen die Seiten der Theilparallelogramme allemal aus zwei Theilstrecken parallel AB und einer parallel CD, d. h. die Bestimmungspunkte der Curven liegen, parallel AB gerechnet, immer um zwei Theilstrecken auseinander, wodurch offenbar die Verbindung der Theilpunkte zu einer continuirlichen Curve erschwert wird. Ob man also ein Diagramm mit dieser oder jener Eintheilung vortheilhafter verwendet, hängt nicht blos vom Maassstabe der Zeichnung, sondern auch vom Verhältniss $m:n$ ab.

Da ferner der schwingende Punkt in einer Entfernung MB und MA von CD und ebenso in einer Entfernung MC und MD von AB umkehren muss, so folgt, dass, wenn ein Bestimmungspunkt wie z. B. 1* oder 4* in einer Grenzlinie des Diagramms I, II, III, IV liegt, die Curve in einem solchen Punkte die Grenzlinie, also hier die Linie I—IV und I—II berühren muss. Diese Eigenschaft der Grenzlinien des Diagramms wird daher auch dazu beitragen, dass man leichter im Stande ist, eine Curve in ihrem richtigen Zuge auch bei verhältnissmässig wenig Bestimmungspunkten zu erkennen und zu zeichnen.

Zunächst werden die im vorausgehenden mitgetheilten Bemerkungen über die Zeichnungsart der sogen. LISSAJOUS'schen Curven für das weitere Verständniss unserer Entwickelungen und Darstellungen von Einrichtungen und Apparaten genügen. In meiner »Lehre von den Schwingungscurven [1])« habe ich den Zeichenmodus aller Arten von Schwingungscurven, insbesondere auch der vier verschiedenen Arten, welche sich mit meinem Universalkaleidophon darstellen lassen, genau auseinander gesetzt, wie überhaupt diese Schrift alles das enthält, was bezüglich der Theorie und Praxis in Betracht kommt, und für ein genaueres Studium des Zusammenhangs dieser Curven auch bei dem, was Vibroscopie und Vibrographie heisst, in Betracht kommt.

7) Wir wollen nun diejenigen Vibroscope kennen lernen, welche wir LISSAJOUS verdanken und mit denen wohl ziemlich alles sich erreichen lässt, was man auch mit anderen Einrichtungen zu erreichen bestrebt war. Der erste Apparat ist in der Fig. 263 dargestellt. In den vertikalen Theil eines passenden soliden Holzgestells S ist eine Stimmgabel M so eingeschraubt, dass die Zinkenebene derselben horizontal liegt. Am oberen horizontalen Arme des Gestells ist ferner der Oculartheil F eines Mikroskops befestigt, jedoch so, dass er mit Reibung in einer Messinghülse noch vertikal auf und nieder verschoben werden kann. Senkrecht unter der Axe dieses Oculartheils trägt der eine Zinken der Stimmgabel das Objectivende des Fernrohrs und ist weiter, um beim Schwingen der Gabel, deren Schwingungen regelmässig und möglichst lang anhaltend zu machen, am andern Ende der Gabel ein entsprechendes Gegengewicht angebracht. Unterhalb



(Ph. 263.)

[1]) Leipzig, Joh. Ambr. Barth. 1864.

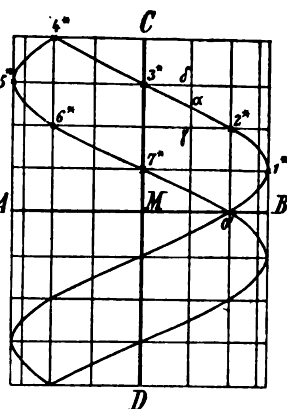
des Mikroskops wird auf einem monochordartigen Gestell eine Saite in horizontaler Lage so ausgespannt, dass ihre Längsrichtung zugleich senkrecht zu den Zinken der Gabel verläuft. Wird die Saite an der senkrecht unter der Axe des Mikroskops gelegenen Stelle mit einem leuchtenden Punkte hergerichtet, wie wir dies unter 3) näher angedeutet haben, so kann die Beobachtung beginnen. Man setzt zu dem Zwecke zunächst die Gabel *M* durch einen Bogenstrich in Schwingung. Hierbei bewegt sich das Objektiv des Mikroskops in einer kleinen Geraden parallel der Länge der Saite hin und her, und wird deshalb auch der auf der Saite glänzende Punkt in einer kleinen Geraden hin und her zu gehen scheinen. Setzt man nun auch noch die Saite in Vibration und zwar so, dass sie im Horizont senkrecht zu den Schwingungen der Gabel schwingt, so combiniren sich im Gesichtsfeld zwei rechtwinklige Componenten, deren Schwingungsverhältniss insbesondere durch eine Spannungsänderung der Saite verschiedentlich abgeändert werden kann.

Ein erster Zweck einer solchen Einrichtung ist klar. Kennt man z. B. die Anzahl der Schwingungen der Gabel, so lässt sich aus der Beobachtung der Schwingungscurve, also auf rein optischem Wege, feststellen, welches Intervall die Saite mit der Gabel bildet. Will man andererseits die Saite z. B. genau eine Octave höher oder tiefer wie die Gabel stimmen, so muss im Gesichtsfeld eine Curve wie die der Fig. 262, bezw. die bekannte 8förmige Figur oder auch eine Parabel entstehen, Figuren, wie sie namentlich auch auf dem, meiner Lehre von den Schwingungscurven beigegebenen Atlas, Taf. VI, 2. Reihe, dargestellt sind. Ist das Intervall der Octave nicht genau erreicht, so wechseln die bezeichneten drei Curven in mehr oder weniger raschem Uebergang mit einander ab. Stimmt das Intervall recht genau, so zeigt die einmal vorhandene Schwingungscurve zeitlich nur ganz allmählich die Uebergänge zu den andern Formen, welche eben das betreffende Intervall $m : n$ charakterisiren. Es versteht sich von selbst, dass wenn einmal z. B. das Intervall $m : n = 2 : 1$, das andere Mal $m : n = 1 : 2$ ist, die betreffenden Schwingungscurven eine um 90° verschiedene Lage haben müssen.

Ein anderer Zweck, der sich mit unserem Vibroscop erreichen lässt, besteht darin, dass man aus dem Anblick einer Schwingungscurve die Art und Weise erkennen kann, wie die Saite schwingt. Soweit wir Saitenschwingungen in gewöhnlichem Sinne auffassen, verläuft die Sache so, wie es die Fig. 259 darstellte. Ein jeder Punkt vollführt eine einfache Vibrationsbewegung senkrecht zur Längsrichtung der Saite. Er befolgt hierbei das Sinusgesetz, dem zu Folge er namentlich die Ruhelage mit der grössten Ge-schwindigkeit durcheilt und nach den Elangationsgrenzen hin sich immer langsamer bewegt. Solche Schwingungen treten aber nicht immer ein, vielmehr weiss man namentlich durch v. Helmholtz[1]), dass eine Saite, die mit dem Violinbogen gestrichen wird, mit ihren einzelnen Punkten sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Der Beweis für diese merkwürdige Thatsache wurde durch das Aussehen der betreffenden Schwingungscurve erbracht. Wollen wir nämlich die Curve unter der Annahme zeichnen, dass, dem Diagramm der Fig. 262 entsprechend, auf der Strecke *CD* eine gleichförmige Vibrationsgeschwindigkeit, dagegen auf *AB* wie seither eine dem Sinusgesetz entsprechende Bewegung stattfindet, so fällt das Diagramm und zugleich die Schwingungscurve, welche der in Fig. 262 entspricht, wie in Fig. 264 aus. Diese Curve hat das Eigenthümliche, dass man, obwohl dieselbe Theilung der Zeiteinheit in Sechzehntel wie bei der Fig. 262 vorhanden ist, man doch

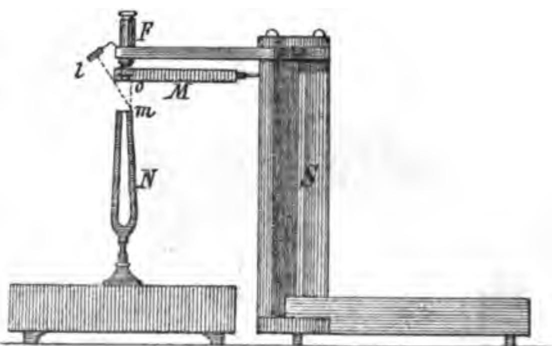
[1]) Lehre von den Tonempfindungen, 4. Aufl., pag. 137 u. f.

anstatt 16 Bestimmungspunkte für die zu bezeichnende Curve zu haben, man leicht auch deren 32 hat. Denn während horizontal parallel *AB* zwei Theilstrecken und vertikal parallel *CD* allemal eine gerechnet werden soll, muss offenbar, wenn man horizontal nur eine rechnet, vertikal eine halbe Theilstrecke gerechnet werden. Schreitet man demnach z. B. vom Theilpunkt 2* zum Theilpunkt 3* weiter, so hat man dazwischen auch noch den Theilpunkt α, der, ohne dass er als ein Durchschnitt auf einer vertikalen Diagrammlinie wirklich angegeben ist, doch sofort beim Zeichnen der Curve als Halbirungspunkt der verticalen Theilstrecke $\gamma\delta$ durch das Augenmaass leicht erkannt wird.



(Ph. 264.)

8) Ein anderes Vibroscop LISSAJOUS's ist in Fig. 265 dargestellt. Bei ihm ist das Objekt der Beobachtung nicht eine schwingende Saite, sondern eine Stimmgabel *N*. Auf einem der Zinken dieser Gabel wird ein heller Punkt *m* durch das Microscop *Fo* beobachtet, von welchem auch wieder der Objektivtheil *o* an einem Zinken der horizontal ins Gestell *S* eingeschraubten Gabel *M* befestigt ist, während der Oculartheil *F* an dem horizontalen Arm des Stativs *S* festsitzt. Um den Punkt *m* möglichst hell zu machen, kann durch eine Linse *l* ein Strahlenbündel einer Lichtflamme oder der Sonne auf ihn geworfen werden. Schwingen beide Gabeln, so erhält man im Gesichtsfeld wiederum eine Schwingungscurve als Resultante zweier Componentalschwingungen, deren Schwingungsrichtungen sich unter den verschiedensten Winkeln gegen einander einstellen lassen, je nachdem man die Stimmgabel *N* bei einer Drehung um ihre Vertikalaxe eben festgestellt denkt. In der Figur ist die Sache so dargestellt, als fiele die Zinkenebene der Gabel *N* mit der Ebene des Papieres zusammen, insbesondere, wenn man sich dies in vertikaler Lage vors Auge gestellt denkt. Würde dann die Zinkenebene von *M* senkrecht zur Ebene des Papiers gedacht, so erfolgten die Componentalschwingungen unter einem rechten Winkel gegeneinander. Drehte man die Gabel *N* aus der soeben markirten Lage um 90° heraus, so fielen beide Schwingungscomponenten in ein und dieselbe senkrecht zur Ebene des Papieres gerichtete Gerade. In je einer Zwischenstellung von der Gabel *N* ist der Winkel der Schwingungscomponenten zwischen 0° und 90° gelegen.

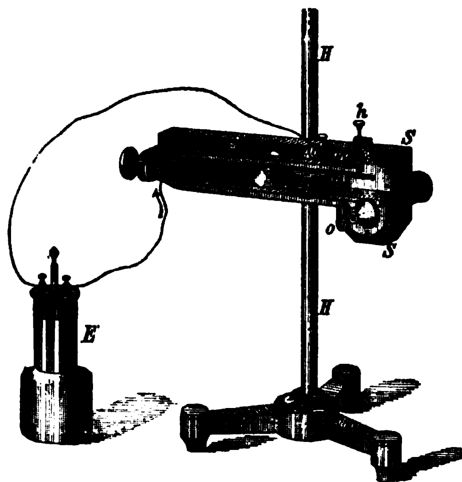


(Ph. 265.)

Dieses Vibroscop kann nun namentlich dadurch sich nützlich machen, dass man mit ihm eine Stimmgabel *N* auf optische Weise mit einer gegebenen Gabel *M* aufs Genaueste unisono oder in einem erwünschten anderen Intervall abstimmen kann. Denn, kennt man die absolute Zahl der Gabel *M* (selbstverständlich incl. ihrer Armirung mit dem Objektiv und dem diesem entsprechenden Gegengewicht), so kann auch sofort die absolute Schwingungszahl der Gabel *N*

bestimmt werden. Für den Einklang ist die Schwingungscurve im Allgemeinen eine Ellipse, die nach und nach sich in eine Gerade und von hieraus wieder in eine Ellipse verwandelt. Erfolgt dieser Uebergang etwa zu rasch, so klebt man zunächst an einen der Zinken von *N* ein kleines Bischen Wachs. Erfolgen die Curvenübergänge nun noch rascher, so beweist dies, dass die Gabel durch das Wachs sich noch mehr vom Einklang mit *M* entfernt hat. Man muss in Folge dessen nach Entfernung des Wachses vorsichtig oben an den beiden Zinken von *N* etwas Metall wegschleifen und wieder beobachten. Erfolgen beim Aufkleben des Wachsklümpchens die Uebergänge aber langsamer, so wäre dies ein Beweis, dass die Gabel langsamer schwingen muss, um ohne Wachs den Einklang zu erreichen. Man erzielt dies dadurch, dass man die Gabel am unteren Theile der Zinken ein wenig abschleift. Man kann auf diese Weise leicht Normalgabeln herstellen und kommt das Ohr hierbei schliesslich gar nicht in Betracht. Selbstverständlich wird man, wenn eine Unisonogabel erhalten werden soll, die Gabel *N* schon so auswählen, dass sie nahezu den Einklang mit *M* bildet, was ja leicht auch von einem wenig geübten Ohre erkannt werden kann.

Später hat Rud. König einen Stimmgabelapparat construirt, wobei die das Ocular tragende Stimmgabel durch den elektrischen Strom in Schwingung erhalten wurde und welchem Apparate dann speciell der Name »Vibrationsmikroscop« verliehen wurde. Unsere Fig. 266 zeigt denselben und zwar in einer Form, wie sie ursprünglich, als der Apparat namentlich von v. Helmholtz bei seinen Untersuchungen über Klangfarben und Saitenschwingungen benutzt wurde, noch nicht vorhanden war. Die ältere Form findet man im Werke von v. Helmholtz »die Lehre von den Tonempfindungen« und ebenso in Müller-Pouillet's Physik abgebildet. Die in unserer Figur dargestellte Einrichtung ist wesentlich compendiöser zunächst dadurch, dass anstatt zweier Elektromagnete, von denen je einer neben je einem der Stimmgabelzinken wirkte, nur ein Elektromagnet vorhanden ist, den König zwischen die Zinken setzte. Sodann besteht eine Vereinfachung darin, dass König die schon von Lissajous eingeführte Stromschliessung und Stromöffnung, also das, was man auch wohl einen Stimmgabel-Stromunterbrecher« nennt und welcher bei Lissajous und zunächst auch bei König in einem besonderen Stimmgabelapparat mit Quecksilbercontakt vorhanden war, in den das Okular tragenden Stimmgabeltheil selbst verlegte und so dessen Gabel selbst zum Stromunterbrecher einrichtete. Ferner liegt eine Annehmlichkeit des Apparates in seiner jetzigen Einrichtung darin, dass anstatt des Quecksilber-Contaktes ein Platin Contakt genommen wurde, darin bestehend, dass die Stromschliessung und Oeffnung durch ein an einem Zinken befestigtes kleines Bündel dünner Platindrähte beim Schwingen der Gabel mit einem Platinblech in Contakt kommt, bezw. seine Berührung mit letzterem wieder verliert. Unsere Fig. 266 zeigt nun den Apparat und können wir in ihr den ganzen Zusammenhang



(Ph. 266.)

leicht erkennen. Auf einem Brette *S* ist eine Stimmgabel so befestigt, dass ihre Zinkenebene vertikal, die Axe der Gabel aber horizontal liegt. Der eine (untere) Gabelzinken trägt das Objektiv *o* eines Mikroscops, der andere ein Messingstück *m*, an welchem das schon erwähnte Platinfädenbündel *σ* befestigt ist. In einem, den vorderen Theil des Brettes *S* durchsetzenden Schlitze lässt sich ein Messingstück *M* verschieben und feststellen, welches zwischen zwei Backen eine Draht-Spirale *D* trägt, welche einen nicht weiter sichtbaren weichen Eisenkern umhüllt. Ein von einem Ballonelement *E* kommender Strom tritt zunächst in der Richtung des Pfeiles in den Stiel der Stimmgabel ein, läuft von hier durch den oberen Zinken der Gabel auf *m*, dann ins Bündel *σ*, welches in leiser Berührung mit einem unten an der Schraube *h* sitzenden Platinplättchen sich befindet, von hier in das Messingstück *M*, sodann durch die Spirale *D*, dann in das Messingsäulchen *μ*, welches isolirt auf dem Messingstück *M* befestigt ist, und kehrt von da zum Elemente *E* zurück. Der Strom ist geschlossen; durch den hierdurch entstandenen Elektromagneten wird nun aber der obere Zinken etwas nach unten, der untere Zinken etwas nach oben gezogen; die Bewegung des oberen Zinkens bringt das Platindrathbündel ausser Contakt mit dem Platinplättchen, der Strom ist unterbrochen, die Zinken schwingen frei wieder zurück, der Strom wird wieder hergestellt und kommt so die Gabel bald in regelmässige Schwingungen, in denen sie durch den Strom dauernd erhalten werden kann. Die Intensität der Schwingungen lässt sich innerhalb bestimmter Grenzen reguliren einmal dadurch, dass man in den Strom noch einen Rheostaten einschaltet, sodann auch dadurch, dass man die Spirale mit dem Eisenkern im Schlitze, der das Brett *S* durchsetzt, verschiebt. Denn offenbar wird die Wirkung des Magneten auf die Gabel um so energischer sein, je mehr die Anziehung des ersteren auf die freien Enden der Zinken erfolgt.

Hiernach wird der ganze Schwingungsmechanismus der Gabel klar sein und kommt es weiter auf die Anwendungen des Apparates an. Diese können bei irgend einem schwingenden Körper, sei es, dass er primär erregt oder durch Resonanz in Vibration gesetzt wird, in Betracht kommen. Wir wollen gerade einmal einen Fall der Resonanz annehmen. Gesetzt, es solle untersucht werden, welchen Antheil die Deckelplatte einer Violine an den Schwingungen der Saiten nimmt, wenn diese mit dem Violinbogen angestrichen werden. Der Hauptsache nach werden die Punkte des Deckels eine zu diesem normale Resonanzbewegung machen. Direkt wird sich diese also mit dem Vibrationsmikroscop nicht wohl beobachten lassen. Denn die Violine muss doch irgendwie vor dem Objektiv *o* des Microscops befestigt werden und kann dieses, wenn die auf ihr Mitschwingen zu prüfende Stelle des Deckels mehr auf der Mitte des letzteren liegt, nicht nahe genug herangebracht werden. Man wird daher zunächst auf die Stelle des Deckels, welche untersucht werden soll, ein ganz leichtes Holzstäbchen vertikal zum Deckel aufkleben und dies oben mit einem hellleuchtenden Pünktchen z. B. einem Stärkemehlkügelchen auf schwarzem Grunde oder noch besser mit einem kleinen Quecksilberkügelchen, das auf dem Holzstäbchen ebenfalls in schwarzem Lacküberzug festsitzt, versehen. Denken wir die Violine in horizontaler Lage vor dem Vibroscop befestigt, so wird beim Mitschwingen des Deckels das Stäbchen und mit ihm das feine helle Stärkekügelchen bezw. das Quecksilberkügelchen, wenn es Sonnen- oder Lampenlicht reflektirt, eine kleine vertikale Gerade beschreiben. Nun muss das Vibroscop so eingestellt werden, dass durch die Bewegung der Stimmgabel allein das Kügelchen eine horizontale Gerade beschreibt. Dies kann aber nur gelingen, wenn die Axe der Gabel sich in einer

Vertikalebene befindet, was auch leicht zu erreichen ist. Denn der ganze Aufsatz auf die Vertikalsäule H des Dreifusses P kann auch in einer von der in der Figur gezeichneten um 90° verschiedenen Lage bewerkstelligt werden. Aus der Art der Schwingungscurve, welche im Gesichtsfeld erscheint, lässt sich dann ein Urtheil über das Mitschwingen der Deckelplatte gewinnen.

Direkt schwingende Körper wie Saiten, Stäbe, Platten und Glocken lassen sich bequemer auf ihre Schwingungen mit dem Vibrationsmikroscop untersuchen, da man bei denselben nicht nöthig hat, erst ein Stäbchen aufzukitten, sondern die genannten schwingenden Körper dem Vibrationsmikroscop gegenüber leicht in eine passende Stellung bringen kann.

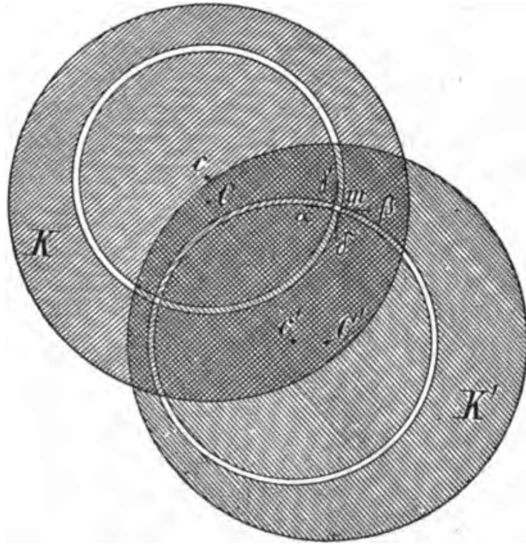
9) Im Vorausgehenden hatten wir es zu thun mit Einrichtungen, bei welchen Vibrationen wirklich stattfanden, denn es wurden ja tönende Stimmgabeln, Saiten u. s. w. verwendet. Man hat nun auch eine Reihe von Einrichtungen construirt, bei denen auf eine mechanische Weise Schwingungscurven dem Auge vorgeführt werden und spielen hierbei die optisch-akustischen Rotationsapparate eine Rolle, von denen wir einen, seinem Principe nach, kennen lernen wollen. Nach diesem Principe wurde sodann von PFAUNDLER ein Apparat construirt, den wir in der neuesten Bearbeitung von POUILLET-MÜLLER's Lehrbuch der Experimentalphysik durch PFAUNDLER, pag. 755, abgebildet finden und den wir in der Fig. 268 auch der Hauptsache nach dargestellt haben. Zu seinem Verständniss ist es aber nöthig, zunächst die Fig. 267 zu beachten. In ihr erblicken wir einen mit dem Radius $C0^\bullet$ um C beschriebenen kleinen Kreis, dessen Peripherie in den Punkten $0^\bullet$, $1^\bullet$, $2^\bullet$ . . , in 16 gleiche Theile getheilt ist. Durch diese Theilpunkte sind acht Durchmesser mit einer entsprechenden Verlängerung gezogen, so dass sie auch über einen mit dem Radius $C0'$, also einem grösseren Radius wie $C0'$, beschriebenen Kreis noch hinausragen. Fällt man von den Theilpunkten $0^\bullet$, $1^\bullet$, $2^\bullet$ . . . des kleinen Kreises Senkrechte auf den durch C gezogenen horizontalen Durchmesser, so liefern die Fusspunkte 1, 2, 3 . . . die aus dem Abschnitt 5 uns bekannte Theilung eines Sinusmaassstabes, auf welchem sich ein schwingender Punkt, der zwischen den Punkten $4^\bullet$ und $12^\bullet$ hin- und herschwingt, in den einzelnen Sechzehnteln der Schwingungszeit befindet. Nun wollen wir von den Punkten $0'$, $1'$, $2'$ . . . in welchen die verlängerten Durchmesser die Peripherie des grösseren Kreises schneiden, die Sinusstrecken $C1$, $C2$ . . . abtragen, so dass die Strecke $1'\,1^* = C1$, $2'\,2^* = C2$ . . . wird, und wobei zu beachten bleibt,

(Ph. 267.)

dass über den Punkt 8′ hinaus die Sinusstrecken nach der entgegengesetzten Seite der Peripherie abgetragen werden müssen. Hat man die 17 Punkte 0*, 1*, 2* . . . , so lässt sich die stärker gezeichnete Curve zeichnen, welche den Namen einer »Kreis-Sinus-Curve« oder »Kreiswellenlinie« führen kann. Denn rechnet man auf den Radien des Kreises die zwischen der Curve und der Peripherie gelegenen Strecken, so entsprechen deren Längen der Grösse $x = a \cdot \sin 2\pi t$, wobei $a = C4^*$ ist.

Nun können wir uns vorstellen, dass eine Rotation um C stattfindet und dass die Kreiswellenlinie, die auf einer Scheibe verzeichnet ist, hinter einem dunklen Schirm $PQRS$ vorbei geht, der mit einem schmalen Schlitze (in der Figur zum Zwecke der Vornahme einer deutlichen Buchstabenbezeichnung verhältnissmässig zu breit gezeichnet) durchsetzt ist. In diesem Schlitze erscheint dann je ein kleines Stück der Kreiswellenlinie, welches Stück, wenn die Rotation der Scheibe fortgesetzt wird, innerhalb der Elongationsgrenzen A und B wie ein schwingender Punkt hin und hergeht.

Hiermit ist die Aufgabe gelöst: durch continuirliche Rotation eine einfache Schwingung eines Punktes um ein Schwingungscentrum M zwischen zwei gegebenen Elongationsgrenzen A und B dem Auge zu versinnlichen und können wir nun an der Hand der Fig. 268 sofort eine Erweiterung des Princips, das wir soeben verfolgt haben, betrachten. K und K' stellen zwei Scheiben von Glas vor, welche sich um die Axen C und C' dadurch drehen lassen, dass ein Schnurlauf die beiden Scheiben verbindet und die Scheibe K sich mitdreht, wenn die Drehung von K' durch eine Kurbel besorgt wird. Die Glasscheiben sind geschwärzt bis auf je eine darauf verzeichnete Kreiswellenlinie, die wir der Einfachheit halber in der Figur einmal als excentrische Kreise, um



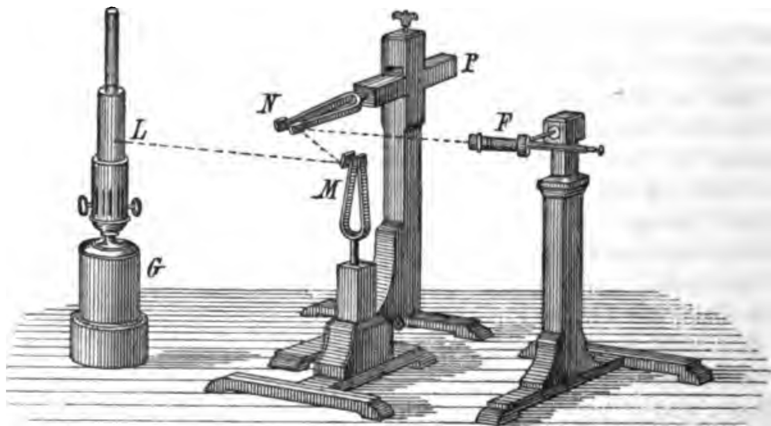
(Ph. 268.)

die Centren c und c' beschrieben, gezeichnet haben. Die Conturen dieser Kreiswellenlinien sind in einer passenden Breite gezogen und, wie bemerkt, durchsichtig geblieben. Geschieht die Beleuchtung der Scheibe von der Rückseite, so leuchtet ein, dass dann nur die beiden Durchschnittstellen der Wellenlinien sich als eine kleine, helle Partie auf dunklem Untergrund präsentiren. Wir wollen nur die Stelle m ins Auge fassen. Sie wird, wenn sich K allein dreht, sehr nahe in einer horizontalen Geraden $\alpha\beta$, dagegen wenn sich K' allein dreht, sehr nahe in eier vertikalen Geraden hin- und hergehen. Werden beide Scheiben aber gleichzeitig gedreht, so leuchtet ein, wie nunmehr eine LISSAJOUS'sche Schwingungscurve die Bahn des sich bewegenden Punktes m werden muss, deren Form einmal von der Zahl m der Umdrehungen von K, der Zahl n der Umdrehungen von K', sodann von der Form der Kreiswellenlinien, d. h. von den beiderseitigen Elongationsweiten $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ und weiter noch von der gegenseitigen Anfangsstellung der Scheiben, also von der Phasendifferenz abhängt.

Aehnliche Einrichtungen lassen sich auch mittelst schwingender Lamellen herrichten, deren Schwingungen rechtwinklig zu einander erfolgen und die oben mit zwei vor einander sich bewegenden und mit je einem geraden Schlitze durchsetzten Scheibe versehen sind. Es würde hierbei aber die Versinnlichung einer Schwingungscurve durch wirklich schwingende Körper zu Stande kommen.

10) Wir wollen nun eine andere Art von Vibroscopen betrachten, welche in ihrer Vollendung ebenfalls von LISSAJOUS bekannt gemacht wurden und wobei das Wesentliche ist, dass Spiegel zur Verwendung kamen, so dass man diese Art Vibroscope mit dem Namen »Spiegelvibroscope« bezeichnen kann. Eine weitere Sache, welche bei diesen Vibroscopen als neu hinzukommt, ist die, dass man die Erscheinungen auch leicht objektiv machen kann, d. h. dass man die Schwingungsfiguren in grösserem Maasstabe an einer Wand erscheinen lassen kann, wodurch insbesondere beim Unterricht ein grosser Vortheil resultirt. Dieses Objektivmachen der Erscheinungen gelingt sofort auch mit meinem oben beschriebenen Universal-Kaleidophon dadurch, dass man die obere schwingende Lamelle *l* oder das cylindrische Stäbchen *d* mit einem kleinen etwa $\frac{1}{8}\square$ *cm* grossen Metallspiegelchen anstatt des leuchtenden Knöpfchens versieht. Unmittelbar im hellen Zimmer kann man dann die Sonne auf das Spiegelchen scheinen lassen und erhält so an einer gegenüberstehenden Wand ein helles, kleines Feld, das beim Schwingen des Stabsystems zu einer der vier verschiedenen und im Voraus gehenden bezeichneten Arten von Schwingungscurven wird.

Fig. 269 stellt ein Stimmgabel-Spiegel-Vibroscop dar, wie es LISSAJOUS zuerst einrichtete. In zwei passenden Stativen sind zwei Stimmgabeln so fest-



(Ph. 269.)

geschraubt, dass die Zinkenebene der Gabel *M* vertikal und die der Gabel *N* horizontal liegt. Die zugewendeten Zinken der beiden Gabeln sind oben mit je einem kleinen Spiegel versehen, so dass durch doppelte Reflexion ein Lichtbündel in das Beobachtungsfernrohr *F* gelangt. Dieses Lichtbündel, welches zunächst auf den Spiegel der Gabel *M* fällt, kommt von einer hellen Petroleumlampe, deren Glascylinder mit einem schwarzen Blechcylinder umhüllt wird, welcher letztere an passender Stelle mit einem kleinen Löchelchen *L* durchbohrt ist. Der Zusammenhang ist klar. Das auf den Spiegel von *M* fallende schmale Lichtbündel wird von hier reflektirt und würde, wenn ein Beobachter direkt in diesen Spiegel hineinsähe, er beim Schwingen der Gabel *M* eine helle vertikale Lichtlinie als

Bahn, in welcher sich das helle Löchelchen *L* zu bewegen scheint, erblicken. Findet am Spiegel von *N* eine zweite Reflexion statt, so wird bei ruhender Gabel *N* ein durchs Fernrohr *F* in den zweiten Spiegel hineinsehendes Auge auch jetzt noch eine vertikale Lichtlinie erblicken. Schwingt aber die Gabel *N*, so tritt eine horizontale Schwingungscomponente hinzu und im Gesichtsfeld des Fernrohres erscheint eine Lissajous'sche Schwingungscurve, deren Gestalt in erster Linie von dem Verhältniss der Schwingungszahlen $m:n$ der beiden Gabeln abhängt.

Es ist einleuchtend, dass eine oder auch beide Gabeln durch einen anderen schwingenden Körper ersetzt werden können, wenn nur die Elongationsweiten der Schwingungen hinreichend gross sind, um eine deutliche Schwingungscurve zu erhalten. So hat insbesondere Pfaundler anstatt der Gabeln schwingende Lamellen, die an ihren Enden mit Spiegeln versehen sind, substituirt. Da die Elongationen bei schwingenden Lamellen, die an einem Ende fest am anderen frei sind, beträchtlich gross gemacht werden können, so eignen sich solche Lamellen auch sehr zu einer objektiven Darstellungsweise der Schwingungscurven.

11) Zu den wirksamsten Mitteln, eine Analyse von Klängen vorzunehmen, gehören die Flammen, und hat man diesen schon seit mehreren Decennien im bezeichneten Sinne Aufmerksamkeit geschenkt. Dass eine Flamme besonders geeignet ist, Schwingungszustände zu verfolgen, leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass dieselbe einmal ein überaus bewegliches Gebilde ist und andererseits wegen ihres Leuchtens sich von vornherein bei optischen Untersuchungen der Schwingungen als sehr brauchbar erweist. Schallschwingungen wirken auf eine frei brennende Flamme mehr oder weniger stets ein, doch fand man bald, dass bestimmte Formen der Flamme, bestimmte Druckverhältnisse beim Ausströmen des Gases, bestimmte Erscheinungen besser sichtbar machen, so dass man von sogen »sensitiven Flammen« redet, worunter man eben solche Flammen versteht, welche auf bestimmte Schwingungen ihrer Umgebung leicht und auffällig reagiren. Hierbei muss sofort bemerkt werden, dass wenn von Flammen hier überhaupt geredet wird, man wohl ausschliesslich an Leuchtgasflammen zu denken hat. Ferner muss bemerkt werden, dass hierbei sich die Thatsache bestätigt, der zu Folge alle die Bewegungen, welche Gasflammen schwingenden Körpern gegenüber annehmen, am auffälligsten werden, wenn der primitiv schwingende Körper ebenfalls ein luftförmiger Körper ist. Denn die Schwingungen tönender Luftsäulen oder die Töne unseres menschlichen Sprachorgans, sie pflanzen sich am energischsten durch die umgebende Luft fort und da die Flamme ja auch ein Gasgebilde ist, so erklärt es sich, dass ihre Bewegungen am leichtesten den Bewegungen der die Schwingungen übermittelnden Luft folgen. Daher sind sensitive Flammen vor allem ein vorzügliches Mittel, um die Schwingungen tönender Luftsäulen, der Orgelpfeifen und die Klänge unserer Stimme zu analysiren.

Es muss nun aber weiter bemerkt werden, dass, wenn die sogen. sensitiven Flammen, schwingenden Körpern gegenüber, Formverwandlungen zeigen, welche beim direkten Beobachten der Flamme sich mitunter deutlich bemerkbar machen, man doch wegen der raschen Bewegungen meistens nicht im Stande ist, eine genauere Vorstellung von den Formverwandlungen des leuchtenden Gebildes zu bekommen und hat man deshalb noch ein Hilfsmittel verwendet, das sich bald als ausserordentlich vortheilhaft erwies. Dies Hilfsmittel ist ein rotirender Spiegel. Die schwingende Flamme zeigt in einem solchen ihr Bild, welches letztere dann anstatt der direkten Flamme vom Beobachter betrachtet wird. Dreht man den

Spiegel, so erscheint das Bild der Flamme stets an anderen Stellen des Spiegels; entsprechen sodann diesen Stellen momentan auch andere Formen der Flamme so hat man diese anderen Formen im Gesichtsfeld auch an anderen Stellen des Raumes vor sich, man hat das, was man beim direkten Beobachten der Flamme nur auf einem Flächenraume, den die Flamme selbst einnimmt, sieht und deshalb nicht gut zu unterscheiden vermag, nun auf einem weit grösseren Flächenraume vor sich. Es verhält sich hiermit ähnlich, wie mit einer Zerlegung des Lichtes nach Farben auf der Länge des Spektrums, auf welcher Länge wir ja auch um so besser die Farbenbestandtheile erkennen können, je mehr wir im Stande sind, die Länge des Spektrums zu vergrössern. Wir können daher bei den folgenden Betrachtungen sehr wohl von einer »Flammendispersion« reden und ist klar, dass diese in einer einfachen Beziehung zur Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels steht: Die Flamme erscheint in derselben Zeitstrecke im Gesichtsfeld um so weiter auseinander gezerrt, je schneller der Spiegel gedreht wird.

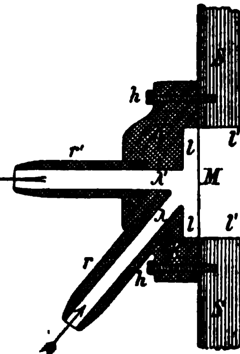
Man erkennt nun bald, dass es zwei wesentlich verschiedene Schwingungsarten einer Flamme geben muss, gemäss denen man von »longitudinal« und »transversal« schwingenden Flammen reden kann. Man muss sich nämlich einmal vorstellen, dass, wenn Gas aus einer Röhre, einem Behälter oder einer Kapsel ausströmt und aussen angezündet wird, dieses Gas hierbei in irgend einer Weise Dichtigkeitsänderungen erleidet, die im innigsten Zusammenhang mit den Schwingungen des primär schwingenden Körpers stehen. Bei jeder Verdichtung des Gases im Ausströmungsbehälter wird daher mehr Gas nach aussen getrieben, demgemäss die Länge der Flamme zunehmen muss, während bei jeder Verdünnung weniger Gas ausströmt und so die Länge der Flamme abnimmt. Also Längenveränderungen der Flamme, longitudinale Schwingungen derselben kommen hierbei in Betracht. Man kann sich aber auch vorstellen, wie eine Flamme durch die Schwingungen eines primär schwingenden Körpers hin und hergetrieben wird, so dass sie gewissermaassen wie ein an einem Ende fester am anderen Ende freier Stab oder eine ebensolche Lamelle schwingt. In diesem Falle würde man von einer »transversal« schwingenden Flamme reden. Offenbar können hierbei aber auch sich longitudinale Veränderungen hinzugesellen, so dass man es drittens noch mit doppelt schwingenden Flammen zu thun hätte.

Je nachdem eine longitudinal oder transversal schwingende Flamme in Betracht kommt, wird auch die Drehung des Spiegels eine bestimmte werden müssen. Es leuchtet sofort ein, dass, wenn eine longitudinal schwingende Flamme in ihren Veränderungen in einem Spiegel beobachtet werden soll, es ungereimt wäre, den Spiegel um eine horizontale Axe sich umdrehen zu lassen. Denn ein um eine solche Axe sich drehender Spiegel zeigt das Bild einer ruhenden Flamme in Form eines vertikalen Lichtstreifens, mag die Länge der Flamme gross oder klein sein. Daraus folgt, dass eine Vergrösserung oder Verkleinerung der Länge beim longitudinalen Schwingen der Flamme sich nicht hinreichend auf dem vertikalen Lichtstreifen zu erkennen giebt, wenigstens wird es ganz besonderer Aufmerksamkeit bedürfen, um auf der Länge dieses Streifens die Phasen einer solchen schwingenden Flamme zu erkennen. Ganz anders wird dies, wenn der Spiegel sich um eine vertikale Axe dreht. Denn jetzt wird die ruhende Flamme im bewegten Spiegel in einen horizontalen Streifen von der Höhe der Flamme verwandelt. Höhenänderungen der Flamme müssen demnach auch Höhenänderungen in dem im Spiegel zu beobachtenden Lichtstreifen hervorrufen, welche deutlich nebeneinander zu beobachten sind.

12) Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über die Verwendung von Flammen wollen wir dazu übergehen, diejenigen vibroscopischen Einrichtungen kennen zu lernen, wie sie zuerst in ihrer Vollendung von RUD. KÖNIG bekannt gemacht wurden. Man kann eine solche Einrichtung mit dem Namen eines »Flammen-Vibroscops« und namentlich mit Rücksicht darauf, dass hierbei auch stets ein rotirender Spiegel benutzt wird, dasselbe ein Spiegel-Flammen-Vibroscop nennen. Die Bestandtheile eines solchen Vibroscops sind nun folgende:

1) Der primär tönende und auf seine Schwingungen zu untersuchende Körper z. B. eine Orgelpfeife oder das menschliche Sprachorgan oder auch ein schwingender anderer Körper, wie z. B. eine Stimmgabel;
2) die sogen. »manometrische Kapsel«;
3) der rotirende Spiegel;
4) der Gasbrenner.

Die Fig. 270 stellt eine manometrische Kapsel nach KÖNIG in natürlicher Grösse und zwar im Durchschnitt dar. *K* ist ein runder Kolzkörper, der zunächst eine cylindrische Vertiefung *l* erhält, nach welcher hin auch noch die Löcher λ und λ' eingebohrt sind. In den Holzkörper *K* sind ferner zwei kleine Holzröhrchen *r* und *r'* eingeleimt, deren Canälchen durch die Löcher λ und λ' mit dem kleinen cylindrischen Hohlraum *l* den man den »Gasraum« nennen kann, communiciren. Die Kapsel ist auf ihrer Basis durch eine dünne Membran *M* geschlossen, welche wohl meistens in einer Kautschukhaut bestehen kann. Das Ganze wird sodann z. B. auf die Wand *S* einer Orgelpfeife mittelst der Schräubchen *h* aufgeschraubt, und muss die Pfeifenwand an dieser Stelle, wo die Kapsel befestigt wird, auch mit einem cylindrischen Loche *l'* durchbohrt sein.



(Fig. 270.)

Der Abschluss dieses Loches nach aussen hin erfolgt somit durch die Membran *M*. Das Röhrchen *r* wird mittelst eines dünnen Kautschukschlauchs mit einem Gasbehälter oder der Gasleitung in Verbindung gesetzt, so, dass beim Oeffnen des Gaszuleitungshahnes Gas in der Richtung des gefiederten Pfeiles in die Kapsel einströmt. Das Röhrchen *r'* wird mit der Nummer 4 der oben bezeichneten Bestandtheile der ganzen Einrichtung, nämlich dem Gasbrenner durch einen Schlauch in Verbindung gesetzt, welcher Brenner in einem Messingröhrchen mit ganz feiner Oeffnung besteht. Dieses Brennerröhrchen kann auch direkt in das Loch des Röhrchens *r'* eingesteckt werden und muss so durchbohrt sein, dass aus demselben das Gas vertikal nach oben ausströmt und somit eine vertikale Flamme erzeugt wird. Die Regulirung des Gaszustroms durch *r* nach dem Gasraum hin kann durch den Hahn der benutzten Gasleitung geschehen. Dieselbe wird also bewirken, dass die Flamme des Gasbrenners länger oder kürzer wird. Wollte man eine Regulirung dieser Flamme direkt hinter dem Gasbrenner vornehmen, so müsste man an den Schlauch, der *r'* mit dem Gasbrenner verbindet, noch einen Quetschhahn mit Regulirschraube anbringen.

Die Hauptrolle bei der ganzen Einrichtung spielt die Membran *M*. Sie muss selbverständlich hinreichend fein sein, um den Druckveränderungen der Luft folgen zu können. Eine solche Membran reagirt dann nicht bloss etwa auf Schwingungen ihres Grundtones, sondern auf alle Schwingungen und gerade hierdurch ist sie für diese jetzt und vielfach sonst in Betracht kommenden Untersuchungen von grossem Werth.

Das Phänomen der bei einer manometrischen Kapsel im rotirenden Spiegel erscheinenden Flamme ist noch nicht näher verfolgt worden, verdient dies aber jedenfalls. Wir können desshalb hier nur einige Hauptpunkte, von denen die Erscheinung im Spiegel abhängt, bezeichnen. Die Flamme vollführt eine periodische Bewegung, woraus folgt, dass das, was bei ihr sich zeitlich wiederholt, im Spiegel räumlich neben einander liegende Eindrücke, bestehend in Einzelbildern, hervorrufen muss. Wie die Flamme während einer Schwingung sich verändert, ist eine Sache für sich und kann dies vor allem auch mittelst stroboscopischer Scheiben untersucht werden, wenn man über die Erscheinungen der Flammenbilder im Spiegel das Nähere erforschen will. Jedes Einzelflammenbild im Spiegel, mag es ausfallen wie es will, muss nothwendig in der Zeit einer Schwingung der Flamme zu Stande kommen. Das Aussehen dieser Flammenbilder im Spiegel hängt daher in erster Linie von den Schwingungen der Brennerflamme ab. Diese Schwingungen hängen sodann weiter ab von den sie erregenden Tönen. Es wird nicht einerlei sein, ob der Ton einfach oder zusammengesetzt, ferner ob er stark oder schwach ist. Ferner wird es wesentlich auch auf die Grösse und Form der Flamme ankommen. Eine hohe Flamme wird andere Schwingungserscheinungen liefern, wie eine sehr niedrige; eine breitere mehr flächenförmige Flamme wird anders schwingen, wie eine schmale lineäre. Ferner leuchtet ein, wie die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels von wesentlichem Einfluss auf die Flammenbilder sein muss. Denn je schneller sich der Spiegel dreht, desto weiter auseinander liegen fürs Auge die den einzelnen Schwingungsphasen der Flamme entsprechenden Momentbilder. Je schneller der Spiegel sich dreht, desto breiter werden demnach die Einzelflammenbilder werden. Alle diese Fakta müssen in Rechnung gezogen und in ihrem Einfluss einzeln untersucht werden, wenn man eine vollkommene Einsicht in den Verlauf des Phänomens haben will.

Einige allgemeine Bemerkungen können hier noch weiter gemacht werden. Die Hauptformen, welche die Flammenbilder annehmen, sind Zahnformen deren Gestalt und Aneinanderreihung dann wiederum von den oben bezeichneten Faktoren abhängt. Die Zähne haben aber keine zu einer vertikalen Mittellinie symmetrische Form, sondern eine schiefe Sägezahnform und zwar sind die Spitzen der Zähne, wenn, von oben gesehen, der Spiegel sich direkt wie die Zeiger einer Uhr dreht, stets nach der rechten Seite des in den Spiegel hineinsehenden Beobachters hingeneigt. Umgekehrt bei einer entgegengesetzten Rotation des Spiegels. Wird die Tonintensität geringer, so werden die Zähne niedriger, so dass sie dann in ihrer Gesammtheit mehr wie eine einfache Wellenlinie erscheinen. Wird die Flamme sehr klein, und die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels möglichst gross genommen, so löst sich das ganze Phänomen im Spiegel auf in kleine isolirt nebeneinander liegende leuchtende Felder.

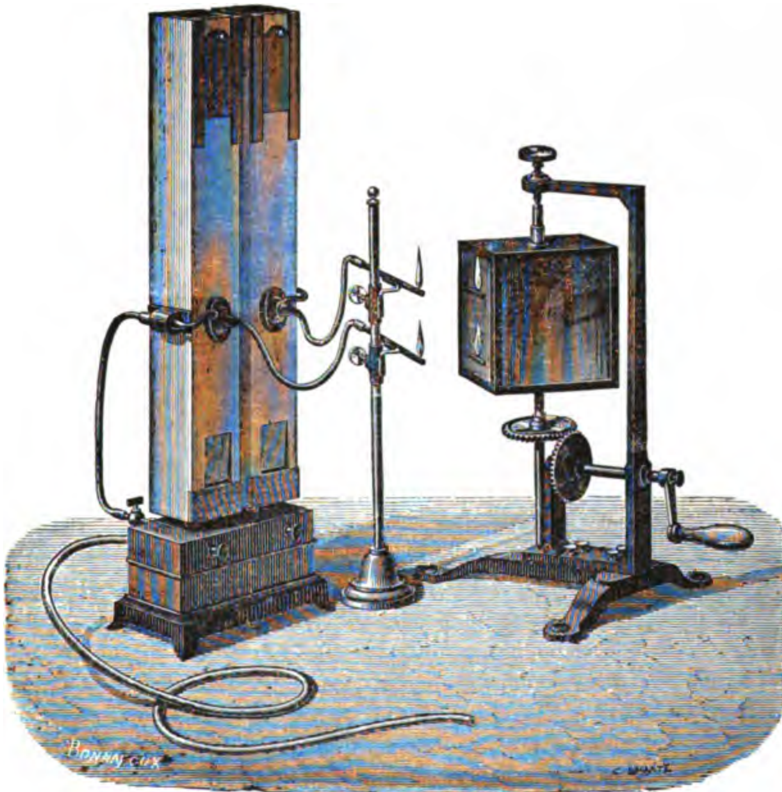
Um wenigstens in einem ganz bestimmten Falle die Hauptformen des Phänomens kennen zu lernen wird im Abschn. 14 das Nöthige mitgetheilt werden. Wir gehen jetzt über zur Betrachtung einiger Hauptanwendungen des Flammen-Vibroscops insbesondere unter Berücksichtigung der Forschungen von KÖNIG, deren Resultate in einer Arbeit unter dem Titel: »Die manometrischen Flammen« im 146 Bande, pag. 161—199, von POGGENDORFF's Annalen im Jahre 1872 und auch in der besonderen Schrift KÖNIG's: »Quelques Expériences d'Acoustique«. Paris 1882, Abschn. VII, bekannt gemacht wurden.

13) In erster Linie eignen sich die manometrischen Flammen dazu, die Schwingungszustände im Innern einer tönenden Luftsäule zu erkennen. Denn,

da in den Knoten das Maximum der Veränderlichkeit der Dichte der Luftsäule, in den Bäuchen das Minimum hiervon stattfindet, so muss eine manometrische Kapsel, welche an einem Knoten angebracht wird, eine sehr lebhafte Schwingung der Flamme hervorrufen, welche im rotirenden Spiegel beobachtet, Flammenbilder mit langen Zähnen liefert. In den Bäuchen dagegen wird die Membran der Kapsel kaum in Bewegung gesetzt und wird die Flamme daher im Spiegel nur als ein gleichbreites Lichtband erscheinen.

Man kann selbstverständlich auch bei festen schwingenden und tönenden Körpern die manometrischen Flammen verwenden und werden wir hernach eine Einrichtung hierfür kennen lernen.

Sehr leicht können auch zwei Pfeifen zu gleicher Zeit mit je einer manometrischen Kapsel versehen werden. Eine jede dieser Kapseln kann mit einem aparten Brenner versehen sein und lässt sich die ganze Annordnung so wie in Fig. 271 treffen, wobei angenommen wird, dass man speciell zwei Unisono- oder



(Ph. 271.)

nahezu Unisonotöne verfolgen will. Zunächst verdient unten der kastenartige Theil Beachtung. Er spielt die Rolle einer Windlade. Seine Höhlung kann durch ein Messingrohr, das auf der Rückwand vom Kasten angebracht wird, mittelst eines Gummischlauches mit einem Blasebalg in Verbindung kommen. Die Pfeifen können einzeln oder zusammen erklingen, wenn man einen oder beide Schieber, die unter den Pfeifen angebracht sind, herauszieht. Sind beide Schieber herausgezogen, so wird die Luft aus dem gemeinsamen inneren Kastenraume in jede der Pfeifen einströmen. Wollte man aber, dass jede Pfeife getrennt von der

anderen aus der Windlade Luft bekäme, so müsste noch ein Querschieber im unteren Kasten angebracht werden, welcher die Windlade in zwei Theile scheidet und wobei dann selbstverständlich auch zwei Einmündungsstellen für die aus dem Blasebalg kommende Luft geschaffen werden müssen.

Der obere hintere Theil des Kastens bildet eine aparte Höhlung, die mit der bis jetzt betrachteten nicht in Verbindung steht. Auch sie wird durch ein zweites Messingrohr und einen zweiten Schlauch in Verbindung gesetzt, aber nicht mit dem Blasebalg, sondern mit der Gasleitung. Soll nun eine der manometrischen Kapseln oder beide den Gaszustrom erhalten, so öffnet man einen oder zwei Hähne, und wird so durch je eine Röhre das Gas in die Brenner gelangen.

Der Fall der Tonerregung bei zwei Pfeifen, die unisono oder nahe unisono gestimmt sind, ist von besonderem Interesse. Zunächst kann die Sache so liegen, dass die Pfeifen genau unisono sind. Bringt man sie dann zum Tönen, so zeigen die beiden übereinander befindlichen Flammen-Bilder im Spiegel die bemerkenswerte Erscheinung, dass die Zähne des einen Bildes genau an die Stellen der Zahnlücken des andern fallen. Dies beweist die merkwürdige Thatsache, dass die Pfeifen, auf gemeinsamer Windlade stehend, sich gegenseitig so beeinflussen, dass eine Verdichtung der Luft in der einen mit einer Verdünnung der Luft in der andern zusammenfällt, was sich auch leicht erklären lässt. Denn, wenn zur Erzeugung eine Verdichtung aus der Windlade nach der einen Pfeife hin ein Zuströmen der Luft erforderlich ist, so kann angenommen werden, dass dieses Zuströmen vom Orte der andern Pfeife aus als ein Wegströmen aufzufassen ist, d. h. hier die Veranlassung zu einer Verdünnung gegeben ist.

Sehr leicht kann nun aber die Sache so eingerichtet werden, dass man die beiden manometrischen Kapseln mit einem Brenner in Verbindung bringt. Es müsste dann, wenn die Pfeifen absolut unisono klingen und ebenso absolut gleich stark erklingen, eine völlige Interferenz im resultirenden Gasstrom eintreten. Denn die Verdichtungen und Verdünnungen fallen jetzt genau zusammen. Sind die Pfeifen ausserdem aber stark intonirt, so bemerkt man ein eigenthümliches Flammenbild, nämlich nicht etwa ein gleichmässig breites Lichtband, sondern ein solches mit Zähnen, deren Zahl doppelt so gross ist, wie die beim Grundton einer Pfeife. Dies beweist aber, dass der zweite Oberton der Pfeifen vorhanden ist, und in der That hört man denselben auch deutlich mit dem Ohre. Durch Interferenz haben sich die beiden Grundtöne, die mit einer Phasendifferenz von einer halben Welle schwangen, vernichtet. Dann müssen aber die beiden Obertöne um eine ganze Welle differiren, d. h. sie müssen sich verstärken, und diese Verstärkung genügt, um das Flammenbild der Oktave hervorzurufen.

Stimmen die Pfeifen nicht genau unisono, so tritt das Phänomen der Schwebungen hervor. Auch jetzt lassen sich zwei bemerkenswerthe Thatsachen mit unserem Apparate der Fig. 271 constatiren, man kann nämlich zunächst blos eine der Pfeifen anblasen. Ihr Flammenbild ist dann das des Grundtons. Die andere Flamme sollte nun, da die zweite Pfeife nicht angeblasen wurde, kein gezahntes Flammenbild liefern. Aber die zweite Pfeife tönt durch Resonanz schwächer mit und documentirt sich dies Mitschwingen in den Zähnen des Flammenbildes. Nun entsteht aber die Frage, in welcher Tonhöhe resonirt denn die zweite Pfeife? Denn die Pfeifen sind ja nicht unisono: die zweite ist z. B. höher wie die erste. Erklingt die zweite Pfeife bei der Resonanz in ihrem höheren Eigenton, z. B. im Ton mit 265 Schwingungen, wenn der Ton der allein angeblasenen

ersten Pfeife 256 Schwingungen hat, oder nicht? das Flammenbild der zweiten Pfeife giebt sofort die Antwort auf diese wichtige Frage. Dieses Bild zeigt nämlich die genaue Zahl Zähne wie das der ersten Pfeife; man bemerkt keine veränderlichen Abstände in den Zähnen der einen Flamme, gegen die der andern, d. h. das Phänomen der Stösse documentirt sich optisch nicht. Es documentirt sich ebenso nicht durchs Ohr und beweist dies Experiment dass unter diesen Umständen die Resonanz der zweiten Pfeife nur in der Tonhöhe der ersten erfolgt.

Man kann nun weiter beide Pfeifen ertönen lassen und zunächst sie mit je ihrem Brenner in Verbindung bringen. Es wird sich dann das Phänomen der Schwebungen in der Art bemerklich machen, dass jedes der Flammenbilder Zuckungen in Folge der auch vom Ohr wahrgenommenen Schwebungen zeigt. Lässt man beide manometrischen Kapseln mit einem Brenner gemeinsam in Verbindung treten, so zeigt dies eine Flammenbild die Zuckungen für sich. Nun aber tritt eine weitere eigentümliche Erscheinung ein, nämlich wenn das Tempo der Schwebungen langsamer und langsamer wird, so zeigt das Flammenbild plötzlich keine Schwebungen mehr, sondern die Pfeifen erzielen eine mittlere resultirende Tonhöhe und zwar mit einem Ton, der stärker ist wie der von je einer einzelnen Pfeife.

Man sieht demnach, dass diese eigentümliche vibroscopische Einrichtung, wie wir sie bis daher kennen gelernt haben, eine ganze Reihe wichtiger Fragen zu beantworten gestattet.

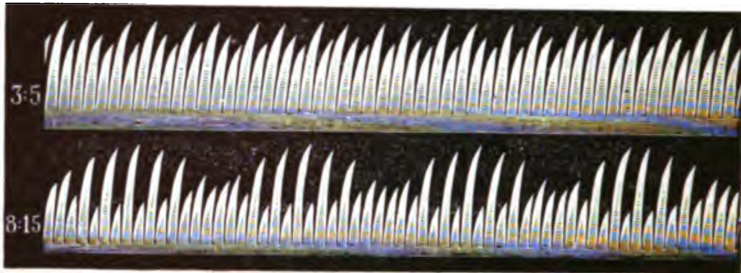
14) Es leuchtet weiter ein, wie man anstatt zweier Unisono oder nahezu Unisonopfeifen auch zwei Pfeifen nehmen kann, welche z. B. das Intervall einer



(Ph. 272.)

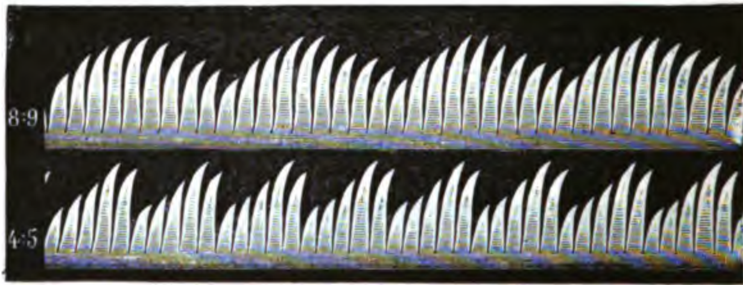
Octave, einer Quinte, Quarte u. s. w. mit einander bilden. Man bekommt dann bei Anwendung zweier Brenner zwei Flammenbilder über einander mit je so viel Zähnen, dass dem Verhältniss der Schwingungszahlen $m:n$ entsprochen wird. Lässt man dagegen beide Pfeifen auf nur einen Brenner wirken, so weicht das resultirende, nunmehr einzige Flammenbild wesentlich von je einem der Einzelbilder ab. Fig. 272 ist eine Copie nach einer Zeichnung Königs für zwei Töne im Verhältnis von 1:3. Die oberste und mittelste Reihe stellen die Flammenbilder der einzelnen Töne, die unterste dagegen das resultirende Flammenbild, wobei die beiden Töne auf denselben Brenner wirken, dar. Man erkennt den

Zusammenhang der Verhältnisse. Das resultirende Gebilde zeigt zusammengesetzte Zähne und hat jeder Hauptzahn von der Breite des Grundtons drei verschieden hohe Theilzähne. Fig. 273 zeigt die resultirenden Bilder für die Ver-



(Ph. 273.)

hältnisse 3:5 und 8:15. Ganz anders fallen die Bilder aus für Töne, welche im Verhältnis $n:(n+1)$ stehen, also z. B. für die Verhältnisse 4:5 oder 8:9, wofür die Fig. 274 gilt. Man überzeugt sich, dass zwar auch jetzt für jeden Hauptzahn

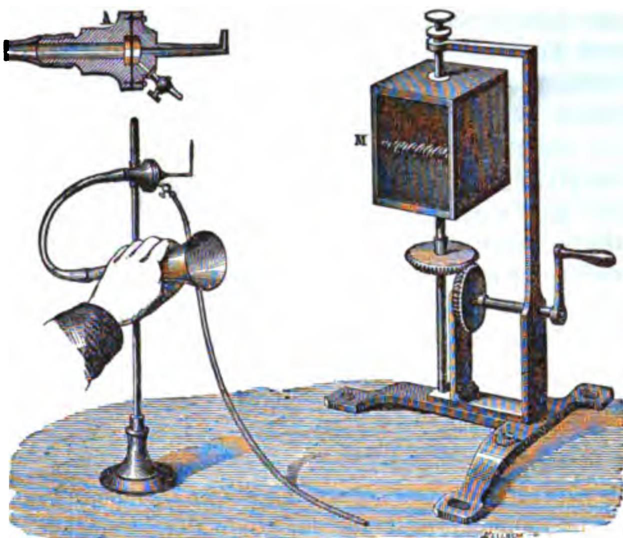


(Ph. 274.)

ebenso wie auch vorhin bei den Tönen 3:5 und 8:15 so viel Theilzähne vorhanden sind als die höhere Verhältniszahl angiebt, aber man erkennt, dass für jeden Hauptzahn nur einmal eine Zunahme und einmal eine Abnahme der Theilzähne stattfindet, während bei den Verhältnissen 3:5 und 8:15 wiederholte Ab- und Zunahmen auf der Länge eines Hauptzahns stattfinden.

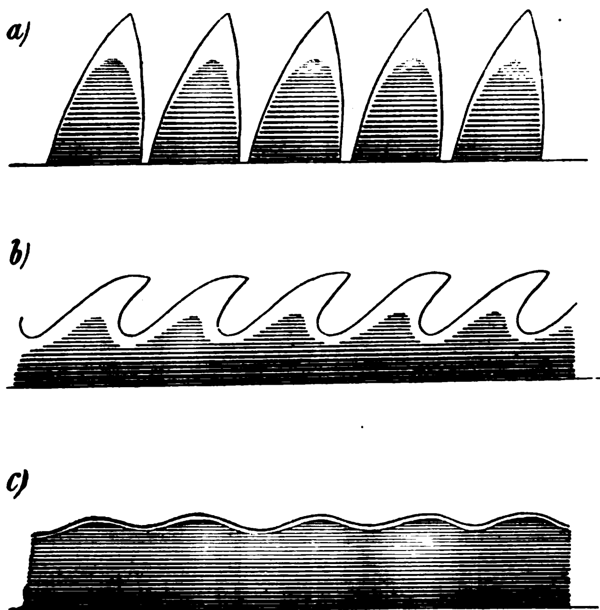
Während bis jetzt zwei einfache Töne zweier getrennt tönender Körper in Betracht kamen, können nun auch zusammengesetzte Töne eines und desselben klingenden Körpers, also die Klänge des letzteren untersucht werden. König hat insbesondere die Klänge der menschlichen Stimme untersucht und eignet sich hierzu namentlich die Einrichtung, wie sie durch die Fig. 275 versinnlicht wird. Die manometrische Kapsel ist zunächst an ein mit einem Loche durchsetztes Holzstück geschraubt, welches letztere gestattet, dass ein weiter Gummischlauch daran befestigt werden kann, der am andern Ende in einem eingesteckten Metallrohr endet, das bestimmt ist, vor den Mund oder einen andern tönenden Körper gehalten zu werden, um die Schallwellen auf die Membran der Kapsel in verstärktem Maasse wirken zu lassen. Die Gaszufuhr auf der anderen Seite der Membran geschieht durch das Gummirohr und kann durch ein Hähnchen regulirt werden. Indem man den Schallbecher vor den Mund hält und hinein singt, kann man die Klangbilder für die einzelnen Vokale in den verschiedensten Tonlagen verfolgen und erhält auf diese Weise sehr wesentliche Aufklärungen über die Verhältnisse.

Anstatt der Klänge des menschlichen Sprachorgans können aber auch vielfach andere Klänge, z. B. von Orgelpfeifen, Blasinstrumenten, schwingenden Stäben, Glocken und Scheiben untersucht werden. Vorzüglich lassen sich auch die Töne von grösseren Stimmgabeln untersuchen. Man befestigt hierbei am oberen Ende eines der Zinken eine dünne, kreisförmige Scheibe von Metall oder Pappe, damit vor ihr die Mündung des Schallbechers eingestellt werden kann, um so die Luft energischer in letzterem erschüttern zu können.



(Ph. 275.)

Es lassen sich in dieser Weise hierbei namentlich die Aenderungen der Flammenbilder bei abnehmender Tonintensität verfolgen und gebe ich in Fig. 276 drei Darstellungen von Flammenbildern, wie sie etwa der natürlichen Grösse entsprachen, als eine Stimmgabel mit Zinken von 26 *cm* Länge, 18 *mm* Breite und 11 *mm* Dicke verwendet wurde. Die Gabel gab das $c = 128$, wurde mit dem Violinbogen stark angestrichen und zeigte hierbei das Flammenbild *a*), während bei wesentlicher Abnahme der Tonintensität das Bild *b*) und bei ganz schwachem Ton das Bild *c*) resultirte. Vor allem zeigte es sich, dass die Gabel einen einfachen Ton lieferte, wenigstens waren die vom Ohre etwa noch wahrgenommenen hohen Obertöne der Gabel nicht im Stande, auf die Flamme einzuwirken.



(Ph. 276.)

Die Sirene eignet sich noch besonders dazu, die Combination von zwei Tönen zu untersuchen. König verfuhr in der Weise, dass er über der sich drehenden Lochscheibe eine kreisförmig gebogene Spalte, die in ein enges Röhrchen mündete, anbrachte, so dass von dieser aus mittelst eines Gummischlauchs die Erschütternngen auf die eine Seite der Membran übertragen wurden. Man

kann die Sache aber auch so einrichten, dass man den Windkessel **unterhalb** der Löcherscheiben mit einem Loche durchbohrt, ein Ansatzröhrchen aufkittet und dieses mittelst eines Gummischlauches mit dem Schallbecher verbindet, eine Methode, die wir hernach noch in anderer Beziehung in vorteilhafter Weise kennen lernen werden.

15) Es ist im Abschn. 11 schon hervorgehoben worden, dass man zwischen **longitudinal-** und **transversal-schwingenden** Flammen unterscheiden muss. Bei den vorausgehenden Darstellungen hatten wir es nur mit den ersteren zu thun. Sehen wir indess genauer zu, so muss die Sache, so weit wir sie bis jetzt verfolgt haben, noch anders aufgefasst werden. Denn die resulturende Erscheinung kam dadurch zu Stande, dass sich zur Bewegung der Flamme auch noch eine Bewegung des Spiegels hinzugesellte. Diese Bewegung war eine **Rotationsbewegung um eine vertikale Axe.** Aendern wir die Drehungsaxe, so ändern sich die resultirenden Erscheinungen mehr oder weniger bedeutend ab. Behalten wir die vertikale Drehungsaxe bei, so können wir sagen, dass sich zur longitudinal schwingenden Flamme eine **transversale** Bewegung hinzugesellt und dass die Sache schliesslich so kommt, als liessen wir den Spiegel ruhig stehen und bewegten in bestimmter Weise die longitudinal schwingende Flamme zugleich progressiv weiter. Wir können nun aber zu unserer Flamme, wie sie bisher war, eine ganz andere Bewegung des Spiegels hinzugesellen und besteht diese letztere in einer **Vibrationsbewegung.** Hiermit erzielte Erscheinungen sind zuerst von HENSEN im Jahre 1879 bekannt[1]) gemacht worden und verdienen hier besprochen zu werden. Es handelte sich hierbei um die Untersuchung der menschlichen Sprache und zwar unter Beihilfe einer manometrischen Flamme, wie wir sie bei der Fig. 275 beschrieben haben und weiter unter Beihilfe einer LISSAJOUS'schen Stimmgabel, die mit einem Spiegel versehen war und mit ihrer Axe horizontal eingeschraubt wurde so, dass der Spiegel falls die Zinkenebene auch horizontal gedacht wird, um eine **vertikale** Axe Schwingungen im Tempo der Gabelschwingungen ausführt.

Die Handhabung des Apparates ist klar. Man singt in den Schallbecher der Fig. 275 einen möglichst reinen Ton hinein, nachdem das ganze Stativ mit dem Brenner vor der betreffenden Stimmgabel aufgestellt ist, sodass man im



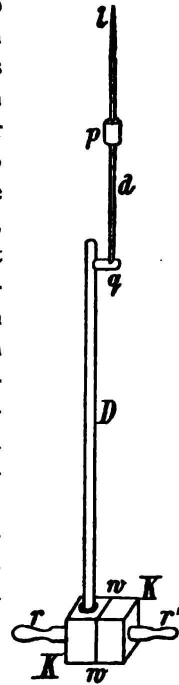
Octave *Duodecime* *Quinte* *Quarte.* *Gr. Terz*

(Ph. 277.)

ruhenden Spiegel der letzteren deutlich das Bild der Flamme sieht. Nun kommt es darauf an: in welchem Verhältniss der gesungene Ton zum Tone der Gabel steht. Man hat zunächst die einfachen Intervalle berücksichtigt und geben wir in Fig. 277 nach HENSEN fünf Darstellungen von den betreffenden Flammenbildern mit den Angaben des Verhältnisses $m:n$. Man erkennt das Gesetz, dass das resultirende Flammenbild so viele Spitzen der Flammen zeigt, als die höchste Zahl des Verhältnisses $m:n$ verlangt. Bei 3:2 haben wir demnach dieser Spitzen 3, bei 5:4 deren 5 u. s. w.

[1]) Archiv f. Anatom. u. Physiol. Physiol. Abtheil., pag. 155—158.

Ich habe nun gefunden, dass diese Erscheinungen in sehr vollendeter Weise mit Hilfe einer DOVE'schen Sirene und einer mit einem Spiegel versehenen schwingenden Lamelle dargestellt werden können. Die DOVE'sche Sirene vertritt dann das, was bei HENSEN die menschliche Stimme, und die Lamelle das, was die Stimmgabel ist. Als schwingende Lamelle nahm ich eine der Lamellen, wie sie in dem Apparate PFAUNDLER's zur Erzeugung der LISSAJOUS'schen Figuren zur Verwendung kamen, welcher Apparat schon am Schlusse des Abschn. 10 erwähnt wurde und in der 720. Figur der neusten Bearbeitung des MÜLLER-POUILLET'schen Lehrbuchs der Physik sich dargestellt findet. Die Sirene wird so benutzt, wie bereits am Schlusse des Abschn. 14 angedeutet wurde. Der Windkasten der Sirene erhält nämlich am Boden oder an der cylindrischen Seitenwand eine Durchbohrung von ca. 8 *mm* Durchmesser. An diese wird sodann ein Messingröhrchen gelöthet, um dieses und somit den Windkasten, ohne Benutzung eines Schallbechers (Fig. 275), direkt durch den Gummischlauch mit dem Luftraum der Manometerkapsel zu verbinden. Man öffnet nun die Lochreihe der Sirene mit 16 Löchern und setzt die Lamelle in Schwingungen. Der Ton der Sirene geht allmählich in die Höhe und hat man jetzt das interessante Schauspiel, dass das Fammenbild, welches im Spiegel der Lamelle erblickt wird, mit dem Höherwerden des Sirenentons fortwährend sich ändert und zu rotiren scheint, dass diese Aenderungen und Rotationen aber langsamer werden, wenn ein bestimmtes einfaches Verhältniss $m:n$ z. B. $3:1$ nahe erreicht ist und dass ferner im Momente, wo dieses genau erreicht ist, das betreffende Flammenbild momentan still steht, um hernach, wenn die Sirene mit der Erhöhung ihres Tones fortfährt, wieder zu changiren und jetzt eine Rotation im entgegengesetzten Sinne zu zeigen. Gelingt es, den Ton der Sirene bei einem bestimmten Verhältniss $m:n$ festzuhalten, so wird man dem entsprechend hinreichend lange eine constante Figur beobachten können. Dies wird aber noch besser gelingen, wenn man anstatt der Sirene wiederum eine Stimmgabel, mit Laufgewicht versehen, benutzt, die mittelst des letzteren zur Lamelle in ein bestimmtes Schwingungsverhältniss gesetzt werden kann. Die Stimmgabel muss nur entsprechend grosse Excursionen machen, um die Luft im Schallbecher, der jetzt wieder benutzt werden muss, hinreichend kräftig zu erschüttern. Dies gelingt aber, wie schon oben bemerkt, ohne Schwierigkeit, wenn am Ende eines Zinkens eine kreisrunde Metallscheibe vom Umfang der Mündung des Schallrohres befestigt wird.



(Ph. 278.)

16) Das »Transversale« bei den zuletzt beschriebenen Experimenten liegt nicht in der Flamme, sondern in der Spiegelbewegung. Es sind nun aber auch Einrichtungen möglich, wobei die Flamme selbst transversal schwingend gemacht wird. Vor allem ist es einleuchtend, dass man eine Flamme aus einem schwingenden Körper direkt herauskommen lassen kann, so dass, wenn dieser transversal schwingt, die Flamme gezwungen wird, diese Transversalschwingungen mitzumachen. Ich beschreibe zunächst einen von mir construirten Apparat, dem ich den Namen »Flammen-Kaleidophon« geben möchte. Fig. 278 stellt ihn dar. *K* ist ein hohler Messingwürfel von 35 *mm* Seitenlänge. Derselbe ist durch eine Querwand *w* in zwei Hälften geteilt und besteht die Querwand gerade in einer Membran, so dass das Ganze auch eine manometrische Kapsel ist. Auf der Deckelplatte der einen Hälfte von *K* wird nun eine

Metallröhre *D* von ca. 30 *cm* Länge, 3 *mm* äusserem und 2 *mm* innerem Durchmesser aufgeschraubt, so dass durch diese, wenn in die linke Kammer von *K* durch das Ansatzröhrchen *r* Gas zuströmt, dieses durchs Querröhrchen *q* in ein ganz feines Metallröhrchen *d* von ca. 0·9 *mm* äusserem und 0·5 *mm* innerem Durchmesser einströmen und aus diesem oben ausströmend eine Flamme *l* bilden kann. Will man die Töne auf die Flamme *l* wirken lassen, so wird mit einem zweiten Ansatzröhrchen *r'* der rechten Kammerhälfte ein Schlauch und wenn nöthig auch ein Schalltrichter verbunden. Das Messingkästchen *K* lässt sich mittelst einer Metallklemme an einer Tischplatte befestigen. Es leuchtet nun ein, dass der Apparat, von der manometrischen Kapsel *K* ganz abgesehen, als ein Flammen-Kaleidophon benutzt werden kann. Das ganze System $(D + q + d)$ kann nämlich zusammen und gleichzeitig *d* apart in Schwingung versetzt werden, wobei die Flamme *l* in einer Schwingungscurve herumgeführt wird, die im allgemeinen einer Combination zweier elliptischer Componenten entspricht, da ja die Röhre *D* wie auch *d* für sich elliptische Schwingungen machen. Eine Aenderung der Schwingungszahlen vom ganzen System gegenüber *d* lässt sich durch ein Schiebgewichtchen *p* erzielen. Ganz besonders schön sehen diese mannigfach gestalteten Curven in einem dunklen Zimmer aus, wenn man die Flamme *l* recht klein macht, sodass sie in ruhendem Zustande nur als kleines blaues Flämmchen brennt. Beim Schwingen erhält man dann die Curven in einem schönen blau leuchtenden Zuge.

Ich gehe hier auf solche Einrichtungen, wobei Flammen unmittelbar aus dem schwingenden Körper herausbrennen, nicht näher ein und wende mich zum Schlusse meiner Darstellung über vibroscopische Einrichtungen noch denjenigen Flammen zu, welche getrennt von dem schwingenden Körper seinen Schwingungen so folgen müssen, dass sie in transversale Schwingungen geraten.

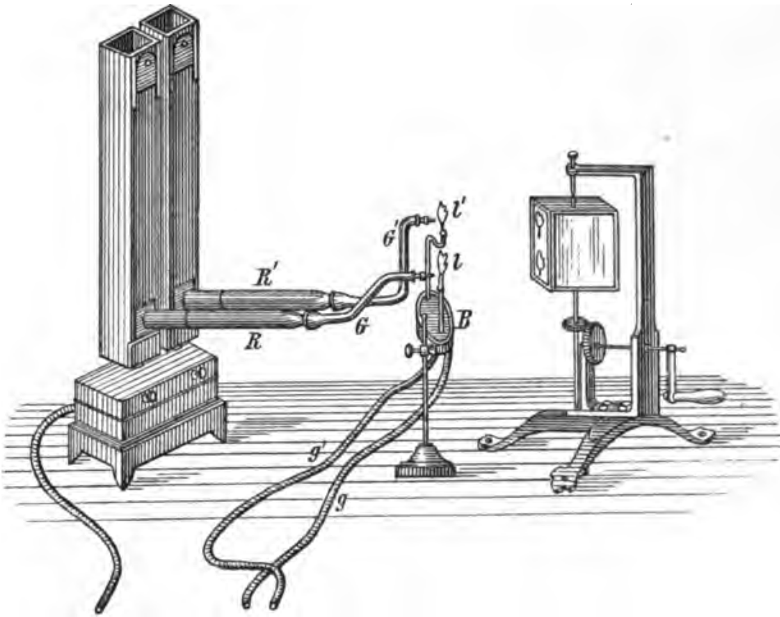
Im Jahre 1872 veröffentlichte[1]) Hervart eine Untersuchung »über transversal schwingende Flammen«, zu welchen bereits im J. 1870 Mach die Veranlassung gegeben hatte. Man erhält eine solche, wenn man eine schmale Gasflamme zunächst vor der Mündung einer horizontal liegenden Orgelpfeife etablirt. Die Luftstösse, die aus der Pfeife auf die Flamme treffen, versetzen diese unmittelbar in transversale Schwingungen. Auch im Innern einer Orgelpfeife lassen sich solche Flammen etabliren und gestatten auch hier verschiedene nützliche Verwendungen.

Im Jahre 1874 hat ferner J. Kohn Versuche beschrieben[2]), wobei Flammen verwendet wurden, die von ihm als »unmittelbare« manometrische Flammen bezeichnet werden. Es sind dies aber keine anderen als die, welche wir nach Hervart als transversal schwingende Flammen zu betrachten haben. Dennoch müssen wir die Einrichtung nach Kohn hier kennen lernen, da sie mehrfach eine sehr weitgehende Anwendung gestattet. Die Fig. 279 zeigt die Zusammenstellung zur Untersuchung zweier getrennt neben einander auf demselben Windkasten stehenden Orgelpfeifen. Vor dem Labium je einer dieser Pfeifen wird je eine Glasröhre *R* und *R'* aufgestellt, von deren Ende aus Gummischläuche *G* und *G'* weiter führen, die zuletzt in einem kurzen Röhrchen mit einer Oeffnung von ca. 1 *mm* Durchmesser münden. Die beiden Flammen *l* und *l'* kommen aus einer Brenneröffnung und können 6 bis 8 *cm* lang sein. Die Brennerröhren stecken in einem Bretchen *B B* und können durch die Gummischläuche *g* und *g'* ihren Gasstrom erhalten. Membranen sind demnach nicht verwendet und müssen die Flammen direkt als transversalschwingend angesehen werden. Der Vortheil

[1]) Pogg. Ann., Bd. 147, pag. 590—604.

[2]) Pogg. Ann., Bd. 150, pag. 321.

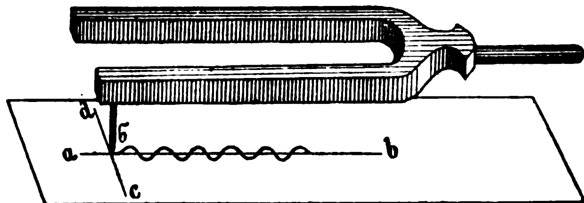
solcher Einrichtungen besteht darin, dass man grössere Flammen verwenden kann, welche sonst bei Verwendung einer Membran, wie wir sie bisher benutzten, nicht



(Ph. 279.)

leicht in die entsprechend starken Schwingungen gerathen. Es unterliegt keinem Zweifel, dass auch andere Klänge, z. B. des menschlichen Sprachorgans oder von Stimmgabeln, Scheiben u. s. w. mit diesen Flammen untersucht werden können Insbesondere werden auch die verschiedenartigsten Einwirkungen auf die Flamme selbst verfolgt werden können, denn man kann die Luftstösse bald mehr auf den oberen, bald mehr auf den unteren Theil der Flamme wirken lassen und wird hier bestimmte Verschiedenheiten der Flammenbilder im rotirenden Spiegel constatiren können.

17) Die vorausgehenden Abschnitte hatten den Zweck, eine Uebersicht über solche Einrichtungen und Apparate zu gewinnen, welche mit dem Namen »Vibroscope« oder wenn man will, »Phonoscope« bezeichnet werden können. Eine zweite Art solcher Einrichtungen bilden die »Vibrographen« bezw. »Phonographen«, und wollen wir auch hierfür eine Uebersicht gewinnen, die jedoch keineswegs den Anspruch erheben kann, eine vollständige zu sein, da die Summe der hier existirenden Einrichtungen auf dem Gebiete der Akustik, der Physiologie, der Astronomie und auch andern Wissenschaftszweigen sehr gross ist.



(Ph. 280.)

Die erste Idee, Tonschwingungen direkt aufschreiben zu lassen, sprach W. WEBER in dem Artikel »Akustik« des von G. SCHILLING herausgegebenen »Universallexikons der Tonkunst« aus. Denn unter den verschiedenen Methoden die absolute Tonhöhe zu bestimmen, führt WEBER auch folgende an: Man befestige an dem Ende eines Zinkens einer Stimmgabel einen feinen Stift σ (Fig. 280) senkrecht

zur Schwingungsebene derselben, versetze die Gabel in Schwingung und führe sie so über eine ebene Unterlage hin, dass die Spitze hierbei einen auf der Unterlage gleichmässig aufgetragenen Ueberzug wegkratzt und somit eine bleibende Figur erzeugt, deren Form offenbar von der Bewegung der Hand und der Anzahl der Schwingungen abhängt. Wird die Gabel in der Richtung *ab* verschoben, so ist einleuchtend, wie der Stift *σ* eine zickzackartige Curve beschreibt, deren Zacken wir nur zu zählen brauchen, um sofort mit Rücksicht auf die Zeit der progressiven Bewegung die absolute Zahl der Schwingungen zu erhalten.

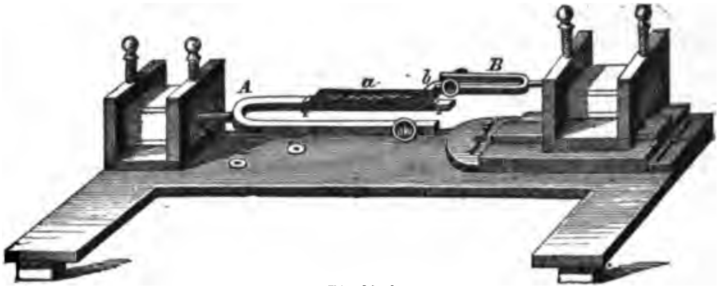
Diese Idee liegt einer Reihe höchst werthvoller Einrichtungen zu Grunde, die wir ebenfalls König verdanken und denen wir sofort Aufmersamkeit schenken wollen. Der Grundgedanke ist hierbei der einer Combination einer Vibrationsbewegung und einer Progressivbewegung, wobei es principiell gleichgültig ist, ob man den vibrirenden Körper in seiner Anfangsstellung belässt und unter oder vor ihm die berusste Platte, worauf die Schwingungen aufgeschrieben werden sollen, progressiv fortschiebt, oder, ob man die Platte festliegend denkt und über ihr den vibrirenden Körper mit dem Schreibstift parallel mit sich selbst verschiebt. Die Progressivverschiebung der Schreibtafel bezw. die des schwingenden Körpers, insbesondere einer Stimmgabel, kann in der mannigfachsten Weise abgeändert werden. Zunächst kann sie mit gleichförmiger oder ungleichförmiger Geschwindigkeit vor sich gehen. Das letztere wird mehr oder weniger immer eintreten, falls nicht ein bestimmter Mechanismus zu Hilfe kommt, der eben geeignet ist, eine gleichförmige Bewegung zu erzielen. Dieser Mechanismus besteht dann stets in einem Uhrwerk, das durch ein Gewicht oder eine Feder in gleichmässigem Gang erhalten wird und eine entsprechende Verbindung mit der zu verschiebenden Platte, bezw. des zu verschiebenden schwingenden Körpers gestattet. Ferner leuchtet ein, dass auch die Richtung, in welcher die Schreibtafel dem schwingenden Körper gegenüber verschoben wird, verschieden sein kann. Denn denken wir z. B. in Fig. 23 die Schreibtafel anstatt in der Richtung von *b* nach *a*, d. h. senkrecht zu der Schwingungsbewegung des Schreibstiftes *σ*, in der Richtung von *c* nach *d*, d. h. parallel der Schwingungsbewegung des Schreibstiftes *σ* verschoben, so wird die Figur auf der Tafel eine gänzlich andere werden. In letzterem Falle bekommen wir nämlich gar keine Wellencurve sondern eigentlich nur eine Gerade. Wie diese Gerade sich umwandelt wenn die Schwingungsrichtung des Stiftes *σ* nur sehr wenig von der Richtung *cd* abweicht, möge der Leser einer näheren Betrachtung unterziehen.

Einen weiteren sehr wesentlichen Einfluss wird die Schnelligkeit der Progressivbewegung ausüben und treten hier ganz ähnliche Veränderungen ein, wie wir sie bei den Flammenzähnen des Flammen-Vibroscops kennen gelernt haben. In dem Maasse nämlich, wie die Progressivbewegung rascher wird, nimmt die Zahl der Wellen, die auf eine bestimmte Strecke der Schreibtafel geht, ab. Die Wellenlängen der Wellencurven werden daher grösser.

Nun leuchtet weiter ein, dass die Schreibtafel unter dem Schreibstift auch noch anders bewegt werden kann. Es lässt sich z. B. leicht einrichten, dass die Tafel um eine verticale Axe rotirt und dass somit der ruhende Stift eine Kreislinie auf die erstere eingräbt. Die bewegte Gabel wird dann, wenn ihre Schwingungsrichtung nach dem Drehungscentrum der Scheibe verläuft, eine concentrische Wellencurve beschreiben. Es kann ferner die Schreibtafel auch auf einem schwingenden Körper, z. B. auf einer zweiten Gabel befestigt werden, so dass sie an einem der Zinken in einer zur Zinkenebene parallelen Lage befestigt wird und beim Schwingen der Gabel hin- und herschwingt. Es werden durch

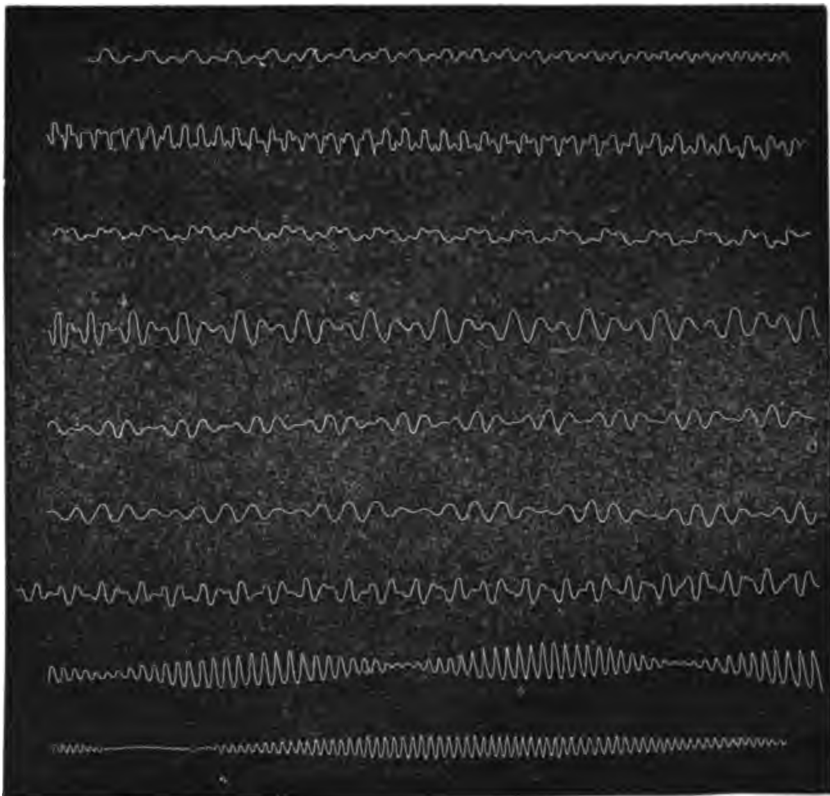
eine solche Zusammenstellung sehr interessante Wellencurven zu Stande gebracht und möge im folgenden Abschnitt sogleich ein von König construirter Stimmgabel-Vibrograph mit seinen Anwendungen betrachtet werden.

18) Auf einer passenden Unterlage (Fig. 281) am besten von Eisen construirt, ist rechts eine Platte aufgeschraubt, die auf ihrer oberen Seite in einem rectangulären Stücke endet, das als Führungsstück für einen rahmenartigen Schieber dient, in welch' letzterem ein Klotz mittelst einer Schraube befestigt werden kann, um in ihm eine Gabel B einzuschrauben. Ein zweiter solcher rahmenartiger Theil befindet sich am linken Ende befestigt und gestattet einen zweiten Klotz zu befestigen, in welchen die Stimmgabel A eingeschraubt wird. Sie liegt etwas tiefer wie B und trägt an einem Zinken die Schreibtafel, am andern ein passendes Gegengewicht. Das Schreibstiftchen sitzt an einem der Zinken von B und kann in einer Borste oder in einem Drähtchen bestehen.



(Ph. 281.)

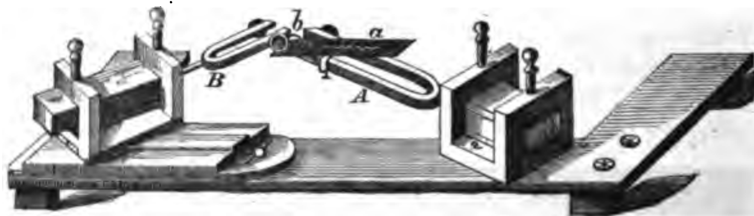
Denken wir die Gabel A in Ruhe, so kann B durch Verschiebung eine Schlittenbewegung erhalten. Der Schreibstift b gräbt dann, wenn B schwingt,


(Ph. 282.)

auf *a* eine einfache Wellenlinie ein als einfachste Figur, die überhaupt bei vibrographischen Darstellungen erhalten werden kann. Aber so einfach wie sie ist, so bedeutungsvoll wird sie bei der genauen Bestimmung der absoluten Zahl der Schwingungen für eine Gabel *B*. Wir werden hernach diese Sache noch näher betrachten.

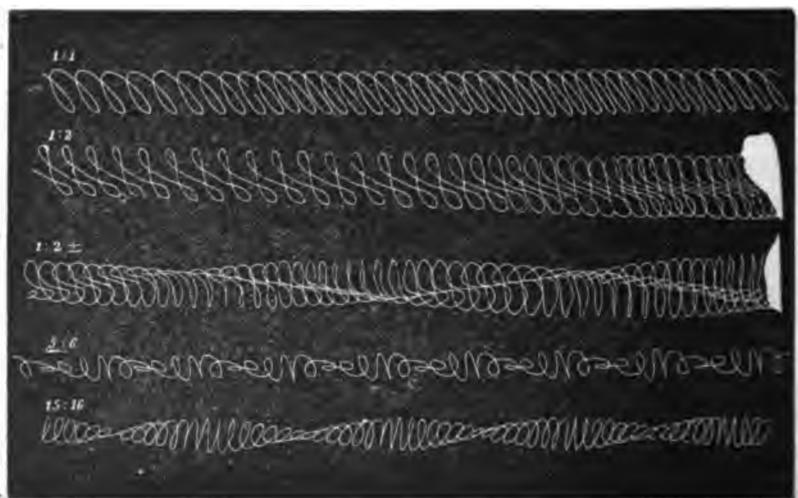
Lassen wir nun auch die Gabel *A* schwingen und bewegen die Gabel *B*, während auch sie schwingt progressiv, so erhalten wir auf der Schreibtafel eine »zusammengesetzte« Wellenlinie, die ihrem weiteren Aussehen nach vor allem von dem Verhältniss $m:n$ abhängt. Fig. 282 giebt für 9 Tonintervalle die betreffenden Schwingungscurven und lassen sich aus ihnen verschiedene Gesetzmässigkeiten erkennen, die ganz analog sind denen, die wir in Abschn. 14 bei den zusammengesetzten Flammenbildern betrachteten. Besonders interessant sind die Curven der Verhältnisse 24:25 und 80:81. Diese gehören zwei Tönen an, welche nahe im Einklang sind und demgemäss das Phänomen der Schwebungen zeigen. Die Zunahme und Abnahme der Intensität des resultirenden Tons giebt sich auch in der graphischen Darstellung sehr schön zu erkennen.

Fig. 283 zeigt den König'schen Apparat unter der Voraussetzung, dass die Schwingungsrichtungen der Gabel nicht parallel, sondern gekreuzt vorhanden



(Ph. 283.)

sein sollen, also namentlich so, dass diese Richtungen unter 90° zusammenwirken. Zu dem Ende muss jede der Gabeln auf der Unterlage *P* eine Drehung von 45° bekommen, was mechanisch leicht zu erreichen ist. Lässt man keine Progressivverschiebung der Gabel *B* zu, aber jede der Gabeln schwingen, so erhält man auf der Schreibtafel keine Wellenlinie, sondern offenbar eine Lissajous'sche Curve gemäss der Zusammenwirkung zweier rechtwinkligen Vibrationscomponenten.

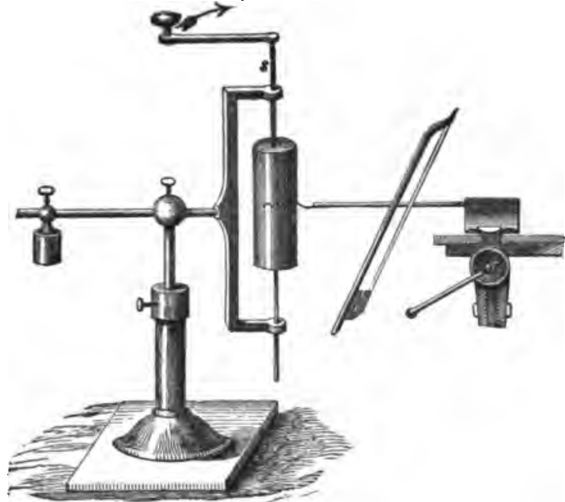


(Ph. 284).

Unsere Curven, wie wir sie nach LISSAJOUS mittelst der Stimmgabel-Einrichtungen oder mit meinem Universalkaleidophon darstellten, können demnach auch in vibrographischer Manier erhalten werden.

Nun kann aber bei der »gekreuzten« Stellung der Gabeln auch noch eine Progressivbewegung der Gabel *B* hinzukommen. Man erhält sodann eigenthümliche Wellencurven, von denen einige in Fig. 284 dargestellt sind. Bei einem der Einheit sich nähernden Verhältniss wie das von 15 : 16 giebt sich das Phänomen der Schwebungen ebenfalls deutlich zu erkennen.

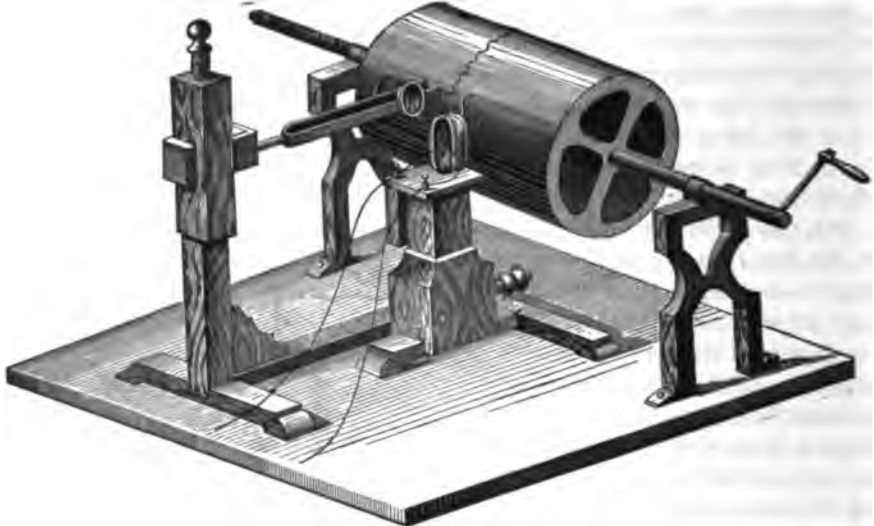
19) Eine wesentliche Aenderung bei der vibrographischen Einrichtung verdanken wir DUHAMEL und entstand dessen Vibrograph bereits im Jahre 1856. Die Fig. 285 stellt ihn dar. In einem gabelförmigen, metallenen Theile lässt sich die Axe *s* eines gläsernen Cylinders drehen, welcher auf seiner Oberfläche berusst ist. Vor diesem Cylinder ist in passender, solider Lage der schwingende Körper, z. B. ein an einem Ende eingeklemmter Stab, der in einer Vertikalebene seine Schwingungen ausführt, eingestellt. Derselbe trägt am freien Ende ein Federchen, um seine Schwingungen in den Russ des Cylinders einzugraben. Da nun nach einem Umgange des Cylinders die Aufzeichnungen des weiter fortschwingenden Körpers sich über die bereits schon gemachten Aufzeichnungen hinlagern und somit Verwirrungen eintreten würden, so gebrauchte DUHAMEL einen sinnreichen Kunstgriff, indem er die Drehungsaxe des Cylinders zugleich in Gestalt einer Schraube verwendete. Beim Drehen muss demgemäss der Cylinder nun auch eine Progressivbewegung machen; die Wellencurven liegen für die einzelnen Umgänge des Cylinders aber nicht auf- sondern nebeneinander und bilden nunmehr in ihrer Gesammtheit einen schraubenförmigen Zug. Hiermit ist ein grosser Vortheil verbunden. Denn vor allem ist jetzt die Strecke, auf welche hin eine Aufzeichnung erfolgen kann, eine viel längere. Ein Cylinder von nur 10 *cm* Durchmesser hat einen Umfang von ca. 32 *cm*. Gestattet nun die Schraubenaxe und die Länge des Cylinders, dass man 20 mal den letzteren umdrehen kann, so wird die Aufzeichnung der Wellencurve eine Länge von 20 · 32 *cm* einnehmen. Wollte man eine solche Progressivverschiebung, wie wir sie seither kennen lernten, durch eine Schlitteneinrichtung erreichen, so würde dies keine leichte Sache sein. Diese grössere Länge der Progressivbewegungen wird namentlich auch vortheilhaft wirken bei der Bestimmung der absoluten Zahl der Schwingungen.



(Ph. 285.)

KÖNIG gab dem DUHAMEL'schen Vibrographen eine solidere Form und sehen wir diesen interessanten Apparat insbesondere auch mit einem wesentlichen Hilfsapparate in Fig. 286 dargestellt. Auf einem soliden Holzbrett sind zunächst zwei Metallständer aufgeschraubt, welche zugleich das Lager für die Schraubenaxe des Cylinders bilden. Dieser Cylinder hat einen Durchmesser von ca.

15 *cm* bei einer Länge von ca. 20 *cm* und ist aus Messing gearbeitet. Seiner Grösse entsprechend pflegt man ihn auch die »Schreibtrommel« zu nennen und muss dieselbe sehr sorgfältig gearbeitet sein. Vor ihm wird nun



(Ph. 286.)

z. B. eine Stimmgabel aufgestellt, deren Stiel in einem Holzklotze befestigt wird, der seinerseits wieder durch eine Schraube in einem Holzständer befestigt werden muss. Beide Zinken der Gabel sind mit Laufgewichten versehen, während der eine Zinken ein Schreibfederchen trägt. Die Drehung der Schreibtrommel geschieht durch eine Kurbel. Die Berussung wird nicht auf dem Cylinder unmittelbar vorgenommen, sondern es erhält dieser erst eine Umkleidung von einem glatten Papiermantel, der in der Weise hergestellt wird, dass man einen vorher feucht gemachten Papierbogen um den Metallcylinder ohne jede Falte herumlegt und das übergreifende Ende des Papierbogens mittelst Leim festklebt. Sodann wird, während der Bogen noch feucht ist, unter dem einen Ende des Cylinders eine stark russende, möglichst wenig heisse Petroleumflamme etablirt, von welcher aus der Rauch um den Cylinder herumschlägt und hier, falls der letztere umgedreht wird, eine möglichst gleichmässige Berussung auf der ganzen Länge erzielt.

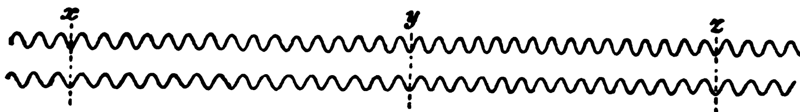
Der Hilfsapparat besteht in einer Drahtspirale, welche einen kurzen hohlen Eisencylinder umhüllt. Wird durch diese Drahtspirale ein elektrischer Strom geleitet, der von einem elektrischen Element durch einen Draht ankommt und zurückläuft, so wird der Eisencylinder zu einem Magneten. In diesem Zustande zieht er ein Eisenankerchen in seine Höhlung hinein, welches Ankerchen an einem Ende eines um eine horizontale Axe drehbaren Winkelhebels angebracht ist. Hört der Strom auf, so drückt eine gegen den Hebel wirkende Feder das Eisenankerchen wieder nach aussen zurück. Das Schliessen und Oeffnen des Stroms kann durch irgend einen Stromschlüssel in beliebigem Tempo vorgenommen werden. Soll es jedoch in regelmässigem Tempo geschehen, so muss noch ein weiterer Hilfsapparat hinzukommen, bestehend in einem Pendelapparat, welcher vielleicht so eingerichtet ist, dass innerhalb eines Hin- und Hergangs des Pendels ein Stromschluss und eine Stromöffnung erfolgt. Wird demgemäss ein halbes Sekunden-Pendel benutzt, so erfolgt in jeder Sekunde ein

den Aufzeichnungen des Stiftes der Gabel auch seine Eindrücke in den Russ machen. Man pflegt diese Eindrücke in der Vibrographie »Marken« und speciell der Annahme unseres Pendels entsprechend »Sekundenmarken« zu nennen. Die Form, in welcher diese Marken auf der Schreibtrommel erscheinen, hängt von der Einrichtung des Stromunterbrechers, also des Pendels, ab. Dieser Stromschluss lässt sich mechanisch in sehr verschiedener Weise herstellen, jedenfalls aber muss hierbei, während der Bewegung des Pendels, die sonst unterbrochene Stromleitung hergestellt werden. Nun kommt es auf die Dauer dieses Stromschlusses an. Ist diese eine sehr kurze, so wird der Marken-Schreibstift ebenfalls nur sehr kurze Zeit im Contakt mit der Trommel verbleiben, d. h. die Sekundenmarken werden nur als ganz kurze Striche im Russ erscheinen. Dauert der Stromschluss länger, so werden auch die Markenstriche länger. Wie dem nun sei, lässt man von jedem solchen Markenstrich nur je seinen Anfang gelten, so ist dieser als ein Punkt aufzufassen, und zwei solche Anfangspunkte liegen zeitlich genau um eine Sekunde auseinander. Erfolgt die Umdrehung der Trommel mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so liegen die Sekundenmarken graphisch ebenfalls um gleiche Strecken auseinander. Ist ersteres nicht der Fall, so sind auch die Sekundenstrecken der graphischen Darstellung nicht gleich. Dennoch aber wird auch jetzt die Verwendung dieser Darstellung, wie wir sogleich sehen werden, in den meisten Fällen nicht beeinträchtigt.

20) Unsere Fig. 286 zeigt nun auch eine Anwendung der vibrographischen Methode zur Bestimmung der absoluten Zahl der Schwingungen einer Gabel. Hierzu ist nöthig, dass eine Gabel ihre Schwingungen durch einen Stift aufschreibt, während daneben ein anderer Stift seine Sekundenmarken eingräbt. Hat die Aufschrift entsprechend lange gedauert, so hält man mit der Drehung der Trommel ein und nimmt das berusste Papier von ihr ab. Es geschieht dies dadurch, dass man ein Federmesser, mit der Schneide nach aussen gehalten, zwischen der Metalltrommel und dem Papier einführt und in möglichst scharfem Längsschnitt den Mantel des Papiers trennt, sodass letzteres, wenn es auf einer Ebene ausgebreitet wird, ein Rectangel bildet, das an den Ecken mit vier Zeichenstiftchen auf der Tischplatte befestigt werden kann. Nun zählt man die Wellen, welche auf je eine Sekundenstrecke gehen, und ist hiermit die Aufgabe direkt gelöst. Die Zahl der auf eine Sekundenstrecke gehenden Wellen ist unabhängig von der Umdrehungsgeschwindigkeit der Trommel. Denn dreht man die Trommel schneller oder langsamer, so werden die Sekundenstrecken länger oder kürzer, aber die Länge der Wellen, die vom Stimmgabel-Stift aufgeschrieben werden, fallen im selben Maasse, wie die Drehungsgeschwindigkeit der Trommel in jedem Momente zu- oder abnimmt, auch länger oder kürzer aus, wodurch die bezeichnete Unabhängigkeit der Schwingungszahl n garantirt ist.

Wenn man zwei Stimmgabeln, welche nahe Unisono-Gabeln sind, ihre Schwingungen nebeneinander aufschreiben lässt, so kann die Anzahl der Schwingungen einer jeden Gabel auch ohne den Sekunden-Schreibapparat, also ohne die Sekundenmarken bestimmt werden. Diese Methode ist dann folgende. Man bestimmt nach einer Sekunden- oder Halbsekundenuhr oder besser nach einer Arretierungsuhr, welche $\frac{1}{5}$ Sekunden zeigt, und bei welcher also das Zifferblatt für die Zeit einer Minute in 300 Theile getheilt ist, die Anzahl der Schwebungen, welche auf eine bestimmte Zeit gehen. Man findet so z. B., dass 52 Schwebungen auf 13 Sekunden, also 4 Schwebungen auf 1 Sekunde gehen. Sodann lässt man, ohne irgend einen Zeitmesser zu benutzen, die Gabeln neben-

einander ihre Schwingungen aufschreiben, etwa so lange, dass drei Schwebungen auf die Zeit des Aufschreibens gehen. Dann wird eine Aufzeichnung wie die der Fig. 287 zum Vorschein kommen, wobei z. B. die Wellenzüge bei x, y, z je



(Fig. 287.)

einem möglichst vollständigen Zusammenfall von Thal und Thal entsprechen, d. h. dem Momente der Mitte einer Schwebung. Zählt man nun von x nach y, ebenso von y nach z die Anzahl der vollständigen Wellen, so kommen 16 Wellen des oberen auf 15 Wellen des unteren Wellenzugs. Diese Thatsache in Verbindung mit der, dass in der Sekunde 4 Schwebungen erfolgen, genügt, um die Schwingungszahlen der beiden Gabeln zu bestimmen. Denn da in 1 Sekunde 4 Schwebungen erfolgen und nach der graphischen Darstellung auf 1 Schwebung 16 bezw. 15 Schwingungen kommen, so kommen auf die Sekunde $4 \cdot 16 = 64$ bezw. $4 \cdot 15 = 60$ ganze Schwingungen, womit $n = 64$ und $n' = 60$ gefunden ist.

Es bedarf kaum eines Hinweises darauf, dass anstatt einer Stimmgabel auch ein anderer schwingender Körper eingestellt werden kann. Vollführt er einfache Schwingungen, so ist die graphische Figur eine einfache Wellenlinie. Sind seine Schwingungen aber zusammengesetzter Natur, so bekommt man auch zusammengesetzte Wellencurven, ganz so, wie wir sie von zwei Stimmgabeln beim Apparate der Fig. 283 erhielten.

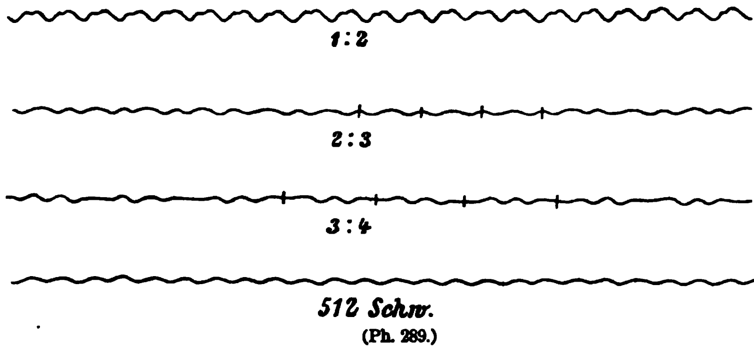
21) Im Jahre 1859 führte SCOTT einen neuen Apparat ein, der als ein »Membran-Phonograph« aufgefasst werden muss, und dessen Anwendung namentlich bei der Untersuchung der Klangfarben der menschlichen Sprachvokale, ferner bei tönenden Luftsäulen, sowie überhaupt bei allen Blasinstrumenten in Betracht kommen kann. Die Seele des ganzen Apparates bildet ebenso wie beim Phonoscop der Fig. 275 eine Membran, die ja, wie wir wissen, auf alle auf sie



(Fig. 288.)

hingeleiteten Schallwellen reagirt und nicht nur bei einfachen, sondern auch bei zusammengesetzten Tönen sich den Eigenthümlichkeiten der letzteren anschliesst. Diese Membran war bei SCOTT über das eine offene Ende eines aus Metall construirten Ellipsoids gespannt, während durch das andere offene Ende des Ellipsoids die Schallwellen eindrangen. Mit der Membran ist ein Schreibstift verbunden, der ebenso wie beim Stimmgabel-Vibrographen auf eine rotirende Trommel aufschreibt. KÖNIG ersetzte das Ellipsoid durch ein Paraboloid und ist dessen »Membran-Phonograph« in Fig. 288 dargestellt. Die Membran ist hierbei senkrecht zur Axe des Paraboloids durch dessen Brennpunkt gelegt zu denken. Es werden daher die Schallwellen, welche parallel zur Axe in das Paraboloid eintreten, durch Reflexion an dessen Wand nach der Brennebene, der Membran, concentrirt und bewirken so eine möglichst starke Erschütterung der letzteren.

So einfach nun der Zusammenhang zu sein scheint, so zeigt doch eine nähere Betrachtung, dass man es hier mit recht verwickelten Erscheinungen zu thun hat. Die Membranen, welche KÖNIG bei seinem Phonographen verwendete, hatten einen Durchmesser von ca. 5 *cm*. Eine solche Membran wird mehrere Eigentöne besitzen, für welche auch die Lage der Knotenlinien verschieden ist. Kommt nun das Schreibfederchen an eine Stelle der Membran, durch welche bei einem hineingesungenen Tone eine Knotenlinie läuft, so leuchtet ein, wie gerade für diesen Ton die Tonschrift vielleicht mangelhaft wird. Soll dies nicht der Fall werden,

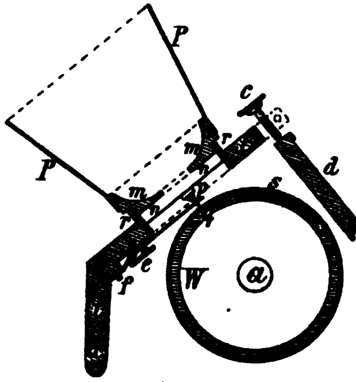


(Ph. 289.)

so müsste die Membran etwas anders gespannt werden, was sich ja auch auf verschiedene Weise erreichen lässt. Dann würde aber vielleicht ein anderer Ton wieder beeinträchtigt. Ferner leuchtet ein, dass bei unserem jetzigen Phonographen das Schreibfederchen nur solche Bewegungscomponenten auf die Schreibtrommel übertragen kann, die parallel zur Axe der Schreibtrommel oder wenigstens nahezu parallel hiermit gerichtet sind. Da aber die Membran eine Bewegung macht, bei der sie sich der Hauptsache nach senkrecht zur Axe der Schreibtrommel bewegt, so leuchtet ein, dass die Hauptcomponente der Membranbewegung in der Aufschrift des Federchens gar nicht zur Geltung kommen kann. Wie dem nun auch sei, unter gewissen Bedingungen wird der Apparat das liefern, was man verlangt. Dächten wir z. B. einen Klang mit dem Tonverhältniss 1 : 2 und man fände, dass das Schreibfederchen deutliche Wellenzüge liefert, wenn jeder der Töne einzeln auf die Membran wirkt, so wird, falls es die Intensität der beiden Töne des Klanges gestattet, auch der letztere in seiner resultirenden Wirkung eine zusammengesetzte Wellenlinie liefern, welche die zwei Componenten erkennen lässt. So erhielt KÖNIG für die Verhältnisse 1 : 2, 2 : 3 und 3 : 4 je die drei oberen Curven der Fig. 289, während die unterste von einer Gabel herführt, welche 512 Doppelschwingungen lieferte.

Auch DONDERS[1]) hat der Anwendung des Membranphonographen KÖNIG's, insbesondere bei seiner Untersuchung der Klangfarbe der Vokale, Aufmerksamkeit geschenkt und hat graphische Darstellungen erhalten, denen er volles Vertrauen schenkte.

22) Einer der merkwürdigsten Apparate, die je erdacht worden sind, muss im Anschluss an den Membran-Phonographen SCOTT's betrachtet werden, nämlich der »Phonograph« von EDISON, dessen erstes weiteres Bekanntwerden in das Jahr 1877 fällt und der in unseren Tagen in einer verbesserten Form von neuem das höchste Interesse in Anspruch nimmt. Wir geben in der Fig. 290 einen Durchschnitt des älteren Apparats, insbesondere nach der Einrichtung, wie sie PFAUNDLER in der neusten Auflage der MÜLLER-POUILLET'schen Physik, pag. 865, Bd. I, beschreibt. *W* stellt eine Messingwalze vor von ca. 15 *cm* Durchmesser und Länge. Dieselbe wird mittelst einer Kurbel ebenso wie die Trommel des SCOTT'schen Phonographen gedreht. Ferner bildet die Axe *a* auch gerade so wie beim letzteren Apparate eine Schraube.



(Ph. 290.)

Diese Schraube hat eine Ganghöhe von ca. 1·8 *mm*. Genau mit derselben Ganghöhe ist in die Walze *W* eine Schraube eingedreht, deren Tiefe 1·0 *mm* beträgt. Soweit hat der Mechanismus nichts Complicirtes aufzuweisen, nur müssen die Schraubengänge der Axe und der Walze sehr egal gearbeitet sein; ferner muss die Progressivverschiebung der letzteren ohne jedes Schlottern erfolgen. Vor der Walze ist weiter ein Metallstück *t* auf dem Untergestelle des ganzen Apparats so befestigt, dass es sich um eine zur Walzenaxe parallele Axe *x* drehen kann. Die Drehung wird so ermöglicht, dass der untere Theil von *t* bei *x* zwischen zwei Schraubenspitzen gefasst wird. Durch Lösen der einen und Anziehen der anderen Schraubenspitze kann der Theil *t* ein wenig parallel der Axe der Walze verschoben werden. Die Stellschraube *c*, welche auf dem Metalltheil *d* aufsitzt, bewirkt mit ihrer Verstellung, dass der Theil *t* um ein weniges um die Axe *x* gedreht werden kann. Hierbei wird offenbar der Stift *q* der Walze mehr genähert oder mehr von ihr entfernt werden können.

Der Theil *m* ist ebenfalls ein Metalltheil, der am besten eine parabolische Aushöhlung bekommt. Man nennt diesen Theil das »Mundstück«. Derselbe ist nach der Walze hin mit einer centralen Oeffnung versehen; ferner ist *r* ein kurzes cylindrisches Zwischenstück, welches das Mundstück *m* mit dem Metall von *t* verbindet. Ueber *r* nach der Walze hin ist nun der wesentlichste Theil des Apparats, nämlich die Membran *n*, bestehend in einer ganz dünnen Metall- oder Glimmerplatte oder auch wohl einer thierischen Membran gelegt bezw. gespannt, auf welche zunächst eine Spitze *p* central aufgekittet ist. Diese Spitze wirkt dann auf eine Stahlfeder *f*, welche durch die Schraube *e* mehr oder weniger lose gegen den Stift angedrückt werden kann. Das freie Ende von *f* trägt dann den schon erwähnten Schreibstift *q*.

Für die weitere Benutzung des Apparates zu einem Versuche muss nun die Walze noch mit einem Stanniolblatt von ca. 0·05 *mm* Dicke regelmässig umhüllt werden, so dass man von den Schraubengängen der Walze nichts mehr sieht.

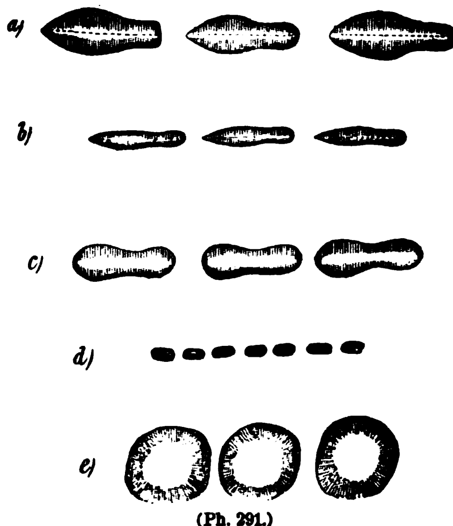
[1] POGG. Ann., Bd. 123, pag. 527. 1864.

Das Festmachen des freien Endes des Stanniols, das etwa 1 *cm* länger genommen wird, als der Umfang der Walze ist, kann mit concentrirtem Schellackfirnis geschehen. Nunmehr muss mittelst der Schraubenspitzen *q* und der Stellschraube *c* der ganze Arm *t* mit dem Mundstück und der Membran so eingestellt werden, dass die Spitze *q* über eine vom Stanniol verdeckte Vertiefung eines Schraubenganges kommt und noch ein klein wenig sich in das Stanniol hin eindrückt. Der Apparat ist dann zum Versuche fertig. Indem wir uns den Schalltrichter *P* zunächst wegdenken, kann man nämlich, während die Walze umgedreht wird, laut und deutlich in das Mundstück *m* hineinsprechen oder -singen. Die Membran schwingt; sie bewegt den Stift *q* und dieser gräbt seine Bewegungen in das Stanniol ein und, wunderbar genug, diese hernach auch durch das blosse Auge wahrnehmbaren Eindrücke, sie sind die verkörperten Sprachlaute nach Qualität und Quantität. Das letztere kann leicht erwartet werden, indem ja sicher die Zahl der Schwingungen von dem Schreibstift wiedergegeben wird. Dass aber der Stift auch dem Quale der Tonschwingungen bis in die feinsten Einzelheiten hinein folgt, dass er Vokale und Consonanten aufschreibt, dass er jede Verschiedenheit eines Sprachlautes, eines Gesangstones in das Stanniol hineingräbt, das konnte man nicht erwarten und gerade dieses Uebertreffen aller unserer Erwartungen macht den Edison'schen Apparat zu einem der wunderbarsten, den je der menschliche Geist ersann.

Der Beweis für dieses Vorhandensein der Tonschrift bis in die feinsten Einzelheiten hinein, er wird erbracht durch die Einleitung der umgekehrten Folge der Wirkungen. Zu dem Ende hebt man zunächst das Mundstück von der Trommel ein wenig weg, damit der Stift von der Walze ablässt, und dreht letztere in ihre Anfangslage zurück. Sodann legt man das Mundstück mit dem Stifte wieder genau wie beim Hineinsingen an, steckt vorher auf dasselbe den Schalltrichter *P* und dreht nunmehr die Walze wieder um. Der geforderte Beweis wird sofort in wunderbarer Weise erbracht. Denn aus dem Schalltrichter redet der Phonograph zu uns und selbst in einem grossen Raume können alle Zuhörer die Laute, die Töne, die hineingesungen wurden, wieder reproducirt erhalten. Der Zusammenhang ist nunmehr aber klar: Die Eindrücke, welche der Stift beim Hineinsingen und Hineinsprechen ins Stanniol eingrub, sie sind mannigfach gestaltet und dem Quale wie dem Quantum der Tonwellen entsprechend. Wird nun die Walze mit der in dem Stanniol verkörperten starren Reihe der Eindrücke zum zweiten Mal unter dem Stift hin bewegt, so geräth der Stift in eine der Reihe der Eindrücke entsprechende Viberationsbewegung, diese Bewegung überträgt sich rückwärts durch *q* auf die Membran, diese theilt ihre Schwingungen der Luft im Schalltrichter *P* mit und von hier gelangen sie rückwärts in den äusseren freien Luftraum und ins Ohr des Beobachters. Die reciproke Bewegung hat sich vollzogen.

Der Beweis für das Vorhandensein der merkwürdigen Verschiedenheit der Stannioleindrücke wurde von Dr. O. Wolf in Frankfurt dadurch erbracht, dass er mittels eines Mikroscops die Gestalt der letzeren näher erforschte und geben wir nach einer Abhandlung[1]) Wolf's eine Darstellung verschiedenartiger Stannioleindrücke. Fig. 291 *a* zeigt die Eindrücke für den von einer Bassstimme gesprochenen Vokal *A*. Sprach eine Kinderstimme diesen Vokal aus, so waren die Eindrücke flacher und schmaler wie bei *b*). Wurde der Vokal *O* gesprochen, so erschienen die Eindrücke wie bei *c*). Der *S*-Laut lieferte Eindrücke wie bei *d*).

[1]) Zeitschrift für Ohrenheilkunde, Bd. VIII, pag. 12—17.



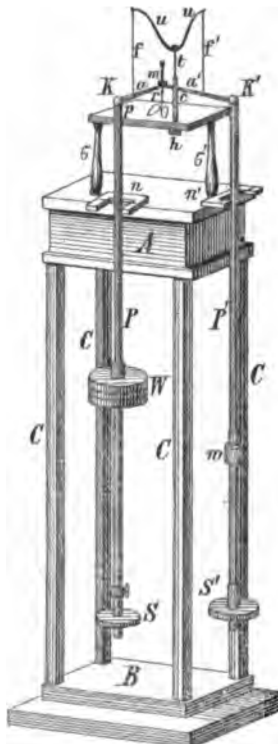
(Ph. 291.)

Beim *R*-Laut gerieth die Membran in eine sehr kräftige Vibrationsbewegung, so dass der Stift grosse und ziemlich tiefe, fast kreisrunde Eindrücke zeichnete, so wie bei *e*) zu sehen sind.

Man hat namentlich auch noch die Niveauverschiedenheiten, welche die Eindrücke im Stanniol zeigen, mittelst einer Fühlhebeleinrichtung in vergrössertem Maassstabe reproducirt, und geben wir ein Resultat einer solchen Fühlhebelreproduktion nach Alf. Mayer aus einer Abhandlung in der englischen Zeitschrift Nature[1]). Die Darstellung in *a*) (Fig. 292) zeigt die unmittelbar ins Stanniol gemachten Eindrücke. Lässt man diese unter einem Fühlhebel herlaufen und schreibt der letztere die Niveauverschiedenheiten in vergrössertem Maassstabe auf eine berusste Glasplatte auf, so erscheint der Wellenzug *b*). Zum Vergleiche hiermit giebt Mayer in *c*) auch noch das Flammenbild, wie es eine König'sche Membran lieferte, in welche derselbe Ton hineingesungen wurde. Man wird eine vollständige Aehnlichkeit des Wellenzuges *b*) und *c*) herausfinden können.



(Ph. 292.)



(Ph. 293.)

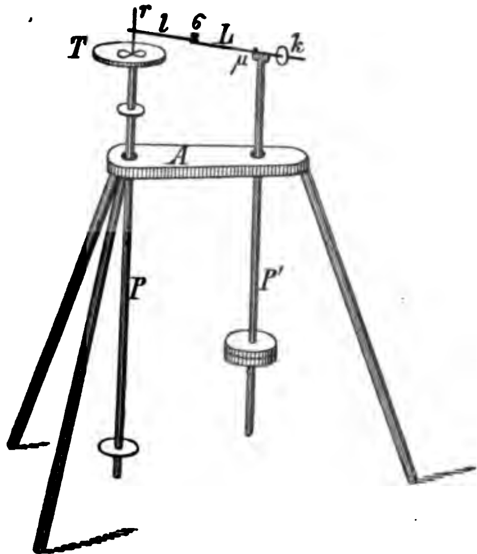
23) Wir wollen nun noch eine vibrographische Darstellung von Schwingungscurven durch eigenthümliche Pendelapparate kennen lernen. Man hat solche Apparate in der mannigfachsten Art construirt und werden wir uns hier auf die Betrachtung dreier Apparate beschränken. Zwei von ihnen wurden von Tisley construirt und führt der eine den Namen »Compound-Pendulum«, der andere den Namen »Harmonograph«. Fig. 293 stellt das Compound-Pendulum dar. Auf einer Basis *B* erheben sich vier Ständer *C*, welche oben einen Kasten *A* tragen, über dessen Deckel auf den Säulchen *σ* die Platte *p* ruht. Auf diese wird dann noch ein Karton oder eine berusste Glasplatte gelegt, auf welcher der Schreibstift *r* seine Aufschrift besorgen soll. Die Deckelplatte von *A* trägt ferner zwei festgemachte Brettchen *n* und *n'*, welche dazu dienen, auf Schneiden die beiden Pendel *P* und *P'* aufzuhängen. Denkt man

[1]) Nature, Vol. XVII, 1878, pag. 469—471.

sich jedes Pendel für sich in Bewegung, so ist die Schwingungsebene des einen Pendels rechtwinklig zu der des anderen gelegen. Jedes der Pendel trägt ferner ein oder zwei Scheiben S und S', welche sich an verschiedenen Stellen der Pendelstangen feststellen lassen und auf welche Scheiben Gewichte aufgelegt werden können, wie dies bei W zu sehen ist. Das kleinere ebenfalls verschiebbare Gewicht w am Pendel P' dient dazu, die Schwingungsdauer dieses Pendels reguliren zu können, um so ein bestimmtes Schwingungsverhältniss $m : n$ der beiden Pendel genauer zu erreichen. Die weitere interessante Einrichtung findet sich nun im oberen Theile des Apparates. Die oberen Enden der Pendel bilden Kugelgelenke K und K', in welchen zwei Arme a und a', die in m bei der Ruhelage der Pendel in einem rechten Winkel zusammenstossen, mit Leichtigkeit sich drehen. An der Vereinigungsstelle m dieser Arme ist ein Glasröhrchen r zu sehen, das unten mit einer capillaren Oeffnung mündet, aus welcher eine leicht flüssige, farbige Flüssigkeit austreten kann. Dieses Röhrchen r spielt demgemäss die Rolle eines Schreibstiftes. Um nun den richtigen Contakt von r mit der darunter liegenden Zeichenfläche zu ermöglichen, ist es nothwendig, dass der Schreibstift nicht nur während der Ruhe der Pendel, sondern auch während ihrer Schwingungen in der feinsten Weise auf und nieder verstellt werden kann. Dies wird erreicht dadurch, dass die Arme a und a' von je einem Faden f und f' getragen werden, welcher oben an einem gebogenen Mettallbügel uu befestigt ist. Der Bügel ist ferner an seiner Umbiegung an ein Stäbchen t befestigt, welches seinerseits sich in einer Röhre c verschieben lässt, und mittelst einer Vorschraube h in dieser Röhre gehoben und gesenkt werden kann.

Es leuchtet ein, dass dieser Apparat nur der Darstellung von eigentlichen LISSAJOUS'schen Schwingungscurven bei zwei unter einem rechten Winkel zusammenwirkenden Elementarschwingungen dienen kann.

Von dem »Harmonograph« TISLEY's giebt die Fig. 294 der Hauptsache nach eine Darstellung. Die beiden Pendel P und P' haben auf der Holzplatte A eine passende Aufhängung erfahren P trägt oben eine kleine Tischplatte, auf welcher der vom anderen Pendel P' bewegte Schreibstift r seine Aufzeichnungen macht. Das Pendel P' endet nämlich oben in einem kurzschenkligen Gabelstück mit einem Stab L, an dem wiederum durch die Schraube σ eine feinere Lamelle l befestigt werden kann. Diese Lamelle trägt endlich den Schreibstift r, der genau so wie beim Compound-Pendel eingerichtet sein kann. Ein Gegengewicht k äquilibrirt L nebst der Lamelle l und dem Schreibstifte r.

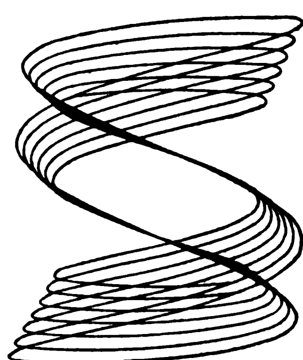


(Ph. 294.)

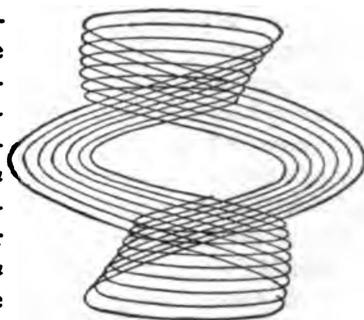
Man erkennt nun, dass mittelst dieses Apparates sehr complicirte Schwingungscurven zur Darstellung gelangen können. Denn es sind zunächst drei Schwingungszahlen, die in Beziehung treten können: nämlich die des Pendels P, die des Pendels P' mit dem oberen Aufsatz und die der Lamelle l für sich zugehörige Schwingungszahl. Das Pendel P' incl. der Lamelle l, welche

letztere eine horizontale Vibrationsbewegung ausführt, bildet schon ein Doppelpendel, das bei ruhendem Pendel *P* schon im Stande ist, auf der in Ruhe befindlichen Tischplatte *T* eine Schwingungscurve als Resultat zweier geradliniger Componenten, nämlich der Bewegung von *P'* und der von *l* zu liefern. Bewegt sich ausserdem nun auch noch das Pendel *P*, so schreibt *l* auf eine Schreibfläche *T*, die für sich eine Schwingungsbewegung vollführt, und es combiniren sich somit drei Elementarcomponenten.

Fig. 295 und Fig. 296 zeigen zwei Schwingungscurven, wie sie im Original durch den Harmonographen geliefert wurden und zwar die Fig. 295 für zwei rechtwinklige Componenten mit dem Schwingungsverhältniss $m:n = 3:1$. Fig. 296 gehört ebenfalls einer Schwingungscurve $m:n = 3:1$ an, aber eine der Componenten ist eine elliptische, so dass eigentlich doch drei Elementarcomponenten als zusammenwirkend anzunehmen sind.

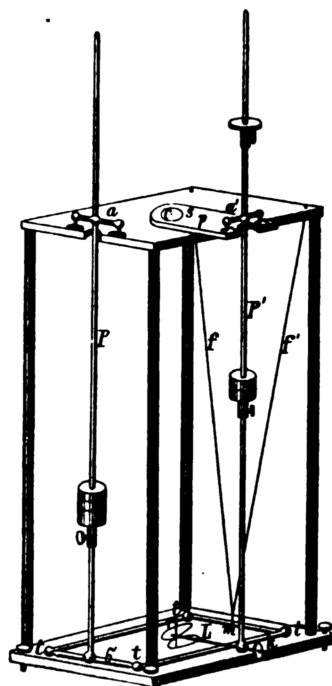


(Ph. 295.)



(Ph. 296.)

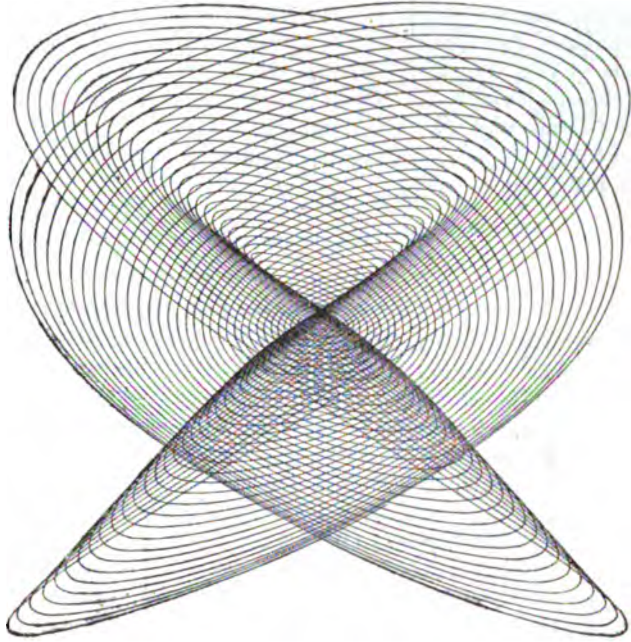
Verfolgt man eine der Curvenzeichnungen genauer, so erkennt man, wie sie zu Stande gekommen ist. Behielten die schwingenden Pendel und die Lamelle *l* genau ihre Anfangs ihnen gegebenen Elongationsweiten bei, so müsste eine Zeichnung zu Stande kommen, bei welcher die einzelnen hintereinander sich wiederholenden Schwingungscurven sich deckten, so aber, da die Elongationsweiten immer kleiner werden, müssen auch die Curvenzüge mehr und mehr auf einen kleineren Raum sich zusammenziehen, was man deutlich verfolgen kann, wenn man mit einer Spitze von einem Punkte des äussersten Curvenzuges aus den einzelnen Zügen nachgeht.



(Ph. 297.)

24) Mit einfacheren Hilfsmitteln hat P. SCHÖNEMANN einen Pendelapparat zur graphischen Darstellung der LISSAJOUS'schen Curven hergestellt, dem er den Namen »Kreuzpendel« beilegte und der als der dritte Apparat aufzufassen ist von denen, welche zum Schlusse hier noch der Betrachtung unterworfen werden sollten. Fig. 296 stellt den Apparat dar. Die beiden Pendel *P* und *P'* drehen sich um zwei Spitzen oder Schneiden, die an den Querarmen *a* und *a'* angebracht sind und auf je einem untergelegten Mettallplättchen aufsitzen. Das Pendel *P* trägt unten einen Querarm σ, der an den Enden auch in zwei Spitzen ausläuft, welche ihrerseits bei *t* in passende Vertiefungen der Seitenarme des Rahmens *tt*

eingreifen, so dass dieser Rahmen, wenn das Pendel *P* in Schwingung versetzt wird, auch eine Pendelbewegung ausführt. Dies wird aber weiter möglich dadurch, dass der σ gegenüberliegende Arm des Rahmens *tt* in seiner Mitte *m* an zweien Fäden *ff'* aufgehangen ist, wodurch erst eine regelmässige Parallelbewegung des ganzen Rahmens erzielt wird. Das Pendel *P'* ist nicht wie *P* unmittelbar auf der oberen Platte des ganzen Pendelgestelles aufgehangen, sondern zunächst auf eine Platte *p* aufgesetzt, welche sich um eine Axe *c* drehen und durch die Schraube *s* in verschiedenen Lagen feststellen lässt. Hierdurch wird bewirkt, dass die Schwingungsrichtung des Pendels *P'* gegenüber der von *P* auch unter einem schiefen Winkel eintreten kann. Das untere Ende von *P'* trägt wiederum einen beweglichen Arm *L*, der durch das Gegengewicht *k* so äquilibrirt werden kann, dass der Schreibstift *r* nur ganz leise über eine Glasplatte oder einen Karton, den man sich auf den Rahmen *tt* aufgelegt denken muss, hingleitet, um so auf diesem eine Schwingungscurve aufzuschreiben.



(Ph. 298.)

Man begreift, dass dieser Apparat vollkommen geradlinige Vibrationscomponenten liefert, indem keines der beiden Pendel das andere beeinflusst. Die mit Hilfe dieses Apparates erhaltenen Curven zeichnen sich durch ihre bedeutende Grösse aus und lassen an Präcision nichts zu wünschen übrig. Fig. 297 zeigt einen solchen Curvenzug etwa in $\frac{2}{3}$ natürlicher Grösse, wie er zunächst auf einer berussten Glasplatte markirt wurde und hernach photographisch vervielfältigt werden konnte. Man erkennt, dass die Schwingungscurve für das Schwingungsverhältniss $m:n = 3:2$ vorliegt. Melde.

Literatur.

Der Umstand, dass mir zu vorstehenden Artikeln etwa ein Raum von 8—10 Druckbogen bewilligt wurde, brachte es mit sich, dass ich mich nicht ins Einzelne verbreiten durfte, um auch nur annähernd den verschiedenen Forschern, welche hierbei berücksichtigt werden konnten, gerecht zu werden. Ich habe in Folge dessen nur diejenige Literatur theils im Text, theils, wie gewöhnlich, unten auf den Seiten angegeben, welche ich mit meiner Darstellung, so weit sie sich verbreiten durfte, direkt im Zusammenhang fand. Um jedoch auf einige weitere Arbeiten namentlich der neueren Zeit hinzuweisen, füge ich hier im Anhang zu den Artikeln noch andere Literaturangaben hinzu, doch bemerke ich ausdrücklich, dass ich auch hierbei mich sehr beschränken musste.

I. Bezüglich der **Wellenlehre** beschränke ich mich auf die Angabe einiger Literatur über Wellenapparate. Einige weitere Anzeigen stehen auch unter V.

1) MACH, Phoronomische Wellenmaschine. (CARLS Repertorium für Experimentalphysik 6, pag. 8). Ein Fundamentalapparat für die Wellenlehre. 2) WEINHOLD, Wellenmaschine. (Physikalische Demonstrationen, Leipzig, Quandt und Händel, pag. 197 u. f.) Ebenso. 3) CROVA, Description d'un appareil pour la projection mécanique des mouvements vibratoires (Annal. de chim. et phys. Ser. 4, T. XII, pag. 288—309). 4) HÖFLER, Schulapparat zur Demonstration d. Superposion d. Wellen (CARL, Rep. 14, pag. 527—535). 5) PFAUNDLER, Ein Wellenapparat zur Demonstration der Zusammensetzung von zwei und mehreren Tranversalwellen mit stetiger Aenderung des Gangunterschiedes. (Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht, Jahrg. 1 [1887 bis 1888], pag. 98—102.)

II. Transversalschwingungen der Körper.

a) Saiten, Fäden.

6) RAYLEIGH, On maintained vibration. (Phil. Mag. (5), Bd. 15, pag. 229—35.) 7) ELSAS, A., Ueb. erzwungene Schwingungen weicher Fäden. (Dissert. Elberfeld, bei Fassbender. 1881.) Ferner ELSAS, A., Zur Theorie d. erzwungenen Schwingungen gespannter Saiten. (WIEDEM. Ann. 23, pag. 161—173.) 8) MÜLLER, C., Ueber Resonanzschwingungen gespannter Saiten. (Progr. d. Fulder Gymnasiums 1884, pag. 32 u. f. 9) BRAUN, F., Einfluss der Steifigkeit, Befestigung und Amplitude auf die Schwingungen der Saiten. (POGG. Ann. 147, pag. 64—91.) 10) MERCADIER, Sur le mouvement d'un fil élastique dont une extremité est animée d'un mouvement vibratoire. (Compt. rend. 77, pag. 639—643, 671—675, 950—952, 1292—1296, 1366—1370.) 11) MELDE, Akustische Experimentaluntersuchungen. (WIED. Ann. 21, pag. 452—470; 21, pag. 497—522.) 12) v. HELMHOLTZ, Lehre von den Tonempfindungen, 4. Aufl. (Beilage III, IV, V, VI.) 13) PETZVAL, Ueber Schwingungen gespannter Saiten. Denkschr. d. math. naturw. Cl. d. Kaiserl. Ac. in Wien 17, pag. 91—136.) 14) POSTULA, H., Nouvelle Étude des Expériences de M. MELDE. (LIÈGE, Imprimerie de L. GOTHIER, 1879, pag. 35.) 15) NEUMANN, Beobachtungen über Schwingungen gestrichener Saiten. (Sitzb. d. K. Akad. d. Wissensch. II. Abthl., Januar-Heft 1870.) 16) OOSTING, Onderhouden Trillingen van gespannen Draden. (Helder, C. de Boer, Jr. 1889.)

b) Stäbe, Stimmgabeln.

17) LIPPIG, Ueb. d. transversal. Schwingungen belasteter Stäbe. (Denkschr. d. K. Ac. d. Wissensch. 21, 1862, pag. 1—44.) 18) ZÖPPRITZ, Theorie d. Querschwingungen schwer. Stäbe. (POGG. Ann. 128, pag. 139—156.) 19) WARBURG, Ueber tönende Systeme. (POGG. Ann. 136, pag. 89—102.) 20) STEFAN, Ueber die Transversalschwingungen eines elastischen Stabes. (Wien. Ber. 32, pag. 207—241.) 21) GUTHRIE, On certain vibrations of solids. (Phil. Mag. (5) 9, pag. 15—20.) 22) MÜLLER, C., Untersuchungen über die Tonhöhen der Transversalschwingungen poröser Gypsstäbe, wenn dieselben mit verschiedenen Flüssigkeiten getränkt sind. (POGG. Ann. 155, pag. 481—525.) 23) KÖNIG, Untersuchungen über die Schwingungen einer Normalstimmgabel. (WIEDEM. Ann. 9, pag. 396—417.) 24) LEAD, On the number of vibrations of tuning forks. (Nature 17, pag. 55.) 25) MELDE, Akustische Experimentaluntersuchungen 2. Reihe. (WIED. Ann. 24, pag. 514, woselbst insbesondere die sogen. »Röhrenstimmgabel« bekannt gemacht wird.) 26) KIRCHHOFF, Ueber die Transversalschwing. eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. (WIED. Ann. 9, pag. 501—513.) 27) VOGEL, Transversalschwingungen eines keilförmigen Stabes. (Dissert. Berlin, 1880.) 28) MEYER zur CAPELLEN, Mathem. Theorie der transversalen Schwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. (WIED. Ann. 33, pag. 661—678.)

c) Platten, Glocken.

29) RAYLEIGH, On the nodal lines of a square plate. (Phil. Mag. (4) 46, pag. 166—171, pag. 246—247). 30) MATHIEU, Mém. sur le mouvement vibrations des cloches. (Journ. de l'école polytechnique 1882, pag. 51 u. f.) 31) ELSAS, A., Untersuchungen über erzwungene Schwingungen von Platten. (WIED. Ann. 19, pag. 474—489.) 32) MERCADIER, Ueber die Schwingungsgesetze elastischer Scheiben. (Journ. de phys. (2) 4, pag. 541—550.) 33) MELDE, Akust. Experim.-Untersuch. 3. Reihe. (WIED. Ann. 30, pag. 161—184.)

d) Membranen.

34) Bourget, Influence de la resitance de l'air dans le mouvement des corps sonores. (Compt. rend. 72, pag. 560—566.) 35) Wintrich, Experimentalstudien über Resonanzbeweg. der Membranen. (Erlang. Sitzgsber. 1872/73, Heft 5, pag. 1—6.) 36) Melde, Transversale Schwingungen flüssiger Lamellen. (Pogg. Ann., Bd. 159, pag. 275—297.) 37) Müller, C., Untersuchungen über einseitig frei schwingende Membranen und deren Beziehung zum menschlichen Stimmorgan. Bedeutungsvolle Adhandlung auch in physiol. Beziehung. (Gekrönte Preisschrift d. Marburger naturf. Ges. XI vom Jahre 1877.) 38) Barthelemy, Etude théorétique et exper. sur les plaques et membrans de forme elliptique. (Mém. de l'Ac. d. Sciences de Toulouse (7) 9, 1877.) 39) Decharme, Formes vibratoires des billes de liquide glycerique. (Ann. de chim. et phys. (5) 18, pag. 398—432.) 40) Elsas, Untersuchungen über erzwungene Membranschwingungen. (Nar. Act. d. K. Leop.-Car. deutsch. Naturf. 45, pag. 33 u. f.) 41) Neurneuf, Recherches sur les membranses. (Ann. de chim. et phys. 1888, T. 12, pag. 271—288; T. 13, pag. 281—288.)

III. Longitudinalschwingungen.

42) Obermann, Theorie der Longitudinalschwingungen zusammengesetzter Stäbe. (Grun. Arch. 55, pag. 22—34.) 43) Chree, Longitudinalschwingungen eines Stabes von kreisförmig. Querschnitt. (Quarterly. Journ. 84, pag. 287—298.) 44) Terquem, Etude des vibrations longitudinales des verges prismatiques libres aux deux extrémités. (Ann. de chim. et phys. 57, pag. 129—190.) Sehr wichtige Abhdlg. 45) v. Helmholtz, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (Crelle's Journ. 57, pag. 1—72.) Grundlegende Arbeit. 46) Sondhaus, Ueber die chemische Harmonika. (Pogg. Ann. 109, pag. 1—43, 426—469.) 47) Cavaillé-Coll, Etudes exper. sur les tuyaux d'orgues de la Détermination des Dimensions des tuyaux en rapport avec intonations des mêmes tuyaus. (Compt. rend. 50, pap. 176—180.) 48) Wertheim, Rémarks au sujet d'une communication recent de M. Cavaillé-Coll sur les tuyaux d'orgues. (Compt. rend. 50, pag. 308—311.) 49) Le Roux, Détermination experimentale de la vitesse de propagation d'un ébranlement sonore dans un tuyau cylindrique. (Ann. d. chim. et phys. (4) 12, pag. 34—419.) 50) Kundt, Ueber die Schwingungen von Luftplatten. (Pogg. Ann. 137, pag. 456—470; ferner 150, pag. 177—197, 337—356.) 51) Boutet, Recherches expérim. sur les tuyaux sonores de forme conique. (Ann. d. chim. (4) 21, pag. 150—208.) 52) Gripon, De l'influence qu'exercent sur les vibr. d'une colonne d'air les corps sonores qui l'avoisinent. (Ann. d. chim. (5) 3, pag. 343—390.) 53) Sonreck, Die Schwingungserregung in offenen und gedeckten Pfeifen. (Pogg. Ann. 158, pag. 129—147 und 159, pag. 666—667.) 54) Ellis, Ueber dasselbe Thema. (Pogg. Ann. 159, pag. 176, 664—666.) 55) Bosanquet, On the Relation between the notes of open and stopped Pipes. (Phil. Mag. (5) 6, pag. 63—66.) 56) Blackley, Exper. for determining the Correction to be added to the length of a cylindrical resonant tube to find the true Wavelength an the velocity of sound im small tubes. (Phil. Mag. (5) 7, pag. 339—343.) 57) Kohlrausch, W., Das Verhalten von Membranen in tönenden Luftsäulen. (Wied. Ann. 8, pag. 583—590.) 58) Lang, V. v., Neue Beobachtungen an tönenden Luftsäulen. (Wied. Ann. 7, pag. 292—304.) 59) Bresina, Die Schwingungen der Luft in der chemischen Harmonika. (Progr. d. Gymn. zu Soest 1880/81.) 60) Rayleigh, Acoustical observat. (Phil. Mag. (5) 13, pag. 340—347.) 61) Ders., On the circulation af air observ. in Kundt's tubes and on some allied acoust. problems. (Proc. Rog. Soc. 36, pag. 10—11.) 62) Noack, Ueber Töne, die beim Zusammenwirken zweier Casflammen entstehen. (Progr. d. Gymn. zu Worms 1882.) 63) Neesen, Die Querrippungen bei den Kundt'schen Stäubfiguren. (Verhdlg. der phys. Ges. zu Berlin 1884, pag. 14; ferner Wied. Ann. 32, pag. 310—313.) 64) Kiessling, Demonstration der Tonbildung in Orgelpfeifen. (Zeitschr. z. Förd. d. phys. Unterrichts 1885, pag. 64—66.) 65) Dischka, Die Tonerregung der musikalischen Pfeifen. (Zeitschr. f. Realschulwesen 1882, pag. 273—284, 329—340.) 66) Gerhardt, Ueber die Rohrflöte, ein Pfeifenregister der Orgel. (Wied. Ann. 28, pag. 281—305.) 67) Brockmann, Beobachtungen an Orgelpfeifen. (Wied. Ann. 31, pag. 78—89.) 68) Brillouin, Sur les tuyaux sonores. (Journ. de phys. 1887, T. 6. pag. 205—222.) 69) Dvorack, Bemerkungen zu No. 60 der Literaturangaben. 70) Boutet, Experimentaluntersuchungen über die besten Mittel um reine und constante Töne in Pfeifen hervorzubringen, und insbesondere über den Einfluss

des Materials, der Form, des Durchmessers und der Dicke der Mundstücke. (Ann. d. chim. et phys. (6) 9, pag. 406—422.) 71) BAILLE, Ecoulement des gaz par un long tuyaus. (Journ. d. phys. 1889, T. 8, pag. 29—41.) 72) KÖNIG, W., Die Entstehung der KUNDT'schen Staubfiguren. (Ber. d. sächs. Ges. d. Wissensch. math. phys. Cl. 1890, pag. 46—54.) 73) SCHAUMBURG, Ueber KUNDT'sche Klangfiguren. (Dissert., Marburg 1890.)

IV. Zusammenklang der Töne.

74) v. HELMHOLTZ, Lehre von den Tonempfindungen. 1. Aufl. Grundlegendes Werk. 75) BRANDT, Ueber Verschiedenheit des Klanges. (POGG. Ann. 112, pag. 324—336.) 76) RADAU. Théorie des battement et des sons résultants. (Monit. scientif. 1865, pag. 425—431. 77) TERQUEM, Etude sur le timbre des sons produits par des chocs discontinus et en particulier cas par la sirène. (Ann. de l'Ecole norm. 7, pag. 269—365.) 78) v. ZAHN, Akustische Analyse d. Vocalklänge. (Progr. d. Thomasschule 1871, pag. 1—33.) 79) MAYER, A. M., Researches in Acoustics No. V. An experimental confirm. of FOURIER's Theor. . . . . (SILLIM. Am. Journ. (3) 8, pag. 81—109, 170—182.) 80) RESAL, L'énoncé de principe de la théorie du timbre est du à Monge. (Compt. rend. 79, pag. 821—823.) 81) v. QUANTEN, Ueber die HELMHOLTZ'sche Vocaltheorie. (POGG. Ann. 159, pag. 272 u. 522.) 82) AUERBACH, Zur Klangfarbe d. Vocale. (POGG. Ann. Ergzb. 8, pag. 177—225.) 83) TERQUEM und BOUSSINESQ, Die Stösse der musikalischen Töne. (Journ. de phys. 4, pag. 193; Mondes (2) 39, pag. 69—71. 84) BAUER. Die Summationstöne als Differenz und als Stosstöne aus den Obertönen d. Primärtöne. (WIED. Ann. 4, pag. 516—525.) 85) PREYER, Die Theorie d. musikalischen Resonanz u. Combinationstöne. (Sitzb. d. Jenaer Ges. f. Med. u. Naturk. 1878, pag. 1—5.) Ferner: Akustische Untersuchungen (Jena, G. Fischer 1879). Wichtige Abhandlung. 86) KÖNIG, R., Die Erregungen harmonischer Töne durch Schwingungen eines Grundtones. (WIED. Ann. 11, pag. 857—871.) 87) BELL, G., Vocaltheorien. (Amer. Journ. 1879, pag. 20.) 88) BOSANQUET, On the history of the theorie of the beats of mistured consonances. (Phil. Mag. 1881, 12, pag. 270—283.) 89) RITZ, Untersuchungen über die Zusammensetzung der Klänge der Streichinstrumente. (München, G. Franz, 1883, pag. 88.) 90) SCHÄFER, K. L., Ueber die Wahrnehmung und Lokalisation von Schwebungen und Differenztönen. (Zeitschr. f. Psych. u. Physiol. d. Sinnesorg. 1, pag. 81—98.)

V. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles.

91) MOUTIER, Sur la formule de la vitesse du son. (Compt. rend. 71, pag. 846—849. 92) DU MONDESIR, Dasselbe. (Mond. (2) 22, pag. 522—523.) 93) STONE, J. E., An experim. Determination of the velocity of sound. (Phil. Mag. 1872, 43, pag. 153—154; Phil. Trans. 157, pag. 1—6.) 94) TERQUEM, Sur un appareil destiné à demontrer la propagation du son dans les gaz. (Mem. de la soc. des Sciences de l' et des Arts 13, pag. 2—8.) 95) DVORAK, Ueber Schallgeschwindigkeit in Gasgemengen. (CARLS Rep. 10, pag. 66—67.) 96) BOLTZMANN, Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebenen Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. (SCHLÖMILCH's Z. S. 21, pag. 452.) 97) HOORWEG, Sur la propagation du son d'après la nouvelle théorie des gaz. (Arch. 11, pag. 131—177.) 98) ABT, Geschwindigkeit der Wellenbewegung in weichen Schnüren. (POGG. Ann. N. F. 2, pag. 424—429.) 99) MACH u. SOMMER, Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Explosionswellen. (Wien. Ber. (2) 75, pag. 101—131.) 100) MACH und TUMLIRZ und KÖGLER, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Funkenwellen. (Wien. Ber. 77, pag. 7—32.) 101) KORTEWEG, Ueber Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in elastischen Röhren. (WIED. Ann. 5, pag. 523—543.) 102) VIERORDT, Das Gesetz der Schwäch. des Schalles bei seiner Fortpflanzung durch die Luft. (Z. S. f. Biologie 17, pag. 361—367; 18, pag. 383.) 103) RAYLEIGH, On an Instrument capable of measuring the intensity of aerial vibrations. (Phil. Mag. (5) 14, pag. 186—187.) 104) WUNDT, Ueber Schallstärkemessung. (WIED. Ann. 18, pag. 695—703.) 105) KINDEL, Elementariche Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler und tranversaler Wellen. (Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 1, pag. 57—63.) 106) MARTINI, Ueber die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten. (Ati del R. Inst. Ven. (6) 6. pag. 87; preisgekrönt.) 107) LEBERT, Sur le mode de propagation du son de détonations . . . . . (Séances de la Société française de physique 188, pag. 35—61.) 108) KURZ, Der Elasticitätsmodulus und die Schallgesehwindigkeit. (Repert. d. Phys. 24; pag. 592—599.) 109) JÄGER, Die Schallgeschwindigkeit in Dämpfen u. Best. d. Dampfdichte.

(WIED. Ann. 36, pag. 146—165.) 110) MACH, Die Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss nach von dem KRUPP'schen Etablissement angestellten Versuchen. (Ber. d. Wien. Ac. 98, pag. 1257—1276.)

VI. Vibroscopie und Vibrographie.

111) SCOTT, Phonautographe et fixation graphique de la voix. (Cosmos 14, pag. 314—320.) 112) LIPPICH, Studien über den Phonautographen von SCOTT. (Wien. Ber. 50, pag. 394—417.) 113) KUNDT, Ueber die Erzeugung von Klangfiguren in Orgelpfeifen . . . . (POGG. Ann. 128, pag. 337—355, 496.) 114) Ders., Beobachtung der Schwingungsform tönender Platten durch Spiegelung. (POGG. Ann. 128, pag. 610—613.) 115) WEINHOLD, Herstellg. sensitiver Flammen. (POGG. Ann. 136, pag. 333—336.) 116) TÖPLER und BOLTZMANN, Ueber eine neue optische Methode, d. Schwingungen d. Luft zu analysiren. (POGG. Ann. 241, pag. 321—352.) 117) KÖNIG, Die manometrischen Flammen. (POGG. Ann. 146, pag. 161—199.) 118) RIGHI, Sulla composizione dei mati vibratori. (Cim. (2) 9, pag. 160—200; 10, pag. 19—37, 125—137.) 119) BRAUN, Die Singularitäten der LISSAJOUS'schen Stimmgabel-Curven. (Dissert. Erlangen 1875, pag. 42.) 120) EDISON, The Phonograph and its future. (Mondes (2) 46, pag. 313—316.) 121) HAGEN, Ueber die Verwendung des Pendels zur graphischen Darstellung der Stimmgabelcurven. (Z. S. für Math. u. Phys. 24, pag. 285—305.) 122) BOLTZMANN, Photographie von Schallwellen. (Wien. Anzeig. 1882, pag. 242—243.) 123) HIMSTEDT, Ueber LISSAJOUS'sche Curven. (Grun. Arch. 1883, pag. 337—369.) 124) EKAMA, Die LISSAJOUS'schen Curven. (Grun. Arch. (2) 6, pag. 39—68.) 125) MAREY, E. J., La Méthode graphique dans les scienes expérimentales et principalement en physiologie et en Medicine. (Paris, G. Masson, 1885.) Ein hervorragendes Werk, das auch für den Physiker von hoher Bedeutung ist.

MELDE.

Druckfehlerverzeichniss.

pag. 24 Zeile 3 von unten lies »revocata« statt »revocala«.

„ 28 „ 12 „ oben „ »[*l*]« statt »[*i*]«.

„ 30 „ 3 „ „ „ »r^3« „ »r«.

„ 30 „ 8 „ „ „ »$8 \cdot m^3 \cdot l^{-2}$« statt »$8 \cdot m^3 t^{-2}$«.

„ 42 „ 28 „ „ ist hinter der Gleichung »bestimmt« hinzuzufügen.

„ 43 „ 2 „ unten lies »Angriffsorte« statt »Angriffsworte«.

„ 45 „ 11 „ „ „ »OS« statt »OP«.

„ 47 „ 1 „ oben „ »OS« statt »CD«.

„ 57 Ueberschrift lies »Körpern« statt »Köpern«.

„ 61 erste Formel lies »es'« statt »es«.

„ 94 Anm. 1 Zeile 5 lies »Traité« statt »Fr«.

„ 100 ist in der Figur die gestrichelte Linie an die obere Figur direkt anzulegen.

„ 107 Zeile 8 von unten lies »ausser« statt »aus«.

„ 167 ist die Figur umzukehren.

„ 202 ist hinter Zeile 15 von unten einzufügen $G_{45} = 9{\cdot}8062$.

„ 210 in Anm. 1 hinzuzufügen: »DELLINGHAUSEN, Das Räthsel der Gravitation 1880«.

„ 236 ist hinter 13. einzufügen »$n = \frac{E}{2K} - 1$«.

„ 239 sind in der ersten Tabelle die folgenden Zahlen zu ändern:

Zink,	gezogen	$G = 10$	$V = 0{\cdot}0011$,
Gold,	„	$G = 14$	$V = 0{\cdot}0018$,
Silber,	„	$G = 11$	$V = 0{\cdot}0015$.

pag. 291 Zeile 18 von oben lies »jedes« statt »jeder«.

„ 291 „ 26 „ „ „ im Nenner $m_1 + m_2$.

„ 296 „ 9 „ unten „ »Xx« statt »X_x«.

„ 298 „ 8 „ „ „ »unterbrochenen« statt »gebrochenen«.

„ 299 „ 24 „ oben „ »(Gleichungen 3a und vorhergehende)« statt »(Gleichung 3a)«.

„ 299 „ 3 „ unten rechts lies »kleineren« statt »grösseren«.

„ 312 „ 14 „ „ lies »bei Hölzern T förmig« statt »bei Hölzern | förmig«.

„ 340 „ 9 „ oben „ »welchen« statt »welche«.

„ 396 „ 1 „ unten „ »RAYLEIGH« statt »RAYLEIG«.

„ 404 „ 17 „ „ „ »v^2« statt »v_2«.

„ 454 „ 3 „ oben „ »YOUNG« statt »JOUNG«.

„ 454 „ 2 „ unten „ „ „ „

„ 519 in der Formel von DEPREZ lies $\frac{p_1(V_1 - C)}{p_0(V_0 - C)}$ statt $\frac{p_1(V_1 + C)}{p_0(V_0 + C)}$.

„ 556 hat in der Figur das unterste Verbindungsstück beim Copiren feste Wandung erhalten, während es einen Schlauch darstellen soll.

„ 581 Zeile 12 von oben lies »als für Wasser« statt »als Wasser«.

„ 585 „ 9 „ „ ist hinter Erörterungen das Zeichen) zu setzen.

„ 593 „ 15 „ „ lies »Aethyläther $\eta = 0{\cdot}00256$« statt »0·90256«.

„ 594 „ 6 „ unten „ »Gastheorie« statt »Gastherie«.

„ 605 „ 16 „ „ ist das Komma nach »so« zu streichen.

„ 606 „ 4 „ oben „ „ „ „ »aus« zu streichen.

„ 619 „ 11 „ „ lies »TAMMANN« statt »TAMANN«.

„ 693 „ 3 „ „ „ $\frac{\varphi_1}{m} \cdot x$ statt $\frac{\varphi_1}{m}$.

„ 715 „ 6 „ „ „ »symmetrisch« statt »systematisch«.

„ 757 „ 4 „ unten „ »gedacht« statt »gedaht«.

„ 767 sind die Zeilen 2 und 3 von oben mit einander zu vertauschen.

„ 791 Zeile 16 von unten lies zwei Mal »fernere« statt »feinere«.

„ 794 „ 4 „ „ „ »GASSENDI« statt »GASENDI«.

„ 796 „ 2 und 8 von unten lies »$(x - dx)$« statt »$(x - dt)$«.

„ 797 „ 20 von oben ebenso.

„ 815 „ 26 „ „ lies »VAN BECK« statt »von BOCK«.

Sachregister für Band I.

(Die Zahlen geben die Seiten an.)

Namenregister.

